Библиографический список

1. *Буккель, В.* Теория сверхпроводимости. Основы и приложения / В. Буккель. М., 1975. 361 с.
2. *Воронцов, М.А.* Принципы адаптивной оптики / М.А. Воронцов, В.Н. Шмальгаузен. М., 1985. 336 с.
3. *Искендеров, А.Д.* Вариационный метод решения обратной задачи об определении квантомеханического потенциала / А.Д. Искендеров, Г.Я. Ягубов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 5. С. 1044–1048.
4. *Ягубов, Г.Я.* Оптимальное управление коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера: дис. ... д-ра физ.-мат. наук / Ягубов Г.Я. Киев, 1994. 318 с.
5. *Искендеров, А.Д.* Оптимальное управление нелинейными квантомеханическими системами / А.Д. Искендеров, Г.Я. Ягубов // Автоматика и телемеханика. 1989. № 12. С. 27–38.
6. *Ягубов, Г.Я.* О вариационном методе решения многомерной обратной задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера / Г.Я. Ягубов, М.А. Мусаева// Изв. АН. Аз. ССР. Сер. Физ.-тех. и мат. науки. 1994. Т. XV, № 5–6. С. 58–61.
7. *Baudouin, L.* Regularity for a Schrödinger equation with singular potentials and application to bilinear optimal control / L. Baudouin, O. Kavian, J.P. Puel // J. Differential Equations. 2005. Vol. 216. P. 188–222.
8. *Cances, E.* Controle optimal bilineare d'uno equation de Schrodinger / E. Cances, C. Le Bris, M. Pilot // C.R. Acad. Sci. Paris. 2000. Vol. 330, № 1. P. 567–571 /controle optimal/.
9. *Понтрягин, Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л.С. Понтрягин. М., 1982. 332 с.
10. *Ладыженская, О.А.* Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. М., 1973. 408 с.
11. *Искендеров, А.Д.* Определение потенциала в нестационарном уравнении Шредингера / А.Д. Искендеров // Проблемы математического моделирования и оптимального управления: сб. науч. ст. Баку, 2001. С. 6–36.

УДК 514.133+514.17

КОНЕЧНЫЕ ЗАМКНУТЫЕ 5-КОНТУРЫ РАСШИРЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Л.Н. Ромакина

Саратовский государственный университет,
кафедра геометрии
E-mail: romakinaln@mail.ru

На расширенной гиперболической плоскости H^2 проведена классификация конечных замкнутых 5-контуров, выделены их четыре типа, инвариантных относительно фундаментальной группы G плоскости H^2. Доказано, что выпуклые 5-контуры принадлежат двум типам. Внутренность 5-контура первого типа совпадает с плоскостью H^2, 5-контур второго типа может быть составлен из двух простых конечных замкнутых контуров размерности 3 и 4. Его внутренность совпадает с внутренностью составляющего простого 4-контура. Исследованы топологические свойства 5-контуров.

Ключевые слова: расширенная гиперболическая плоскость, тип конечного замкнутого 5-контура, выпуклый конечный замкнутый 5-контур, род вершины 5-контура, особые точки 5-контура.

Finite Closed 5-Loops of Extended Hyperbolic Plane

L.N. Romakina

Saratov State University,
Chair of Geometry
E-mail: romakinaln@mail.ru

There are four types of finite closed 5-loops which are invariant by the fundamental group G and singled out on the extended hyperbolic plane H^2. It is proved that convex 5-loops belong to two types. The interior of the first type 5-loop coincides with the plane H^2. The 5-loop of the second type allows the partition into two simple loops of three and four dimension. Its interior coincides with the interior of the component of the simple 4-loop. The topological 5-loop properties are researched.

Key words:extended hyperbolic plane, type of finite closed 5-loop, convex finite closed 5-loop, sort of 5-loop apex, special points of 5-loop.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] рассматриваются замкнутые конечные n*-контуры* расширенной гиперболической плоскости H^2 как совокупности отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$, для которых содержащие их прямые являются изотропными. Точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ называют *вершинами*, прямые $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ — *сторонами*, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ — *ребрами* конечного замкнутого n-контура. Ребра, имеющие общую вершину, и вершины, принадлежащие одному ребру, называют *смежными* ребрами и вершинами соответственно.

Точку плоскости H^2 называют *внутренней* относительно n-контура, если она не принадлежит данному контуру, и каждая прямая, проходящая через эту точку, имеет с n-контуром не менее двух общих точек.

Непустое множество всех внутренних относительно конечного замкнутого n-контура точек плоскости H^2 называют *внутренностью* данного контура. Обозначение: $\operatorname{int} F$ — внутренность контура F.

Каждые две точки плоскости H^2 в зависимости от положения по отношению к абсолюту могут определять: отрезок параболической прямой, два отрезка эллиптической прямой, отрезок или квазиотрезок гиперболической прямой. С учетом этого введено следующее определение выпуклого замкнутого конечного контура плоскости H^2.

Пусть замкнутый конечный контур F плоскости H^2 обладает внутренностью. Говорят, что отрезок (квазиотрезок) *принадлежит внутренности* контура F, если каждая точка отрезка (квазиотрезка) является внутренней относительно данного контура.

Замкнутый конечный контур плоскости H^2 называют *выпуклым*, если для любых двух его внутренних точек существует отрезок или квазиотрезок с концами в этих точках, принадлежащий внутренности данного контура.

Свойства конечных замкнутых контуров размерности 3 и 4 подробно исследованы в работе [1]. В данной работе продолжено изучение конечных замкнутых контуров на плоскости H^2, исследованы топологические свойства указанных контуров размерности 5. В зависимости от положения на абсолютной овальной линии несобственных точек сторон контура проведена их классификация. Выделены четыре типа 5-контуров, инвариантных относительно преобразований фундаментальной группы G плоскости H^2, даны аналитические характеристики каждого типа. Решен вопрос о наличии и количестве особых точек, проведена характеристика вершин, получены аналоги предложения Паша. Доказано, что 5-контур обладает внутренностью тогда и только тогда, когда он является контуром первого или второго типа. В этих случаях контур является выпуклым. Внутренностью 5-контура первого типа является вся плоскость H^2, а внутренностью 5-контура второго типа — внутренность 4-контура, участвующего в составлении данного 5-контура из простых контуров размерности 3 и 4.

1. ТИПЫ РАЗМЕЩЕНИЙ ПЯТИ ТОЧЕК С ЗАДАННЫМ ОТНОШЕНИЕМ СОСЕДСТВА НА АБСОЛЮТНОЙ ЛИНИИ ПЛОСКОСТИ H^2

1.1. Как известно, на овальной линии проективной плоскости не существует отношения порядка для трех точек, но имеет место понятие разделенности (неразделенности) двух пар действительных точек. Пусть на овальной линии даны действительные точки A, B, C, D. Будем говорить, что пара точек A, B *разделяет* (*не разделяет*) пару точек C, D, если точка пересечения прямых AB и CD является внутренней (внешней) относительно овальной линии.

Пусть на овальной линии α проективной плоскости P_2 задана упорядоченная система (T) точек: $T_1, T_2, \ldots, T_n,\ n > 3$. *Соседними точками точки* T_i в системе (T) назовем такие точки T_j, для которых $|i-j| = 1,\ i, j = \overline{1, n}$. *Соседней для точки* T_1 (T_n) в системе (T) назовем также точку T_n (T_1).

Пару точек T_i, T_j назовем *разделенной на линии* α в системе точек (T), если в этой системе существует, по крайней мере, одна пара точек, разделяющая на линии α пару T_i, T_j. В противном случае пару точек T_i, T_j будем называть *неразделенной на линии* α *в системе точек* (T).

Расположение точек системы (T) на линии α назовем *правильным*, если никакая пара соседних точек системы не разделена на линии α.

При $n > 4$ для трех точек системы (T) на линии α можно ввести отношение порядка: будем говорить, что в системе (T) точка T_i *лежит на линии* α *между точками* T_p и T_q, $p, q = \overline{1, n}$, если пара точек T_p, T_q разделена на линии α в системе точек (T) и не разделена в системе $(T^*) : (T^*) \cup T_i = (T)$. Обозначение: $T_p - T_i - T_q$.

1.2. Рассмотрим определенную на овальной линии α плоскости P_2 упорядоченную систему четырех точек $(T^*) = \{1, 2, 3, 4\}$. Пусть $X = (1 \cup 2) \cap (3 \cup 4)$ и $Y = (2 \cup 3) \cap (1 \cup 4)$. В замечании 1 к теореме 2 [1] показано, что для точек X, Y возможны только следующие варианты взаимного расположения относительно линии α:

1) обе точки X, Y являются внешними относительно линии α,

2) точка X является внешней, а Y — внутренней относительно линии α,

3) точка Y является внешней, а X — внутренней относительно линии α.

В первом случае, согласно введенным определениям, ни одна пара соседних точек системы (T^*) не разделена на линии α, т. е. расположение точек системы на линии является правильным (рис. 1, *а*).

Рассматриваемые точки обозначены нумерованными кружками. Во втором и третьем случаях разделены соответственно пары соседних точек 1, 2 и 3, 4 (рис. 2, *а*), 2, 3 и 4, 1 (рис. 3, *а*).

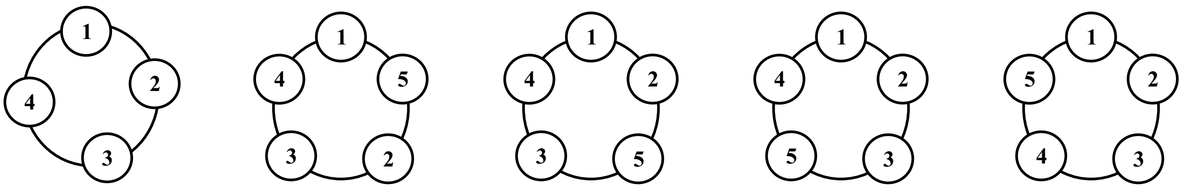
Таким образом, существует только три возможных типа расположения упорядоченной четверки точек на овальной линии α, инвариантных относительно всех преобразований плоскости P_2, сохраняющих отношение разделенности пар точек на α.

1.3. Добавим к системе (T^*) точку 5, получим новую систему: $(T) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. В каждом из трех возможных типов расположений точек 1, 2, 3, 4 на линии α существует четыре возможных типа положений точки 5:

1) $1 - 5 - 2$ (рис. 1, *б*), $2 - 5 - 3$ (рис. 1, *в*), $3 - 5 - 4$ (рис. 1, *г*), $4 - 5 - 1$ (рис. 1, *д*);

2) $1 - 5 - 3$ (рис. 2, *б*), $3 - 5 - 2$ (рис. 2, *в*), $2 - 5 - 4$ (рис. 2, *г*), $4 - 5 - 1$ (рис. 2, *д*);

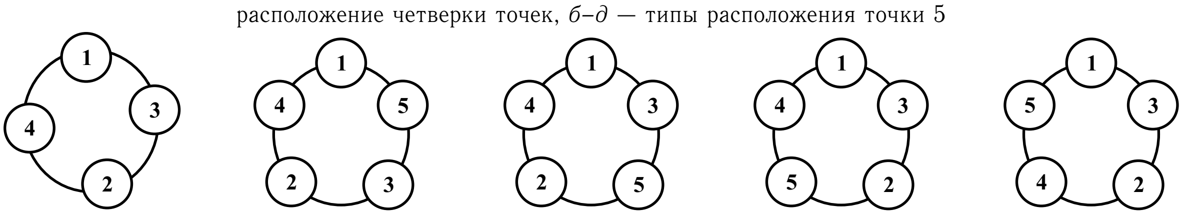
3) $1 - 5 - 2$ (рис. 3, *б*), $2 - 5 - 4$ (рис. 3, *в*), $4 - 5 - 3$ (рис. 3, *г*), $3 - 5 - 1$ (рис. 3, *д*).



$1 - 5 - 2$ $2 - 5 - 3$ $3 - 5 - 4$ $4 - 5 - 1$

а *б* *в* *г* *д*

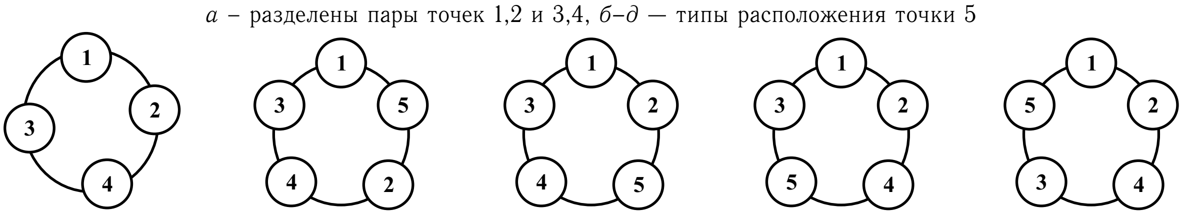
Рис. 1. Расположение точек системы на линии α, когда обе точки X, Y являются внешними: *а* – правильное расположение четверки точек, *б–д* — типы расположения точки 5



$1 - 5 - 3$ $3 - 5 - 2$ $2 - 5 - 4$ $4 - 5 - 1$

а *б* *в* *г* *д*

Рис. 2. Расположение точек системы на линии α, когда точка X является внутренней, а Y — внешней: *а* – разделены пары точек 1,2 и 3,4, *б–д* — типы расположения точки 5



$1 - 5 - 2$ $2 - 5 - 4$ $4 - 5 - 3$ $3 - 5 - 1$

а *б* *в* *г* *д*

Рис. 3. Расположение точек системы на линии α, когда точка Y является внутренней, а X — внешней: *а* – разделены пары точек 2,3 и 4,1, *б–д* — типы расположения точки 5

Изобразим точки 1, 2, 3, 4, 5 в порядке их следования в системе (T), сохраняя отношение соседства между точками системы, и соответственно каждому возможному типу положений точки 5 на линии α стрелками соединим те пары соседних точек системы (T), которые оказались разделенными на α (рис. 4).

Сравнивая рисунки по наличию установленных отношений разделенности пар соседних точек, замечаем, что все возможные типы положений точки 5 на линии α определяют точно четыре типа положений точек системы (T) на α, инвариантных относительно всех преобразований плоскости P_2, сохраняющих отношение разделенности пар точек на α. Положения, в которых в системе (T) на линии α нет разделенных пар соседних точек (рис. 4, *г*) отнесем к первому типу. Ко второму, третьему и четвертому типу отнесем соответственно те положения, в которых имеются две разделенные пары соседних точек (рис. 4, *а, в, з, к, м*), три разделенные пары соседних точек (рис. 4, *б, д, ж, и, л*) и пять разделенных пар соседних точек (рис. 4, *е*). Заметим также, что, вводя новую нумерацию точек системы (T), сохраняя при этом отношение соседства точек в данной системе, можно добиться отождествления фигур, изображающих на рис. 4 расположения точек системы (T) на линии α, отнесенные к одному типу.

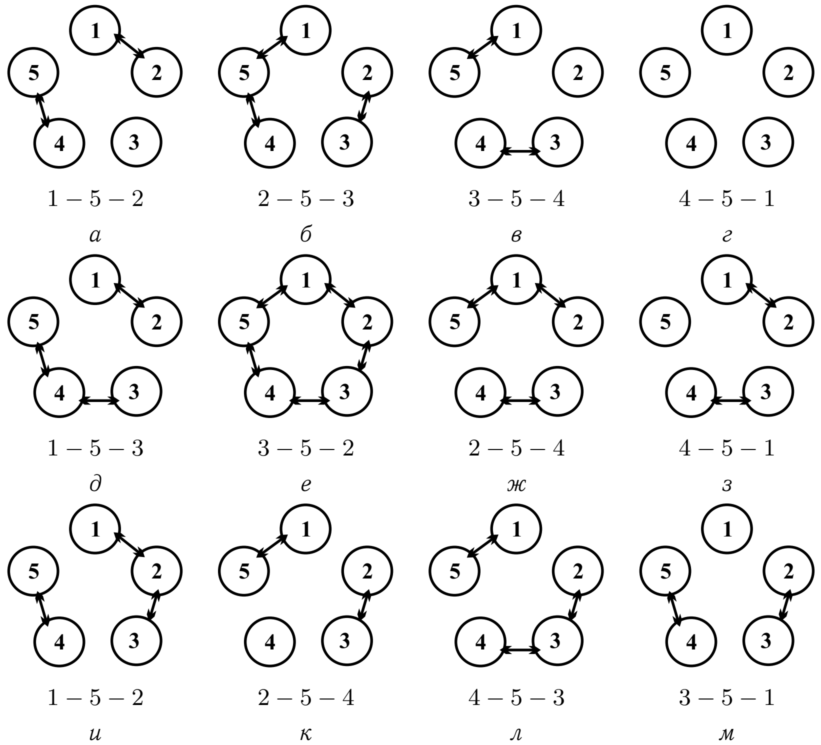


Рис. 4. Типы размещения пяти точек с заданным отношением соседства

Каждое преобразование фундаментальной группы G плоскости H^2 сохраняет положение точки относительно абсолютной овальной линии, следовательно, сохраняет и разделенность (неразделенность) пар точек на абсолютной линии. Поэтому на основании проведенных рассуждений справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *На абсолютной линии плоскости H^2 существует четыре инвариантных относительно фундаментальной группы G типа размещения пяти точек с заданным отношением соседства.*

2. ТИПЫ КОНЕЧНЫХ ЗАМКНУТЫХ 5-КОНТУРОВ ПЛОСКОСТИ H^2

Пусть $ABCDE$ — конечный замкнутый 5-контур плоскости H^2 с бесконечно удаленными точками K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 сторон EA, AB, BC, CD, DE соответственно. Согласно теореме 1 существует четыре типа положений точек системы $(T) = \{K_i, i = \overline{1,5}\}$ на абсолютной линии γ плоскости H^2. Согласно типу положения точек системы (T) на γ определим четыре типа конечных замкнутых 5-контуров плоскости H^2, инвариантных относительно группы G.

Контур $ABCDE$ отнесем к *первому* типу, если точки системы (T) правильно расположены на линии γ, ко *второму* (*третьему*) типу — если система (T) содержит две (три) разделенные на γ пары соседних точек. Если все пары соседних точек системы (T) разделены на γ, контур $ABCDE$ отнесем к *четвертому* типу.

Для исследования топологических свойств 5-контуров присоединим к контуру $ABCDE$ канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ плоскости H^2, уравнение абсолютной линии γ в котором имеет вид

$$x_1x_2 - x_3^2 = 0. \tag{1}$$

Вершины A_1, A_2 и единичная точка A_4 репера R принадлежат линии γ, следовательно, эти точки, не теряя общности рассуждений, можно совместить с несобственными точками сторон контура $ABCDE$. Пусть $A_1 = K_1$, $A_2 = K_2$, $A_4 = K_4$. Тогда точка A совпадает с третьей координатной вершиной, а вершины B и E контура можно задать координатами: $B(0:b:1)$, $E(e:0:1)$, где $be \neq 0$, так как точки B и E отличны от A. Некоординатные изотропные прямые, проходящие через точки B и E, заданы в репере R уравнениями:

$$BC: \quad b^2x_1 + 4x_2 - 4bx_3 = 0, \qquad DE: \quad 4x_1 + e^2x_2 - 4ex_3. \tag{2}$$

Прямая CD касается абсолюта в точке $K_4 = A_4(1:1:1)$, следовательно, ее уравнение имеет вид

$$x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \tag{3}$$

Из уравнений (1)–(3) находим координаты собственных для плоскости H^2 точек C, D и несобственных точек K_3, K_5.

Итак, вершины данного контура имеют в репере R координаты:

$$A(0:0:1), \qquad B(0:b:1), \qquad C(4:2b:b+2), \qquad D(2e:4:e+2), \qquad E(e:0:1), \tag{4}$$

где $be \neq 0$. Кроме того, $b \neq 2$ ($e \neq 2$), так как иначе точка $B(C)$ совпадает с точкой A_4 и является несобственной точкой плоскости H^2, т. е. данный контур не является конечным.

Несобственные точки сторон данного контура заданы в репере R координатами:

$$K_1(1:0:0), \qquad K_2(0:1:0), \qquad K_3(4:b^2:2b), \qquad K_4(1:1:1), \qquad K_5(e^2:4:2e), \tag{5}$$

а точки пересечения несмежных сторон контура — координатами:

$$EA \cap BC = P_1(4:0:b), \qquad AB \cap CD = P_2(0:2:1), \qquad BC \cap DE = P_3(4e:4b:be+4),$$
$$CD \cap EA = P_4(2:0:1), \qquad DE \cap AB = P_5(0:4:e). \tag{6}$$

Найдем условия, аналитически характеризующие в репере R типы расположений точек системы (T) на абсолютной линии. Пусть каждый тип расположения точек системы (T) представлен соответственно фигурами, изображенными на рис. 1, *д, г, в*; 2, *в*, где точка i изображает соответствующую точку K_i.

В первых трех случаях точки K_1, K_2, K_3, K_4 правильно расположены на абсолютной линии γ. Следовательно, точки $X = K_1K_2 \cap K_3K_4$ и $Y = K_2K_3 \cap K_4K_1$ являются внешними относительно этой линии (рис. 5). Поляра каждой внешней относительно γ точки — гиперболическая прямая плоскости H^2. Прямые K_1K_2 и K_3K_4 (K_2K_3 и K_4K_1) являются полярами точек A и C (B и P_4) соответственно. Следовательно, прямая AC (BP_4) является полярой точки $X(Y)$. Таким образом, условие правильного расположения точек K_1, K_2, K_3, K_4 на линии γ равносильно условию принадлежности прямых AC и BP_4 гиперболическому типу. В репере R прямые AC и BP_4 заданы уравнениями:

$$AC: \ bx_1 - 2x_2 = 0, \qquad BP_4: \ bx_1 + 2x_2 - 2bx_3. \tag{7}$$

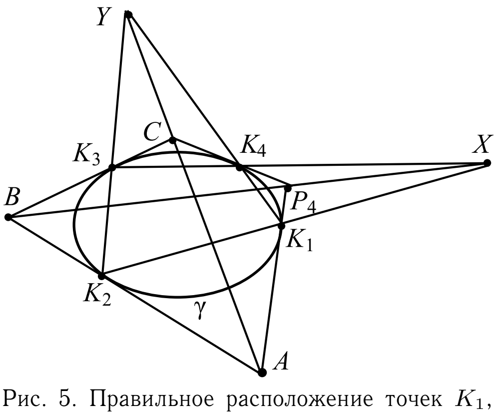


Рис. 5. Правильное расположение точек K_1, K_2, K_3, K_4 на абсолютной линии

Значения ζ_1 и ζ_2 тангенциальной квадратичной формы $\psi = 4X_1X_2 - X_3^2$, соответствующей заданию (1) абсолюта плоскости H^2, от координат прямых AC и BP_4 (7) равны: $\zeta_1 = -8b$, $\zeta_2 = b(2-b)$. Следовательно, прямые AC и BP_4 одновременно являются гиперболическими тогда и только тогда, когда

$$b > 2. \tag{8}$$

Итак, условие (8) характеризует правильное расположение точек K_1, K_2, K_3, K_4 на абсолютной линии γ. Если на линии γ правильно расположены и точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, т. е. данный контур принадлежит первому типу, то пары точек K_2, K_5 и K_3, K_5 разделяют пару точек K_1, K_4. Прямые K_1K_4, K_2K_5, K_3K_5 в репере R заданы соответственно уравнениями:

$$K_1K_4: \ x_2 - x_3 = 0, \qquad K_2K_5: \ 2x_1 - ex_3 = 0, \qquad K_3K_5: \ 2bx_1 + 2ex_2 - (be+4)x_3 = 0.$$

Точки $K_2K_5 \cap K_1K_4 = N_1(e:2:2)$, $K_3K_5 \cap K_1K_4 = N_2(b^2e^2 - 2be^2 + 8e - 16 : 2b^2e - 8b : 2b^2e - 8b)$ являются при условии (8) внутренними относительно линии γ тогда и только тогда, когда

$$e > 2. \tag{9}$$

Следовательно, условия (8), (9) определяют в репере R конечный замкнутый 5-контур первого типа.

Далее нам потребуются уравнения прямых, соединяющих соседние точки системы (T):

$$K_1K_2: \ x_3 = 0, \qquad K_2K_3: \ bx_1 - 2x_3 = 0, \qquad K_1K_5: \ ex_2 - 2x_3 = 0,$$

$$K_3K_4: \ bx_1 + 2x_2 - (2+b)x_3 = 0, \qquad K_4K_5: \ 2x_1 + ex_2 - (2+e)x_3 = 0.$$

Если при правильном расположении точек K_1, K_2, K_3, K_4 на абсолютной линии γ точка K_5 лежит между точками $K_3, K_4 (K_2, K_3)$, т. е. данный контур второго (третьего) типа, то пары точек K_1, K_5 и K_2, K_5 (K_1, K_5 и K_4, K_5) разделяют пару точек K_3, K_4 (K_2, K_3).

Точки $K_1K_5 \cap K_3K_4 = N_3(2e + be - 4 : 2b : be)$ и $K_2K_5 \cap K_3K_4 = N_4(2e : 2b + 4 - be : 4)$ являются при условии (8) внутренними относительно линии γ тогда и только тогда, когда $(e-2)(4-be) > 0$. Таким образом, второй тип конечных замкнутых 5-контуров в репере R определен условиями:

$$b > 2, \qquad 0 < e < 2, \qquad be > 4. \tag{10}$$

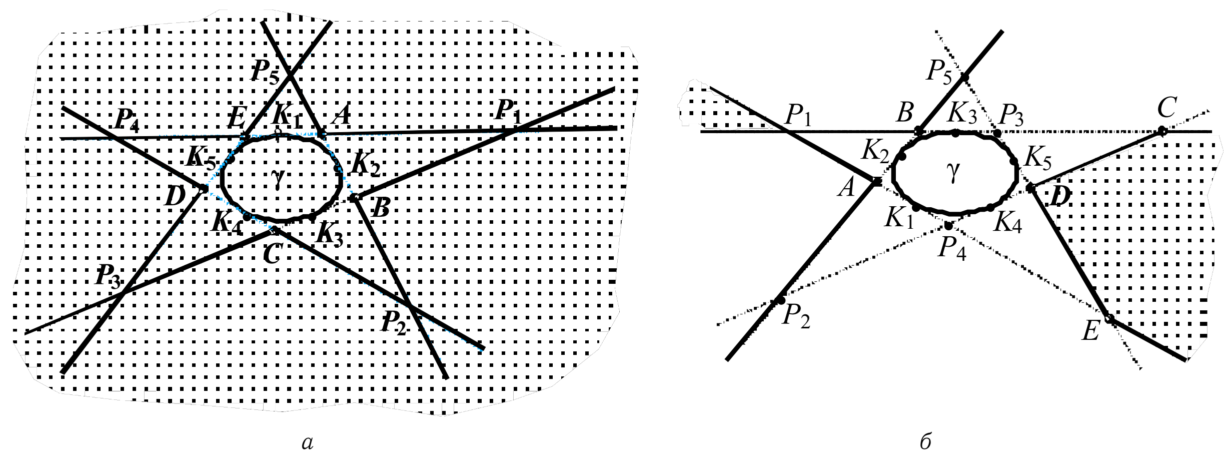
Точки $K_1K_5 \cap K_2K_3 = N_5(2e : 2b : be)$ и $K_4K_5 \cap K_2K_3 = N_6(2e : 2b + be - 4 : be)$ являются при условии (8) внутренними относительно линии γ тогда и только тогда, когда $be(4 - be) > 0$. Следовательно, третий тип конечных замкнутых 5-контуров в репере R определен условиями:

$$b > 2, \qquad 0 < e < 2, \qquad be < 4. \tag{11}$$

У 5-контура четвертого типа каждая пара соседних точек системы (T) разделена. Следовательно, внутренними относительно линии γ являются точки N_5, $K_1K_2 \cap K_3K_4 = N_7(2 : -b : 0)$ и $K_1K_2 \cap K_4K_5 = N_8(-e : 2 : 0)$. В репере R конечный замкнутый 5-контур четвертого типа определен условиями:

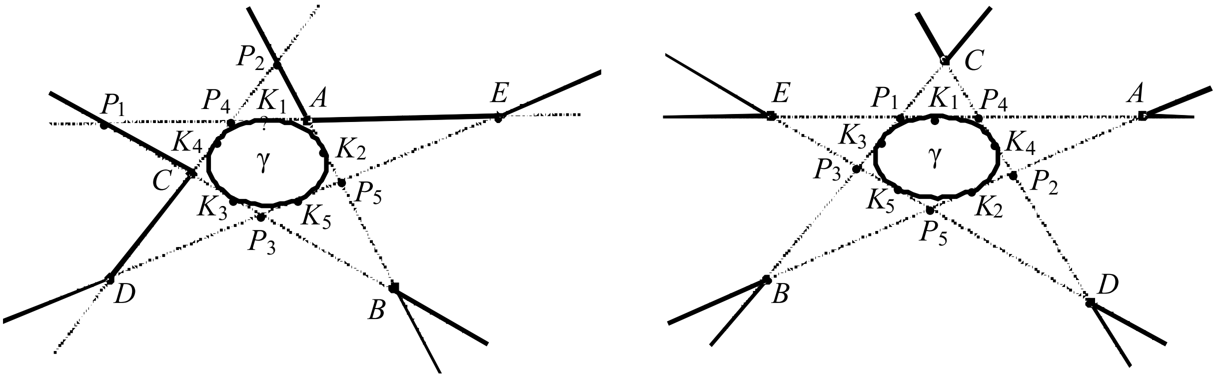
$$b < 0, \qquad e < 0, \qquad be < 4. \tag{12}$$

На рис. 6 изображены конечные замкнутые 5-контуры первого, второго, третьего и четвертого типов соответственно.



а б

Рис. 6. Конечные замкнутые 5-контуры первого (*а*), второго (*б*) типов



в *г*

Рис. 6, Продолжение. Конечные замкнутые 5-контуры третьего (*в*), четвертого (*г*) типов

3. ОСОБЫЕ ТОЧКИ 5-КОНТУРОВ

Исследуем конечные замкнутые 5-контуры плоскости H^2 на наличие особых точек. Пусть в каноническом репере R вершины данного конечного замкнутого 5-контура $ABCDE$ заданы координатами (4), несобственные точки K_i сторон — координатами (5), а точки P_i пересечения несмежных сторон контура — координатами (6), $i = \overline{1,5}$.

Каждая сторона контура — касательная к абсолютной линии. Следовательно, каждая точка P_i принадлежит точно двум его сторонам. Точка P_i является особой точкой контура тогда и только тогда, когда она принадлежит точно двум ребрам данного контура.

Выразим через параметры b и e, определяющие в репере R элементы данного контура $ABCDE$, следующие числа:

$$I_{11} = (AEP_1K_1) = \frac{4}{4-be}, \qquad I_{12} = (BCP_1K_3) = \frac{2-b}{2}, \qquad I_{21} = (ABP_2K_2) = \frac{2}{2-b},$$

$$I_{22} = (CDP_2K_4) = \frac{2(e-2)}{e(2-b)}, \qquad I_{31} = (BCP_3K_3) = \frac{e(b-2)}{2(e-2)}, \qquad I_{32} = (DEP_3K_5) = \frac{2(b-2)}{b(2-e)},$$

$$I_{41} = (CDP_4K_4) = \frac{b(e-2)}{2(2-b)}, \qquad I_{42} = (AEP_4K_1) = \frac{2}{2-e},$$

$$I_{51} = (DEP_5K_5) = \frac{2}{2-e}, \qquad I_{52} = (ABP_5K_2) = \frac{4}{4-be}.$$

Точка P_i принадлежит двум ребрам данного контура, т. е. является особой точкой контура, тогда и только тогда, когда числа I_{i1}, I_{i2} одновременно меньше нуля.

Для каждого типа 5-контуров определим знаки чисел I_{i1}, I_{i2}, характеризующие принадлежность точки P_i ребрам данного контура. Результаты представим в табл. 1.

Таблица 1

Тип контура	Аналитическая характеристика в репере R	P_1		P_2		P_3		P_4		P_5	
		I_{11}	I_{12}	I_{21}	I_{22}	I_{31}	I_{32}	I_{41}	I_{42}	I_{51}	I_{52}
I	$b>2,\ \ e>2$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−
II	$b>2,\ \ 0<e<2,\ \ be>4$	−	−	−	+	+	+	+	+	+	−
III	$b>2,\ \ 0<e<2,\ \ be<4$	+	−	−	+	+	+	+	+	+	+
IV	$b<0,\ \ e<0,\ \ be<4$	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Данные табл. 1 доказывают следующую теорему.

Теорема 2. *На плоскости H^2 конечные замкнутые 5-контуры первого типа имеют пять особых точек, второго типа — одну особую точку, 5-контуры третьего и четвертого типов являются простыми.*

Отметим, что 5-контур второго (третьего) типа содержит три (две) точки пересечения противоположных сторон, при этом ни одна из точек пересечения противоположных сторон 5-контура четвертого типа ему не принадлежит.

4. ХАРАКТЕРИСТИКА ВЕРШИН 5-КОНТУРОВ

4.1. У конечных замкнутых 5-контуров различных типов обнаружены различные закономерности расположения вершин. Чтобы описать эти закономерности, введем следующие понятия.

Каждые две прямые l_1, l_2 проективной плоскости P_2 разбивают множество всех точек плоскости, не принадлежащих этим прямым, на два непустых непересекающихся множества [2]. Каждое из этих множеств вместе с прямыми l_1, l_2 назовем *углом* плоскости P_2 между прямыми l_1, l_2.

Через каждую внешнюю относительно абсолютной линии γ точку X плоскости H^2 проходят две действительные касательные к абсолюту, которые определяют два угла плоскости P_2. Одному из этих углов полностью принадлежит абсолютная линия γ. Назовем этот угол *ковалианой точки* X и обозначим $\hat{W}_X$. Дополнение ковалианы точки X до плоскости H^2 назовем *валианой точки* X и обозначим W_X (*валиана* от англ. *valley* — долина, приставка *ко-* от лат. *con* — вместе).

Изотропные и гиперболические прямые плоскости H^2, проходящие через точку X, согласно определению принадлежат ковалиане точки X, а все эллиптические прямые, проходящие через точку X, принадлежат ее валиане. Каждое преобразование группы G сохраняет принадлежность прямой заданному типу. Поэтому, если $f \in G$ и $f(X) = Y$, то $f(W_X) = W_Y$ и $f(\hat{W}_X) = \hat{W}_Y$.

Если некоторая точка Y принадлежит валиане (ковалиане) точки X, то прямая XY является эллиптической (гиперболической), следовательно, точка X принадлежит валиане (ковалиане) точки Y.

4.2. Пусть X — вершина некоторого конечного замкнутого 5-контура плоскости H^2. Вершины контура, смежные с X, лежат на изотропных прямых, проходящих через точку X. Каждая из двух несмежных с X вершин может принадлежать либо валиане, либо ковалиане точки X. Следовательно, на плоскости H^2 можно выделить три инвариантных относительно группы G рода вершин конечных замкнутых 5-контуров.

Вершину X конечного замкнутого 5-контура плоскости H^2 назовем *вершиной первого* (*второго*) *рода*, если обе несмежные с X вершины контура принадлежат ковалиане (валиане) точки X. Если вершина X изотропного 5-контура не является вершиной первого или второго рода, назовем ее *вершиной третьего рода*.

Пусть $ABCDE$ — конечный замкнутый 5-контур плоскости H^2, элементы которого заданы в каноническом репере R координатами (4)–(6). Несмежные с вершиной A вершины C и D принадлежат изотропной прямой CD с несобственной точкой K_4. Сторона CD данного контура пересекает несмежные с ней стороны, изотропные прямые AB и AE, в точках P_2, P_4. Следовательно, точки P_2, P_4 определяют две части прямой CD, одна из которых принадлежит валиане точки A, другая содержит точку K_4 и принадлежит ковалиане точки A. Если $I_{A,C} = (CK_4P_2P_4) < 0$ $(I_{A,D} = (DK_4P_2P_4) < 0)$, то $C \in W_A$ $(D \in W_A)$. Если $I_{A,C} > 0$ $(I_{A,D} > 0)$, то $C \in \hat{W}_A$ $(D \in \hat{W}_A)$. Таким образом, знаки чисел $I_{A,C}$, $I_{A,D}$ определяют род вершины A данного контура. Аналогично введем пары чисел

$$(I_{B,D} = (DK_5P_3P_5),\ I_{B,E} = (EK_5P_3P_5)), \qquad (I_{C,A} = (AK_1P_1P_4),\ I_{C,E} = (EK_1P_1P_4)),$$

$$(I_{D,A} = (AK_2P_2P_5),\ I_{D,B} = (DK_2P_2P_5)), \qquad (I_{E,B} = (BK_3P_1P_3),\ I_{E,C} = (CK_3P_1P_3)),$$

характеризующих род соответственно вершин B, C, D, E данного контура. Выразим введенные числа через параметры b и e, определяющие координаты элементов контура в репере R:

$$\left(I_{A,C} = \frac{2}{b},\ I_{A,D} = \frac{e}{2}\right), \qquad \left(I_{B,D} = \frac{e(b-2)}{be-4},\ I_{B,E} = \frac{be}{be-4}\right), \qquad \left(I_{C,A} = \frac{2}{b},\ I_{C,E} = \frac{be-4}{b(e-2)}\right),$$

$$\left(I_{D,A} = \frac{e}{2},\ I_{D,B} = \frac{e(b-2)}{be-4}\right), \qquad \left(I_{E,B} = \frac{be-4}{be},\ I_{E,C} = \frac{be-4}{b(e-2)}\right).$$

В табл. 2 представлены наборы знаков введенных чисел, соответствующие типам 5-контуров плоскости H^2.

Таблица 2

Тип контура	A		B		C		D		E	
	$I_{A,C}$	$I_{A,D}$	$I_{B,D}$	$I_{B,E}$	$I_{C,A}$	$I_{C,E}$	$I_{D,A}$	$I_{D,B}$	$I_{E,B}$	$I_{E,C}$
I	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
II	+	+	+	+	+	−	+	+	+	−
III	+	+	−	−	+	+	+	−	−	+
IV	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−

На основании результатов табл. 2 справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Все вершины конечного замкнутого 5-контура первого (четвертого) типа являются вершинами первого (второго) рода. 5-контур второго типа содержит три вершины первого рода и две вершины третьего рода. 5-контур третьего типа содержит две вершины первого рода, одну второго и две вершины третьего рода.*

5. АНАЛОГИ ПРЕДЛОЖЕНИЯ ПАША

В данной части работы докажем для конечных замкнутых 5-контуров плоскости H^2 аналоги предложения Паша (теоремы 4–11).

Пусть $ABCDE$ — конечный замкнутый 5-контур, элементы которого заданы в репере R координатами (4), (5), (6). Если прямая a плоскости H^2 не совпадает с координатной прямой A_1A_2 репера R, то в этом репере ее можно задать координатами: $(a_1 : a_2 : 1)$. Найдем координаты точек пересечения прямой a сторонами данного контура:

$$EA \cap a = T_1(-1 : 0 : a_1),\; AB \cap a = T_2(0 : -1 : a_2),\; BC \cap a = T_3(4 + 4a_2b : -b^2 - 4a_1b : a_2b^2 - 4a_1),$$

$$CD \cap a = T_4(1 + 2a_2 : -1 - 2a_1 : a_2 - a_1), \qquad DE \cap a = T_5(e^2 + 4a_2e : -4 - 4a_1e : 4a_2 - a_1e^2).$$

Принадлежность точек T_i, $i = \overline{1,5}$, ребрам данного контура определена знаками следующих чисел:

$$I_1 = (AEK_1T_1), \qquad I_2 = (ABK_2T_2), \qquad I_3 = (BCK_3T_3), \qquad I_4 = (CDK_4T_4), \qquad I_5 = (DEK_5T_5).$$

Условимся, что прямая a не проходит через вершину данного 5-контура. Тогда числа I_i существуют и каждое из них отлично от нуля. Выражения чисел I_i через параметры b и e в репере R имеют вид

$$I_1 = a_1e + 1, \qquad I_2 = a_2b + 1, \qquad I_3 = \frac{2(a_2b + 1) + 4a_1 + b}{(2 - b)(a_2b + 1)},$$

$$I_4 = \frac{(2 - b)(2(a_1e + 1) + 4a_2 + e)}{(e - 2)(2(a_2b + 1) + 4a_1 + b)}, \qquad I_5 = \frac{(2 - e)(a_1e + 1)}{2(a_1e + 1) + 4a_2 + e}. \tag{13}$$

Определим все допустимые наборы знаков чисел I_i для каждого типа изотропных 5-контуров.

1. Контур $ABCDE$ первого типа. Имеют место неравенства (8), (9). В табл. 3 приведены все возможные наборы знаков чисел I_i.

Каждый возможный набор содержит, по крайней мере, три минуса. Существует набор, состоящий из пяти минусов, и не существует наборов, содержащих два или четыре минуса. На основании полученных результатов справедливы следующие теоремы.

Таблица 3

I_1	+	−	−	−	−	+	+	+	−	−	−
I_2	+	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+
I_3	−	+	−	+	−	+	−	−	−	+	−
I_4	−	−	−	+	+	−	−	+	−	−	+
I_5	−	+	−	−	+	−	+	−	+	−	−

Теорема 4. *Каждая прямая плоскости H^2 пересекает, по крайней мере, три ребра любого конечного замкнутого 5-контура первого типа.*

Теорема 5. *Если на плоскости H^2 прямая пересекает четыре ребра конечного замкнутого 5-контура первого типа, то она пересекает каждое его ребро.*

2. Контур $ABCDE$ второго (третьего) типа. Выполняются неравенства (10) ((11)).

Все допустимые наборы знаков чисел I_i (13) для контуров второго типа представлены в табл. 4, для контуров третьего типа — в табл. 5.

Каждый набор знаков чисел I_i в табл. 4, 5 содержит, по крайней мере, один минус. Существуют наборы знаков чисел I_i, содержащие точно один минус. Если набор знаков чисел I_i содержит более одного минуса, то он содержит точно три минуса. Получаем следующие теоремы.

Теорема 6. *Каждая прямая плоскости H^2 пересекает, по крайней мере, одно ребро конечного замкнутого 5-контура второго (третьего) типа.*

Теорема 7. *На плоскости H^2 существуют прямые, имеющие с конечным замкнутым 5-контуром второго (третьего) типа единственную общую точку.*

Теорема 8. *Если прямая плоскости H^2, не содержащая вершину конечного замкнутого 5-контура второго (третьего) типа, пересекает два ребра контура, то она пересекает точно три его ребра.*

Таблица 4

I_1	+	−	−	−	+	+	+	+	−	−	−	−
I_2	+	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+	+
I_3	−	+	+	−	+	−	+	−	−	−	+	+
I_4	+	−	+	+	+	−	−	+	−	+	+	−
I_5	+	+	−	+	+	+	−	−	+	−	+	−

Таблица 5

I_1	+	+	+	−	+	+	+	+	−	−	−
I_2	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+	+
I_3	−	+	+	−	+	−	+	−	−	+	+
I_4	+	+	−	+	+	+	−	−	+	+	−
I_5	+	−	+	+	+	−	−	+	−	+	−

3. Контур $ABCDE$ четвертого типа. Выполняются неравенства (12). Все возможные наборы знаков чисел I_i (13) представим в табл. 6.

Таблица 6

I_1	+	+	+	+	−	−	−	+	+	−	−
I_2	+	+	+	+	−	−	−	−	−	+	+
I_3	−	+	−	+	−	−	+	+	−	+	+
I_4	+	−	−	+	+	−	+	+	−	+	−
I_5	+	+	−	−	+	−	−	+	+	+	−

Каждый возможный набор содержит, по крайней мере, один минус. Существуют наборы, содержащие один, три и пять минусов. Не существует наборов, содержащих два или четыре минуса. Доказаны следующие теоремы.

Теорема 9. *Каждая прямая плоскости H^2 пересекает, по крайней мере, одно ребро конечного замкнутого 5-контура четвертого типа.*

Теорема 10. *На плоскости H^2 существуют прямые, имеющие с 5-контуром четвертого типа единственную общую точку.*

Теорема 11. *Каждая прямая плоскости H^2, не содержащая вершину конечного замкнутого 5-контура четвертого типа, пересекает или одно ребро контура, или три его ребра, или все ребра контура.*

6. ВЫПУКЛОСТЬ КОНЕЧНЫХ ЗАМКНУТЫХ 5-КОНТУРОВ

Из теоремы 4 следует, что каждая точка плоскости H^2 является внутренней относительно любого конечного замкнутого 5-контура первого типа. Таким образом, справедлива

Теорема 12. *Конечный замкнутый 5-контур первого типа является выпуклым, его внутренность совпадает с плоскостью H^2.*

Из теорем 7, 10 следует, что на плоскости H^2 существуют точки, не являющиеся внутренними относительно конечного замкнутого 5-контура второго, третьего или четвертого типа.

Для 5-контура второго типа выполняется следующая теорема.

Теорема 13. *Конечный замкнутый 5-контур второго типа плоскости H^2 является выпуклым, его внутренность совпадает с внутренностью принадлежащего ему простого конечного замкнутого 4-контура.*

Доказательство. Пусть $F = ABCDE$ — 5-контур второго типа (см. рис. 6, *б*), элементы которого заданы в репере R координатами (4)–(6) при условиях (10). Тогда согласно табл. 1 точка P_1 является единственной особой точкой контура F. Эта точка разбивает каждое содержащее ее ребро контура на два отрезка:

$$EA = EP_1 \cup P_1A, \qquad BC = BP_1 \cup P_1C. \tag{14}$$

Каждый из отрезков EP_1, P_1A, BP_1, P_1C принадлежит стороне данного контура, следовательно, является отрезком изотропной прямой. Разложения (14) позволяют представить данный 5-контур F

в виде объединения замкнутых конечных контуров: 3-контура ABP_1 и 4-контура $CDEP_1$. Итак,

$$F = ABP_1 \cup CDEP_1. \tag{15}$$

Конечный замкнутый 4-контур $CDEP_1$ не имеет точек самопересечения, следовательно, является простым. Условие (15) определяет разложение контура F на простые контуры.

По теореме 1 [1] на плоскости H^2 не существует точек, внутренних относительно конечного замкнутого 3-контура, а по теореме 2 [1] простой замкнутый конечный 4-контур обладает внутренностью и является выпуклым. Покажем, что конечный замкнутый 5-контур F второго типа обладает внутренностью и $\operatorname{int} F = \operatorname{int}(CDEP_1)$.

Пусть некоторая точка M плоскости H^2 принадлежит множеству $\operatorname{int}(CDEP_1)$. Согласно определению внутренней точки относительно конечного замкнутого контура, каждая прямая, проходящая через точку M, пересекает контур $CDEP_1$ не менее чем в двух точках. Тогда в силу разложения (14) каждая прямая, проходящая через точку M, пересекает не менее чем в двух точках и контур F. Следовательно, $M \in \operatorname{int} F$. Поэтому $\operatorname{int}(CDEP_1) \subset \operatorname{int} F$.

Покажем, что если некоторая точка K плоскости H^2 не принадлежит множеству $\operatorname{int}(CDEP_1)$, то она не является внутренней относительно контура F.

Противоположные стороны контура $CDEP_1$ пересекаются в точках P_3 и P_4: $DE \cap CP_1 = P_3$, $CD \cap EP_1 = P_4$. В работе [1] доказано, что $\operatorname{int}(CDEP_1) = W_{P_3} \cap W_{P_4}$, т. е. внутренность контура $CDEP_1$ является пересечением валиан точек P_3 и P_4. Пусть K не принадлежит, например, валиане точки P_4. Тогда прямая KP_4 является либо изотропной, либо гиперболической. В репере R точка P_4 имеет координаты (2:0:1), точку K зададим ненулевой тройкой чисел $(k_1 : k_2 : k_3)$.

Если точка K не принадлежит изотропной прямой, проходящей через точку P_4, то $k_2 \neq 0$, и прямую KP_4 в репере R можно задать координатами $(-k_2 : k_1 - 2k_3 : 2k_2)$. Условие принадлежности прямой KP_4 гиперболическому типу в репере R равносильно неравенству:

$$k_2(k_1 + k_2 - 2k_3) > 0. \tag{16}$$

Числа I_i (13) для прямой KP_4 в репере R равны:

$$I_1 = \frac{2-e}{2}, \qquad I_2 = \frac{bk_1 + 2k_2 - 2bk_3}{2k_2}, \qquad I_3 = \frac{2b(k_1 + k_2 - 2k_3}{(2-b)(bk_1 + 2k_2 - 2bk_3)},$$

$$I_4 = \frac{2(2-b)}{b(e-2)}, \qquad I_5 = \frac{k_2(e-2)^2}{4(k_1 + k_2 - 2k_3)}.$$

Параметры b, e удовлетворяют неравенствам (10), поэтому с учетом неравенства (16) получаем: $I_1 > 0$, $I_2 I_3 < 0$, $I_4 > 0$, $I_5 > 0$. Таким образом, точно четыре числа I_i будут больше нуля. Это означает, что прямая KP_4 пересекает лишь одно ребро контура F. Следовательно, точка K не является внутренней относительно данного контура.

Если $k_2 = 0$, то изотропная прямая KP_4 совпадает со стороной AE данного контура F. Полагая, что K не принадлежит абсолютной линии γ, координатами точки K в репере R примем тройку чисел $(k : 0 : 1)$. Если точка K принадлежит ребру AE, то согласно определению K не является внутренней точкой относительно контура F. Пусть K не принадлежит отрезку AE, тогда выполняется неравенство $(KK_1AE) > 0$. Запишем это неравенство в координатах:

$$\frac{k}{k-e} > 0. \tag{17}$$

Через точку K проходит, например, прямая KK_2, уравнение которой в репере R имеет вид: $x_1 - kx_3 = 0$. Для прямой KK_2 числа I_i (13) в репере R равны:

$$I_1 = \frac{k-e}{k}, \qquad I_2 = 1, \qquad I_3 = \frac{k(b+2)-4}{k(2-b)}, \qquad I_4 = \frac{(2-b)(2(k-e)+ke)}{(e-2)(k(b+2)-4)}, \qquad I_5 = \frac{(2-e)}{2 + \frac{ke}{k-e}}.$$

При выполнении неравенств (10), (17) имеют место условия: $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, $I_3 I_4 < 0$, $I_5 > 0$. Эти условия означают, что прямая KK_2 пересекает одно и только одно ребро контура F. Следовательно, и в этом случае (при $k_2 = 0$) точка K не является внутренней относительно данного контура F.

Аналогично можно показать, что точка K не является внутренней относительно контура F, если она не принадлежит валиане точки P_3. Итак, показали, что если $K \notin \operatorname{int}(CDEP_1)$, то $K \notin \operatorname{int} F$. Таким образом, $\operatorname{int} F = \operatorname{int}(CDEP_1)$.

Простой 4-контур $CDEP_1$ является выпуклым, следовательно, выпуклым является и данный контур F. Теорема доказана.

Для 5-контура третьего типа имеет место

Теорема 14. *На плоскости H^2 не существует точек, внутренних относительно конечного замкнутого 5-контура третьего типа.*

Доказательство. Пусть $ABCDE$ — 5-контур третьего типа, заданный в репере R координатами (4)–(6) при условиях (11). Через каждую точку M плоскости H^2 проходит одна прямая пучка с центром в точке $K_5(e_2 : 4 : 2_e)$. Каждая прямая l этого пучка в репере R может быть задана координатами $l(4a : -e(ae+2) : 4)$.

Для прямой l числа I_i (13) в репере R равны:

$$I_1 = ae+1, \qquad I_2 = \frac{4-2be-abe^2}{4}, \qquad I_3 = \frac{2(4+8a+2b-2be-abe^2)}{(2-b)(4-2be-abe^2)},$$

$$I_4 = \frac{2(b-2)(ae+1)}{4+8a+2b-2be-abe^2}, \qquad I_5 = 1.$$

Все возможные наборы знаков чисел I_i для прямой l приведены в табл. 7.

Каждый допустимый набор знаков чисел I_i содержит точно один минус. Следовательно, каждая прямая пучка с центром в точке K_5 имеет с контуром $ABCDE$ единственную общую точку.

Таким образом, через каждую точку плоскости H^2 можно провести прямую, пересекающую данный 5-контур третьего типа в единственной точке. Следовательно, никакая точка плоскости H^2 не является внутренней относительно 5-контура третьего типа. Теорема доказана.

Таблица 7

I_1	$-$	$+$	$+$	$+$
I_2	$+$	$-$	$+$	$+$
I_3	$+$	$+$	$-$	$+$
I_4	$+$	$+$	$+$	$-$
I_5	$+$	$+$	$+$	$+$

Докажем аналогичную теорему для 5-контуров четвертого типа.

Теорема 15. *На плоскости H^2 не существует точек, внутренних относительно конечного замкнутого 5-контура четвертого типа.*

Доказательство. Пусть $ABCDE$ — 5-контур четвертого типа, заданный в R координатами (4), (5), (6) при условиях (12). Через произвольную точку M плоскости H^2 проведем прямую l пучка с центром в точке $K_1(1:0:0)$. Координаты прямой l в репере R имеют вид $(0:a:1)$. Числа I_i (13) для прямой l в репере R равны:

$$I_1 = 1, \qquad I_2 = ab+1, \qquad I_3 = \frac{2(ab+1)+b}{(2-b)(ab+1)}, \qquad I_4 = \frac{(b-2)(4a+e+2)}{(e-2)(2(ab+1)+b)}, \qquad I_5 = \frac{2-e}{4a+e+2}.$$

Табл. 8 содержит все допустимые наборы знаков чисел I_i для прямой l.

Согласно данным, представленным в табл. 8, прямая l имеет с контуром $ABCDE$ единственную общую точку, поэтому точка M не является внутренней относительно данного контура. В проведенных рассуждениях M — любая точка плоскости H^2. Следовательно, на H^2 нет точек, внутренних относительно 5-контура четвертого типа. Теорема доказана.

Таблица 8

I_1	$+$	$+$	$+$	$+$
I_2	$-$	$+$	$+$	$+$
I_3	$+$	$-$	$+$	$+$
I_4	$+$	$+$	$-$	$+$
I_5	$+$	$+$	$+$	$-$

Следствием теорем 12–15 является следующее утверждение.

Теорема 16. *Конечный замкнутый 5-контур плоскости H^2 обладает внутренностью (является выпуклым) тогда и только тогда, когда он является контуром первого или второго типа.*

Библиографический список

1. *Ромакина, Л.Н.* Конечные замкнутые 3(4)-контуры расширенной гиперболической плоскости / Л.Н. Ромакина // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. 2010. Т. 10. Сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 3. С. 14–26.
2. *Ромакина, Л.Н.* Геометрии коевклидовой и копсевдоевклидовой плоскостей / Л.Н. Ромакина. Саратов: Науч. книга, 2008.