

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

### ИЗМЕРЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Цель работы: изучение колебаний физического маятника, определение ускорения силы тяжести с помощью маятника-стержня, оценка точности метода измерения.

Принадлежности: маятник-стержень, секундомер.

#### *Краткая теория*

Маятником называют любое тело, которое может колебаться относительно горизонтальной оси под действием силы тяжести. Математический маятник отличается от физического тем, что размеры колеблющегося тела малы по сравнению

с расстоянием от центра тяжести его до оси вращения и масса подвеса мала по сравнению с массой тела.

Рассмотрим колебания физического маятника. На рис. 1 изображено тело произвольной формы, которое может колебаться относительно горизонтальной оси  $O$ . Колебание тела при этом обуславливается тангенциальной составляющей  $P_{\tau}$  веса тела, которая стремится вернуть его в положение равновесия, в то время как нормальная составляющая  $P_n$  уравновешивается реакцией оси. Для малых углов отклонений  $\varphi$  величина возвращающей силы запишется в виде

$$P_{\tau} = -P \sin \varphi = -P \varphi. \quad (1)$$

Знак минус означает, что сила всегда направлена к положению равновесия.

Вращающий момент силы  $P_{\tau}$  выразим через

$$M = -P \varphi a, \quad (2)$$

где  $a$  — расстояние от оси вращения до центра тяжести тела. В соответствии с основным уравнением вращательного движения тел вращающий момент  $M$  можно связать с угловым ускорением  $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$  соотношением

$$M = I \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (3)$$

где  $I$  — момент инерции физического маятника относительно оси вращения.

Отсюда имеем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{M}{I} = -\frac{P \varphi a}{I}$$

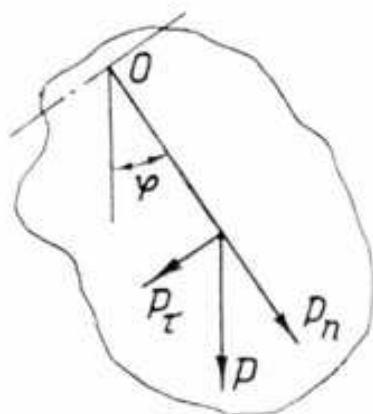


Рис. 1

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{P \varphi a}{I} = 0. \quad (4)$$

Решением уравнения движения (4) является функция

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left( \sqrt{\frac{Pa}{I}} t + \alpha_0 \right), \quad (5)$$

в которой величина  $\varphi_0$  представляет максимальный угол отклонения маятника от положения равновесия,  $\alpha_0$  — начальную фазу колебаний. (Значения  $\varphi_0$  и  $\alpha_0$  определяются из начальных условий).

Для доказательства этого продифференцируем по времени выражение (5) два раза:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{Pa}{I} \varphi_0 \sin\left(\sqrt{\frac{Pa}{I}} t + \alpha_0\right) = -\frac{Pa}{I} \varphi. \quad (6)$$

Равенство (6) полностью совпадает с (4) и, следовательно, (5) действительно является решением исходного уравнения.

Таким образом, изменение угла смещения  $\varphi$  происходит периодически, причем система будет возвращаться в исходное состояние через такое время  $T$ , за которое аргумент под знаком синуса изменится на величину

$$2\pi = \sqrt{\frac{Pa}{I}} T. \quad (7)$$

Из равенства (7) получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Pa}} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (7a)$$

Время  $T$  носит название полного периода колебаний физического маятника.

Для случая математического маятника-грузика малых размеров на нити имеем  $a=l$  и  $I=ml^2$ , где  $m$  и  $l$  — соответственно масса грузика и длина нити маятника. Тогда на основании соотношения (7a) получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7б)$$

Из сопоставления (7a) и (7б) вытекает, что периоды колебаний физического и математического маятников будут одинаковыми в случае, если  $l = \frac{I}{ma}$ .

Величина  $\frac{I}{ma}$  носит название «приведенной длины физического маятника» и равна, очевидно, длине математического маятника с тем же периодом колебаний.

Если к оси физического маятника подвесить математический маятник и подобрать длину этой нити так, чтобы она была равна приведенной длине физического маятника, то отклоненные на одинаковый угол оба маятника будут колебаться вместе, так что грузик все время будет находиться в одной и той же точке физического маятника. Эта точка, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси вращения, называется центром качаний физического маятника.

Точка подвеса  $O$  и центр качаний обладают свойством взаимности: если маятник подвесить так, чтобы ось подвеса прошла через точку центра качаний, то точка  $O$  станет центром качаний и период колебаний маятника не изменится. На этом свойстве основано устройство оборотного маятника, применяемого также для определения ускорения силы тяжести.

Соотношения (7) — (7б) справедливы лишь для малых углов отклонения. В противном случае период колебания будет зависеть от угла  $\varphi$ . Например, период колебаний математического маятника будет приближенно описываться соотношением

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right). \quad (8)$$

Преобразуем выражение (7а).

По теореме Штейнера момент инерции тела  $I$  можно представить следующим образом:

$$I = I_0 + ma^2,$$

где  $I_0$  — момент инерции тела относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через точку  $a$  — центр тяжести тела.

В этом случае формула (7а) примет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mga}}. \quad (9)$$

Зависимость  $T = f(a)$  для физического маятника в виде однородного стержня приведена на рис. 2.

Начало координат помещено в центре тяжести маятника. Из рис. 2 следует, что данный маятник имеет 4 точки подвеса с одинаковым периодом колебаний, по 2 точки по обе стороны от центра тяжести. Ход кривой качественно можно объяснить следующим образом: подвесу маятника в центре тяжести ( $a=0$ ) должен соответствовать бесконечно большой период колебаний, так как в этом случае величина возвращающего момента  $Pfa$  при всех отклонениях маятника равна нулю. При достаточно малых значениях  $a$ , когда выполняется условие  $ma^2 \ll I_0$ , из равенства (9) имеем

$$T \simeq 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mga}} \sim a^{-\frac{1}{2}}. \quad (9a)$$

Следовательно, с увеличением значения  $a$  значение периода колебания  $T$  будет уменьшаться. Таким образом, увеличение  $a$  приводит, с одной стороны, к увеличению момента, возвращающего маятник, в положение равновесия, благодаря чему период колебания стремится уменьшиться, и, с другой стороны — к росту момента инерции системы  $I = I_0 + ma^2$ , который способствует увеличению периода колебаний. При небольших значениях  $a$  рост момента инерции не оказывает решающего влияния на изменение периода колебаний, и наблюдается спад кривой. Но начиная с  $a = a_0$ , рост момента инерции оказывает большее влияние на период колебаний, чем влияние возвращающего момента  $M$ , и имеет место подъем кривой (рис. 2).

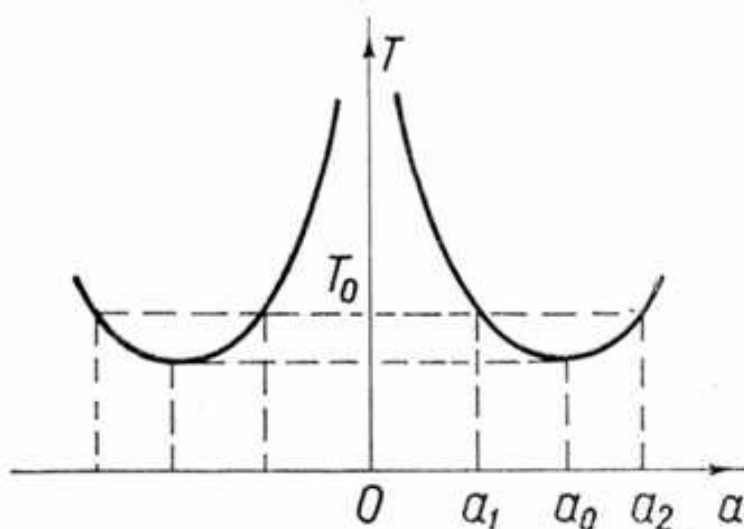


Рис. 2

При сравнительно больших значениях  $a$  имеет место неравенство  $ma^2 \gg I_0$ . Тогда из равенства (9) получим

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{ma^2}{mga}} \sim a^{\frac{1}{2}}. \quad (96)$$

Очевидно, точка  $a_0$  соответствует положению, когда рост момента инерции и вращающего момента оказывают одинаковые противоположные действия.

Если маятник подвешен сначала на расстоянии  $a_1$  от центра тяжести, а затем на расстоянии  $a_2$ , то соответствующие периоды колебаний будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma_1^2}{mga_1}}, \\ T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + ma_2^2}{mga_2}}. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Из системы (10), исключив  $I_0$ , нетрудно определить величину  $g$  — ускорение свободного падения:

$$g = \frac{4\pi^2 (a_1^2 - a_2^2)}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2^2}. \quad (11)$$

Таким образом, измерив расстояния  $a_1$  и  $a_2$  и соответствующие им периоды колебаний, по формуле (11) можно подсчитать ускорение силы тяжести.

В частном случае, когда периоды колебаний, соответствующие точкам подвеса  $a_1$  и  $a_2$ , совпадают, то есть  $T_1 = T_2 = T_0$ , соотношение (11) упрощается:

$$g = \frac{4\pi^2 (a_1 + a_2)}{T_0^2}. \quad (12)$$

Из формулы (12) следует, что ускорение свободного падения также можно определить из экспериментально снятой кривой зависимости величины периода колебаний физического маятника от расстояния подвеса  $a$ , то есть зависимости  $T = f(a)$ . Для этого, построив кривую  $T = f(a)$ , надо на ней найти такие точки  $a_1$  и  $a_2$ , которым соответствует один и тот же период колебаний (рис. 2), и затем воспользоваться выражением (12).

#### *Описание установки и вывод рабочей формулы*

Общий вид установки, используемой в работе, представлен на рис. 3. Физическим маятником служит металлический стержень 1 с нанесенной на одной из боковых сторон миллиметровой шкалой. Вдоль стержня могут перемещаться две треугольные призмы 2, которые можно закреплять в любом месте стержня (но симметрично относительно его середины во избежание смещения центра тяжести). На конце горизонтальной части 3 кронштейна 4 имеются небольшие углубления, в которые упирается основание одной из призм при колебаниях маятника. Кронштейн крепится к чугунной плите 5. Горизонтальное положение плиты устанавливается регулировочными винтами 6.



При выводе рабочей формулы для определения ускорения силы тяжести с помощью данной установки необходимо учитывать массы и моменты инерции опорных призм относительно оси качания маятника. В этом случае выражение для периода колебаний маятника-стержня примет вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{01} + m_1 a^2 + I_{02} + m_2 b^2 + I_3}{(m_1 + m_2 + m_3) g a}}, \quad (13)$$

где  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  — массы стержня, нижней и верхней призм соответственно;  $I_{01}$  — момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр тяжести стержня и параллельной оси качания маятника;  $I_{02}$  — момент инерции нижней призмы относительно оси, проходящей через центр тяжести призмы и параллельной оси качания;  $I_3$  — момент инерции верхней призмы относительно оси качания маятника;  $b$  — расстояние от центра тяжести нижней призмы до точки подвеса маятника.

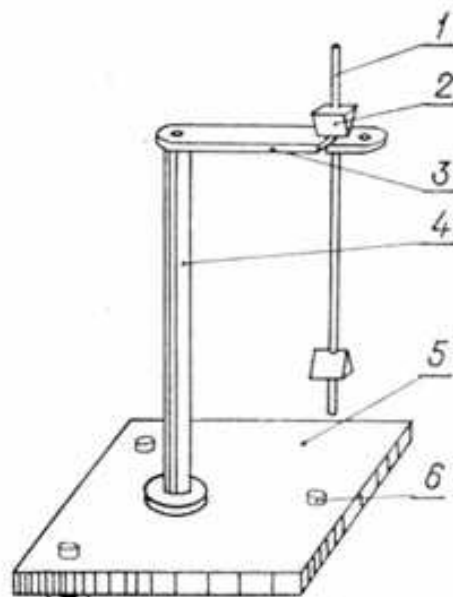


Рис. 3

Записав соотношение (13) для случаев  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $T_1$  и  $a_2$ ,  $b_2$ ,  $T_2$  и исключив из уравнений величину  $(I_{01} + I_{02} + I_3)/(m_1 + m_2 + m_3)$ , при  $T_1 = T_2 = T_0$  имеем

$$g = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} \left( 1 + \frac{b_1^2 - b_2^2}{a_1^2 - a_2^2} \cdot \frac{m_2}{m_1} \right) 4\pi^2 \frac{a_1 + a_2}{T_0^2}. \quad (14)$$

Поскольку можно положить  $b \approx 2a$ , то окончательно получим

$$g = \frac{m_1 + 4m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot 4\pi^2 \cdot \frac{a_1 + a_2}{T_0^2}. \quad (15)$$

Вычитая из (15) соотношение (12), приходим к выводу, что пренебрежение наличием опорных призм приводит к появлению систематической погрешности, имеющей вид

$$\Delta g_{\text{сист.}} = \left( \frac{m_1 + 4m_2}{m_1 + m_2 + m_3} - 1 \right) \cdot \frac{4\pi^2 \cdot (a_1 + a_2)}{T_0^2} = \frac{3m_2 - m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \times \\ \times 4\pi^2 \frac{a_1 + a_2}{T_0^2}. \quad (16)$$

### Порядок выполнения работы

1. Установить призмы симметрично у концов стержня и измерить с точностью до 1 мм расстояние от точки подвеса до конца стержня.

2. Определив длину стержня, вычислить расстояние  $a$  между точкой подвеса и центром тяжести стержня.

3. Подвесить стержень так, чтобы ось вращения проходила около одного из его концов, и вывести маятник из положения равновесия.

4. При установлении колебаний с амплитудой порядка  $4—5^\circ$  измерить секундомером время  $t$ , в течение которого происходит не менее 50 полных колебаний маятника.

5. По известным  $t$  и числу колебаний вычислить период одного полного колебания маятника  $T$  с точностью до двухтысячных долей секунды.

Измерения периода  $T$  произвести для различных значений  $a$ , перемещая точку подвеса каждый раз на 4 см.

6. Результаты измерений занести в табл. 1:

Таблица 1

Значения измеренных и рассчитанных величин

Номер опыта	1	2	3...
Расстояние от точки подвеса до конца стержня, $l$ , мм			
Расстояние от точки подвеса до центра тяжести, $a$ , мм			
Время 50 периодов, $t$ , с			
Период колебаний, $T$ , с			

7. По известным значениям  $a$  и  $T$  построить график, отложив по вертикальной оси период  $T$ , по горизонтальной оси расстояние  $a$  (см. приложение 6).

8. Для пяти значений периода колебаний  $T$  найти соответствующие значения расстояний  $a_1$  и  $a_2$  (см. рис. 2).

9. По рабочей формуле (15) вычислить значение  $g$  и произвести обработку результатов измерений. Значения масс верхней и нижней призм указаны на установке.

10. Результаты вычислений свести в табл. 2.

11. Записать окончательный результат измерения, срав-



Значения величин, рассчитанных по графику и по рабочей формуле

Сечение графика	$T_0, \text{ с}$	$a_1, \text{ см}$	$a_2, \text{ см}$	$g, \text{ см/с}^2$	$\bar{g}, \text{ см/с}^2$	$ \Delta g , \text{ см/с}^2$	$\overline{ \Delta g }, \text{ см/с}^2$
1							
2							
3							
4							
5							

нить полученное значение  $\bar{g}$  с известным более точным значением  $g$  для данной местности и объяснить причины возможных расхождений.

#### Указания по технике безопасности

1. При установке маятника-стержня необходимо следить за тем, чтобы верхняя опорная призма маятника точно встала в углубления кронштейна маятника, а головка винта призмы была расположена с открытой стороны прорези в кронштейне.

2. Запрещается во избежание срыва маятника с опоры отклонять маятник на большой угол.

3. После выполнения эксперимента необходимо снять маятник с опорного кронштейна.

#### Дополнительное задание

По данным эксперимента рассчитать значение расстояния  $a_{\text{мин}}$ , при котором период колебания маятника-стержня имеет минимальное значение  $T_{\text{мин}}$ .

Исследовав на экстремум зависимость  $T=f(a)$  по формуле (9), получить соотношение

$$a_{\text{мин}} = \frac{l}{2\sqrt{3}},$$

где  $l$  — длина стержня. Рассчитать значение  $a_{\text{мин}}$  и сравнить его со значением, полученным из опыта.

### Контрольные вопросы

1. Что называется физическим маятником?
2. Приведите формулу периода колебаний физического маятника и объясните ход кривой зависимости периода колебаний от расстояния между точкой подвеса и центром тяжести маятника-стержня.
3. Что такое ускорение силы тяжести и какими факторами оно определяется?
4. Как определить ускорение силы тяжести по кривой зависимости периода колебаний маятника-стержня от расстояния между точкой подвеса и центром тяжести маятника?
5. Каковы причины систематической погрешности при избранном методе измерения ускорения силы тяжести?

### Литература

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1974, т. 1, § 41.
2. Савельев И. В. Курс общей физики. М., Наука, 1977, т. 1, § 54.
3. Хайкин С. В. Физические основы механики. М., Наука, 1971, § 90, 91.
4. Физический практикум. Механика и молекулярная физика/Под ред. В. И. Ивероной. М., Наука, 1967, задача 4.
5. Маятник. Маятниковый прибор. — В кн.: Физический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1963, т. 3.