ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9

ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ

Цель работы: изучение упругих свойств твердых тел, измерение модулей упругих деформаций, оценка точности метода измерения.

Краткая теория

Под абсолютно твердым телом понимается тело, частицы которого не меняют своего взаимного расположения под действием внешних сил. Однако в природе таких тел не существует, так как любое тело под влиянием внешних сил деформируется, то есть меняет свою форму или объем. Любая деформация твердого тела сопровождается возникновением в нем сил упругости или внутренних напряжений.

При равновесии кристаллической решетки силы притяжения и силы отталкивания между ионами и атомами, образующими решетку, компенсируются. При сжатии кристалла, например, с ионной решеткой уменьшается расстояние между соседними ионами, поэтому сила отталкивания становится больше силы притяжения, в результате чего появляется суммарная сила отталкивания, противодействующая сжатию. Через любую площадку внутри тела передаются равные и противоположные силы. Предел отношения этих сил на бесконечно малой площадке к величине площадки называется напряжением в данной точке тела.

Степень деформации зависит не только от значения вызывающей ее силы, но и от площади поверхности или поперечного сечения, к которому эта сила приложена, а также от первоначальных размеров тела; поэтому удобнее рассматривать относительную деформацию и вызывающее ее усилие.

Под относительной деформацией понимают отношение абсолютного значения деформации Δx к первоначальному размеру тела x. Усилием P называется отношение деформирующей силы F к площади S поверхности или сечения тела. Усилие равно по величине и противоположно по направлению напряжению, возникающему в теле при деформации под действием данного усилия.

Рассмотрим изменение относительной деформации $\frac{\Delta x}{x}$ (в дальнейшем будем называть ее просто деформацией) с изменением усилия P. Пока усилие невелико, существует пропорциональность между значениями усилия и деформацией, а также и значением внутренних напряжений в теле. С пре-

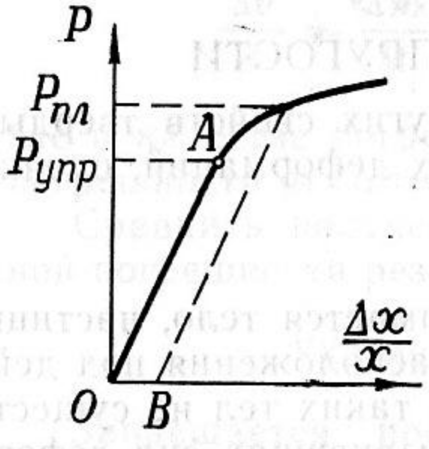

Рис. 1

кращением действия внешней силы деформация в теле исчезает. Эта стадия носит название упругой деформации и графически изображается наклонной прямой OA (рис. 1).

При дальнейшем возрастании деформирующей силы прямолинейная зависимость нарушается и деформация тела растет быстрее. В этом случае при прекращении действия силы деформация не исчезает. Эта стадия носит название пластической деформации. Отрезком OB на оси $\frac{\Delta x}{x}$ (рис. 1) показана так называемая остаточная деформация, то есть та деформация, которая остается в теле после прекращения действия силы (в случае, изображенном на рис. 1, усилие достигло значения $P_{пл}$). Если при появлении пластической деформации продолжить увеличение действующих сил, можно достичь третьей стадии, при которой наступает разрушение тела. В этом случае внутреннее напряжение переходит предел прочности тела.

Наиболее прост для рассмотрения случай упругих деформаций, подчиняющихся закону Гука и его следствиям.

ЗАКОН ГУКА. Степень упругой деформации пропорциональна значению деформирующей силы, то есть усилию, $\frac{\Delta x}{x} = cP$, где $\frac{\Delta x}{x}$ — упругая деформация; P — деформирующее усилие; c — постоянная, зависящая от свойств тела и от вида деформации.

Следствие 1. Изменение знака деформирующей силы вызывает изменение только знака упругой деформации, в то время как абсолютная величина деформации остается прежней.

Следствие 2. При действии нескольких деформирующих сил различного знака общая упругая деформация равна алгебраической сумме всех деформаций.

Существует несколько видов деформаций: растяжение, сжатие, изгиб, кручение, сдвиг. Деформации растяжения, сжатия и сдвига являются простыми, все остальные деформации можно рассматривать как сумму этих простых деформаций. Закон Гука справедлив для всех видов упругих деформаций.

В теории упругости деформации различного рода принято количественно определять коэффициентами и модулями.

Коэффициентом деформации называется величина, численно равная значению упругой деформации, вызываемой в теле усилием, равным единице.

Модулем деформации называется величина, численно равная усилию, вызывающему упругую деформацию, равную единице (в действительности такая деформация для большинства тел невозможна).

Модуль деформации можно численно определить как тангенс угла наклона прямолинейного участка графика (рис. 1) к оси деформации, а коэффициент — как котангенс того же угла. Рассмотрим некоторые виды упругих деформаций более подробно.

Деформация растяжения. Деформация растяжения возникает, например, если верхний конец проволоки закреплен, а к нижнему ее концу подвешен груз, под действием которого проволока удлиняется на величину Δl. По закону Гука

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{F}{S}, \quad \text{откуда} \quad \alpha = \frac{\Delta l}{l} \cdot \frac{S}{F}$$

или

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{l}{S} \cdot \frac{F}{\Delta l}. \tag{1}$$

Здесь α — коэффициент упругости тела при растяжении; F — деформирующая сила, то есть вес груза; S — площадь поперечного сечения проволоки; l — первоначальная длина проволоки; Δl — абсолютное удлинение проволоки; E — модуль упругой деформации (модуль Юнга).

Из равенства (1) следует физический смысл модуля Юнга: модуль Юнга численно равен усилию, под действием которого длина тела увеличилась бы в два раза (если бы это было возможно). Одновременно с увеличением длины тела происходит уменьшение его диаметра d: $\frac{\Delta d}{d} = \beta \frac{F}{S}$. Здесь β— коэффициент поперечного сжатия. Отношение коэффициента поперечного сжатия к коэффициенту упругости при растяжении носит название коэффициента Пуассона $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$.

Деформация сдвига. Рассмотрим тело $ABDC$ (рис. 2), закрепленное на плоскости. Пусть на каждую единицу площади поверхности тела по касательной к поверхности действует сила P_τ. Под действием этой силы слои тела сдвигаются друг относительно друга, причем величина сдвига тем больше, чем дальше отстоит слой от закрепленной поверхности тела. В результате каждая перпендикулярная поверхности прямая повернется на некоторый угол ψ (угол сдвига). При малых деформациях угол сдвига определится отношением $\psi = \frac{BB'}{BD}$, то есть угол ψ характеризует относительную деформацию.

Закон Гука для деформации сдвига запишется в виде $\psi = \sigma P_\tau$, где σ — коэффициент сдвига.
Модуль сдвига N найдем из соотношения

$$N = \frac{P_\tau}{\psi}. \qquad (2)$$

Физический смысл модуля сдвига: модуль сдвига численно равен касательному усилию, вызывающему такую деформацию сдвига, при которой любая прямая, проведенная в теле перпендикулярно поверхности, к которой приложена сила, поворачивается на угол, равный единице.

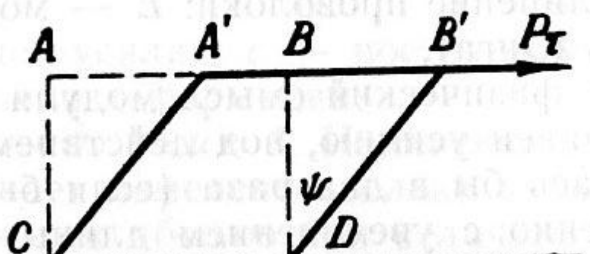

Рис. 2

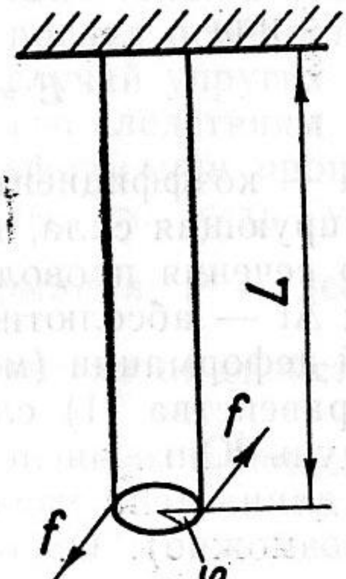

Рис 3.

Деформация кручения. Если закрепить неподвижно верхнее сечение некоторого стержня, а к нижнему приложить пару сил f в плоскости сечения, то любой радиус нижнего сечения повернется на некоторый угол φ — угол закручивания (рис. 3). Относительная деформация определится как угол закручивания, отнесенный к единице длины стержня $\frac{\varphi}{L}$.

В пределах упругой деформации по закону Гука будет выполняться соотношение

$$\frac{\varphi}{L}=cM, \tag{3}$$

где M — закручивающий момент, c — коэффициент кручения. Модуль кручения будет численно равен моменту сил, вызывающему поворот радиуса нижнего сечения на единичный угол при длине стержня, равной единице.

Деформация изгиба. Деформацию изгиба можно рассмотреть на примере горизонтального стержня, один конец которого закреплен неподвижно, а к другому приложена некоторая деформирующая сила. Деформацию изгиба определяют стрелой прогиба λ, то есть тем расстоянием, на которое опускается точка приложения равнодействующей всех изгибающих сил, действующих на стержень. Деформацию изгиба можно рассмотреть как совокупность деформаций растяжения (для верхних слоев стержня) и сжатия (для его нижних слоев). Возможны и другие случаи деформации изгиба: стержень закреплен на концах, а сила приложена к его середине; стержень свободно лежит на опорах, сила приложена к середине. При количественном рассмотрении оба эти случая могут быть сведены к первому.

Упругие постоянные некоторых твердых тел

Вещество	Модуль Юнга		Модуль сдвига	
	$E\cdot10^{-9}$, Н/м^2	$E\cdot10^{-3}$, кгс/мм^2	$N\cdot10^{-8}$, Н/м^2	$N\cdot10^{-3}$, кгс/мм^2
Алюминий	62—74	6,3—7,5	22—26	2,3—2,7
Сталь	196—218	20—22	78—82	8,0—8,3
Латунь	78—98	8—10	26—36	2,7—3,7
Медь	98—127	10—13	38—47	3,9—4,8

Упражнение № 3. **Определение модуля сдвига из кручения.**

Принадлежности: установка, грузы, металлическая линейка, микрометр, технические весы, разновесы, штангенциркуль.

Описание установки и вывод рабочей формулы

Имеющийся в лаборатории прибор состоит из укрепленного на кронштейне зажима *1*, несущего испытуемый цилиндр 2 в виде проволоки из того или иного материала (рис. 10). На нижнем конце цилиндра закрепляется трехступенчатый шкив *3* с проточенными на его ступеньках канавками, служащими для помещения нитей, которые, сойдя со шкива, подвешиваются через блоки *4* и на концах нагружаются грузами *5*.

Грузы, навешиваемые на нити, создают вращающий момент, под действием которого шкив и жестко связанное с ним нижнее сечение стержня поворачиваются на некоторый угол. Введем отрезок $OA=\rho$ (рис. 11), отложенный вдоль одного из радиусов нижнего сечения. Под влиянием закручивающего момента прямая OA повернется на угол φ и займет положение OA' (рис. 11). При закручивании стержня его нижний торец испытывает сдвиг относительно верхнего; прямая BA поворачивается, принимая положение BA', угол φ является углом сдвига.

На рис. 12 изображен участок нижнего сечения цилиндра. P_τ — касательное усилие, приложенное к элементу поверхности dS, расположенному у точки A. Пользуясь рис. 11, можно записать

$$\psi=\frac{AA'}{l}=\frac{\varphi\rho}{l},$$

откуда в соответствии с соотношением (2) —

$$P_\tau=N\psi=N\frac{\varphi\rho}{l}. \qquad (13)$$

Сила, приложенная к элементу поверхности dS, равна $P_\tau\, dS$, а ее момент — $dM=\rho P_\tau\, dS$.
Введя полярные координаты θ и ρ (рис. 12), получим для элемента поверхности: $dS=\rho d\rho d\theta$, откуда $dM=P_\tau\, d\rho d\theta$. Подставив в последнее выражение P_τ из соотношения (13), найдем:

$$dM=\frac{N\varphi}{l}\rho^3 d\rho d\theta.$$

Полный момент M внутренних сил, приложенный ко всему нижнему торцу стержня, получим, проинтегрировав выражение для dM по всей площади круга радиуса r:

$$M=\frac{N\varphi}{l}\int_0^{2\pi}\int_0^{r}\rho^3 d\rho\, d\theta=\frac{\pi N r^4}{2}\cdot\frac{\varphi}{l}. \qquad (14)$$

Вращающий момент внешних сил равен

$$M'=F\cdot A, \qquad (15)$$

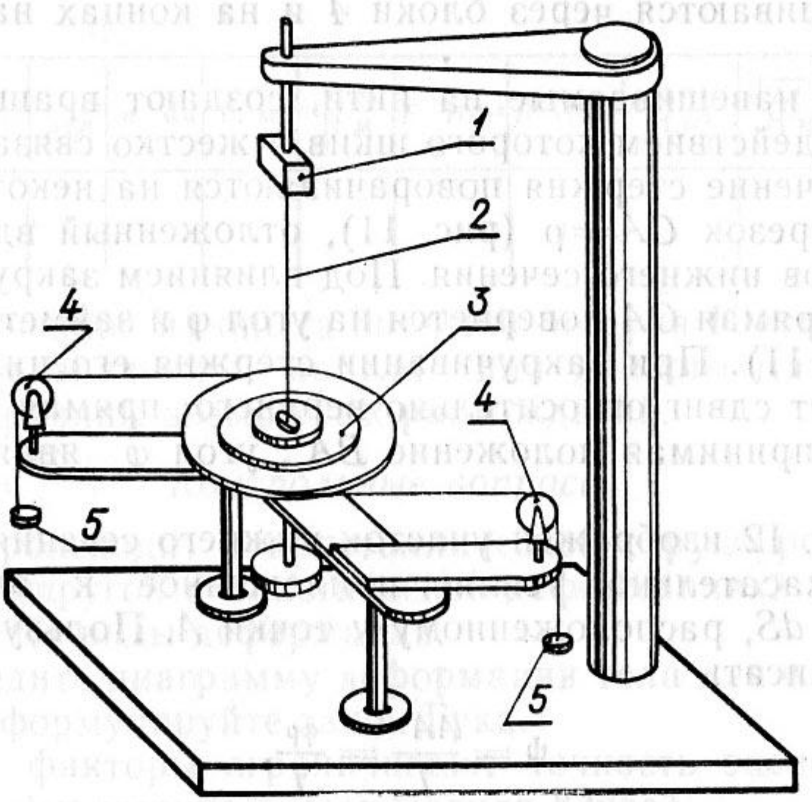

Рис. 10

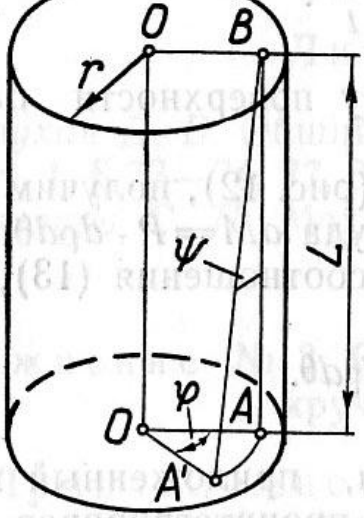

Рис. 11

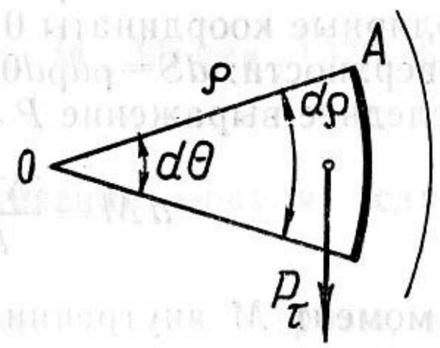

Рис. 12

где F — вес одного груза, A — диаметр шкива.

При равновесии модули моментов M и M' будут равны. Тогда, приравняв правые части выражений (14) и (15), получим следующую рабочую формулу для определения модуля сдвига:

$$N = \frac{l}{\pi r^4} A \cdot \frac{F}{\varphi}. \qquad (16)$$

Порядок выполнения работы

1. Измерить линейкой длину испытуемого стержня, измерение производят от верхнего до нижнего зажимов цилиндра.

2. Измерить микрометром диаметр d стержня в 3—4 местах и найти среднее значение радиуса стержня.

3. Измерить штангенциркулем диаметры шкивов, учитывая при этом глубину канавок.

4. Вычислить значение коэффициента $\frac{l}{\pi r^4} A$ в формуле (16).

5. Данные измерений и расчетов занести в табл. 1:

Таблица 1

l, мм	l, м	d, мм	r, м	r^4, м^4	A_1, мм	A_2, мм	A_3, мм	$\frac{lA_1}{\pi r^4}$, м$^{-2}$	$\frac{lA_2}{\pi r^4}$, м$^{-2}$	$\frac{lA_3}{\pi r^4}$, м$^{-2}$

6. Взвесить грузы на технических весах.

7. Опыт начать с большого шкива. Пропустить нити по его желобу, перекинуть через блоки и установить указатель у нуля делений круга, причем пластинка указателя должна составлять продолжение радиуса круга.

8. Навесить грузы на подвесы и отсчитать угол поворота шкива. Нити при этом должны быть направлены по касательной к окружности шкива, а плоскости блоков должны проходить через эти касательные.

9. Увеличивая нагрузку на каждый из подвесов, измерить общий угол поворота шкива под действием суммарного груза.

10. Повторить измерения со вторым и третьим шкивами.

11. Построить графики зависимости угла поворота шкива φ от нагрузки F для каждого шкива и убедиться, что исследуемая область находится в пределах упругой деформации.

12. Результаты прямых измерений и расчетов свести в табл. 2:

Таблица 2

Номер опыта	A, м	F, гс	F, Н	φ, град.	φ, рад.	F/φ, Н/рад	N, Н/м^2	$\overline{N}$, Н/м^2	$\lvert\Delta N\rvert$, Н/м^2	$\overline{\lvert\Delta N\rvert}$, Н/м^2	$N_{табл.}$, Н/м^2

13. Полученное из опыта значение модуля сдвига сравнить с известным табличным значением для данного материала и объяснить причины возможных расхождений.

Контрольные вопросы

1. Что происходит с кристаллической структурой твердого тела при упругой и пластической деформациях?
2. Перечислите виды деформации.
3. Сформулируйте закон Гука для случая кручения.
4. Каков физический смысл понятия модуля сдвига и модуля кручения? Какая связь существует между этими величинами?
5. Каково должно быть направление нитей, на которых подвешиваются грузы?
6. На каком шкиве установка работает с наибольшей чувствительностью?

Литература

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1974, т. 1, § 73—74, 78, 79.
2. *Стрелков С. П.* Механика. М., Наука, 1975, § 81—84.