ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 11

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

Цель работы: изучение движения двух слабо связанных физических маятников, измерение нормальных частот и периода биений маятников.

Принадлежности: установка, секундомер, набор пружин.

Краткая теория

Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух идентичных физических маятников, точки подвеса которых расположены на одной горизонталной прямой (рис. 1). Точки этих маятников, отстоящие на расстоянии h от точек подвеса, соединены между собой пружиной, которая находится в нерастянутом состоянии, когда маятники занимают вертикальное положение. Конфигурация описанной системы, очевидно, определяется заданием двух координат: φ_1 и φ_2 — углов отклонения маятников от устойчивого положения равновесия, соответствующего $\varphi_1=\varphi_2=0$, и, следовательно, рассматриваемая система обладает двумя степенями свободы.

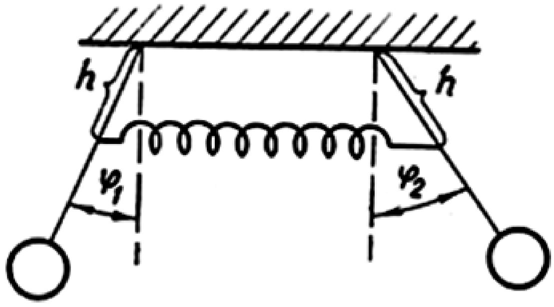

Рис. 1

Каждую систему с двумя степенями свободы можно рассматривать как возникшую в результате связи двух систем, из которых каждая имеет одну степень свободы. Парциальные системы получаются из данной системы с двумя степенями свободы при «закреплении» одной из координат (наложение связи, обеспечивающее $\varphi_1=0$), то есть при закреплении того или другого маятника в положении равновесия. Полагая $\varphi_2=0$ (случай а) или $\varphi_1=0$ (случай в) (закрепляя один из маятников), получаем парциальные системы (рис. 2).

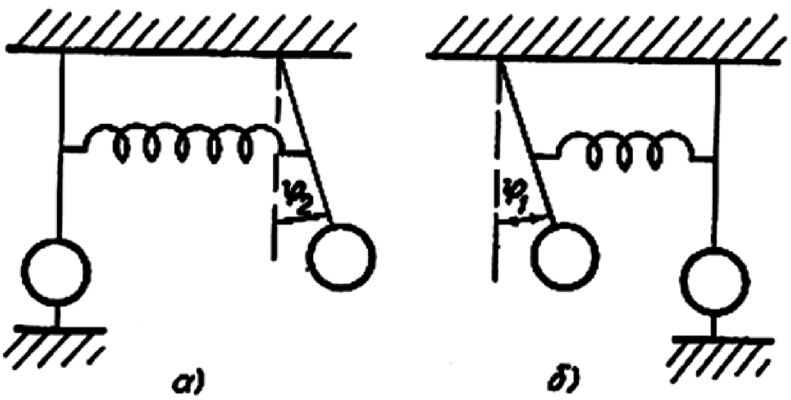

Рис. 2

Определим частоты колебаний парциальных систем, которые, очевидно, будут одинаковыми. На маятник действуют момент силы тяжести и момент упругой силы пружины. Полагая, что колебания маятников малы ($|\sin\varphi_i| \ll 1$), найдем удлинение пружины Δx:

$$\Delta x = h\sin\varphi \simeq h\varphi.$$

Поэтому уравнение динамики для парциальной системы запишется в виде

$$I\varphi = -B^*\varphi - kh^2\varphi = -\varphi(B^* + kh^2)$$

или представится в форме

$$\varphi + n^2\varphi = 0, \qquad (1)$$

где k — жесткость пружины, B^* — произведение веса маятника на расстояние от центра масс до оси, $kh^2 = \lambda$ — коэффициент связи, пропорциональный упругости пружины, I — момент инерции маятника относительно точки подвеса, $n^2 = \dfrac{B^* + \lambda}{I}$.

Решением уравнения (1) является гармоническая функция $\varphi = \varphi_0 \sin nt$, где n — собственная частота колебаний парциальной системы (парциальная частота).

Установим характер движения связанных маятников. В данном случае при малых углах φ_1 и φ_2 удлинение пружины есть $\Delta x \simeq h(\varphi_2 - \varphi_1)$. Вычисляя моменты всех внешних сил, приложенных к каждому маятнику, найдем уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 + n^2\varphi_1 - \frac{\lambda}{I}\varphi_2 = 0, \\ \varphi_2 + n^2\varphi_2 - \frac{\lambda}{I}\varphi_1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Складывая эти уравнения и вычитая одно уравнение из другого, получим два независимых уравнения:

$$\left.\begin{aligned} Y + \left(n^2 + \frac{\lambda}{I}\right)Y = 0, \\ X + \left(n^2 - \frac{\lambda}{I}\right)X = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

где $X = \varphi_1 + \varphi_2$, а $Y = \varphi_1 - \varphi_2$.
Решение уравнений (3) хорошо известно:

$$Y = A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1),$$
$$X = B_1 \cos(\omega_2 t + \alpha_2),$$

где $\omega_1^2 = n^2 + \frac{\lambda}{I}$, $\omega_2^2 = n^2 - \frac{\lambda}{I}$.

Знание X и Y позволяет определить φ_1 и φ_2, то есть найти общее решение уравнения (2):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 = A\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B\cos(\omega_2 t + \alpha_2), \\ \varphi_2 = -A\cos(\omega_1 t + \alpha_1) + B\cos(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Здесь $A = \frac{A_1}{2}$, $B = \frac{B_1}{2}$.

Смысл этого решения такой: если вывести систему с двумя степенями свободы из состояния равновесия ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$), то каждая координата выразится как функция времени в виде суммы двух синусоидальных (или нормальных) колебаний. Частоты $\omega_1 = \left(n^2 + \frac{\lambda}{I}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\omega_2 = \left(n^2 - \frac{\lambda}{I}\right)^{\frac{1}{2}}$ (нормальные частоты) определяются только параметрами системы, а A, B, α_1, α_2 определяются из начальных условий.

При специальном выборе начальных условий мы можем заставить обе массы совершать гармонические колебания с одной из двух нормальных частот. Пусть, например, начальные условия таковы: $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Тогда $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $A = 0$ и потому

$$\varphi_1=\varphi_0\cos\omega_2 t,$$
$$\varphi_2=\varphi_0\cos\omega_2 t.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае имеют место гармонические колебания двух идентичных маятников с частотой $\omega_2<n$ (рис. 3). Если начальные условия несколько видоизменить ($\varphi_1=-\varphi_2=\varphi_0$, $\varphi_1=\varphi_2=0$), то

$$\varphi_1=\varphi_0\cos\omega_1 t,$$
$$\varphi_2=-\varphi_0\cos\omega_1 t.$$

И в этом случае маятники колеблются с нормальной частотой $\omega_1>n$ (рис. 4).

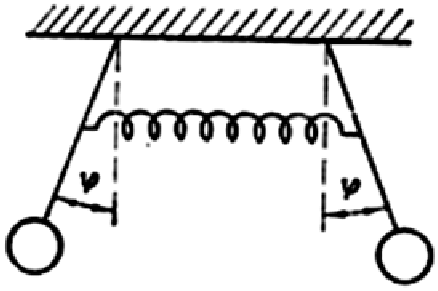

Рис. 3

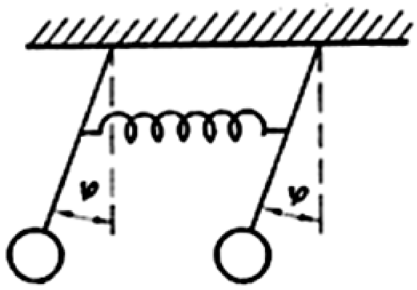

Рис. 4

Интересно рассмотреть колебания маятников при начальных условиях вида

$$\varphi_1=\varphi_0,\quad \varphi_2=0,\quad \varphi_1=\varphi_2=0.$$

При этом $\alpha_1=\alpha_2=0$, а первые два условия определяют уравнения

$$A+B=\varphi_0,\quad -A+B=0,$$

откуда $A=B=\frac{\varphi_0}{2}$

и потому

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1&=\frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)=\varphi_0\cos\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cdot\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t,\\ \varphi_2&=\frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega_1 t-\cos\omega_2 t)=\varphi_0\sin\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cdot\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t.\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Рассмотрим случай слабой связи маятников ($k\ll 1$), так что $\omega_1\simeq\omega_2$. Тогда $\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\ll\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ и колебания имеют характер биений. На рис. 5а, б показана зависимость от времени φ_1 и φ_2. Период биений $T=\dfrac{2\pi}{\omega_1-\omega_2}$.

Уравнения (5) дают ответ на вопрос о том, как передается энергия от первого маятника ко второму, если вначале возбужден первый маятник. Переменная медленно меняющаяся амплитуда φ_2 достигнет максимального значения тогда, когда множитель $\sin\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}\cdot t$ равен единице, при этом $\varphi_{2max}=\varphi_0$, то есть максимальное отклонение второго маятника равно начальному отклонению. Это означает, что вся энергия передается через некоторое время второму маятнику. Время перекачки энергии равно полупериоду биений.

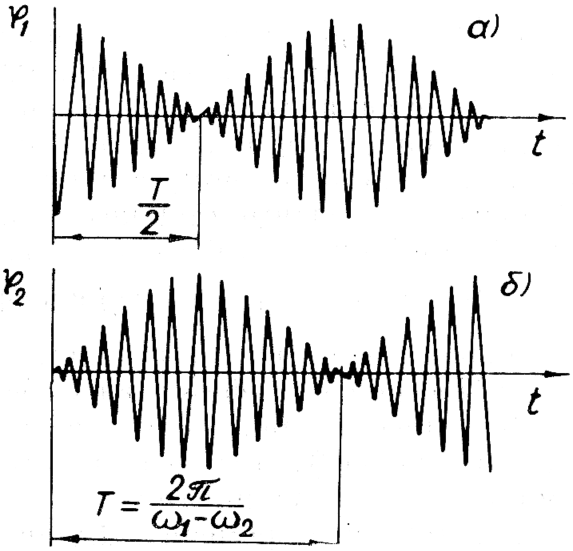

Рис. 5

Описание установки

Установка состоит из двух идентичных физических маятников, представляющих собой стержни, вдоль которых может перемещаться груз. Маятники в верхней части имеют призму. Призма устанавливается на два горизонтальных стержня. Маятники соединены пружиной, которая может перемещаться в вертикальной плоскости.

Порядок выполнения работы

1. Соединить маятники пружиной вблизи точек подвеса на одинаковых расстояниях h (рис. 1).

2. Отвести маятники от положения равновесия **в одну сторону** на 3—5 см и измерить время t_1, в течение которого связанные маятники совершат N_1 полных колебаний ($N_1=30\div50$).

3. Рассчитать период $T_1=\dfrac{t_1}{N_1}$ и частоту $\omega_1=\dfrac{2\pi}{T_1}$

симметричных нормальных колебаний связанных маятников.

4. Операции, указанные в п.п. 2—3, провести для других значений параметра связи h.

5. Результаты прямых измерений и расчетов свести в табл. 1:

Таблица 1

Номер опыта	h, см	t_1, с	N_1	T_1, с	ω_1, $с^{-1}$	t_2, с	N_2	T_2, с	ω_2, $с^{-1}$	T, с

6. По данным табл. 1 построить график зависимости периода колебаний T_1 от значения параметра h.

7. Операции, указанные в п.п. 1—6, провести для антисимметричных нормальных колебаний связанных маятников, когда в начальный момент маятники отводят от положения равновесия в **разные стороны,** и определить значение величин T_2 и ω_2 для различных значений h.

8. Вычислить период биений по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ для различных значений h и результаты занести в табл. 1.

9. Построить график зависимости периода биений T от h.

10. Отвести один из связанных маятников от положения равновесия на 3—5 см и измерить время, в течение которого амплитуда колебаний этого маятника станет равной нулю. Если в течение времени t амплитуда N раз обращалась в нуль, то период биений определится по формуле $T = \frac{t}{N}$.

11. Измерения, указанные в п. 10, повторить для других значений параметра h.

12. Результаты измерений и вычислений занести в табл. 2:

Таблица 2

Номер опыта	h, см	t, с	N	T, с

13. По данным табл. 2 построить график зависимости $T=f(h)$.

14. Сравните графики зависимости периода биений от

параметра h, полученные непосредственно из эксперимента с использованием формулы (6).

Указание по технике безопасности

Во избежание падения груза необходимо поддержать его при перемещении вдоль стержня маятника и тщательно закрепить груз.

Контрольные вопросы

1. Какая колебательная система называется системой с двумя степенями свободы?
2. Приведите уравнения движения двух связанных маятников и охарактеризуйте их решения.
3. Что называется парциальными и нормальными частотами связанных систем?
4. При каких условиях возникает явление биения маятников и чем определяется частота биений?
5. При каких условииях маятники совершают гармонические колебания?

Литература

1. *Матвеев А. Н.* Механика и теория относительности. М., Высшая школа, 1976, § 62.
2. *Стрелков С. П.* Механика. М., Наука, 1975, § 133—134.
3. *Хайкин С. Э.* Физические основы механики. М., Наука, 1971, § 144—145.
4. Мандельштам Л. И. Лекции по колебаниям. Полн. собр. тр. М., 1955, т. 4.