



16. Ковалев, В.А. Волновые задачи теории поля и термомеханика / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. 328 с.

17. Ковалев, В.А. Распространение связанных GНИИ-термоупругих волн в длинном цилиндрическом волноводе / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев // Вестн. ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния. 2010. № 2(8). С. 207–255.

18. Ковалев, В.А. Прохождение теплового GНИИ-волнового сигнала с высокой окружной гармоникой через цилиндрический волновод / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев, А.Е. Романов // Актуальные проблемы приклад-

ной математики, информатики и механики: сб. трудов междунар. конф., посвящ. 80-летию проф. Д.Д. Ивлева. Воронеж: Изд. центр Воронеж. гос. ун-та, 2010. С. 173–180.

19. Ковалев, В.А. Элементы теории поля: вариационные симметрии и геометрические инварианты / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев. М.: Физматлит, 2009. 156 с.

20. Ковалев, В.А. Волновые задачи теории поля и термомеханика / В.А. Ковалев, Ю.Н. Радаев // Математическая физика и ее приложения: материалы междунар. конф. / под ред. чл.-кор. РАН И.В. Воловича и проф. Ю.Н. Радаева. Самара: Книга, 2010. С. 165–166.

УДК 539.375

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЧАСТИЧНОГО ЗАКРЫТИЯ ТРЕЩИНОВИДНЫХ ПОЛОСТЕЙ В ГОРЯЩЕМ ТВЕРДОМ ТОПЛИВЕ ПРИ ДЕЙСТВИИ ОБЪЕМНЫХ СИЛ

**В.М. Мирсалимов, Б.Э. Рустамов**

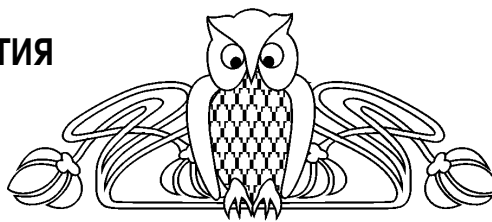
Азербайджанский технический университет, Баку, кафедра сопротивления материалов  
E-mail: mir-vagif@mail.ru

На основе методов теории упругости проведено математическое описание модели закрытия трещиновидных полостей с концевыми зонами, в которых действуют силы сцепления материала, в твердом горящем топливе. Принято, что взаимодействие поверхностей трещиновидных полостей под действием объемных и поверхностных нагрузок приводит к возникновению зон налегания их поверхностей. Определение неизвестных параметров, характеризующих закрытие трещиновидных полостей, сводится к решению системы сингулярных интегродифференциальных уравнений. С помощью процедуры алгебраизации интегральные уравнения сводятся к системе нелинейных алгебраических уравнений, которая решается методом последовательных приближений. Находятся нормальные и касательные контактные напряжения, усилия в связях между берегами трещиновидных полостей, значения размеров концевых контактных зон, где берега трещиновидных полостей смыкаются.

**Ключевые слова:** горящее твердое топливо, трещиновидные полости с концевыми зонами, силы сцепления, объемные силы, контактные напряжения.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Потребности современной оборонной техники, в частности установок на твердом топливе и ствольных артиллерийских систем, приводят к совершенствованию способов моделирования и разработки новых методов расчета, наиболее полно и адекватно учитывающих механические свойства реальных материалов. При работе двигателей на твердом топливе иногда происходит выход на нерасчетный режим [1, 2], который приводит к взрыву. Наиболее распространенная причина этого явления заключается в том, что в топливе имелись недопустимо большие трещиноподобные полости, возникшие, как правило, при технологическом процессе. Для повышения безопасной работы двигателя на траектории необходимо на стадии проектирования изделий проводить предельный анализ горящего твердого топлива, чтобы установить, что предполагаемые исходные трещиновидные полости, расположенные самым неблагоприятным образом, не будут расти до критических размеров и не вызовут разрушения



**Simulation of Partial Closure Crack-Visible Cavities in Burning Solid Fuel Under the Influence of Body Forces**

**V.M. Mirsalimov, B.E. Rustamov**

Azerbaijan Technical University, Baku,  
Chair of Strength of Materials  
E-mail: mir-vagif@mail.ru

On the basis of the theory of elasticity mathematical description of the model for the covering crack-visible cavities with end zones in which cohesive forces of material act, in the burning solid-fuel has been performed. It is accepted that the interaction of crack-visible cavity surfaces under the influence of body and surface loads leads to the appearance of overlap zones of their surfaces. The determination of the unknown parameters that characterize the closure crack-visible cavities, is reduced to the solving of the system of singular integrodifferential equations. Using the procedure of algebraization integral equations are reduced to the system of nonlinear algebraic equations which is solved by successive approximations. Normal and tangential contact stresses, the tractions in the bonds, the values of the size of the end contact zones, where the faces of the crack-visible cavities are closed, have been found.

**Key words:** burning solid fuel, crack-visible cavity with end zones, cohesive forces, body forces, contact stresses.



в течение расчетного срока службы. Размер исходной минимальной трещиновидной полости следует рассматривать как проектную характеристику материала топлива.

Рассматривается напряженно-деформированное состояние среды, ослабленной системой произвольно размещенных прямолинейных трещиновидных полостей, поверхности которых горят. Пусть в среде, занимающей плоскость  $xOy$ , имеется  $N$  прямолинейных трещиновидных полостей длиной  $2l_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Принято, что трещиновидные полости имеют концевыми зоны со связями между берегами. В центрах трещиновидных полостей разместим начала локальных систем координат  $x_k O_k y_k$ , оси  $O_k x_k$  которых совпадают с линиями трещин и образуют углы  $\alpha_k$  с осью  $Ox$  (рис. 1).

Считается, что все реагенты топлива равномерно распределены в твердой фазе, а продукты реакции сгорания газообразны. Рассматриваются времена, малые по сравнению с характерным временем релаксации напряжений в топливе, с характерным временем нагревания топлива вследствие теплопроводности. На основании этого предположения топливо можно считать хрупким, а его температуру — постоянной. Исследуется квазистатический процесс деформирования топлива.

В материалах при наличии вблизи трещины зон с нарушенной структурой в процесс разрушения вовлекается достаточно большая часть трещины. В этом случае область процесса разрушения рассматривают как некоторый слой (концевую зону), примыкающий к трещине и содержащий материал с частично нарушенными связями. Одна из возможностей моделирования такого слоя состоит в рассмотрении его как части (продолжения) трещины и в явном приложении к концевой зоне к берегам трещиновидной полости сил сцепления, сдерживающих ее раскрытие. Используется модель трещиновидной полости со связями между берегами в концевой зоне, получившая экспериментальное подтверждение [3–6] для композиционных материалов с полимерным связующим, когда адгезионная прочность меньше прочности полимеров. Рассматривается модель трещиновидной полости с силами сцепления (связями), непрерывно распределенными в узких концевых зонах полости и имеющими заданную диаграмму деформирования. Считается, что на частицы среды действуют объемные силы  $F = X + iY$ , где  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  — заданные функции. При  $x, y \rightarrow \infty$  компоненты вектора перемещений и компоненты тензора напряжений в топливе стремятся к нулю.

Выделим части трещин  $d_{1,k}$  и  $d_{2,k}$  (концевые зоны), примыкающие к ее вершинам, в которых действуют силы сцепления. Взаимодействие берегов трещиновидных полостей в концевых зонах моделируется путем введения между берегами трещин связей с заданной диаграммой деформирования. Физическая природа таких связей и размеры концевых зон, в которых осуществляется взаимодействие берегов трещиновидной полости, зависят от вида материала.

При нагружении топлива в связях, соединяющих берега трещиновидных полостей, будут возникать в общем случае нормальные  $q_{y_k}(x_k)$  и касательные  $q_{x_k y_k}(x_k)$  усилия ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Эти напряжения заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения задачи механики разрушения. В процессе нагружения топлива при некотором соотношении физических и геометрических параметров среды и действующих нагрузок будут возникать области сжимающих напряжений, в которых берега трещиновидных полостей (или их часть) могут войти в контакт, что приведет к появлению контактных напряжений на данном участке берегов трещиновидных полостей.

Принимаем, что эти зоны, в которых берега трещиновидных полостей вошли в контакт, примыкают к вершинам полостей, а их размеры заранее неизвестны и меньше соответствующих размеров концевых зон трещиновидных полостей, в которых действуют силы сцепления. Выделим части трещиновидных полостей  $\lambda_{1,k}$  и  $\lambda_{2,k}$  (концевые контактные зоны), примыкающие к ее вершинам, в которых берега трещиновидной полости вошли в контакт. В процессе нагружения среды в концевых зонах,

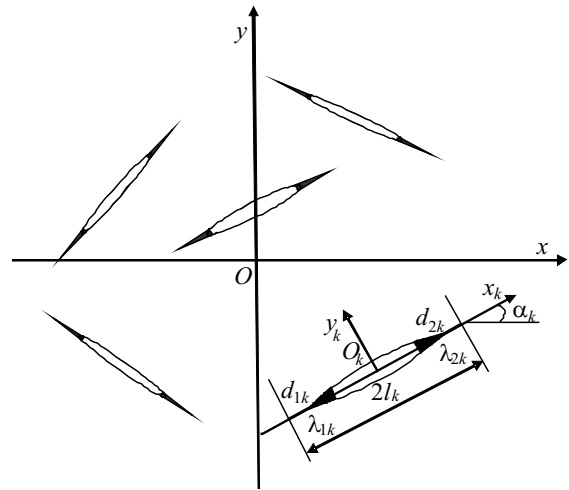


Рис. 1. Расчетная схема задачи о частичном закрытии трещиновидных полостей



где берега трещин вошли в контакт, будут возникать нормальные  $p_{y_k}(x_k)$  и касательные  $p_{x_k y_k}(x_k)$  напряжения. Величины этих контактных напряжений заранее неизвестны и подлежат определению в процессе решения краевой задачи механики разрушения. Напомним, что в рассматриваемом случае каждая трещиновидная полость состоит из трех областей: внутренней и двух концевых зон. Внутренняя область трещиновидной полости — это противоположные берега, нагруженные давлением  $p_k(x_k)$  газа. Вторая область трещиновидной полости — это концевые зоны  $(\lambda_{1,k}, d_{1,k})$  и  $(d_{2,k}, \lambda_{2,k})$  со связями между берегами. Наконец, третья область трещиновидной области — это концевые контактные зоны  $(-l_k, \lambda_{1,k})$  и  $(\lambda_{2,k}, l_k)$ , где берега трещиновидной полости вошли в контакт.

Краевые условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{y_k} &= -p_k(x_k), \quad \tau_{x_k y_k} = 0 \quad \text{на } L' \quad (k = 1, 2, \dots, N), \\ \sigma_{y_k} &= q_{y_k}(x_k), \quad \tau_{x_k y_k} = q_{x_k y_k}(x_k) \quad \text{на } L'', \\ \sigma_{y_k} &= p_{y_k}(x_k), \quad \tau_{x_k y_k} = p_{x_k y_k}(x_k) \quad \text{на } L'''. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $L'$  — совокупность берегов трещиновидных полостей, поверхности которых горят,  $L''$  — совокупность концевых зон трещиновидных полостей, в которых действуют силы сцепления;  $L'''$  — совокупность концевых зон, в которых берега трещиновидных полостей вошли в контакт.

Основные соотношения рассматриваемой задачи должны быть дополнены уравнениями газовой динамики и уравнениями для перемещений. Уравнения течения газа в  $k$ -й полости для плоского стационарного случая имеют вид [7]

$$\begin{aligned} p_k &= C_{0k} \rho_k^\chi, \quad \frac{V_{x_k}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_k}{\rho_k} = C_{1k}, \\ \frac{d}{dx}(h_k \rho_k V_{x_k}) &= \rho_s f(p_k), \quad h_k = h_{0k}(x_k) + \int f(p_k) dp_k + v_k, \\ C_{0k} &= p_{0k} \rho_{0k}^{-\chi}, \quad C_{1k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho_s}{\rho_{0k}} \right)^2 f^2(p_{1k}) + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_{1k}}{\rho_{1k}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $p_{0k}$ ,  $\rho_{0k}$  и  $p_{1k}$ ,  $\rho_{1k}$  — давление и плотность газа в камере сгорания при  $x_k = 0$  и в конце полости соответственно (величины с индексом  $1k$  подлежат определению),  $h_{0k}(x_k)$  — заданная толщина начальной трещиновидной полости;  $V_{x_k}$  — скорость газа,  $\chi$  — показатель адиабаты;  $\rho_s$  — плотность твердой фазы,  $f(p)$  — некоторая функция. Течение газа считается локально-изэнтропическим и безвихревым, а газ — идеальным.

Дополнительные уравнения для перемещений имеют вид

$$\begin{aligned} (v_k^+(x_k, 0) - v_k^-(x_k, 0)) - i(u_k^+(x_k, 0) - u_k^-(x_k, 0)) &= 0 \quad \text{на } L''', \\ (v_k^+(x_k, 0) - v_k^-(x_k, 0)) - i(u_k^+(x_k, 0) - u_k^-(x_k, 0)) &= C(x_k, \sigma_k)[q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k)] \quad \text{на } L'', \\ \sigma_k &= \sqrt{q_{y_k}^2 + q_{x_k y_k}^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции  $C(x_k, \sigma_k)$  можно рассматривать как эффективные податливости соответствующих связей, зависящие от натяжения связей,  $\sigma_k$  — модуль вектора усилий в соответствующих связях,  $(v_k^+ - v_k^-)$ ,  $(u_k^+ - u_k^-)$  — соответственно нормальная и касательная составляющие раскрытия берегов  $k$ -й трещиновидной полости.

## 2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

При наличии объемных сил решение задачи представим в виде суммы

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^1, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^1, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^1,$$

где  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  — любое частное решение уравнений плоской теории упругости при наличии объемных сил,  $\sigma_x^1$ ,  $\sigma_y^1$ ,  $\tau_{xy}^1$  — решение уравнений плоской теории упругости при отсутствии объемных сил.



Используя комплексные представления Колосова — Мусхелишвили [8], для компонент тензора напряжений имеем

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re} \left[ \Phi(z) - \frac{1}{2(1+k_0)} \frac{\partial Q}{\partial z} \right], \quad (5)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left[ \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) + \frac{1}{2(1+k_0)} \frac{\partial}{\partial z} (k_0\bar{Q} - \bar{F}_1) \right],$$

в которые входят две аналитические функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  комплексной переменной  $z = x + iy$  и две функции  $Q(z, \bar{z})$  и  $F_1(z, \bar{z})$ , представляющие собой любые частные решения уравнений:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial \bar{z}} = F(z, \bar{z}), \quad \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = \overline{F(z, \bar{z})} \quad (6)$$

Здесь  $k_0 = 3 - 4\nu$ ,  $\nu$  — коэффициент Пуассона материала топлива.

С помощью формул (5) краевые условия задачи (1) можно записать в виде граничной задачи для отыскания двух комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ :

$$\Phi(x_k) + \overline{\Phi(x_k)} + x_k \overline{\Phi'(x_k)} + \overline{\Psi(x_k)} = f(x_k), \quad (7)$$

где  $f(x_k) = -p_k(x_k) + f_0(x_k)$  на  $L'$ ,  $f(x_k) = q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k) + f_0(x_k)$  на  $L''$ ,  $f(x_k) = p_{y_k}(x_k) - ip_{x_k y_k}(x_k) + f_0(x_k)$  на  $L'''$ ,

$$f_0(x_k) = \frac{1}{1+k_0} \text{Re} \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{1}{2(1+k_0)} \left( k_0 \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial z} \right) \quad \text{при } y_k = 0.$$

Комплексные потенциалы  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , дающие решение граничной задачи (7), ищем в виде [9]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} \frac{g_k(t) dt}{t - z_k}, \quad \Psi_1(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N e^{-2i\alpha_k} \int_{-l_1}^{l_1} \left[ \frac{\overline{g_k(t)}}{t - z_k} - \frac{\bar{T}_k e^{i\alpha_k}}{(t - z_k)^2} g_k(t) \right] dt.$$

Здесь  $T_k = te^{i\alpha_k} + z_k^0$ ,  $z_k = e^{-i\alpha_k}(z - z_k^0)$ ,  $g_k(x_k)$  — искомые функции, характеризующие раскрытия смещений при переходе через линию соответствующей трещиновидной полости с концевыми зонами

$$g_k(x_k) = \frac{2\mu}{i(1+k_0)} \frac{\partial}{\partial x_k} [u_k^+(x_k, 0) - u_k^-(x_k, 0) + i(v_k^+(x_k, 0) - v_k^-(x_k, 0))].$$

Определив по формулам (5) напряжения на оси  $x_n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) и подставив их в граничные условия (7), получим систему  $N$  сингулярных интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^N \int_{-l_k}^{l_k} [K_{nk}(t, x)g_k(t) + L_{nk}(t, x)\overline{g_k(t)}] dt = \pi f_n(x) \quad |x| < l_n \quad (8)$$

Здесь  $K_{nk}(t, x)$ ,  $L_{nk}(t, x)$  определяются по известным соотношениям ([9], формулы (II.8)).

К системе комплексных сингулярных интегральных уравнений (8) для внутренних трещиновидных полостей с концевыми зонами следует добавить дополнительные равенства, выражающие условие однозначности смещений при обходе контура трещиновидной полости с концевыми зонами:

$$\int_{-l_k}^{l_k} g_k(t) dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (9)$$

С помощью процедуры алгебраизации [9, 10] система комплексных сингулярных интегральных уравнений (8) при отмеченных выше условиях (9) сводится к системе  $N \times M$  комплексных алгебраических уравнений для определения  $N \times M$  неизвестных  $g_n^0(t_m) = v_n^0(t_m) - iu_n^0(t_m)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ;  $m = 1, 2, \dots, M$ ):

$$\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N l_k \left[ g_k^0(t_m) K_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) + \overline{g_k^0(t_m)} L_{nk}(l_k t_m, l_n x_r) \right] = f_n(x_r) \quad (r = 1, 2, \dots, M-1),$$

$$\sum_{m=1}^M g_n^0(t_m) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (10)$$

где  $t_m = \cos \frac{2m-1}{2M} \pi$ ,  $x_r = \cos \frac{\pi r}{M}$ .



Если в (10) перейти к комплексно сопряженным значениям, получим еще  $N \times M$  алгебраических уравнений. В правые части (10) входят неизвестные значения усилий  $q_{y_k}(x_k)$  и  $q_{x_k y_k}(x_k)$  в связях, контактные напряжения  $p_{y_k}(x_k)$ ,  $p_{x_k y_k}(x_k)$  в узловых точках, принадлежащих соответствующим концевым зонам, а также неизвестные параметры  $\lambda_{1,k}$  и  $\lambda_{2,k}$  концевых контактных зон и значения давления газа в узловых точках полостей, поверхности которых горят.

Условиями, определяющими неизвестные контактные напряжения и усилия в связях, возникающие на берегах трещиновидных полостей в соответствующих концевых зонах, являются дополнительные уравнения (3), (4).

В рассматриваемой задаче эти дополнительные условия удобнее записать для производной раскрытия перемещений берегов трещиновидной полости:

$$g_k^0(x_k) = \frac{2\mu}{i(1+k_0)} \frac{d}{dx_k} [u_k^+(x_k, 0) - u_k^-(x_k, 0) + i(v_k^+(x_k, 0) - v_k^-(x_k, 0))] = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad \text{на } L''', \quad (11)$$

$$g_k^0(x_k) = \frac{2\mu}{i(1+k_0)} \frac{d}{dx_k} [C(x_k, \sigma_k)(q_{y_k}(x_k) - iq_{x_k y_k}(x_k))] \quad \text{на } L'', \quad (12)$$

где  $x_k$  — аффикс точек берегов соответствующих концевых зон  $k$ -й трещиновидной полости.

Требую выполнения условий (11) в узловых точках, содержащихся в контактных концевых зонах  $(-l_k, \lambda_{1,k})$  и  $(\lambda_{2,k}, l_k)$ , получим уравнения для определения приближенных значений контактных напряжений  $p_{y_k}(t_{m_{1,k}})$  и  $p_{x_k y_k}(t_{m_{1,k}})$  в узловых точках

$$g_k^0(t_{m_{1,k}}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N; m_{1,k} = 1, 2, \dots, M_{1,k}),$$

где  $M_{1,k}$  — число узловых точек, принадлежащих концевым контактным зонам  $k$ -й трещиновидной полости.

Для построения недостающих алгебраических уравнений для нахождения приближенных значений усилий  $q_{y_k}(t_{m_{2,k}})$ ,  $q_{x_k y_k}(t_{m_{2,k}})$  ( $m_{2,k} = 1, 2, \dots, M_{2,k}$ ) потребуем выполнения условий (12) в узловых точках, содержащихся в концевой зоне, где действуют силы сцепления (связи). При этом используем метод конечных разностей. В результате получена комплексная алгебраическая система из  $M_{2,k}$  уравнений для определения приближенных значений  $q_{y_k}(t_{m_{2,k}})$ ,  $q_{x_k y_k}(t_{m_{2,k}})$  в узловых точках концевой зоны  $(\lambda_{1,k}, d_{1,k})$  и  $(d_{2,k}, \lambda_{2,k})$  со связями между берегами.

Для определения размеров концевых контактных зон необходимо еще  $2N$  уравнений. Записывая условия конечности напряжений, находим еще  $2N$  недостающих уравнений в виде

$$\sum_{m=1}^M (-1)^m g_k^0(t_m) \operatorname{ctg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

$$\sum_{m=1}^M (-1)^{M+m} g_k^0(t_m) \operatorname{tg} \frac{2m-1}{4M} \pi = 0.$$

Из-за неизвестных размеров концевых контактных зон система алгебраических уравнений оказалась нелинейной.

### 3. МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ И ЕГО АНАЛИЗ

Полученные системы уравнений позволяют при заданных характеристиках связей материала определить давление газа в каждой полости, усилия в связях  $q_{y_k}(x_k)$  и  $q_{x_k y_k}(x_k)$ , контактные напряжения  $p_{y_k}(x_k)$ ,  $p_{x_k y_k}(x_k)$ , размеры концевых контактных зон, напряженно-деформированное состояние среды.

Для численного решения этих уравнений целесообразно применять следующий способ: функции  $p_k(x_k)$  ищутся в виде многочленов с неизвестными коэффициентами, а уравнение для  $p_k(x_k)$  удовлетворяется приближенно в смысле наибольшей близости к нулю среднеквадратичной невязки. При этом неизвестные коэффициенты определяются из условия минимума получившихся функций.



Для нахождения напряжений и размеров концевых контактных зон необходимо задать закон изменения объемных сил. Функции  $X(x, y)$  и  $Y(x, y)$  для упрощения разложим в ряды Тейлора в окрестности начала координат и в этом разложении ограничимся несколькими первыми членами разложения. С помощью интегрирования уравнений (6) находим

$$Q(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} F(z, \bar{z}) d\bar{z}, \quad F_1(z, \bar{z}) = \int^z dz \int^{\bar{z}} \overline{F(z, \bar{z})} dz.$$

По найденным функциям  $Q(z, \bar{z})$  и  $F_1(z, \bar{z})$  согласно (6) находим функцию  $f_0(x_k)$ .

Для решения системы уравнений использовался метод последовательных приближений [10]. В каждом приближении система уравнений решалась методом Гаусса с выбором главного элемента для различных значений  $M$ .

В случае нелинейного закона деформирования связей для определения усилий в связях используем также итерационный алгоритм, подобный методу упругих решений [11].

Нелинейная часть кривой деформирования связей представлялась в форме билинейной зависимости [12], восходящий участок которой соответствовал упругому деформированию связей ( $0 < V_k < V_*$ ) с максимальным натяжением связей. При  $V_k = |(u_k^+ - u_k^-) + i(v_k^+ - v_k^-)| > V_*$  закон деформирования описывался нелинейной зависимостью, определяемой двумя точками  $(V_*, \sigma_*)$  и  $(\delta_c, \sigma_c)$ . Причем при  $\sigma_c \geq \sigma_*$  имеем возрастающую линейную зависимость (линейное упрочнение, соответствующее упругопластической деформации связей).

Для определения предельного состояния, при котором происходит разрыв связей без продвижения вершины трещиновидной полости, используем критическое условие

$$|(v_k^+ - v_k^-) - i(u_k^+ - u_k^-)| = \delta_c, \quad (13)$$

где  $\delta_c$  — характеристика сопротивления материала топлива развитию в нем трещины.

Считается, что разрыв связей на краю концевой области при  $x_k = d_{1,k}$  или  $x_k = d_{2,k}$  происходит при выполнении условия (13). На основании полученного решения, учитывая соотношение (4), предельное условие запишется в виде

$$\text{для левого конца концевой зоны } C(d_{1,k}, \sigma_k(d_{1,k}))\sigma_k(d_{1,k}) = \delta_c,$$

$$\text{для правого конца концевой зоны } C(d_{2,k}, \sigma_k(d_{2,k}))\sigma_k = \delta_c.$$

Совместное решение полученной системы уравнений и условия (13) позволяет при заданных объемных силах определить критическую интенсивность давления  $p_k(x_k)$  газа в каждой полости, усилия в связях, контактные напряжения, размеры контактных концевых зон для состояния предельного равновесия.

Рассмотрен приближенный расчет в предположении, что

$$h_{0k}(x) = h_{k0} = \text{const}, \quad f(p) = A + Bp, \quad h_{0k} \gg v_k, \quad h_{0k} \gg h_{ck}, \quad \int_0^{d_k} p_k(x_k) dx_k = \frac{1}{2} d_k (p_{1k} + p_{0k}).$$

Здесь  $A$  и  $B$  — эмпирические постоянные,  $2v_k$  — взаимное смещение противоположных стенок  $k$ -й трещиновидной полости,  $h_{ck}$  — толщина сгоревшего слоя на одной стенке.

При вычислении смещений, усилий в связях, контактных напряжений и размеров концевых контактных зон считали, что на стенки  $k$ -й полости действует постоянное давление  $(p_{1k} + p_{0k})/2$ .

На основании этих упрощений из уравнений системы (2) находим

$$\frac{p_{1k}}{\rho_{1k}^\chi} = \frac{p_{0k}}{\rho_{0k}^\chi}, \quad \rho_{1k} V_{x_{1k}} - \rho_{0k} V_{x_{0k}} = \frac{\rho_s}{h_{0k}} \left[ A d_k + \frac{1}{2} B d_k (p_{1k} + p_{0k}) \right],$$

$$V_{x_{1k}} = \frac{\rho_s}{\rho_{0k}^2} (A + B p_{1k}), \quad \frac{V_{x_{1k}}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_{1k}}{\rho_{1k}} = \frac{V_{x_{0k}}^2}{2} + \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{p_{0k}}{\rho_{0k}}.$$

Из этих соотношений определяются  $p_{1k}$ ,  $\rho_{1k}$ ,  $V_{x_{1k}}$ ,  $V_{x_{0k}}$ .

Проведен параметрический анализ зависимости контактных напряжений  $p_{yk}$  и  $p_{x_k y_k}$  от размера трещиновидной полости, ее расположения и физико-механических параметров связей, относительного

размера концевой области. Результаты расчета контактных напряжений  $p_y/F_0$  для случая одной трещины при  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $z_1^0 = 0$ ,  $2l_1 e^{i\pi\theta}/12$  вдоль правой концевой контактной зоны для разных значений относительного размера концевой области  $\varepsilon_1 = (l_1 - d_{1,2})/l_1$  представлены в виде графиков на рис. 2 (кривая 1 соответствует линейному закону деформирования связей, а кривая 2 — билинейному (нелинейному) закону деформирования связей). Здесь  $F_0$  — силовой фактор. Сплошные линии для  $\varepsilon_1 = 0,25$ , а штриховые для  $\varepsilon_1 = 0,5$ . При расчетах были использованы безразмерные координаты  $x'_k$  ( $k = 1$ ):

$$x_k = \frac{\lambda_{2,k} + l_k}{2} + \frac{l_k - \lambda_{2,k}}{2} x'_k.$$

Результаты расчетов нормальных контактных напряжений для случая двух трещин  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $z_1^0 = 0,25l_1 e^{i\pi\theta}/10$  и  $\alpha_2 = 30^\circ$ ,  $z_2^0 = 0,15l_2 e^{i\pi\theta}/18$  вдоль правых концевых контактных зон представлены в виде графиков при относительных размерах концевых областей  $(l_1 - d_{1,2})/l_1 = 0,25$  (рис. 3, а),  $(l_2 - d_{2,2})/l_2 = 0,25$  (рис. 3, б). Здесь кривые 1 для линейного закона деформирования связей, а кривые 2 — для билинейного закона деформирования связей.

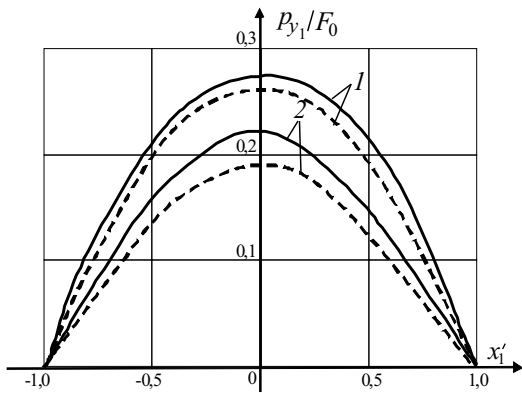


Рис. 2. Зависимости нормальных контактных напряжений при  $\alpha_1 = 30^\circ$  вдоль правой концевой зоны для разных значений относительного размера концевой области  $\varepsilon_1 = (l_1 - d_{1,2})/l_1$

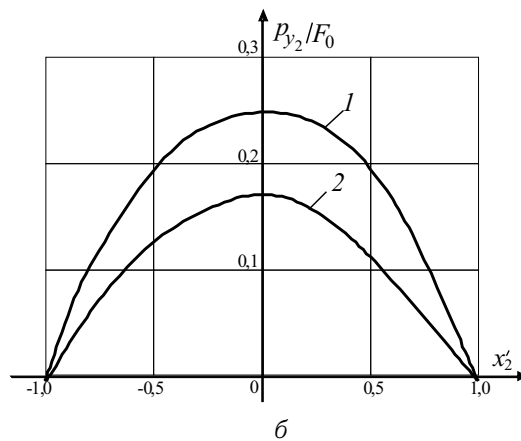
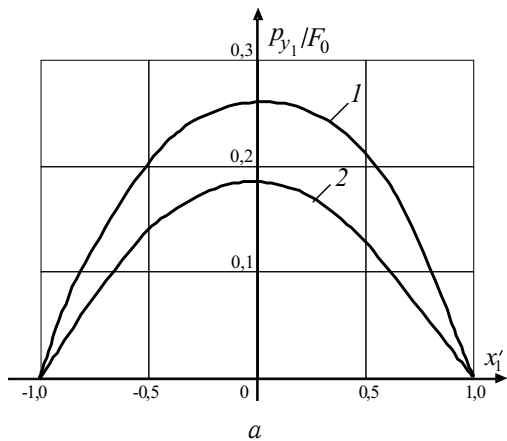


Рис. 3. Зависимости нормальных контактных напряжений для случая двух трещин  $\alpha_1 = 45^\circ$  и  $\alpha_2 = 30^\circ$  вдоль правой контактной зоны первой трещины (а) и второй трещины (б)

Максимальные значения контактных напряжений  $p_{y_k}$  и  $p_{x_k y_k}$  находятся в средней части контактных зон, где берега трещиновидных полостей смыкаются. Подобные зависимости контактных напряжений имеют место и в левых концевых контактных зонах. При увеличении размера концевой зоны сил сцепления материала уровень усилий  $q_{y_k}$  и  $q_{x_k y_k}$  в связях снижается, соответственно уменьшаются и контактные напряжения  $p_{y_k}$  и  $p_{x_k y_k}$ . Значительное влияние на контактные напряжения оказывает место расположения трещиновидной полости. Когда полости расположены близко друг к другу, то расчеты показывают увеличение размеров концевых контактных зон. Различие видов взаимного влияния трещиновидных полостей объясняется различиями их расположения.

Изложенный метод решения задачи механики разрушения позволяет также рассмотреть случай, когда у части трещин берега не входят в контакт (отсутствуют контактные концевые зоны).

Анализ моделирования напряженного состояния горящего твердого топлива, ослабленного трещиновидными полостями, поверхности которых горят, при контактном взаимодействии их берегов, сводится к параметрическому исследованию полученной замкнутой системы алгебраических уравнений.



## Библиографический список

1. Соркин, Р.Е. Газотермодинамика ракетных двигателей на твердом топливе / Р.Е. Соркин. М.: Наука, 1967. 319 с.
2. Шапиро, Я.М. Основы проектирования ракет на твердом топливе / Я.М. Шапиро, Г.Ю. Мазинг, Н.Е. Прудников. М.: Военное изд-во, 1978. 621 с.
3. Budiansky, B. Fiber-matrix de bonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites / B. Budiansky, A.G. Evans, J.W. Hutchinson // Intern. J. Solid Structures. 1995. Vol. 32, № 3–4. P. 315–328.
4. Ji, H. Adhesion via Connector Molecules: The Many-stitch Problem / H. Ji, P.G. de Gennes // Macromolecules. 1993. Vol. 26. P. 520–525.
5. Cox, B.N. Concepts for bridged cracks fracture and fatigue / B.N. Cox, D.B. Marshall // Acta Met. Mat. 1994. Vol. 42, № 2. P. 341–363.
6. Goldstein, R.V. Modelling of the adhesion strength and fracture kinetics of the microelectronic package polymer-polymer joints / R.V. Goldstein, V.F. Bakirov, M.N. Perelmuter // Proc. Inst. Phys. Technol. Russian Ac. of Sci. 1997. Vol. 13. P. 115–125.
7. Черепанов, Г.П. Механика хрупкого разрушения / Г.П. Черепанов. М.: Наука, 1974. 640 с.
8. Мухелишвили, Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мухелишвили. М.: Наука, 1966.
9. Панасюк, В.В. Распределение напряжений около трещин в пластинках, оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин. Киев: Наук. думка, 1976. 443 с.
10. Мирсалимов, В.М. Неоднородные упругопластические задачи / В.М. Мирсалимов. М.: Наука, 1987. 256 с.
11. Ильюшин, А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. М.: Л.: Гостехиздат, 1948.
12. Гольдштейн, Р.В. Рост трещин по границе соединения материалов / Р.В. Гольдштейн, М.Н. Перельмутер // Проблемы механики: сб. статей к 90-летию со дня рождения А.Ю. Ишлинского / под ред. Д.М. Климова. М.: Физматлит, 2003. С. 221–238.

УДК 539.319

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

М.А. Осипенко, Ю.И. Няшин

Пермский государственный технический университет,  
кафедра теоретической механики  
E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

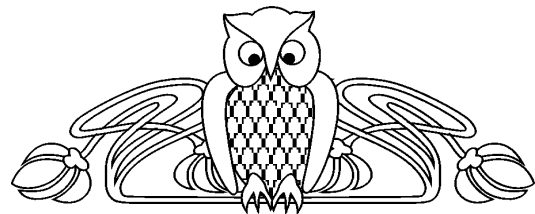
Рассмотрены задачи об одностороннем контакте балок, струн, круглых мембран и пластин. Предложен новый подход к решению таких задач, включающий строгую математическую постановку, элементарное доказательство единственности решения, метод построения аналитического решения, основанный на итерационном уточнении области контакта. Приведен ряд примеров применения этого метода к решению одномерных контактных задач.

**Ключевые слова:** струна, балка, мембрана, пластина, односторонний контакт, одномерная задача, аналитическое решение.

### ВВЕДЕНИЕ

Существует ряд одномерных контактных задач, решения которых могут быть получены в явном аналитическом виде. Это задачи об одностороннем контакте двух струн, балок, осесимметричных мембран или пластин под заданной нагрузкой (рис. 1,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  соответственно) и о таком же контакте струны, балки, мембраны или пластины с абсолютно твердым телом (рис. 2,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  соответственно).

Физические предположения в этих задачах примем самыми простыми: все объекты являются однородными, толщины их геометрически равны нулю, контакт происходит без трения, перемещения считаются малыми (на рис. 1 и 2 перемещения для наглядности показаны сильно увеличенными). Теории изгиба балок и пластин используем также простейшие: теории Бернулли и Кирхгофа соответственно [1].



### A Certain Approach to Solving of Some One-Dimensional Contact Problems

M.A. Osipenko, Yu.I. Nyashin

Perm State Technical University,  
Chair of Theoretical Mechanics  
E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru

The paper deals with the problems of the unbonded contact of beams, strings, circular membranes and plates. A new approach to solving of such problems is suggested. This approach includes the rigorous problem statement, the elementary proof of the uniqueness of solution and the analytical solution construction method. The method is based on the iterative correction of the contact region. A number of examples of this method application are given.

**Key words:** string, beam, membrane, plate, unbonded contact, one-dimensional problem, analytical solution.