



УДК 531.383:532.516

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧКАХ, СОДЕРЖАЩИХ ВЯЗКУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ



А. Ю. Блинкова, С. В. Иванов, А. Д. Ковалев, Л. И. Могилевич<sup>1</sup>

Саратовский государственный университет  
E-mail: evilgraywolf@gmail.com

<sup>1</sup>Московский государственный университет путей сообщения (Поволжский филиал), Саратов

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных волн деформаций в упругих физически нелинейных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы с позиций теории солитонов. Разработанная модель описывает процессы в трубках относительно малого диаметра по сравнению с длиной волны, таких как кровеносные сосуды.

**Ключевые слова:** цилиндрическая оболочка, нелинейные волны деформации, гидроупругость, вязкая несжимаемая жидкость, солитон.

## Mathematical and Computer Modeling of Nonlinear Waves Dynamics in a Physically Nonlinear Elastic Cylindrical Shells with Viscous Incompressible Liquid inside Them

A. Yu. Blinkova, S. V. Ivanov, A. D. Kovalev, L. I. Mogilevich

This study focuses on the analysis of nonlinear wave propagation deformations in the elastic physically nonlinear cylindrical shells, containing a viscous incompressible fluid. Wave processes in an elastic cylindrical shell without interacting with fluid were previously

studied from the standpoint of the theory of solitons. The developed model describes the processes in the tubes of relatively small diameter compared to the wavelength, such as blood vessels.

**Key words:** cylinder shell, non-linear deformation waves, hydroelasticity, viscous incompressible liquid, solitary wave.

1. Волновые процессы в упругой цилиндрической оболочке без взаимодействия с жидкостью ранее исследованы в [1, 2] с позиций теории солитонов. Получим уравнение динамики с учётом наличия жидкости в оболочке с помощью асимптотических методов для решения связанной задачи гидроупругости с соответствующими граничными условиями. Рассмотрим бесконечно длинную упругую цилиндрическую оболочку, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость. Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, x$  записываются в случае осесимметричного течения в виде [3]

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{V_r}{r^2} \right), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} \right); \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

На границах с оболочками выполняются условия прилипания жидкости

$$V_r = -\frac{\partial W}{\partial t}, V_x = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \text{при} \quad r = R_1 - W. \quad (2)$$

Здесь  $W$  – прогиб, положительный к центру кривизны оболочки;  $t$  – время;  $V_r, V_x$  – проекции вектора скорости жидкости на оси цилиндрической системы координат;  $p$  – давление;  $\rho$  – плотность;  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $U$  – продольное упругое перемещение оболочек по оси  $x$ ;  $R_1$  – внутренний радиус оболочки.

Записывая уравнения движения элемента цилиндрической оболочки в перемещениях для модели Кирхгофа–Ляве, считаем материал нелинейно-упругим с кубической зависимостью интенсивности напряжений  $\sigma_1$  от интенсивности деформаций  $e_1$  [4]

$$\sigma_1 = Ee_1 + me_1^3. \quad (3)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга;  $m$  – константа материала, определяемая из опытов на растяжение или сжатие.



Кроме этого учтем конструкционное демпфирование в материале оболочки, характеризующееся величиной, пропорциональной  $\partial W/\partial t$ ,

добавляемой к Даламберовой силе инерции [5].

Уравнения динамики физически нелинейной оболочки с учетом (3) записываются в виде

$$\begin{aligned} & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \mu_0 \frac{W}{R} \right) + \frac{4}{3} \frac{mh_0}{1-\mu_0^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^3 - \right. \\ & \left. - (1+\mu_0) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R} \right) - \mu_0 \left( \frac{W}{R} \right)^3 \right] - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x, \\ & \frac{Eh_0}{1-\mu_0^2} \left( \frac{h_0}{12} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{\mu_0}{R} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{W}{R^2} \right) + \frac{4}{3} \frac{mh_0}{1-\mu_0^2} \frac{1}{R} \left[ \mu_0 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^3 - \right. \\ & \left. - (1+\mu_0) \frac{\partial U}{\partial x} \frac{W}{R} \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{W}{R} \right) - \left( \frac{W}{R} \right)^3 \right] + \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \varepsilon_g \rho_0 h_0 \frac{\partial W}{\partial t} = q_n. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $h_0$  – толщина оболочки ( $h_0/2 = R - R_1$ );  $\mu_0$  – коэффициент Пуассона;  $R$  – радиус срединной поверхности оболочки;  $c_0 = \sqrt{E/[\rho_0(1-\mu_0^2)]}$  – скорость звука в материале оболочки;  $\rho_0$  – плотность материала оболочки;  $q_x, q_n$  – напряжения со сторо-

ны жидкости;  $\varepsilon_g$  – коэффициент демпфирования.

Если снести напряжения на невозмущенную поверхность оболочки ( $W \ll R$ ), то можно считать, что поверхностные напряжения со стороны жидкости определяются формулами

$$q_x = \left[ \rho v \left( \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R}, \quad q_n = \left[ -p + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R}. \quad (5)$$

2. Принимая длину волны  $l$  за характерную длину, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений:

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}. \quad (6)$$

Положим

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{l} &= \varepsilon = o(1), & \frac{w_m}{R} &= O(\varepsilon), & \frac{R}{l} &= O(\varepsilon^{1/2}), \\ \frac{h_0}{R} &= O(\varepsilon), & \frac{E}{m} &= O(\varepsilon), & \varepsilon_g \frac{R}{c_0} &= O(\varepsilon^{3/2}). \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varepsilon < 1$  – малый параметр в задаче (4).

Применим метод двухмасштабных асимптотических разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (8)$$

где  $c$  – безразмерная неизвестная скорость волны,  $\tau$  – внутренняя переменная, а зависимые переменные представлены в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (9)$$

Подставляя (6), (8), (9) в уравнения (4) с учетом оценок (7), получим в нулевом приближении по  $\varepsilon$  линейную систему уравнений, из которой следует связь

$$\frac{w_m l}{u_m R} u_{30} = \mu_0 \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \quad (10)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = 1 - \mu_0^2. \quad (11)$$

Из следующего приближения по  $\varepsilon$ , учитывая (10) и (11), находится система уравнений, являющихся составными для  $u_{10}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1-\mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1-\mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1-\mu_0^2} \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \varepsilon_g \frac{R^2}{c_0 l \varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} = \\ & = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2} \frac{1}{2\sqrt{1-\mu_0^2}} \left[ q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$



В случае отсутствия жидкости правая часть уравнений (12) равна нулю и получается известное модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза – Бюргера (МКДВ-Б) для

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = \mu_0 \frac{w_m l}{u_m R} u_{30}.$$

3. Для определения правой части уравнения (12) введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} V_r &= w_m \frac{c_0}{l} v_r, & V_x &= w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, & r^* &= \frac{r}{R_1}, \\ t^* &= \frac{c_0}{l} t, & x^* &= \frac{x}{l}, & p &= \frac{\rho v c_0 l w_m}{R_1^3} P, \\ \psi &= \frac{R_1}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), & \lambda &= \frac{w_m}{R_1} = O(\varepsilon), \\ \psi &\ll 1, & \lambda &\ll 1. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставляя (13) в уравнения гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорость и давление в виде разложения по малому параметру  $\lambda$ :

$$P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \quad (14)$$

В нулевом приближении по  $\psi$  ( $\psi \approx 0$  – гидродинамической теории смазки), считая  $\psi \frac{R_1 c_0}{v} \ll 1$  – ползущие течения [6, 7], и в нулевом приближении по  $\lambda$  получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^0}{\partial r^*} &= 0, & \frac{\partial P^0}{\partial x^*} &= \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right), \\ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) &+ \frac{\partial v_x^0}{\partial x^*} &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

и граничные условия

$$\begin{aligned} r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} &= 0, & r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} &= 0 & \text{при } r^* &= 0, \\ v_r^0 &= -\frac{\partial u_3}{\partial t^*}, & v_x^0 &= \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} & \text{при } r^* &= 1. \end{aligned} \quad (16)$$

Из решения задачи (15), (16) следует, что

$$P^0 = 16 \int \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right] dx^*, \quad (17)$$

$$\left[ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1} = 8 \left[ \frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_1}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_3}{\partial t^*} dx^* \right].$$

Учитывая, что были введены переменные (8), (9), и имея соотношения (10) и (11), из (17) получим:

$$P^0 = 8 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \left[ 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} - 1 \right] u_{10}, \quad (18)$$

$$\left[ \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1} = 4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \left[ 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} - 1 \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}.$$

С принятой точностью по  $\varepsilon, \psi, \lambda$  из (5) найдем

$$\begin{aligned} q_x &= \left[ \rho v \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right]_{r^*=1}, \\ q_n &= -\rho v \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{l}{R_1} P, \end{aligned}$$

и, следовательно, в правой части уравнения (12) остается выражение

$$\begin{aligned} q_x - \mu_0 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} &= \\ &= -4 \sqrt{1 - \mu_0^2} \frac{v}{R_1 c_0} \rho c_0^2 \frac{u_m}{l} \left[ 1 - \left( 2 \mu_0 \frac{R}{R_1} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (19)$$

С принятой точностью по  $\psi, \varepsilon$  положим  $R_1 \approx R$ . Подставляя (19) в уравнение (12), окончательно получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} &+ \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{R}{l} \right)^2 \frac{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}}{2} \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} + \\ &+ \frac{2m}{E\varepsilon} \left( \frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0 + \mu_0^2) \sqrt{1 - \mu_0^2} \left( \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ &- \varepsilon_g \frac{R^2}{c_0 l \varepsilon} \frac{\mu_0^2}{2} \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} - 2 \left[ 1 - (2 \mu_0)^2 \right] \frac{\rho l v}{\rho_0 h_0 \varepsilon R_1 c_0} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c \varphi, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau \quad (21)$$

позволяет записать уравнение (20) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} + 6 \varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \sigma_g \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} - \sigma \varphi = 0. \quad (22)$$

Здесь  $\sigma = +1$  (при  $\mu_0 < 1/2$  – неорганические материалы),  $\sigma = -1$  (при  $\mu_0 > 1/2$  – живые



организмы) и  $\sigma = 0$  (при  $\mu_0 = 1/2$  – резина).  
При этом вводится обозначение

$$\sigma_g = \varepsilon_g \frac{R^2 \mu_0^2 c_1^2}{c_0 l \varepsilon 2 c_2}.$$

Постоянные  $c, c_1, c_2$  определяются при подстановке (21) в (20) и имеют вид

$$c_2 = \sigma 2 \left[ 1 - (2\mu_0)^2 \right] \frac{\rho l v}{\rho_0 h_0 \varepsilon R_1 c_0},$$

$$c_1 = \left[ c_2 \varepsilon \left( \frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{\mu_0^2 \sqrt{1 - \mu_0^2}} \right]^{1/3},$$

$$c = \left[ 3 \frac{E R^2 \mu_0^2}{2m u_m^2 1 - \mu_0 + \mu_0^2} \right]^{1/2} c_1.$$

В случае отсутствия жидкости последнее слагаемое в уравнении исчезает и оно переходит в МКдВ-Б, которое только при  $\sigma_g = 0$  превращается в МКдВ и имеет точное частное решение в виде солитона и антисолитона

$$\varphi = \pm \frac{k}{(k(\eta + \eta_0) - k^3 t)}. \quad (23)$$

Это решение при  $t = 0$  можно взять в качестве начального условия при численном решении задачи Коши для уравнения (22).

4. В работах [8–10] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема определяется как условие совместности для данной системы. Таким образом, получается разностная схема метода конечных объемов, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из базовых конечных объемов.

Запишем уравнение (22) в интегральной форме:

$$\oint_{\partial\Omega} -(2\varphi^3 + \varphi_{\eta\eta} - \sigma_g \varphi_\eta) dt + \varphi d\eta - \iint_{\Omega} \sigma \varphi dt d\eta = 0 \quad (24)$$

для любой области  $\Omega$ . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим  $u_j^n = \varphi(t_n, \eta_j)$  и выберем в качестве базового контур, показанный на рис. 1.

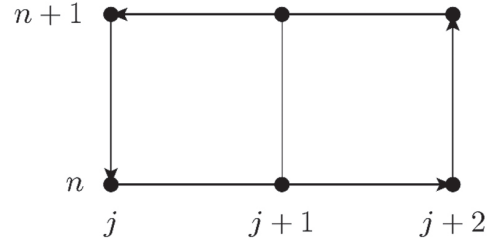


Рис. 1. Базовый контур для уравнения

Добавим интегральные соотношения

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_t dt &= u(t_{n+1}, \eta) - u(t_n, \eta), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_\eta d\eta &= u(t, \eta_{j+1}) - u(t, \eta_j), \\ \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta\eta} d\eta &= u_\eta(t, \eta_{j+1}) - u_\eta(t, \eta_j). \end{aligned} \quad (25)$$

Используя для интегрирования по времени и по четным производным по  $\eta$  формулу трапеций, а по нечетным производным по  $\eta$  формулу среднего значения и полагая  $t_{n+1} - t_n = \tau$ ,  $\eta_{j+1} - \eta_j = h$ , перепишем соотношения (24), (25) в виде

$$\begin{aligned} & - \left( 2u_j^{3n} + 2u_j^{3n+1} - 2u_{j+2}^{3n} - 2u_{j+2}^{3n+1} \right) + \\ & + \left( u_{\eta\eta_j}^n + u_{\eta\eta_j}^{n+1} - u_{\eta\eta_{j+2}}^n - u_{\eta\eta_{j+2}}^{n+1} \right) - \\ & - \sigma_g \left( u_{\eta_j}^n + u_{\eta_j}^{n+1} - u_{\eta_{j+2}}^n - u_{\eta_{j+2}}^{n+1} \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \\ & + (u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) \cdot 2h - \sigma (u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n) \cdot h\tau = 0, \\ & (u_{t_j}^{n+1} + u_{t_j}^n) \cdot \frac{\tau}{2} = u_j^{n+1} - u_j^n, \\ & (u_{\eta_{j+1}}^n + u_{\eta_j}^n) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^n - u_j^n, \\ & u_{\eta\eta_{j+1}}^n \cdot 2h = u_{\eta_{j+2}}^n - u_{\eta_j}^n. \end{aligned} \quad (26)$$

Вводя сеточные операторы сдвига  $\theta_t, \theta_\eta$  по переменным  $t, \eta$  соответственно, запишем уравнения в операторной форме:

$$\begin{aligned} & -(1 + \theta_t - \theta_\eta^2 - \theta_t \theta_\eta^2) \circ (3u^2 + u_{\eta\eta} - \sigma_g \varphi_\eta) \cdot \frac{\tau}{2} + \\ & + (\theta_\eta \theta_t - \theta_\eta) \circ u \cdot 2h - (\theta_\eta \theta_t + \theta_\eta) \circ \sigma u \cdot h\tau = 0, \\ & (\theta_t + 1) \circ u_t \cdot \frac{\tau}{2} = (\theta_t - 1) \circ u, \\ & (\theta_\eta + 1) \circ u_\eta \cdot \frac{h}{2} = (\theta_\eta - 1) \circ u, \\ & \theta_\eta \circ u_{\eta\eta} \cdot 2h = (\theta_\eta^2 - 1) \circ u_\eta. \end{aligned} \quad (27)$$



Выбирая допустимое лексикографическое упорядочение сначала по функциям  $u_{\eta\eta} > u_\eta > u_t > u$ , затем по переменным  $\theta_\eta > \theta_t$ , можно построить базис Грёбнера или инво-

лютивный базис [8]. В результате получим следующую разностную схему для уравнения (22), аналогичную схеме Кранка–Николсона для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + 2 \frac{(u_{j+1}^{3n+1} - u_{j-1}^{3n+1}) + (u_{j+1}^{3n} - u_{j-1}^{3n})}{4h} + \\ & + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} - \\ & - \sigma_g \frac{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}{2h^2} - \sigma \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} = 0. \end{aligned}$$

Результаты проведенного компьютерного моделирования представлены на рис. 2–4. Расчеты позволяют сделать следующие выводы. Наличие жидкости в оболочке приводит к существенному изменению характера распространения в ней продольных волн деформаций. Если в оболочке нет жидкости и рассеяния энергии, уединённая волна (солитон) движется, сохраняя свою первоначальную форму и скорость. Наличие жидкости в оболочке из неорганических материалов без рассеяния энергии ведет к росту амплитуды волны на малых временах, а затем к формированию на переднем фронте волны осцилляций (см. рис. 2). При наличии рассеяния энергии рост амплитуды замедляется и осцилляции ослабевают (см. рис. 3). Таким образом, можно утверждать, что жидкость способствует постоянной дополнительной «подпитке» энергией (из источника первоначального возбуждения),

обеспечивающей рост амплитуды и генерации колебаний на переднем фронте волны.

Наличие жидкости в оболочке из органических материалов ведет к быстрому уменьшению амплитуды волны, т. е. к её затуханию. Осцилляции на переднем фронте волны не наблюдаются (см. рис. 4). Для поддержки процесса распространения волны необходимо периодическое её возбуждение.

Проведенные исследования направлены на развитие математических моделей, адекватно описывающих реологические свойства крови, лимфы и других биологических жидкостей. Использование данных моделей в свою очередь позволит существенно расширить возможности анализа экспериментальных данных по исследованию кровотока, лимфотока, пульсовых волн и т.д., динамика которых носит принципиально нелинейный характер, что в свою очередь имеет

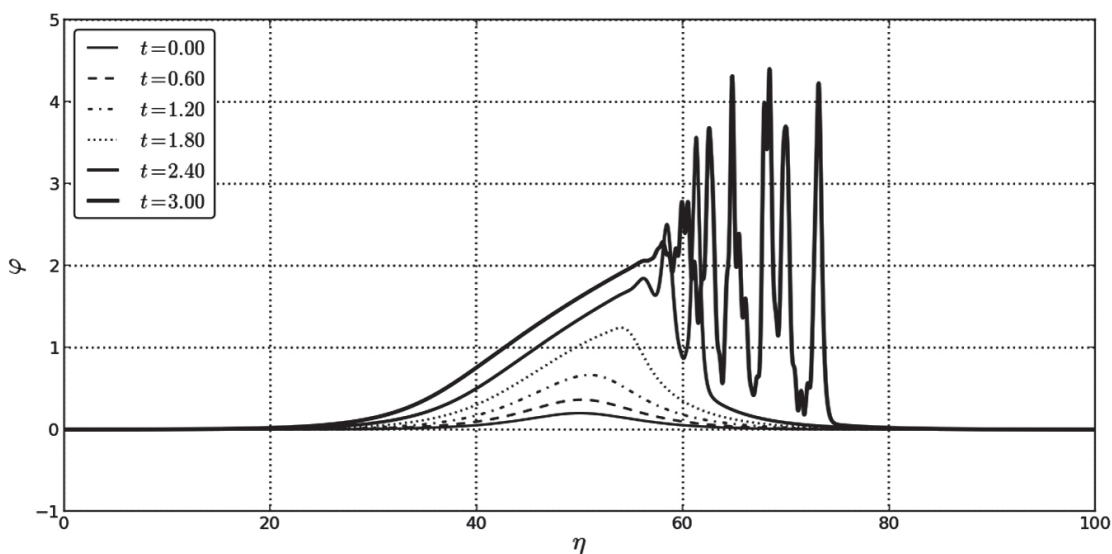


Рис. 2. График численного решения уравнения с начальным условием (23) при  $\sigma_g = 0.0$ ,  $\sigma = 1.0$ ,  $k = 0.2$  и для  $t = 0.0...3.00$



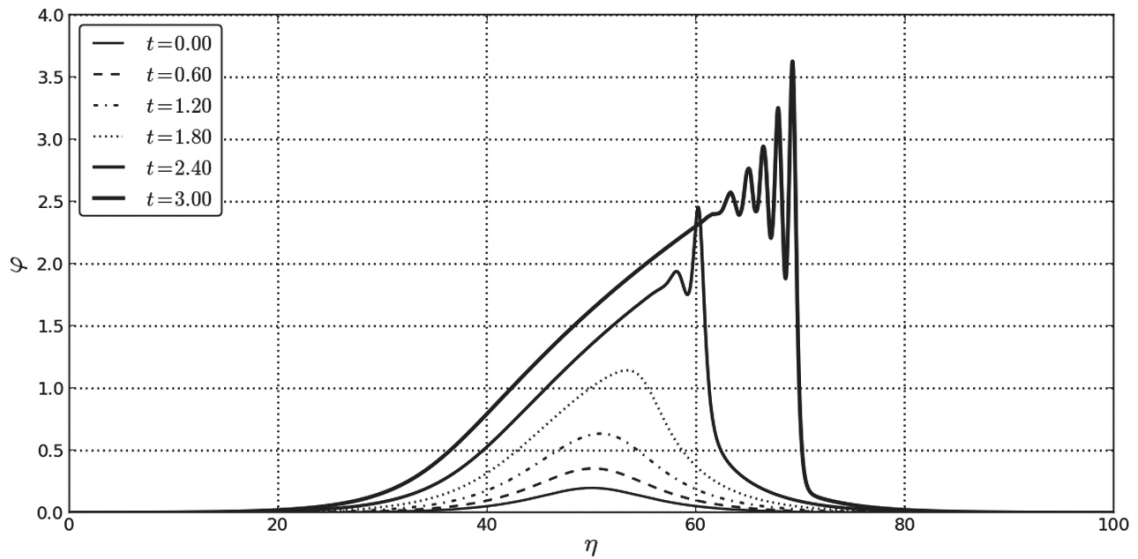


Рис. 3. График численного решения уравнения (22) с начальным условием (23) при  $\sigma_g = 1.0$ ,  $\sigma = 1.0$ ,  $k = 0.2$  и для  $t = 0.0 \dots 3.00$

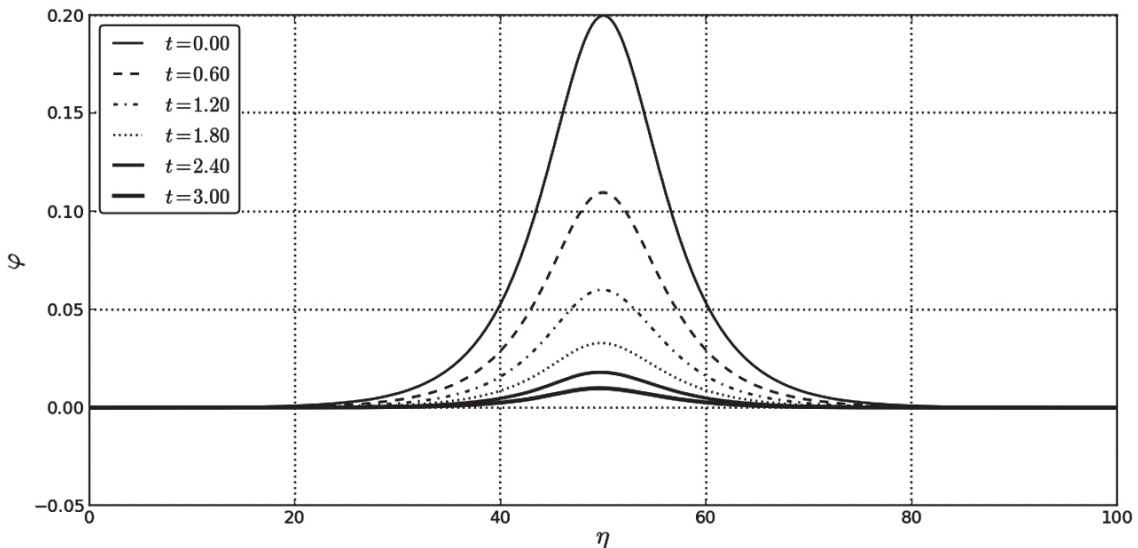


Рис. 4. График численного решения уравнения (23) с начальным условием (23) при  $\sigma_g = 1.0$ ,  $\sigma = -1.0$ ,  $k = 0.2$  и для  $t = 0.0 \dots 3.00$

принципиальное значение для развития диагностических методов в современной медицине.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-01-00177-а) и Гранта Президента РФ (проект № МД-1025.2012.8).*

#### Список литературы

1. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны деформаций в цилиндрических оболочках // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 1995. Т. 3, № 1. С. 52–58.
2. Землянухин А. И., Могилевич Л. И. Нелинейные волны в цилиндрических оболочках : солитоны, симметрии, эволюция / Саратов. гос. техн. ун-т. Саратов, 1999. 132 с.
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М. : Дрофа, 2003. 840 с.
4. Каузерер К. Нелинейная механика. М. : Иностран. лит., 1961. 240 с.
5. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа : задачи гидроупругости. М. : Наука, 1979. 320 с.
6. Чивилихин С. А., Попов И. Ю., Гусаров В. В. Динамика скручивающихся нанотрубок в вязкой жидкости // Докл. РАН. 2007. Т. 412, № 2. С. 201–203.
7. Попов Ю. И., Розыгина О. А., Чивилихин С. А., Гусаров В. В. Солитоны в стенке нанотрубки и стоково течение в ней // Письма в ЖТФ. 2010. Т. 36, вып. 18. С. 42–54.



8. Блинков Ю. А., Мозжилкин В. В. Генерация разностных схем для уравнения Бюргера построением базисов Грёбнера // Программирование. 2006. Т. 32, № 2. С. 71–74.
9. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A., Mozhilkin V. V. Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications. 2006. Vol. 2. P. 26. URL: <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html> (дата обращения: 12.02.2010).
10. Gerdt V. P., Blinkov Yu. A. Involution and difference schemes for the Navier-Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing / Lecture Notes in Computer Science. Berlin : Springer-verlag, 2009. Vol. 5743. P. 94–105.

УДК 546.26

## ШАРОВИДНЫЙ ГРАФИТ – УНИКАЛЬНОЕ МОРФОЛОГИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ УГЛЕРОДА

А. А. Аникин, С. Б. Вениг, Д. И. Биленко, А. Н. Грибов

Саратовский государственный университет  
E-mail: gribovan@mail.ru

Шаровидный графит – малоизученная форма графита. Известно, что его присутствие влияет на придание серым чугунам свойств сталей. Проведенными исследованиями установлено, что шаровидный графит является уникальной слоисто-спиральной системой микро- и нанобразований, неоднородной по фазовому составу, структуре и элементному составу с преимущественно периодическим чередованием близких слоёв. Такие системы могут обладать свойствами и их сочетаниями, существенно иными, нежели отдельные микро- и наночастицы и композиты на их основе. Высокое отношение площади поверхности к объёму в таких частицах, варьируемая насыщенность связей и переменная топология указывают на перспективность изучения физических, адсорбционных и каталитических свойств и создания ряда устройств на их основе.

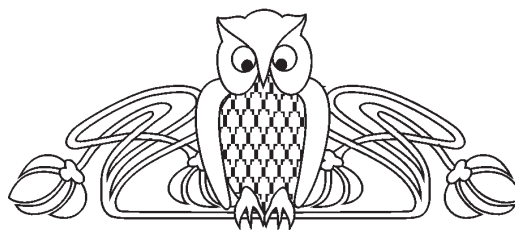
**Ключевые слова:** углерод, графит, шаровидный графит, высокопрочный чугун, контейнер, свойства, состав, морфология, строение.

### Spheroidal Graphite – Unique Morphological Formation of Carbon

А. А. Anikin, S. B. Wenig, D. I. Bilenko, A. N. Gribov

Spheroidal graphite is little-known form of graphite. It is known that its presence affects the properties of gray cast iron post, typical steels. Research evidence that the spheroidal graphite is a unique layered spiral system of micro-and nanostructures, the inhomogeneous phase composition, structure and elemental composition with predominantly periodic alternation of closely spaced layers. Such systems can have properties and their combinations significantly different than the individual micro-and nanoparticles and composites based on them. The high ratio of surface area to volume ratio in these particles, varied richness of relationships and the topology of the variable point to their promise to study their physical adsorption and catalytic properties and a number of devices based on them.

**Key words:** carbon, graphite, spheroidal graphite, ductile iron, container, properties, composition, morphology, structure.



Разнообразие свойств, которые присущи углероду и его соединениям, исключительно велико. Углерод и содержащие его материалы встречаются в бесчисленных процессах живой и неживой природы и служат объектами непрекращающихся фундаментальных исследований [1]. Однако до настоящего времени в исследовании морфологических образований углерода и их влияния на различные процессы, и тем более на управление этими процессами, остается много белых пятен. К таким белым пятнам следует отнести графит шаровидной формы (ШГ). Данных о наличии ШГ в природе в литературе нами не обнаружено. Графит шаровидной формы чаще всего связывают с получением высокопрочных чугунов с такой формой графита при модифицировании их магнием, церием, иттрием, лантаном, неодимом, празеодимом и лигатурами на их основе. Введение в расплав серого чугуна, имеющего низкие физико-механические свойства, сотых долей процента модификаторов превращает последний в высококачественную сталь со специальными физико-механическими свойствами (износостойкость, коррозионная стойкость, жаростойкость и др.). Например, на рис. 1 представлено изменение механических свойств ферритного чугуна в зависимости от количества введенного модификатора – иттрия – при вторичном модифицировании ферросилицием марки ФС 75.

При этом форма включений углерода в чугуне превращается из пластинчатой в шаровидную (рис. 2) [2].