ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 9

ИЗМЕРЕНИЕ МОДУЛЕЙ УПРУГОСТИ

Цель работы: изучение упругих свойств твердых тел, измерение модулей упругих деформаций, оценка точности метода измерения.

Краткая теория

Под абсолютно твердым телом понимается тело, частицы которого не меняют своего взаимного расположения под действием внешних сил. Однако в природе таких тел не существует, так как любое тело под влиянием внешних сил деформируется, то есть меняет свою форму или объем. Любая деформация твердого тела сопровождается возникновением в нем сил упругости или внутренних напряжений.

При равновесии кристаллической решетки силы притяжения и силы отталкивания между ионами и атомами, образующими решетку, компенсируются. При сжатии кристалла, например, с ионной решеткой уменьшается расстояние между соседними ионами, поэтому сила отталкивания становится больше силы притяжения, в результате чего появляется суммарная сила отталкивания, противодействующая сжатию. Через любую площадку внутри тела передаются равные и противоположные силы. Предел отношения этих сил на бесконечно малой площадке к величине площадки называется напряжением в данной точке тела.

Степень деформации зависит не только от значения вызывающей ее силы, но и от площади поверхности или поперечного сечения, к которому эта сила приложена, а также от первоначальных размеров тела; поэтому удобнее рассматривать относительную деформацию и вызывающее ее усилие.

Под относительной деформацией понимают отношение абсолютного значения деформации Δx к первоначальному размеру тела x. Усилием P называется отношение деформирующей силы F к площади S поверхности или сечения тела. Усилие равно по величине и противоположно по направлению напряжению, возникающему в теле при деформации под действием данного усилия.

Рассмотрим изменение относительной деформации $\frac{\Delta x}{x}$ (в дальнейшем будем называть ее просто деформацией) с изменением усилия P. Пока усилие невелико, существует пропорциональность между значениями усилия и деформацией, а также и значением внутренних напряжений в теле. С пре-

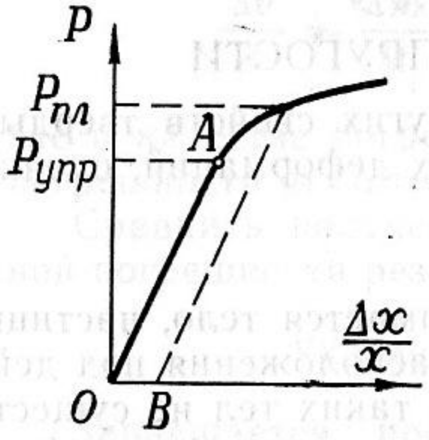

Рис. 1

кращением действия внешней силы деформация в теле исчезает. Эта стадия носит название упругой деформации и графически изображается наклонной прямой OA (рис. 1).

При дальнейшем возрастании деформирующей силы прямолинейная зависимость нарушается и деформация тела растет быстрее. В этом случае при прекращении действия силы деформация не исчезает. Эта стадия носит название пластической деформации. Отрезком OB на оси $\frac{\Delta x}{x}$ (рис. 1) показана так называемая остаточная деформация, то есть та деформация, которая остается в теле после прекращения действия силы (в случае, изображенном на рис. 1, усилие достигло значения $P_{\text{пл}}$). Если при появлении пластической деформации продолжить увеличение действующих сил, можно достичь третьей стадии, при которой наступает разрушение тела. В этом случае внутреннее напряжение переходит предел прочности тела.

Наиболее прост для рассмотрения случай упругих деформаций, подчиняющихся закону Гука и его следствиям.

ЗАКОН ГУКА. Степень упругой деформации пропорциональна значению деформирующей силы, то есть усилию, $\frac{\Delta x}{x} = cP$, где $\frac{\Delta x}{x}$ — упругая деформация; P — деформирующее усилие; c — постоянная, зависящая от свойств тела и от вида деформации.

Следствие 1. Изменение знака деформирующей силы вызывает изменение только знака упругой деформации, в то время как абсолютная величина деформации остается прежней.

Следствие 2. При действии нескольких деформирующих сил различного знака общая упругая деформация равна алгебраической сумме всех деформаций.

Существует несколько видов деформаций: растяжение, сжатие, изгиб, кручение, сдвиг. Деформации растяжения, сжатия и сдвига являются простыми, все остальные деформации можно рассматривать как сумму этих простых деформаций. Закон Гука справедлив для всех видов упругих деформаций.

В теории упругости деформации различного рода принято количественно определять коэффициентами и модулями.

Коэффициентом деформации называется величина, численно равная значению упругой деформации, вызываемой в теле усилием, равным единице.

Модулем деформации называется величина, численно равная усилию, вызывающему упругую деформацию, равную единице (в действительности такая деформация для большинства тел невозможна).

Модуль деформации можно численно определить как тангенс угла наклона прямолинейного участка графика (рис. 1) к оси деформации, а коэффициент — как котангенс того же угла. Рассмотрим некоторые виды упругих деформаций более подробно.

Деформация растяжения. Деформация растяжения возникает, например, если верхний конец проволоки закреплен, а к нижнему ее концу подвешен груз, под действием которого проволока удлиняется на величину Δl. По закону Гука

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha \frac{F}{S}, \quad \text{откуда} \quad \alpha = \frac{\Delta l}{l} \cdot \frac{S}{F}$$

или

$$E = \frac{1}{\alpha} = \frac{l}{S} \cdot \frac{F}{\Delta l}. \qquad (1)$$

Здесь α — коэффициент упругости тела при растяжении; F — деформирующая сила, то есть вес груза; S — площадь поперечного сечения проволоки; l — первоначальная длина проволоки; Δl — абсолютное удлинение проволоки; E — модуль упругой деформации (модуль Юнга).

Из равенства (1) следует физический смысл модуля Юнга: модуль Юнга численно равен усилию, под действием которого длина тела увеличилась бы в два раза (если бы это было возможно). Одновременно с увеличением длины тела происходит уменьшение его диаметра d: $\frac{\Delta d}{d} = \beta \frac{F}{S}$. Здесь β — коэффициент поперечного сжатия. Отношение коэффициента поперечного сжатия к коэффициенту упругости при растяжении носит название коэффициента Пуассона $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$.

Деформация сдвига. Рассмотрим тело $ABDC$ (рис. 2), закрепленное на плоскости. Пусть на каждую единицу площади поверхности тела по касательной к поверхности действует сила P_τ. Под действием этой силы слои тела сдвигаются друг относительно друга, причем величина сдвига тем больше, чем дальше отстоит слой от закрепленной поверхности тела. В результате каждая перпендикулярная поверхности прямая повернется на некоторый угол ψ (угол сдвига). При малых деформациях угол сдвига определится отношением $\psi = \frac{BB'}{BD}$, то есть угол ψ характеризует относительную деформацию.

Закон Гука для деформации сдвига запишется в виде $\psi = \sigma P_\tau$, где σ — коэффициент сдвига.
Модуль сдвига N найдем из соотношения

$$N = \frac{P_\tau}{\psi}. \quad (2)$$

Физический смысл модуля сдвига: модуль сдвига численно равен касательному усилию, вызывающему такую деформацию сдвига, при которой любая прямая, проведенная в теле перпендикулярно поверхности, к которой приложена сила, поворачивается на угол, равный единице.

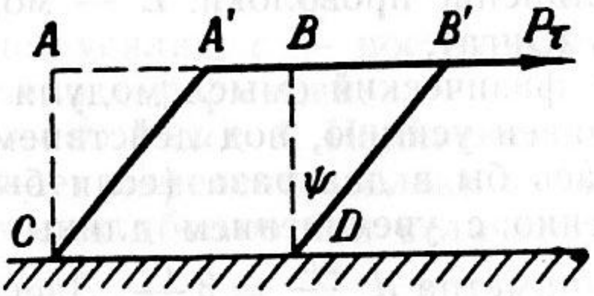

Рис. 2

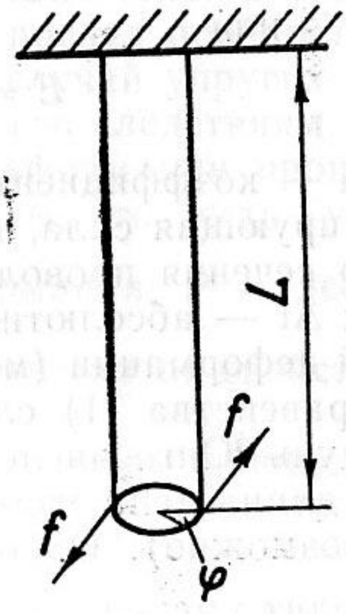

Рис 3.

Деформация кручения. Если закрепить неподвижно верхнее сечение некоторого стержня, а к нижнему приложить пару сил f в плоскости сечения, то любой радиус нижнего сечения повернется на некоторый угол φ — угол закручивания (рис. 3). Относительная деформация определится как угол закручивания, отнесенный к единице длины стержня $\frac{\varphi}{L}$.

В пределах упругой деформации по закону Гука будет выполняться соотношение

$$\frac{\varphi}{L} = cM, \tag{3}$$

где M — закручивающий момент, c — коэффициент кручения. Модуль кручения будет численно равен моменту сил, вызывающему поворот радиуса нижнего сечения на единичный угол при длине стержня, равной единице.

Деформация изгиба. Деформацию изгиба можно рассмотреть на примере горизонтального стержня, один конец которого закреплен неподвижно, а к другому приложена некоторая деформирующая сила. Деформацию изгиба определяют стрелой прогиба λ, то есть тем расстоянием, на которое опускается точка приложения равнодействующей всех изгибающих сил, действующих на стержень. Деформацию изгиба можно рассмотреть как совокупность деформаций растяжения (для верхних слоев стержня) и сжатия (для его нижних слоев). Возможны и другие случаи деформации изгиба: стержень закреплен на концах, а сила приложена к его середине; стержень свободно лежит на опорах, сила приложена к середине. При количественном рассмотрении оба эти случая могут быть сведены к первому.

Упругие постоянные некоторых твердых тел

Вещество	Модуль Юнга		Модуль сдвига	
	$E \cdot 10^{-9}$, Н/м^2	$E \cdot 10^{-3}$, кгс/мм^2	$N \cdot 10^{-8}$, Н/м^2	$N \cdot 10^{-3}$, кгс/мм^2
Алюминий	62—74	6,3—7,5	22—26	2,3—2,7
Сталь	196—218	20—22	78—82	8,0—8,3
Латунь	78—98	8—10	26—36	2,7—3,7
Медь	98—127	10—13	38—47	3,9—4,8

Упражнение 2. Определение модуля Юнга из изгиба.

Принадлежности: установка, катетометр, линейка, микрометр, набор грузов, технические весы, разновесы.

Вывод рабочей формулы и описание установки

Рассмотрим деформацию стержня произвольного сечения, один конец которого закреплен, а к другому приложена сила F. Пусть длина стержня — l, поперечное сечение — S (рис. 5).

Сила F, действующая на свободный конец стержня, создает вращающий момент, под действием которого стержень стремится повернуться относительно горизонтальной оси. Но так как другой конец стержня закреплен, возникает сила реакции, препятствующая повороту стержня. Стержень будет изгибаться, причем верхние слои стержня будут растягиваться, а нижние — сжиматься. Всегда будет некоторый бесконечно тонкий слой, который не изменяет своей длины, так он не испытывает напряжения. Этот слой называется нейтральным.

Представим себе, что стержень разделен на весьма тонкие пластинки системой плоскостей, перпендикулярных к его длине (рис. 6). В деформированном состоянии некоторая пластинка $ABCD$, расположенная на расстоянии от

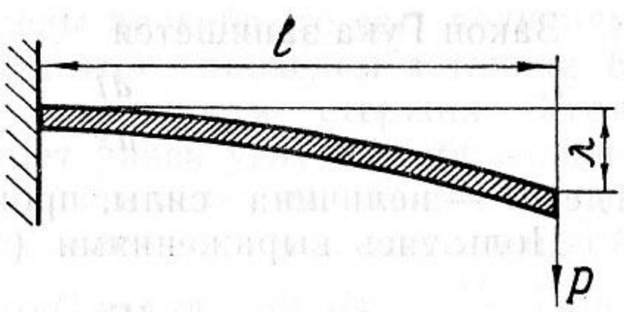

Рис. 5

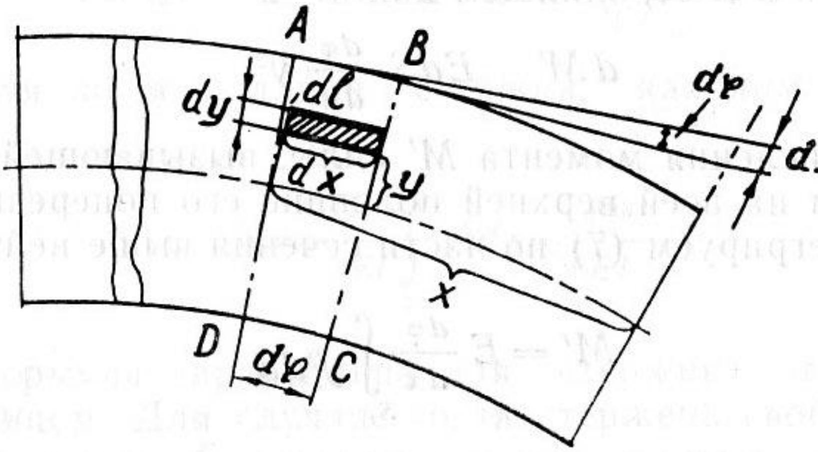

Рис. 6

закрепленного конца стержня, изменит свою форму, так что ее стороны AD и BC образуют друг с другом некоторый малый угол $d\varphi$.

В точках верхнего слоя упругая реакция стержня вызывает силу, направленную к закрепленному концу стержня, а в точках нижнего слоя появляется такая же сила, направленная к свободному концу стержня. Такие пары возникают во всех слоях, симметричных нейтральному, и будут тем больше, чем дальше отстоят рассматриваемые слои от нейтрального.

При равновесии стержня сумма моментов всех пар этих упругих сил равна тому вращающему моменту, который создается силой F, действующей на конец стержня.

Для нахождения упругой пары сил рассмотрим в выделенной нами пластинке $ABCD$ весьма тонкий слой, параллельный нейтральному сечению на расстоянии y от него (рис. 6). Ширина этого слоя равна ширине a стержня, длина равна dx, поперечное сечение — dS, а удлинение этого слоя при растяжении его —

$$dl = y\,d\varphi. \tag{4}$$

Закон Гука запишется

$$\frac{dl}{dx} = \frac{1}{E} \cdot \frac{dF}{dS}, \tag{5}$$

где dF — величина силы, производящей удлинение слоя.

Пользуясь выражениями (4) и (5), находим:

$$dF = EdS\,\frac{d\varphi}{dx}\,y. \tag{6}$$

Так как плечо этой силы есть y, то момент dM' упругой силы, возникающей в слое, запишем как

$$dM' = EdS\,\frac{d\varphi}{dx}\,y^2. \tag{7}$$

Для вычисления момента M' силы, вызывающей растяжение стержня на всей верхней половине его поперечного сечения, проинтегрируем (7) по части сечения выше нейтрального слоя:

$$M' = E\,\frac{d\varphi}{dx}\int\limits_{S_1} y^2 dS.$$

Интеграл

$$I = \int\limits_{S_1} y^2 dS \tag{8}$$

зависит от формы и размеров поперечного сечения стержня и не зависит от его длины, поэтому для стержня произвольного сечения справедливо равенство $M' = EI\frac{d\varphi}{dx}$.

Совершенно такой же момент мы получим для нижней части поперечного сечения. Следовательно, общий момент имеет вид

$$M = 2M' = 2EI\,\frac{d\varphi}{dx}.$$

Момент этих пар упругих сил, восстанавливающих форму стержня, равен моменту внешней приложенной силы F, изгибающей стержень. Если стержень изогнут только слегка, то плечом силы F будет x — расстояние плоскости AD от конца стержня. При значительном изгибе это плечо будет значительно короче.

Итак, условие равновесия запишется в виде

$$F \cdot x = 2EI\,\frac{d\varphi}{dx}. \tag{9}$$

Теперь найдем величину стрелы прогиба, то есть величину смещения λ конца стержня. Для этого проведем в точках B и A касательные к изогнутой поверхности стержня. Угол между этими касательными будет равен углу $d\varphi$, образованному сечениями AD и BC. Обозначая через $d\lambda$ смещение конца стержня вследствие изгиба только одной рассматриваемой пластинки, мы можем написать $d\lambda = x d\varphi$ или $d\varphi = \frac{d\lambda}{x}$. Подставляя это в (9), получим:

$$Fx^2 dx = 2EId\lambda \quad \text{и} \quad d\lambda = \frac{F}{2EI} x^2\, dx.$$

Интегрируя по всей длине стержня, находим стрелу прогиба:

$$\lambda = \frac{F}{2EI} \int_0^l x^2 dx = \frac{Fl^3}{6EI}.$$

Эта формула справедлива для стержня, закрепленного одним концом. Для случая, когда стержень свободно лежит на опорах, а сила F приложена к его середине, а сила реакции каждой опоры равна $\frac{F}{2}$, а расстояние свободных концов до точки приложения деформирующей силы равно $\frac{l}{2}$. Тогда стрела прогиба будет определяться соотношением

$$\lambda = \frac{Fl^3}{96EI}. \tag{10}$$

Применим соотношение (10) для определения модуля Юнга в некоторых частных случаях:

а) стержень имеет прямоугольное сечение (рис. 7), стороны которого равны a и b. Найдем интеграл (8) для этого случая:

$$I = \int_{S_1} y^2 dS = \int_0^{\frac{b}{2}} a y^2 dy = a \frac{y^3}{3} \Big|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{ab^3}{24}.$$

Тогда величина модуля Юнга выразится соотношением

$$E = \frac{l^3}{4ab^3} \cdot \frac{F}{\lambda}; \tag{11}$$

б) стержень имеет круглое сечение радиуса R (рис. 8). Выразим площадь dS в полярной системе координат: $dS = r\,dr\,d\psi$, $y^2 = r^2\sin\psi$. Тогда

$$I = \int_0^\pi\int_0^R r^3 \sin^2\varphi\, dr\, d\varphi = \frac{R^4}{4}\int_0^\pi \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\, d\varphi = \frac{\pi R^4}{8}.$$

В этом случае выражение для модуля Юнга будет иметь вид

$$E = \frac{l^3}{12\pi R^4}\cdot\frac{F}{\lambda}. \qquad (12)$$

В приборе на деревянных колодках *1* (рис. 9) поставлены стальные призмы, на которые кладется стержень *2* из исследуемого материала, нагружаемый в середине. Для измерения стрелы прогиба в нашем приборе к середине исследуемого стержня прикрепляется подвес для грузов *3*, в верхней части которого имеется экран *4* с горизонтальной меткой.

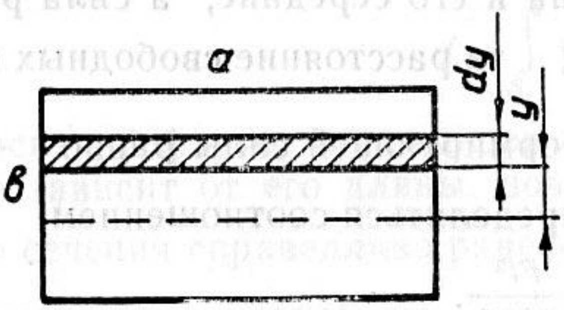

Рис 7.

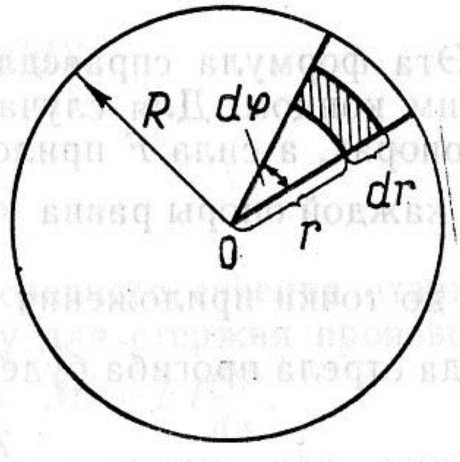

Рис. 8

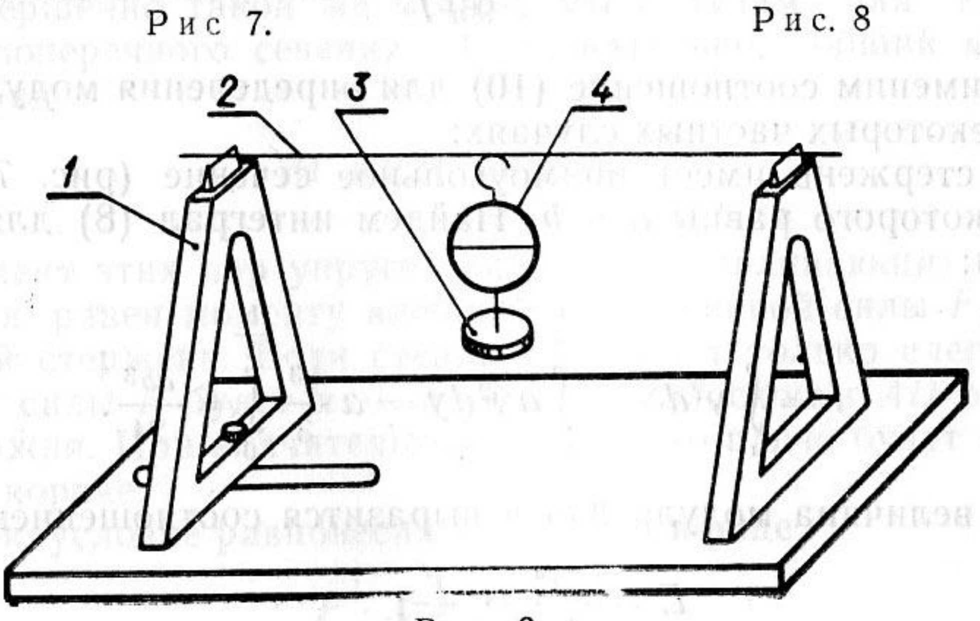

Рис. 9

Порядок выполнения работы

1. Измерить линейкой расстояние между стальными призмами прибора, на которые кладется стержень из исследуемого материала.

2. Измерить микрометром диаметр d стержня и рассчитать значение его радиуса.

3. Вычислить значение коэффициента $\frac{l^3}{12\pi R^4}$ в формуле (12).

4. Результаты измерений и расчетов свести в табл. 1:

Таблица 1

Номер опыта	l, мм	l^3, м^3	d, мм	R, мм	R^4, м^4	$12\pi R^4$, м^4	$l^3/12\pi R^4$, м$^{-1}$

5. Измерить на технических весах массу каждого груза, навешиваемого на подвес.

6. Установить объектив катетометра напротив экрана подвеса так, чтобы горизонтальная черта экрана была ясно видна. Вращая окуляр катетометра, совместить метки окуляра и экрана.

7. Измерить с точностью до 0,01 мм цену деления окулярного микрометра при помощи нониуса и шкалы на стойке катетометра. Пусть первый отсчет равен A. Подняв или опустив катетометр, сместить метку окуляра на 10 делений по отношению к черте на экране и снять отсчет B. Тогда цена одного деления шкалы окуляра n определится из соотношения $n = \frac{A-B}{10}$.

8. Совместить метки окуляра и экрана, навесить на подвес груз и измерить по шкале окулярного микрометра смещение черты подвеса, то есть значение стрелы прогиба λ.

9. Поочередно навесить на подвес остальные грузы и измерить общее значение стрелы прогиба, вызываемое каждый раз суммарным грузом.

10. Построить график зависимости стрелы прогиба λ от нагрузки F и по графику убедиться в том, что деформация в исследуемой области является упругой.

11. Результаты измерений и расчетов занести в табл. 2:

Таблица 2

Номер опыта	F, гс	F, Н	λ, дел.	n, мм	λ, м	F/λ, Н/м	E, Н/м²	$\overline{E}$, Н/м²	$\lvert\Delta E\rvert$, Н/м²	$\lvert\overline{\Delta E}\rvert$, Н/м²	$E_{табл}$, Н/м²

12. Полученное из опыта значение модуля Юнга сравнить с табличным значением модуля для данного материала и объяснить причины возможных расхождений.

Контрольные вопросы

1. Что происходит с кристаллической структурой твердого тела при упругой и пластической деформациях?
2. Назовите виды деформации.
3. Приведите диаграмму деформации тела для случая растяжения и сформулируйте закон Гука.
4. Какие факторы ограничивают точность эксперимента?
5. Каков физический смысл модуля Юнга?
6. Как проверить, что все измерения сделаны в пределах упругой деформации?

Литература

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1974, т. 1, § 73—74, 77, 80.
2. *Стрелков С. П.* Механика. М., Наука, 1975, § 81—83, 89—90.