ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

Цель работы: изучить понятия момента инерции материальной точки и твердого тела, ознакомиться с экспериментальными способами измерения моментов инерции тел, проверка теоремы Штейнера-Гюйгенса, оценка точности методов измерения.

Краткая теория

Вращательное движение твердого тела удобно описывать скалярной величиной, называемой моментом инерции тел.

По определению момент инерции I тела относительно некоторой оси выражается формулой

$$I = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2, \tag{1}$$

где r_i есть расстояния от оси до элементарных масс Δm_i, из которых состоит все тело, причем суммирование производят по всем элементарным массам.

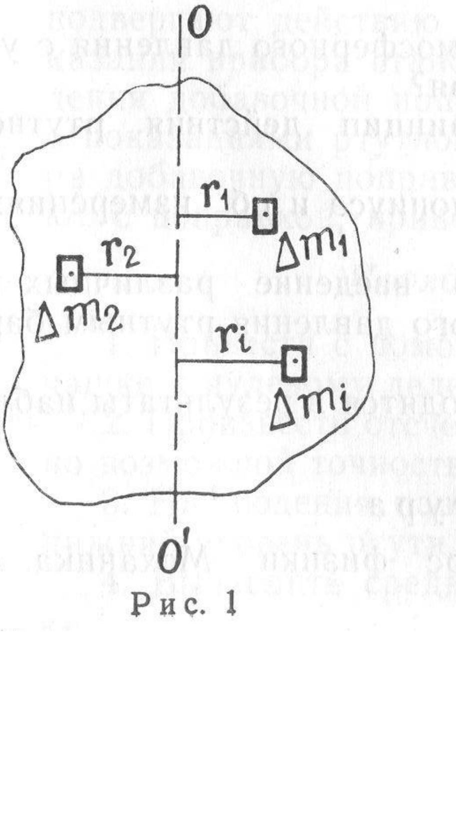

Рис. 1

Для выяснения физического смысла понятия момента инерции вычислим кинетическую энергию $E_к$ тела, вращающегося относительно OO' (рис. 1) с угловой скоростью ω.

Так как линейные скорости отдельных частиц разные, поскольку различны их расстояния r_i от оси вращения, то кинетическую энергию вращающегося тела можно подсчитать суммированием кинетических энергий отдельных его частиц:

$$E_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta m_i v_i^2}{2}. \tag{2}$$

Но линейная скорость v_i частицы связана с угловой скоростью вращения тела соотношением $v_i = \omega r_i$, и поэтому выражение (2) перепишется так:

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{3}$$

Сравнивая формулы для кинетических энергий тела, движущегося поступательно со скоростью v, и тела, вращающегося с угловой скоростью ω

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \text{ и } E_k = \frac{I\omega^2}{2},$$

легко видеть их полную аналогию по форме записи. Точно также, если основное уравнение динамики в поступательном движении есть

$$F = m\frac{dv}{dt}, \tag{4}$$

то в динамике вращательного движения оно примет форму

$$M = I\frac{d\omega}{dt}, \tag{5}$$

где M — момент внешних сил, приложенных к телу; $\frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение тела.

Из формул (4) и (5) следует, что момент инерции тела во вращательном движении аналогичен массе тела в поступательном движении и при данном моменте внешних сил определяет величину углового ускорения.

Из определения момента инерции по формуле (1) вытекает, что произведение $\Delta m_i \cdot r_i^2$ можно рассматривать как моменты инерций масс Δm_i относительно выделенной оси, а полный момент инерции тела — как сумму моментов инерций его частей. При этом линейные размеры масс должны быть значительно меньше расстояний r_i, чтобы их можно было считать точечными массами. Поэтому вычисление момента инерции и соотношения (1) сводится по существу к вычислению интеграла, взятого по всему объему тела, то есть

$$V = \int\limits_m r^2 dm = \int\limits_V \rho r^2 dV, \qquad (6)$$

где ρ — плотность тела.

Для тел правильной геометрической формы этот интеграл вычисляется, в то время как для тел произвольной формы его точное вычисление невозможно.

В некоторых частных случаях вычисление моментов инерции тел относительно произвольных осей может быть упрощено использованием теоремы Штейнера-Гюйгенса. По этой теореме момент инерции тела массы m относительно любой оси равен моменту инерции тела относительно оси, параллельной первой и проходящей через центр тяжести тела, сложенному с произведением его массы m на квадрат расстояния центра тяжести от первой оси.

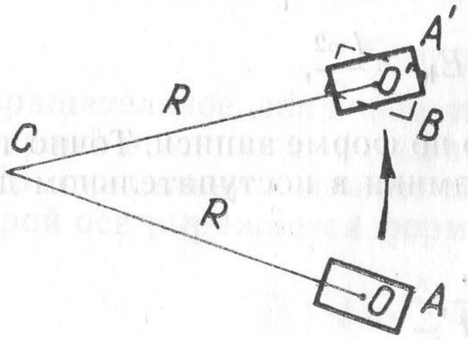

Рис. 2

Действительно, пусть тело m вращается с угловой скоростью ω вокруг оси C (рис. 2), перемещаясь за некоторое время из положения A в A'. При этом если центр тяжести находится в точке O на расстоянии R от оси C, то он переместился в точку O' с линейной скоростью $v = \omega R$. Движение тела из положения A и A' разложим на два более простых: первое со скоростью v — поступательное из положения A в B (до совмещения центра тяжести тела с точкой O'), и второе со скоростью ω — вращательное из положения B в A' относительно оси, проходящей через точку O', параллельно оси С. Кинетические энергии для соответствующих перемещений запишутся в виде

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m (\omega R)^2, \qquad (7)$$

и

$$E_{k2} = \frac{1}{2} I_0 \omega^2, \qquad (8)$$

где I_0 — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела.

Следовательно, полная кинетическая энергия тела имеет вид

$$E_k = \frac{1}{2} m(\omega R)^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2. \qquad (9)$$

В то же время $E_k = \frac{1}{2} I\omega^2$, где I — момент инерции тела относительно оси C. Отсюда

$$\frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} m(\omega R)^2 + \frac{1}{2} I_0 \omega^2,$$

$$I = I_0 + mR^2. \qquad (10)$$

Для иллюстрации приведем формулы моментов инерций некоторых простых тел вращения радиуса R и массы m относительно их геометрической оси:

$I = mR^2$ — для кольца и полого цилиндра,

$I = \frac{1}{2} mR^2$ — для диска и сплошного цилиндра,

$I = \frac{2}{5} mR^2$ — для шара.

Упражнение 1. Определение момента инерции тела с помощью крутильного маятника

Принадлежности: крутильный маятник, секундомер, штангенциркуль, технические весы, набор гирь и разновесок, набор грузов, исследуемые тела.

Описание прибора и вывод рабочей формулы

Определим момент инерции массивного цилиндрически симметричного тела *1* (рис. 3). С этой целью тело прикрепим к тонкой прямоугольной пластинке *2*, подвешенной тонкой стальной проволокой *3* к вертикальной рамке *4*, установленной на основании 5.

Данная система, образующая крутильный маятник, за счет упругих сил деформации, возникающих в проволоке при ее закручивании, может колебаться в горизонтальной плоскости.

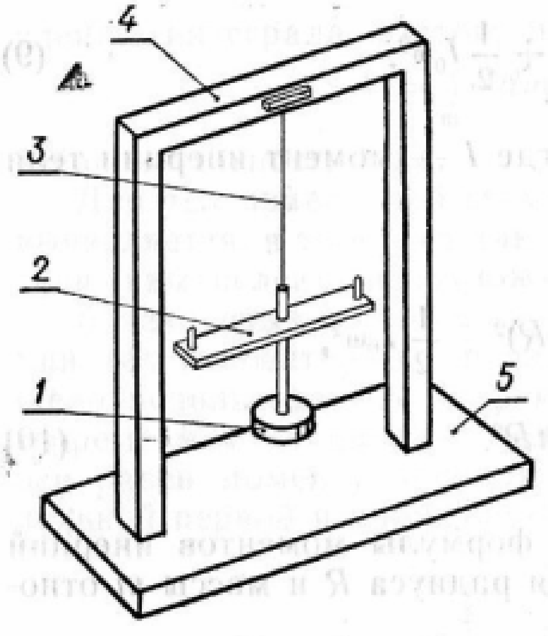

Рис. 3

При повороте системы на малый угол α в стальной проволоке возникает раскручивающий момент M, который в пределах малых отклонений пропорционален углу, поскольку можно считать, что деформация носит упругий характер, подчиняющийся закону Гука. Таким образом,

$$M = \alpha D, \tag{11}$$

где D — раскручивающий момент, соответствующий единице угла кручения.

Если теперь системе предоставить возможность колебаться, то она будет совершать гармоническое колебательное движение по закону

$$\alpha = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T} t, \tag{12}$$

где α — текущий угол отклонения, α_0 — максимальный угол отклонения (амплитуда колебаний), T — период колебания.

Угловая скорость гармонического колебательного движения выражается

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi\alpha_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t, \tag{13}$$

а ее максимальное значение достигается, когда система проходит положение равновесия $\left(t = 0,\ \frac{T}{2},\ 2\,\frac{T}{2},\ 3\,\frac{T}{2},\ \ldots\right)$, то есть

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha_0}{T}. \tag{14}$$

В соответствии с формулами (3) и (14) кинетическая энергия системы в положении равновесия запишется

$$E_k = \frac{2\pi^2\alpha_0^2}{T^2} I. \tag{15}$$

Здесь I — момент энергии системы. Эта энергия должна равняться потенциальной энергии системы при ее максимальном отклонении от положения равновесия. Потенциальную энергию подсчитаем, используя выражения (11)

$$E_р = \int_0^{\alpha_0} M d\alpha = \int_0^{\alpha_0} \alpha D d\alpha = \frac{D\alpha_0{}^2}{2}. \tag{16}$$

Из условия $E_к = E_р$ легко определяется T — период колебания системы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}}. \tag{17}$$

Подвесим теперь к пластине *2* с обеих сторон на равных расстояниях r от оси вращения одинаковые цилиндрики с массой m.

Момент инерции системы изменится:

$$I_1 = I + 2I_2, \tag{18}$$

где I_2 — момент инерции цилиндра относительно оси вращения системы.

По теореме Штейнера-Гюйгенса (10) можно записать

$$I_2 = \frac{1}{2} m r_0{}^2 + m r^2, \tag{19}$$

где r_0 — радиус добавленных цилиндриков.
Таким образом, период колебаний новой системы будет иметь вид

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + 2\left(\frac{1}{2} m r_0{}^2 + m r^2\right)}{D}}. \tag{20}$$

Решая систему уравнений (17), (20) относительно неизвестной величины I, найдем:

$$I = 2m\left(r^2 + \frac{r_0{}^2}{2}\right) \cdot \frac{T^2}{T_1{}^2 - T^2}. \tag{21}$$

При выполнении работы удобно иметь дело не с величинами r_0 и r, а с диаметрами цилиндриков d_0 и расстояниями L между ними.

Учитывая, что

$$r_0 = \frac{d}{2} \text{ и } r = \frac{L}{2},$$

окончательно получаем рабочую формулу:

$$I=\frac{m}{2}\left(L^2+\frac{d_0^2}{2}\right)\frac{T^2}{T_1^2-T^2}. \qquad (22)$$

Порядок выполнения работы

1. Измерение момента инерции ненагруженной системы I_0:

1.1. Отклонить пластинку *2* от положения равновесия на 10—15° и предоставить системе возможность свободно колебаться.

1.2. После установления устойчивых колебаний системы в горизонтальной плоскости измерить время t не менее 30 полных колебаний.

1.3. По известным t и числу колебаний n вычислить период T одного полного колебания.

1.4. Подвесить к пластинке *2* симметрично дополнительные цилиндрики и вновь определить период колебания T_1 системы с цилиндрами.

1.5. Измерить линейкой расстояние между цилиндриками L; штангенциркулем измерить диаметры цилиндриков d_0; измерить массы цилиндриков на технических весах.

1.6. Вычислить значение постоянного множителя K в рабочей формуле (22), где $K=\frac{m}{2}\left(L^2+\frac{d_0^2}{2}\right)$.

1.7. Вычислить момент инерции системы I_0 по формуле (22).

1.8. Результаты измерений и вычислений свести в табл. 1.

2. Измерение момента инерции нагруженной системы I_1:

2.1. Прикрепить к системе тело, момент инерции которого требуется измерить.

2.2. Провести операции, аналогичные операциям в п. 1 и вычислить момент инерции системы с телом I_1.

2.3. Результаты измерений и вычислений свести в табл. 2, аналогичную по форме табл. 1.

3. Измерение момента инерции исследуемого тела $I_т$:

3.1. Из значения момента инерции системы с телом I_1 вычесть значение момента инерции ненагруженной системы I_0 и, таким образом, получить значение момента инерции тела $I_т$ относительно его геометрической оси.

4. Определение относительной погрешности метода измерения:

4.1. Прикрепить к системе цилиндр вместо исследуемого тела.

4.2. Провести операции, аналогичные операциям в п. 1, и вычесть момент инерции системы с цилиндром I_2.

Таблица 1

Измеренные и рассчитанные величины

Номер опыта	t, с	n	T, с	$\bar{T}$, с	t_1, с	n_1	T_1, с	$\bar{T}_1$, с	K, г·см²	I_0, г·см²
1										
2										
3										

4.3. Результаты измерений свести в табл. 3, аналогичную табл. 1.

4.4. Вычитая из значения момента инерции системы с цилиндром I_2 значение момента инерции I_0, получить значение момента инерции цилиндра $I_ц$.

4.5. Измерить штангенциркулем радиус цилиндра R; определить на технических весах массу цилиндра M.

4.6. Вычислить по известным M и R момент инерции цилиндра относительно геометрической оси $I_ц{}^1$ по формуле

$$I_ц' = \frac{MR^2}{2}.$$

4.7. Вычесть из значения момента инерции цилиндра $I_ц$, измеренного с помощью крутильного маятника, значение момента инерции $I_ц{}^1$, полученного с более высокой точностью, чем $I_ц$.

4.8. Вычислить относительную погрешность измерений момента инерции методом крутильного маятника по формуле

$$\frac{I'_ц - I_ц}{I'_ц} \cdot 100\%.$$

5. Записать окончательный результат измерения момента инерции тела с учетом найденной погрешности метода $\Delta I_м$:

$$I_т = \bar{I}_т \pm \Delta I_м.$$

Указание по технике безопасности

Запрещается во избежание срыва крутильного маятника раскачивать его с большой амплитудой!

Дополнительное задание

Использовав уравнение периода колебаний крутильного маятника (17), вывести рабочую формулу для экспериментального определения момента инерции тела произвольной формы, если значение момента инерции другого тела (например, цилиндра) заранее известно с большой точностью. Измерить момент инерции тела заданной преподавателем формы с помощью крутильного маятника, представляющего собой штатив с закрепленной на нем стальной проволокой, на которой поочередно подвешиваются цилиндр и исследуемое тело.

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции тела? Объясните физический смысл этого понятия.
2. Сформулируйте теорему Штейнера-Гюйгенса.
3. Каково назначение в данной установке дополнительных цилиндриков? Можно ли провести измерение момента инерции без них? Какую величину необходимо знать в этом случае?
4. При каких упрощающих предположениях получена рабочая формула?
5. Как оценить точность измерения момента инерции тела данным методом?

Литература

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Механика. М., Наука, 1974, т. 1, § 30, 33, 35, 36, 42 (п. 3).
2. *Киттель Ч., Найт У., Рудерман М.* Курс физики. Механика. М., Наука, 1971, т. 1, § 8.1.