ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 7.

ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

Цель работы: экспериментальное подтверждение закона сохранения момента количества движения.

Принадлежности: установка, секундомер.

Краткая теория

Пусть имеется механическая система материальных точек, на которые действуют моменты внешних и внутренних сил *.

---

* Моментом силы $\overline{F}$ относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора r_0 на силу $\overline{F}$, то есть $\overline{M}_0 = [\overline{r}_0 \overline{F}]$.

Моментом количества движения (моментом импульса) относительно точки O называется векторное произведение радиус-вектора $\overline{r}_0$ на количество движения $m\overline{v}$, то есть $\overline{L_0} = [\overline{r}_0 m\overline{v}]$.

Следует различать моменты векторов относительно точки и относительно оси. Момент вектора относительно оси есть проекция на эту ось его момента относительно точки, лежащей на той же оси. Момент вектора относительно оси представляет собой аксиальный вектор, то есть вектор, направленный вдоль оси.

Рассмотрим суммы моментов этих сил относительно некоторой неподвижной точки O. Сумма всех моментов внутренних сил системы всегда равна нулю. Сумма моментов внешних сил $\overline{M}_0$ относительно точки O и главный момент количеств движения $\overline{L}_0$ относительно этой же точки связаны дифференциальным уравнением

$$\overline{M}_0 = \frac{d\overline{L}_0}{dt}. \tag{1}$$

Пусть система замкнута и, следовательно, сумма моментов внешних сил равна нулю, то есть $\overline{M}_0 = O$. Тогда в соответствии с уравнением (1) имеем

$$\overline{L}_0 = \text{const}. \tag{2}$$

Таким образом, для замкнутой системы материальных точек относительно какой-либо точки главный момент количеств движения относительно той же точки постоянен по абсолютному значению и по направлению. В этом и состоит закон сохранения момента количества движения.

Вращение твердого тела вокруг оси Oz описывается уравнением

$$\overline{M}_z = \frac{d\overline{L_z}}{dt}, \tag{3}$$

где $\overline{M}_z$ — результирующий момент внешних сил, действующих на тело, относительно оси Oz; $\overline{L}_z$ — момент количества движения тела относительно оси Oz.

Поскольку

$$\overline{L}_z = I_z\overline{\omega}, \tag{4}$$

где I_z — момент инерции тела относительно оси O_z*, ω — вектор угловой скорости тела, то имеем

$$\overline{M}_z = \frac{d\,(I_z\overline{\omega})}{dt}. \tag{5}$$

---

* Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси O_z называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадраты их расстояний от этой оси:

$$Iz = \Sigma m_i r^2{}_i.$$

В случае сплошного тела — $Iz = \int\limits_V \rho(r) r^2 dV$,

где ρ — плотность, V — объем тела.

Для случая замкнутой системы, когда $\overline{M}_z = O$, получим следующее выражение закона сохранения момента количества движения:

$$I_z \overline{\omega} = \text{const}. \quad (6)$$

Это уравнение и подлежит экспериментальной проверке.

Описание установки и вывод рабочей формулы

Схема установки, без деталей, дана на рис. 1. Колонка AA, с закрепленным в ней стержнем BB, может вращаться в шарикоподшипниках, вокруг вертикальной оси OO'. По стержню могут скользить два цилиндра C одинаковой массы. По колонке может перемещаться кольцо K с пластинкой G. Подвесив пластинку на стерженек L нитями T_0, пропущенными через отверстия в диске D, цилиндры можно закрепить у поверхности колонки. К другому концу стерженька L прикреплена переброшенная через блок M нить с грузом весом P на конце. Нить навивается виток к витку на колонку, охватывая надетую на стерженек пластинку G. В момент, когда опускающийся груз останавливается, он смещает стерженек, кольцо опускается на диск D, цилиндры освобождаются. Малая сила трения и покоя между цилиндрами и стержнем может служить центростремительной силой для цилиндров, и они очень быстро («мгновенно») соскальзывают к концам стержня. Это увеличивает момент инерции системы и уменьшает, по закону сохранения момента количества движения, ее угловую скорость. Нить начинает навиваться на колонку, груз поднимается вверх, не доходя, однако, до своего первоначального положения — потенциальная энергия его уменьшается.

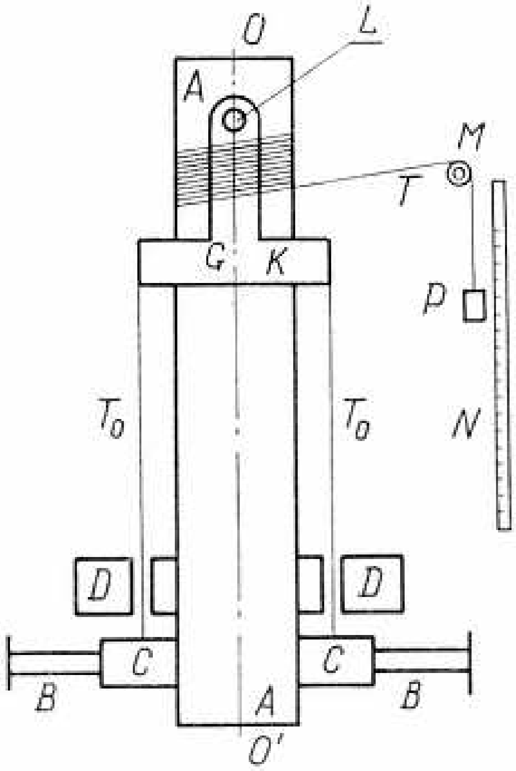

Рис. 1

Это уменьшение вызвано превращением механической энергии в тепловую, при неупругом ударе цилиндров об упоры, наличии сил трения при движении системы и др.

По шкале N измеряются расстояния, проходимые грузом при его опускании и подъеме. На диске имеются не указанные на рисунке специальные крепления. Ими можно закрепить, не пользуясь кольцом с нитями, цилиндры у поверхности колонки.

Все время движения рассматриваемой механической системы может быть разбито на три стадии.

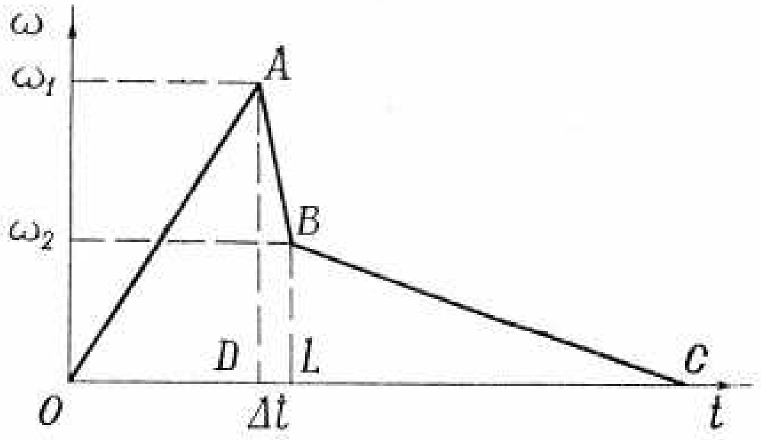

Рис. 2

В первой стадии система, имея наименьший момент инерции, начинает равноускоренное движение. Во второй — происходит изменение ее момента инерции: он быстро увеличивается и становится наибольшим. Угловая скорость вращения, при этом, уменьшается. В третьей стадии система, имея наибольший момент инерции, вращается равнозамедленно и останавливается. Изменение угловой скорости вращения системы со временем может быть изображено, примерно так, как показано на рис. 2. Возрастающая ветвь от нуля до точки A отвечает первой стадии. Убывающая ветвь, от точки B до точки C, отвечает третьей стадии. За незначительное время dt, даваемое отрезком DL, угловая скорость быстро уменьшается. Участок кривой AB соответствует второй стадии — стадии увеличения момента инерции системы. Применив к этой стадии закон сохранения момента количества движения, в соответствии с уравнением (6), получим

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2, \tag{7}$$

где I_1 и I_2 — соответственно наименьший и наибольший моменты инерции системы, ω_1 — наибольшая угловая скорость в первой стадии движения (равноускоренного), ω_2 — наибольшая угловая скорость в третьей стадии движения (равнозамедленного).

Выразим величины, входящие в это уравнение, через другие, которые могут быть измерены на описанной установке.

Для определения отношения моментов инерции воспользуемся уравнениями движения частей системы. При движении с **наименьшим** моментом инерции I_1 имеем:

$$m\frac{dv_1}{dt} = mg - T; \tag{8}$$

$$I_1\frac{d\omega_1}{dt} = rT; \tag{9}$$

$$\frac{dv_1}{dt} = r\frac{d\omega_1}{dt}, \tag{10}$$

где m — масса груза на нити, $\frac{dv_1}{dt}$ — его ускорение, T — натяжение нити, r — радиус колонки, $\frac{d\omega_1}{dt}$ — ее угловое ускорение, g — ускорение силы тяжести. При $mr^2 << I_1$ эти уравнения дают

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{mr^2g}{I_1}. \tag{11}$$

Имеем также

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{2h_1}{t_1^2}, \tag{12}$$

где h_1 — наибольшее (на всю длину нити) расстояние, проходимое грузом за время t_1.

Из двух последних уравнений получим

$$I_1 = \frac{mr^2gt_1^2}{2h_1}. \tag{13}$$

Аналогично при движении системы с **наибольшим** моментом инерции получим

$$I_2 = \frac{mr^2gt_2^2}{2h_1}, \tag{14}$$

где t_2 — время опускания груза на полную длину нити h_1. Из последних двух уравнений имеем

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{t_1^2}{t_2^2}. \tag{15}$$

Для определения отношения угловых скоростей воспользуемся законом сохранения энергии. В первой стадии при опускании груза с высоты h_1 имеем

$$mgh_1=\frac{1}{2}I_1\omega_1^2+\frac{1}{2}mv_1^2+A_1; \tag{16}$$

$$\omega r=v_1, \tag{17}$$

где A_1 — работа против сил трения при опускании груза. Из этих уравнений при $mr_2<<I_1$ получим

$$\omega_1=\sqrt{\frac{2(mgh_1-A_1)}{I_1}}. \tag{18}$$

Для движения системы при подъеме груза на высоту h_2 имеем

$$mgh_1=mgh_2+A_1+A_2+\frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2-I_2\omega_2{}^2\right), \tag{19}$$

где A_2 — работа против сил трения при подъеме груза; $\frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2-I_2\omega_2^2\right)$ — энергия, выделившаяся при неупругом ударе цилиндров об упоры.

Из двух последних уравнений получим

$$\omega_2=\sqrt{\frac{2(mgh_2+A_2)}{I_2}}. \tag{20}$$

Уравнения (18) и (20) дают

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}=\sqrt{\frac{(mgh_2+A_2)I_1}{(mgh_1-A_1)I_2}}. \tag{21}$$

Из уравнений (7), (15) и (21) имеем

$$\frac{t_1^2}{t_2^2}=\frac{mgh_2+A_2}{mgh_1-A_1}. \tag{22}$$

Величины работ A_1 и A_2 определяются экспериментально, исходя из следующих соображений.

Пусть груз, при неизменном моменте инерции I_1, опустится с высоты h_1 и поднимется на высоту h_3. Энергия, равная разности потенциальных энергий груза, была затрачена на работу против сил трения, за все время движения системы.

Для величины работы только при опускании груза получим

$$A_1 = \alpha_1 h_1 mg. \qquad (23)$$

Значение величины α_1 может быть получено, исходя из закона сохранения энергии.

Действительно, имеем

$$A = A_1 + A_2 = \alpha_1 (h_1 + h_3) mg = (h_1 - h_3) mg, \qquad (24)$$

отсюда получим

$$\alpha_1 = \frac{h_1 - h_3}{h_1 + h_3}. \qquad (25)$$

Аналогично при опускании с неизменным моментом инерции I_2 с высоты h_1 и подъеме на высоту h_4 имеем

$$A_2 = \alpha_2 h_2 mg, \qquad (26)$$

где

$$\alpha_2 = \frac{h_1 - h_4}{h_1 + h_4}. \qquad (27)$$

Из уравнений (22), (23) и (26) окончательно получим

$$\frac{t_1^2}{t_2^2} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{1 + \alpha_2}{1 - \alpha_1}. \qquad (28)$$

Это уравнение и служит для экспериментальной проверки уравнения (7), то есть закона сохранения момента количества движения.

Порядок выполнения работы

1. Приблизить цилиндры C к колонке AA и надеть пластинку G кольца K на конец стерженька L.

2. Навить нить груза P виток к витку на колонку с пластинкой до тех пор, пока груз не поднимется до нулевой отметки шкалы N.

3. Освободить колонку и измерить по шкале расстояние h_1, проходимое грузом при полном разматывании нити.

4. Измерить расстояние h_2, на которое поднимется груз при изменении момента инерции системы.

5. Приблизить цилиндры к колонке и закрепить их так, чтобы момент инерции системы после полного разматывания нити оставался неизменным.

6. Навить нить виток к витку на колонку, подводя груз к нулю шкалы.

7. Освободить колонку и секундомером измерить время t_1, за которое груз опустится на всю длину нити.

8. Измерить расстояние h_3, на которое поднимется груз при неизменном моменте инерции системы.

9. Вычислить значение α_1 по формуле (25).

10. Поместить цилиндры у концов стержня.

11. Навить нить на колонку, пока груз не достигнет нулевой отметки шкалы.

12. Освободить колонку и секундомером измерить время t_2 опускания груза на всю длину нити.

13. Измерить высоту h_4, на которую поднимется груз.

14. Вычислить по формуле (27) значение α_2.

15. Измерение всех величин провести не меньше трех раз и рассчитать средние арифметические значения величин.

16. Подстановкой полученных средних значений величин в уравнение (28) убедиться в справедливости в пределах погрешности измерений уравнения (28), а следовательно, и уравнения (6), выражающего закон сохранения момента количества движения.

17. Данные прямых измерений и вычислений поместить в таблицу:

Измеренные и рассчитанные величины

Номер опыта	h_1, см	h_2, см	t_1, с	h_3, см	α_1	t_2, с	h_4, см	α_2	$\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^2$	$\frac{h_2}{h_1}\cdot\frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_1}$
1										
2										
3										
Средние значения										

Дополнительное задание

Получить формулы для оценки погрешностей при определении значений величин, стоящих в левой и правой частях уравнения (28). Рассчитать погрешности метода измерения при определении значений левой и правой частей этого уравнения.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте понятия момента силы, момента количества движения относительно точки и относительно оси, момента инерции материальной точки и механической системы (тела).
2. Какой вид имеет дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела?
3. Какая механическая система называется замкнутой?
4. В чем состоит закон сохранения момента количества движения?
5. Устройство и принцип действия установки для проверки закона сохранения момента количества движения.
6. Как оценить погрешности при выполнении данной работы?

Литература

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Механика. М., Наука, т. 1, 1974, § 30—34.
2. *И. В. Савельев.* Курс общей физики. Механика. Молекулярная физика. М., Наука, 1977, т. 1, § 29.
3. *Хайкин С. Э.* Физические основы механики. М., Наука, 1971.