

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

### ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

Цель работы: изучить понятия момента инерции материальной точки и твердого тела, ознакомиться с экспериментальными способами измерения моментов инерции тел, проверка теоремы Штейнера-Гюйгена, оценка точности методов измерения.

#### Краткая теория

Вращательное движение твердого тела удобно описывать скалярной величиной, называемой моментом инерции тел.

По определению момент инерции  $I$  тела относительно некоторой оси выражается формулой

$$I = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2, \quad (1)$$

где  $r_i$  есть расстояния от оси до элементарных масс  $\Delta m_i$ , из которых состоит все тело, причем суммирование производят по всем элементарным массам.

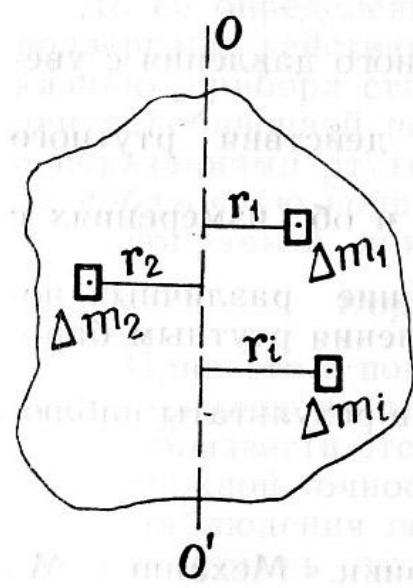


Рис. 1

Для выяснения физического смысла понятия момента инерции вычислим кинетическую энергию  $E_k$  тела, вращающегося относительно  $O O'$  (рис. 1) с угловой скоростью  $\omega$ .

Так как линейные скорости отдельных частиц разные, поскольку различны их расстояния  $r_i$  от оси вращения, то кинетическую энергию вращающегося тела можно подсчитать суммированием кинетических энергий отдельных его частиц:

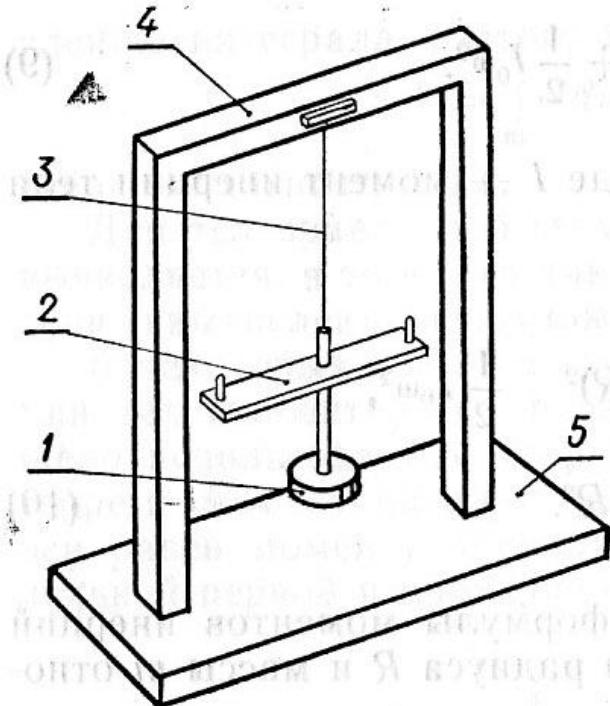


Рис. 3

При повороте системы на малый угол  $\alpha$  в стальной проволоке возникает раскручивающий момент  $M$ , который в пределах малых отклонений пропорционален углу, поскольку можно считать, что деформация носит упругий характер, подчиняющийся закону Гука. Таким образом,

$$M = \alpha D, \quad (11)$$

где  $D$  — раскручивающий момент, соответствующий единице угла кручения.

Если теперь системе представить возможность колебаться, то она будет совершать гармоническое колебательное движение по закону

$$\alpha = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (12)$$

где  $\alpha$  — текущий угол отклонения,  $\alpha_0$  — максимальный угол отклонения (амплитуда колебаний),  $T$  — период колебания.

Угловая скорость гармонического колебательного движения выражается

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi\alpha_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t, \quad (13)$$

а ее максимальное значение достигается, когда система проходит положение равновесия ( $t = 0, \frac{T}{2}, 2\frac{T}{2}, 3\frac{T}{2}, \dots$ ), то есть

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha_0}{T}. \quad (14)$$

В соответствии с формулами (3) и (14) кинетическая энергия системы в положении равновесия запишется

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{2\pi^2\alpha_0^2}{T^2} I. \quad (15)$$

Здесь  $I$  — момент энергии системы. Эта энергия должна равняться потенциальной энергии системы при ее максимальном

отклонении от положения равновесия. Потенциальную энергию подсчитаем, используя выражения (11)

$$E_p = \int_0^{\alpha_0} M d\alpha = \int_0^{\alpha_0} \alpha D d\alpha = \frac{D \alpha_0^2}{2}. \quad (16)$$

Из условия  $E_k = E_p$  легко определяется  $T$  — период колебания системы:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (17)$$

Подвесим теперь к пластине 2 с обеих сторон на равных расстояниях  $r$  от оси вращения одинаковые цилиндрики с массой  $m$ .

Момент инерции системы изменится:

$$I_1 = I + 2I_2, \quad (18)$$

где  $I_2$  — момент инерции цилиндра относительно оси вращения системы.

По теореме Штейнера-Гюйгенса (10) можно записать

$$I_2 = \frac{1}{2} mr_0^2 + mr^2, \quad (19)$$

где  $r_0$  — радиус добавленных цилиндриков.

Таким образом, период колебаний новой системы будет иметь вид

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2\left(\frac{1}{2} mr_0^2 + mr^2\right)}{D}}. \quad (20)$$

Решая систему уравнений (17), (20) относительно неизвестной величины  $I$ , найдем:

$$I = 2m\left(r^2 + \frac{r_0^2}{2}\right) \cdot \frac{T^2}{T_1^2 - T^2}. \quad (21)$$

При выполнении работы удобно иметь дело не с величинами  $r_0$  и  $r$ , а с диаметрами цилиндриков  $d_0$  и расстояниями  $L$  между ними.

Учитывая, что

$$r_0 = \frac{d}{2} \text{ и } r = \frac{L}{2},$$

окончательно получаем рабочую формулу:

$$E_k = \frac{1}{2} m(\omega R)^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2. \quad (9)$$

В то же время  $E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$ , где  $I$  — момент инерции тела относительно оси  $C$ . Отсюда

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} m(\omega R)^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2, \\ (11) \quad I = I_0 + mR^2. \quad (10)$$

Для иллюстрации приведем формулы моментов инерций некоторых простых тел вращения радиуса  $R$  и массы  $m$  относительно их геометрической оси:

$I = mR^2$  — для кольца и полого цилиндра,

$I = \frac{1}{2} mR^2$  — для диска и сплошного цилиндра,

$I = \frac{2}{5} mR^2$  — для шара.

## Упражнение 2. Определение момента инерции с помощью трифиллярного подвеса

Принадлежности: трифиллярный подвес, секундомер, штангенциркуль, технические весы, разновесы, грузы.

### Описание установки и вывод рабочей формулы

Момент инерции тел произвольной формы можно определить с помощью трифиллярного подвеса: круглой платформы

радиуса  $R$ , подвешенной на длинных неупругих нитях к диску меньшего радиуса  $r$  (рис. 4).

Платформа может совершать малые колебания в горизонтальной плоскости относительно вертикальной оси, проходящей через ее центр тяжести. Колебательное движение платформы сопровождается ее периодическим движением по вертикали с некоторой амплитудой (за счет кручения нитей). но для малых отклонений можно пренебречь изменением длины нитей.

При колебаниях, поднимаясь на высоту  $h$ , платформа массы  $m$  приобретает потенциальную энергию:

$$E_p = mgh. \quad (23)$$

В момент прохождения платформой положения равновесия при отсутствии сил трения потенциальная энергия полностью превращается в кинетическую энергию, которая в соответствии с формулой (15) запишется в виде

$$E_k = \frac{2\pi^2 a_0^2}{T^2} \cdot I, \quad (24)$$

где  $T$  — период колебаний платформы,  $I$  — момент инерции платформы,  $a_0$  — амплитуда колебаний.

Из условия равенства  $E_p$  и  $E_k$  определим момент инерции системы  $I$ :

$$I = \frac{mgh}{2\pi^2 a_0^2} \cdot T^2. \quad (25)$$

Найдем связь между  $a_0$ , амплитудой колебания платформы в горизонтальной плоскости и ее смещением  $h$  по вертикали. Рассмотрим рис. 5. Из него следует:

$$h = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}, \quad (26)$$

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} (BC_1)^2 &= (BA_1)^2 - (A_1C_1)^2 = \\ &= l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha_0). \end{aligned} \quad (28)$$

Таким образом,

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha_0)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{BC + BC_1}. \quad (29)$$

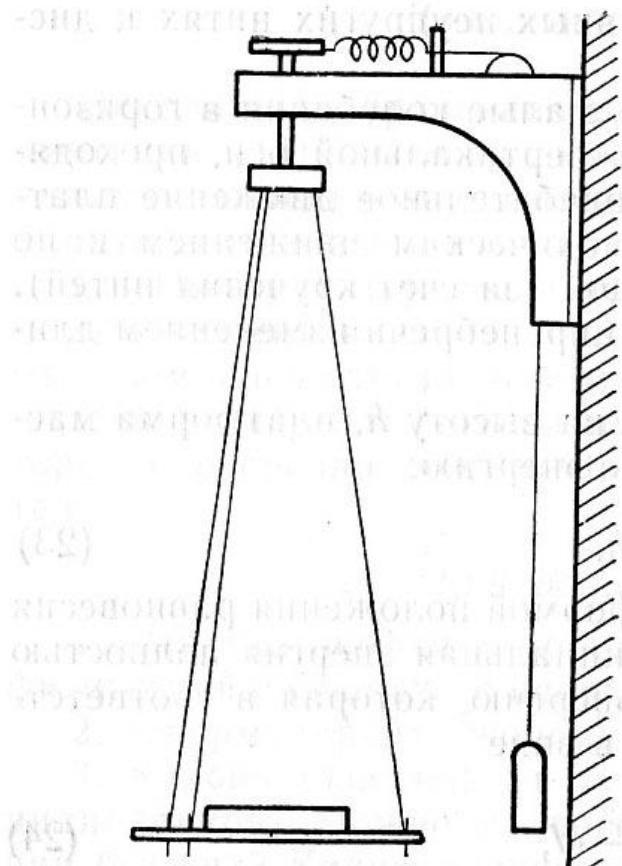


Рис. 4

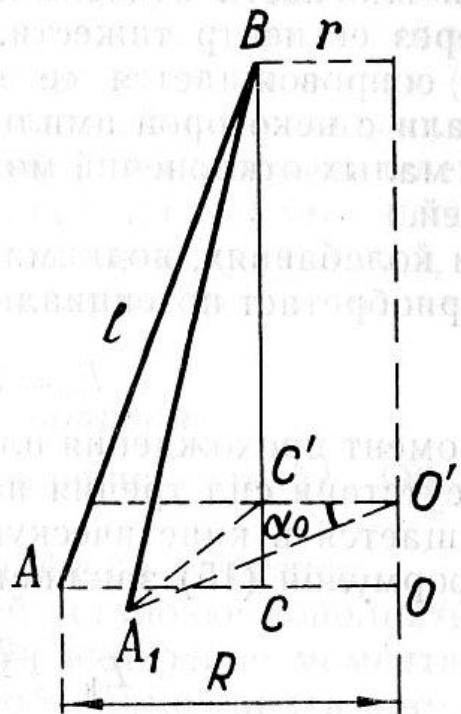


Рис. 5

С учетом ограничений, наложенных выше на колебательное движение, можно принять

$$\sin^2 \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0^2}{4} \quad \text{и } BC + BC_1 \approx 2l.$$

Тогда рабочая формула будет иметь вид

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2 \quad (30)$$

или

$$I = K \cdot mT^2, \quad (31)$$

где

$$K = \frac{gRr}{4\pi^2 l}. \quad (31a)$$

### Порядок выполнения работы

1. Измерение момента инерции ненагруженной платформы  $I_0$ :

1.1. Привести с помощью рычажного механизма платформу в колебательное движение в горизонтальной плоскости с амплитудой не более 5—6°.

1.2. Измерить секундомером время  $t$  не менее 30 полных колебаний платформы.

1.3. Вычислить период одного полного колебания  $T$ .

1.4. По рабочей формуле (31) вычислить значение момента инерции ненагруженной платформы  $I_0$ . Значения  $R$ ,  $r$ ,  $l$  и  $t$  приведены на установке.

1.5. Данные измерений свести в табл. 1:

Таблица 1

Измеренные и рассчитанные величины

Номер опыта	$t$ , с	$n$	$T$ , с	$\bar{T}$ , с	$m$ , г	$K$ , $\text{см}^2/\text{с}^2$	$I$ , $\text{г}\cdot\text{см}^2$
1							
2							
3							

2. Измерение момента инерции нагруженной платформы  $I_1$ :

2.1. Измерить на технических весах массу исследуемого тела  $M$ .

2.2. Положить на платформу концентрично с ней исследуемое тело и привести платформу в колебательное движение.

2.3. Проделать операции, аналогичные операциям в пунктах 1.2, 1.3.

2.4. По рабочей формуле (31) вычислить значение момента инерции нагруженной платформы  $I_1$ . При подсчете вместо массы платформы  $m$  необходимо подставлять в рабочую формулу массу  $(m+M)$ .

2.5. Данные измерений свести в табл. 2, аналогичную табл. 1.

3. Определение момента инерции исследуемого тела:

3.1. Вычесть из значения момента инерции нагруженной платформы  $I_1$  значение момента инерции ненагруженной платформы  $I_0$ . Разность будет представлять собой значение момента инерции исследуемого тела  $I_t$ , относительно его геометрической оси.

4. Определение относительной погрешности измерений методом трифиллярного подвеса:

4.1. Измерить штангенциркулем радиус цилиндра  $R_{ц}$  и определить взвешиванием на технических весах его массу  $M_{ц}$ .

4.2. Положить на платформу концентрично с ней цилиндр и привести платформу в колебательное движение.

4.3. Проделать операции, аналогичные операциям в пунктах 1.2, 1.3.

4.4. По рабочей формуле (3.1) вычислить момент инерции платформы, нагруженной цилиндром  $I_2$ . В рабочей формуле под массой следует полагать массу  $m + M_{ц}$ .

4.5. Результаты измерений свести в табл. 3, аналогичную табл. 1.

4.6. Вычесть из значения момента инерции платформы с цилиндром  $I_2$  значение момента инерции ненагруженной платформы  $I_0$  и получить значение момента инерции цилиндра  $I_{ц}$ .

4.7. По формуле  $I_{ц}' = \frac{M_{ц}R_{ц}^2}{2}$  вычислить момент инерции цилиндра.

4.8. Вычислить относительную погрешность измерений момента инерции с помощью трифиллярного подвеса по формуле

$$\frac{I'_{ц} - I_{ц}}{I'_{ц}} \cdot 100\%,$$

4.9. Записать окончательный результат измерения момента инерции тела с учетом полученной погрешности метода.

5. Проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса:

5.1. Положить на платформу симметрично вплотную друг к другу два одинаковых цилиндра так, чтобы ось вращения платформы проходила вдоль оси симметрии цилиндров. Привести платформу с грузами в колебательное движение.

5. Выполнить операции, аналогичные операциям в п.п. 1.2, 1.3.

5.3. По рабочей формуле (31) вычислить момент инерции нагруженной платформы  $I_3$ .

5.4. Данные измерений и вычислений свести в табл. 4, аналогичную табл. 1.

5.5. Вычесть из значения момента инерции нагруженной платформы  $I_3$  значение момента инерции пустой платформы

$I_0$  и получить значение момента инерции двух цилиндров  $I_{2\text{ц}1}$  относительно оси вращения платформы.

5.6. Вычислить момент инерции одного цилиндра, относительно оси, проходящей через его край, по формуле

$$I_{\text{ц}1} = \frac{I_{2\text{ц}1}}{2}, \quad (32)$$

5.7. Вычислить момент инерции цилиндра  $I_{\text{ц}1}$  на основании теоремы Штейнера-Гюйгенса по формуле

$$I'_{\text{ц}1} = \frac{1}{2} M_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2 + M_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2 = \frac{3}{2} M_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2, \quad (33)$$

где  $M_{\text{ц}}$  — масса цилиндра,  $R_{\text{ц}}$  — радиус цилиндра находятся из измерений.

5.8. Сравнить значения моментов инерции  $I_{\text{ц}1}$  и  $I'_{\text{ц}1}$ . Со-впадение значения в пределах погрешности метода измерений будет свидетельствовать о справедливости теоремы Штейнера-Гюйгенса.

#### *Указания по технике безопасности*

Запрещается во избежание срыва грузов раскачивать платформу на большие углы!

#### *Дополнительное задание*

Имеется диск с двумя вырезами, центры которых находятся на прямой, проходящей через центр диска симметрично от него.

По измерениям геометрических размеров и массы вычислить момент инерции этого диска, относительно оси, перпендикулярной к плоскости и проходящей через его центр. С помощью трифиллярного подвеса экспериментально подтвердить рассчитанное значение момента инерции этого диска.

#### *Контрольные вопросы*

1. Что называется моментом инерции тела? Объясните физический смысл этого понятия.

2. В чем состоит метод измерения моментов инерции тел с помощью трифиллярного подвеса?

3. Сформулируйте теорему Штейнера-Гюйгенса. Как под-

тврдить справедливость этой теоремы, использовав трифильный подвес?

4. При каких упрощающих предположениях получена рабочая формула?

5. Как оценить точность измерения момента инерции тел данным методом?

### Л и т е р а т у р а

1. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1974, т. 1. § 33, 35, 36, 42 (п. 2).

2. Киттель Ч., Найт У., Рудерман М. Курс физики. М., Наука, 1971, т. 1, § 8.1.