ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 10

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПРУЖИННОГО МАЯТНИКА

Цель работы: изучение гармонических колебаний, измерение коэффициента жесткости пружины и логарифмического декремента затухания пружинного маятника.

Принадлежности: установка, набор пружин, набор гирь, секундомер.

Краткая теория и описание установки

Основной общей чертой всех колебательных движений является то, что эти движения многократно повторяются или приблизительно повторяются через определенные промежутки времени. Частным случаем таких движений являются периодические колебания, которые описываются периодической функцией $f(t)$, обладающей тем свойством, что $f(t)=f(t+T)$, где T является периодом функции или периодом колебаний.

Среди периодических процессов основную и важную роль играют гармонические колебания.

Существуют два определения гармонических колебаний:

а) колебательный процесс, при котором отклонение колеблющейся величины происходит по закону синуса или косинуса,

$$x=A\sin(\omega t+\varphi) \quad \text{или} \quad x=A\cos(\omega t+\varphi);$$

б) колебательный процесс, для которого возвращающая сила F прямо пропорциональна отклонению x тела от положения равновесия, то есть движение происходит под действием упругой силы

$$F=-kx.$$

Оба эти определения верны. Первое дает пространственно-временное (кинематическое) описание колебаний, второе— причинное (динамическое).) Надо отметить, что определения не эквивалентны, и первое более предпочтительно, чем второе, так как оно более полно. Кинематическое определение дает начальные условия колебаний (скорость и положение тела), которые могут быть различны при одинаковых возвращающих силах.

Колебательные движения встречаются во всех областях физики: в механике, в акустике, в оптике, в электромагнетизме. Но все эти разнообразные процессы описываются единым образом. Колебания различных величин при определенных условиях могут рассматриваться в различных областях физики как гармонические колебания, происходящие по закону

$$x=A\sin(\omega t+\varphi).$$

При изучении колебательных явлений нас интересуют не параметры, определяющие состояние системы в данный момент времени (координаты точки, скорость ее и ускорение), а признаки повторяемости движений (закон, по которому происходит движение, время, через которое система возвращается к исходному состоянию, наибольшее отклонение точки от положения равновесия).

Рассмотрим теперь собственные колебания сосредоточенной системы — системы, параметры которой пространственно ограничены. Будем считать, что такая система обладает одной степенью свободы: движение ее может быть определено одним дифференциальным уравнением второго порядка.

Проанализируем колебания пружинного маятника — груза массы m, подвешенного на упругой пружине (рис. 1). Колебания происходят под действием упругих сил пружины. Сначала рассмотрим этот процесс в отсутствии сил трения. При отклонении от положения равновесия грузик будет совершать гармонические колебания, если справедлив закон Гука, согласно которому сила деформации пропорциональна удлинению $\Delta L: F=k\Delta L$, где k — коэффициент жесткости, характеризующий изменение упругой силы пружины при ее растяжении.

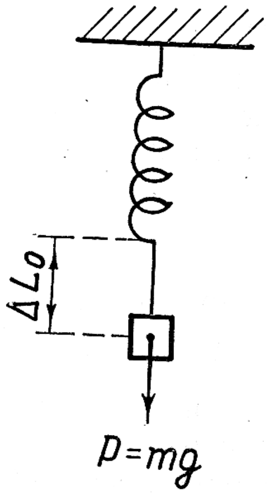

Рис. 1

Статическое растяжение пружины под воздействием силы $P=mg$ равно ΔL_0. Положение незакреплённого конца пружины в отсутствии действия сил примем за начало координат. Отклонение груза от этого положения обозначим через x, положительным будем его считать при отклонении вниз.

Движение груза после вывода его из положения равновесия будет происходить под действием двух сил: силы тяжести и силы упругости пружины. Уравнение движения запишется в виде

$$m\ddot{x}=-kx+P. \qquad (1)$$

Чтобы привести это уравнение к обычному виду, введем новую систему координат, начало которой совпадает с положением равновесия пружины $x_0=\frac{P}{k}$, тогда координата $z=x-\frac{P}{k}$ и уравнение примет вид

$$m\ddot{z}=-kz$$

или

$$\ddot{z}+\frac{k}{m}z=0. \qquad (2)$$

Решением этого дифференциального уравнения является гармоническая функция

$$z=A\sin(\omega t+\varphi), \qquad (3)$$

где A — наибольшее отклонение от положения равновесия или амплитуда колебаний; $(\omega t+\varphi)$ — фаза колебаний;

φ — начальная фаза колебаний, определяющая положение колеблющейся точки в начальный момент времени $t=0$:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{4}$$

— круговая частота.

Таким образом, груз будет совершать гармонические колебания вокруг положения равновесия $z=0$ или $x_0 = \Delta L_0 = \frac{P}{k}$ с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{5}$$

Мы видим, что период колебаний в данном случае зависит от коэффициента жесткости пружины k и от массы груза m. При увеличении массы период растет, при увеличении коэффициента жесткости — уменьшается.

Заметим, что период собственных колебаний пружинного маятника не зависит от силы тяжести и будет неизменным в любой точке Земли и даже на другой планете (сравнить с периодом колебаний математического маятника).

Значение периода колебаний T с достаточно большой точностью можно определить, измерив время t N последовательных колебаний маятника. Тогда имеем $T = \frac{t}{N}$.

Преобразовав формулу (5), получим:

$$k = 4\pi^2 N^2 \frac{m}{t^2}. \tag{6}$$

При известных m, t и N с помощью соотношения (6) можно рассчитать значение коэффициента жесткости пружины.

Рассмотренный выше случай является идеализированным, так как реально всегда существуют силы трения (в подвесе, о воздух), которые приводят к затуханию колебаний. При наличии сил трения, которые можно считать при небольших скоростях пропорциональными скорости, уравнение движения несколько видоизменяется:

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x}, \tag{7}$$

где h — постоянная величина, коэффициент трения.

Решение этого уравнения записывается в виде

$$x = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_1 t + \varphi), \tag{8}$$

где A и φ — постоянные, зависящие от начальных условий;

$$\delta = \frac{h}{2m} \quad \text{и} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{4m^2}}. \tag{9}$$

Колебания, соответствующие заданным условиям, не являются периодическими. Однако говорят о величине: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, которую называют условным периодом. Амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону $A \cdot e^{-\delta t}$, хотя, строго говоря, амплитуда — это понятие, неразрывно связанное с синусоидой, для которой амплитуда — величина постоянная. Коэффициент $\delta = \frac{h}{2m}$ характеризует быстроту затухания колебаний во время и называется коэффициентом затухания. Он зависит от коэффициента трения и массы колеблющегося груза.

Кроме этой величины быстроту затухания в зависимости от числа колебаний характеризуют логарифмическим декрементом затухания. По значению его можно сказать о том, сколько колебаний должно пройти, чтобы их размах уменьшился в определенное число раз.

Пусть в некоторый момент t отклонение было $x_1 = Ae^{-\delta t} \times \sin(\omega_1 t + \varphi)$, а в момент $(t + T_1)$, то есть через условный период, отклонение будет

$$x_2 = Ae^{-\delta t - \delta T_1} \sin(\omega_1 t + \varphi + 2\pi) = x_1 e^{-\delta T_1},$$

тогда отношения этих отклонений имеют вид

$$\frac{x_2}{x_1} = e^{-\theta} \quad \text{или} \quad \ln \frac{x_1}{x_2} = \theta, \quad \text{где} \quad \theta = \delta T_1.$$

Величина Θ называется логарифмическим декрементом затухания, он равен натуральному логарифму отношения величин двух последовательных максимальных отклонений в одну сторону.

Если x_N — отклонение, имеющее место через время NT_1, где N число колебаний после отклонения x_1, то аналогичные рассуждения приводят к следующему соотношению:

$$\ln \frac{x_1}{x_N} = N\theta. \tag{10}$$

Если $\frac{x}{x_N} = e$ $(e = 2{,}7...)$, то $N\Theta = 1$, так как $\ln e = 1$.

Тогда $\frac{1}{\theta}=N$ есть число колебаний, через которое отклонение уменьшается в e раз.

Пусть A_0 — первоначальная амплитуда колебаний, а A_t — амплитуда в момент времени $t=NT_1$. Тогда соотношение (10) можно записать в виде

$$\theta=\frac{T_1}{t}\ln\frac{A_0}{A_t}, \tag{11}$$

где T_1 — условный период колебаний.

С помощью выражения (11), измерив величины T_1, t, A_0 и A_t, можно определить значения логарифмического декремента затухания маятника.

В данной работе измеренное динамическим методом, то есть на основании соотношения (6), значение коэффициента жесткости пружины сравнивается с предварительно найденным статическим методом значения k (на основании закона Гука). Совпадение значений в пределах погрешности измерений будет указывать на справедливость соотношения (6) и, следовательно, на гармонический характер исследуемых колебаний маятника.

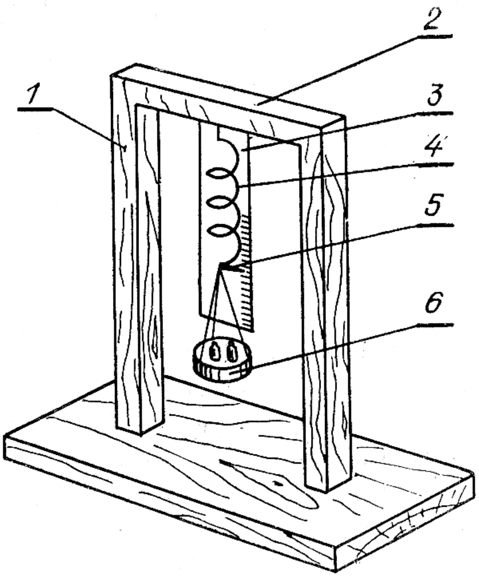

Рис. 2

Установка, на которой производятся измерения, представляет собой деревянный штатив, состоящий из двух вертикальных стоек *1* с перекладиной между ними *2* (рис. 2). На перекладине укреплена линейная шкала *3*. К перекладине подвешивают пружину *4* с указателем *5*. На конце пружины закрепляют груз *6*. Для определения периода колебаний пользуются секундомером.

Порядок выполнения работы

1. Определение коэффициента жесткости пружины статическим методом:

1.1. Закрепить на штативе пружину и предварительно растянуть ее, прикрепив к нижнему концу легкий груз.

1.2. По шкале зафиксировать положение равновесия пружины.

1.3. Нагрузить пружину грузом известной массы и заметить положение указателя по шкале x.

1.4. Рассчитать значение коэффицента жесткости пружины по формуле закона Гука: $k = \frac{mg}{|x - x_0|}$,
где m — масса груза, g — ускорение свободного падения.

1.5. Операции, указанные в пунктах 1.2—1.4, проделать для трех-пяти грузов различной массы.

1.6. Измерения провести для 3-х пружин с различными коэффициентами жесткости.

1.7. Данные прямых измерений и вычислений свести в табл. 1:

Таблица 1

Номер опыта	Номер пружины	x_0, см	m, г	x, см	$x-x_0$, см	k, г/с²	$\bar{k}$, г/с²	$\|\Delta k\|$, г/с²	$\|\overline{\Delta k}\|$, г/с²

1.8. По данным табл. 1 построить для каждой пружины график зависимости удлинения $(x—x_0)$ от нагрузки mg.

1.9. Для каждой пружины определить по графику область выполнения закона Гука (область упругой деформации), по углу наклона прямолинейного участка к оси абсцисс рассчитать значение коэффициента жесткости и сравнить со значением k в табл. 1.

2. Определение коэффициента жесткости пружины динамическим методом:

2.1. Закрепить на штативе пружину и прикрепить к ее нижнему концу груз известной массы.

2.2. Вывести маятник из положения равновесия и предоставить ему возможность совершать колебания вдоль вертикальной оси.

2.3. Измерить с помощью секундомера время t N полных последовательных колебаний маятника.

2.4. Рассчитать по формуле (6) значение коэффициента жесткости пружины.

2.5. Операции, указанные в пунктах 2.2—2.4, проделать для трех-пяти грузов различной массы.

2.6. Измерения провести для 3-х пружин с различными коэффициентами жесткости.

2.7. Результаты прямых измерений и вычислений свести в табл 2:

Таблица 2

Номер опыта	Номер пружины	m, г	t, с	N	t^2, $с^2$	N^2	$\frac{4\pi^2 N^2}{t^2}$ $с^{-2}$	k, $г/с^2$	$\bar{k}$, $г/с^2$	$\|\Delta k\|$, $г/с^2$	$\|\overline{\Delta k}\|$, $г/с^2$

2.8. Построить по данным табл. 2 для каждой пружины график зависимости величины $\frac{4\pi^2 N^2}{t^2}$ от массы m.

2.9. По углу наклона прямой графика к оси абсцисс рассчитать значение коэффициента жесткости каждой пружины и сравнить со значением $\bar{k}$ в табл. 2.

2.10. Значения $\bar{k}$ и $\overline{\Delta k}$ для каждой пружины, полученные статическим и динамическим методами, свести в табл. 3 и объяснить возможные расхождения значений.

Таблица 3

Номер пружины	Методы			
	статический		динамический	
	$\bar{k}$, $г/с^2$	$\|\overline{\Delta k}\|$, $г/с^2$	$\bar{k}$, $г/с^2$	$\|\overline{\Delta k}\|$, $г/с^2$

3. Определение логарифмического декремента затухания пружинного маятника:

3.1. Прикрепить к нижнему концу пружины груз с диском большого диаметра.

3.2. Задать маятнику начальную амплитуду A_0.

3.3. Измерить с помощью секундомера время t_1 N полных колебаний и вычислить условный период колебаний T_1.

3.4. Дают пружинному маятнику колебаться время t до тех пор, пока амплитуда колебания A_t не станет равной половине первоначальной амплитуды A_0.

3.5. Подсчитать по формуле (11) значение логарифмического декремента затухания колебаний маятника.

3.6. Операции, указанные в пунктах 3.2—3.5, провести не менее трех раз.

3.7. Измерения провести для всех трех пружин.

3.8. Данные прямых измерений и вычислений свести в табл. 4:

Таблица 4

Номер опыта	Номер пружины	A_0, см	t_1, с	N	T_1, с	t, с	A_t, см	Θ

Указание по технике безопасности

Надежно закреплять верхний конец пружины на штативе.

Запрещается раскачивать пружинный маятник на большие амплитуды.

Дополнительное задание

Сравнить точность измерения коэффициента жесткости пружины статическим и динамическим методами. Оценить преимущества и недостатки обоих методов измерения.

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называют гармоническими?
2. При каких условиях обеспечиваются гармонические колебания? Какими параметрами они характеризуются?
3. От каких величин зависит период колебаний пружинного маятника?
4. В чем состоят статический и динамический методы измерения коэффициента жесткости пружины?
5. В чем состоит цель измерений коэффициента жесткости пружины двумя методами?
6. Какими параметрами характеризуются затухающие колебания?

Литература

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1974, т. 1, гл. 6, § 39, 40.

2. *Стрелков С. П.* Механика. М., Наука, 1975, гл. 14, § 123—126.