УДК 517.9

Гармонические потенциалы на некомпактных римановых многообразиях[1]

А. Г. Лосев (Волгоград, Россия)
alexander.losev@volsu.ru

Данная работа посвящена развитию емкостной техники, связанной с понятиям массивного множества, в исследовании асимптотического поведения гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях. В том числе, построена компактификация римановых многообразий, обеспечивающая точное описание пространств гармонических функций.

Ключевые слова: массивные множества, гармонические функции, краевые задачи.

Harmonic potentials on non-compact Riemannian manifolds[1]

A. G. Losev (Volgograd, Russia)
alexander.losev@volsu.ru

This article is devoted to the development of capacitive techniques associated with the concepts of a massive set in the study of the asymptotic behavior of harmonic functions on non-compact Riemannian manifolds. In particular, a compactification of Riemannian manifolds was constructed, which provides an exact description of the spaces of harmonic functions.

Keywords: massive sets, harmonic functions, boundary problems.

Введение

Изучение эллиптических уравнений на римановых многообразиях является достаточно новым направлением в современной математике. Истоки указанной проблематики восходят, в том числе, к классификационной теории двумерных некомпактных римановых многообразий и поверхностей. Отличительным свойством многообразий параболического типа является выполнение для них теоремы Лиувилля, утверждающей, что всякая положительная супергармоническая функция на данном многообразии является тождественной постоянной.

Ряд работ был посвящен исследованию решений эллиптических уравнений на римановых многообразиях с конечным числом концов. В подавляющем большинстве работ разделяют концы параболического и гиперболического типа. Заметим, что гиперболичность типа конца E эквивалентна существованию нетривиальной гармонической функции v на E

такой, что $0 \le v < 1$ и $v|_{\partial E} = 0$. Такую функцию v принято называть емкостным потенциалом E.

Большая часть исследований, проводившихся в данном направлении, посвящены получению оценок размерностей пространств решений эллиптических уравнений в терминах количества концов параболического и гиперболического типа или других емкостных характеристиках.

Однако ограничение на структуру многообразий с концами является достаточно жестким. Развивая емкостный подход, А. А. Григорьян ввел понятие массивного (D - массивного) множества [1]. С помощью данного понятия была получена оценка размерности пространств ограниченных гармонических функций (с конечным интегралом энергии). Позже с помощью понятия q - массивных множеств в работах [2] и [3] была получена оценка размерности пространств ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера. Применяемый подход позволил определить точные условия существования нетривиальных ограниченных решений полулинейных уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях [4].

Массивные множества и емкостные потенциалы

Важную роль в дальнейших исследованиях будет иметь понятие *массивного* множества.

Пусть $\Omega \subset M$ – открытое множество. Будем говорить, что неотрицательная функция v является допустимой субгармонической функцией для Ω, если она является ограниченной субгармонической функцией на M такой, что $v = 0$ на $M \setminus \Omega$ и $\sup_\Omega v > 0$. Открытое множество Ω называется *массивным* если существует как минимум одна допустимая субгармоническая функция для Ω.

Перейдем к исследованию связи структуры массивных множеств и поведением гармонических функций на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Будем считать, что M – полное некомпактное риманово многообразие с пустым краем. Обозначим через $HB(M)$ – пространство ограниченных гармонических на M функций.

Обозначим h_k решение следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta v_k(x) = 0, x \in B_k \\ h_k|_{\partial B_k \bigcap \Omega} = 1 \\ h_k|_{\partial B_k \bigcap \{M \setminus \Omega\}} = 0 \end{cases},$$

и

$$h_\Omega = \lim_{k \to \infty} h_k.$$

Заметим. что если $\Omega = M$, то $h_M = 1$, если Ω – массивное множество, то $h_\Omega = 0$, а если Ω – немассивное множество, то $h_\Omega \neq 0$.

Функцию h_Ω будем называть базовым гармоническим потенциалом, порожденным областью Ω. Обозначим линейную оболочку множества гармонических потенциалов на M как $HG(M)$. Введем на $HG(M)$ стандартную норму пространства непрерывных функций. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Подпространство $HG(M)$ является плотным в $HB(M)$.*

Используя свойства гармонических потенциалов было доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пространство $HB(M)$, снабженное частичным порядком $\leq$ является банаховой решеткой с сильной единицей.*

Доказанное утверждение позволяет применять теорему Крейнов-Какутани. Сформулируем ее.

Теорема 3. *Всякая банахова решетка линейно изометрична и порядково изоморфна пространству $C(Q)$ для подходящего компакта Q (причем такой компакт Q является единственным с точностью до гомеоморфизма).*

Однако, в общем случае, компакт, соответствующий теореме Крейнов-Какутани оказывается слишком неявным и геометрические аспекты риманова многообразия в нем практически не просматриваются. При этом сами массивные множества, а точнее, гармонические потенциалы, порожденные ими, достаточно точно описывают пространство ограниченных гармонических функций на M.

Дальнейшая часть работы посвящена построению подобного компакта на основе массивных множеств и соответствующих гармонических потенциалов.

Пусть v_1 и v_2 – базовые гармонические потенциалы, порожденные, соответственно, множествами Ω_1 и Ω_2. Будем говорить, что $\Omega_1 \sim \Omega_2$, если $v_1 = v_2$ на M.

Данное отношение эквивалентности разбивает все массивные множества на классы эквивалентности. Всюду далее класс эквивалентности, содержащий множество Ω будем также обозначать Ω.

Будем писать $\Omega_1 \succeq \Omega_2$, если $v_1 \geq v_2$, где v_1 и v_2, как и выше, базовые гармонические потенциалы, порожденные Ω_1 и Ω_2.

Далее рассмотрим последовательности открытых множеств

$$S\Omega^\alpha = (\Omega_1^\alpha, \Omega_2^\alpha, \cdots, \Omega_m^\alpha, \cdots)$$

таких, что

$$\Omega_1^\alpha \succeq \Omega_2^\alpha \succeq \cdots \succeq \Omega_m^\alpha \cdots .$$

Будем говорить, что $S\Omega^1$ и $S\Omega^2$ эквивалентны и писать $S\Omega^1 \sim S\Omega^2$, если для всех достаточно больших номеров i найдутся такие j и k, что выполнено

$$\Omega_j^2 \succeq \Omega_i^1 \succeq \Omega_{j+k}^2,$$

и для всех достаточно больших j найдутся такие i и l что выполнено

$$\Omega_i^1 \succeq \Omega_j^2 \succeq \Omega_{i+l}^1.$$

Будем говорить, что последовательность $S\Omega^\alpha$ обладает свойством неделимости, если не существует последовательности массивных множеств $S\Omega^\beta$ такой, что для всех i выполнено $\Omega_i^\alpha \succeq \Omega_i^\beta$ и $S_\Omega^\alpha \not\sim S_\Omega^\beta$.

Множество всех последовательностей $\{S\Omega^\alpha\}$, обладающих свойством неделимости, будем обозначать Q, а его элементы называть точками Q.

Введем топологию на Q. Обозначим $OsM = \{\Omega^a\}$ – множество всех открытых подмножеств M. Пусть $\Omega \in OsM$. Множество точек $S\Omega^\alpha \in Q$ таких, что для некоторых $j(\alpha)$ выполнено

$$\Omega \succeq \Omega_{j(\alpha)}^\alpha$$

будем называть окрестностью и обозначать $O\Omega$.

Теорема 4. *Множество Q – топологический компакт.*

Установлена связь между пространством непрерывных на компакте Q функций и пространством ограниченных гармонических на M функций. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Существует взаимно однозначное отображение из $C(Q)$ в $HB(M)$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Григорьян А .А.* О размерности пространств гармонических функций // Мат. заметки. 1990. Т. 48. № 5. С. 55–60.

[2] *Григорьян А. А., Лосев А. Г.* О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях // Математическая физика и компьютерное моделирование. 2017. Т. 20. № 3. С. 34–42.

[3] *Losev A. G., Filatov V. V.* Dimensions of Solution Spaces of the Schrodinger Equation with Finite Dirichlet Integral on Non-compact Riemannian Manifolds // Lobachevskii J. Math. 2019. V. 40. pp. 1363–1370.

[4] *Losev A. G., Filatov V. V.* On Capacitary Characteristics of Noncompact Riemannian Manifolds // Russian Mathematics. 2021. V. 65. № 3. pp. 61-67.