МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
________________ д.филол.н., проф. Елина Е.Г.
"10" 06.16. ________________ 2016 г.

Рабочая программа кандидатского экзамена по

ДИСЦИПЛИНЕ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Направление подготовки кадров высшей квалификации

01.06.01 "Математика и механика"

Направленность

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Квалификация (степень) выпускника

Исследователь. Преподаватель-исследователь

Форма обучения

Очная

Саратов
2016

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского»

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебно-методической работе
________________ д.филол.н., проф. Елина Е.Г.
"____" ___________________2016 г.

Рабочая программа кандидатского экзамена по

ДИСЦИПЛИНЕ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

Направление подготовки кадров высшей квалификации

01.06.01 "Математика и механика"

Направленность

Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Квалификация (степень) выпускника

Исследователь. Преподаватель-исследователь

Форма обучения

Очная

Саратов
2016

1. Цели и задачи кандидатского экзамена

Цели:
- проверка полноты и системности знаний по дисциплине специальности, полученных аспирантом в процессе обучения;
- предварительная оценка способности применять эти знания в будущей преподавательской и научно-исследовательской деятельности.

Задачи:
- систематизация знаний по дисциплине специальности, полученных аспирантов в процессе обучения.

2. Место кандидатского экзамена в структуре ООП аспирантуры

Кандидатский экзамен по дисциплине специальности относится к вариативной части ООП по направлению подготовки 01.06.01 «Математика и механика», направленность – Вещественный, комплексный и функциональный анализ. Индекс Б1.В.ОД.2.4

Кандидатский экзамен по дисциплине специальности сдается в 5 семестре.

3. Компетенции, проверяемые в процессе сдачи кандидатского экзамена

ПК-1 – системное владение теорией функций вещественного переменного;

ПК-2 – системное владение теорией функций комплексного переменного, методами теории аналитических функций;

ПК-3 – системное владение теорией и методами функционального анализа.

•

4. Структура и содержание программы кандидатского экзамена

Общая трудоемкость – 1 зач. единица;
– 36 часов;
– 5 семестр.

Содержание программы кандидатского экзамена

1. Действительный анализ

1.1. Меры, измеримые функции, интеграл.

Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции. Сходимость функций по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение интегралов Лебега и Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини. ([2-а], гл. V; [5-а], гл. III-VI, XI, XII; [1-б], гл. 1-4)

I.2. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования.

Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции с ограниченным изменением (вариацией). Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Теорема Радона–Никодима. Интеграл Стилтьеса. ([2-а], гл. VI; [5-а], гл. VIII, IX, XIII, XVII; [1-б], гл. 5

I.3. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды.

Неравенства Гельдера и Минковского. Пространства $\mathbf{L}p$, их полнота. Полные и замкнутые системы функций. Ортонормированные системы в $\mathbf{L}2$ и равенство Парсеваля. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы. ([2-а], гл. VII; [5-а], гл. VII)

I.4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурь.е

Условие сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярнымы интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье–Стилтьеса. ([2-а], гл. VIII, §§ 1-7; [5-а], гл. X; [6-а], гл. 15,16)

I.5. Гладкие многообразия и дифференциальные формы.

Касательное пространство к многообразию в точке. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса. Основные интегральные формулы анализа. ([6-а],гл. 17; [9-а], гл. 9)

2. Комплексный анализ

2.1. Интегральные представления аналитических функций.

Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры). Интегральная формула Коши. Теорема о среднем. Принцип максимума модуля. Лемма Шварца. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого. ([7-а], гл. IV; [4-а], гл. III, §§ 1–3; [3-а], гл. I, § 4, гл. III, § 3)

2.2. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты.

Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Приближение аналитических функций многочленами. ([7-а], гл. V–VII; [4-а], гл. III, §§ 4–7, гл. IV, гл. V, § 4; [3-а], гл. I, §5, гл. V, §2)

2.3. Целые и мероморфные функции.

Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка, теорема Адамара. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями. ([7-а], гл. IX, §1,2; [4-а], гл. VII, §§ 1–3; [3-а], гл. V, §1)

2.4. Конформные отображения.

Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерии однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях. ([7-а], гл. III, § 1,3, гл. XII, §§ 1,2,6,7; [4-а], гл. V, §§1–3; [3-а], гл. II)

2.5. Аналитическое продолжение.

Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие Римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка. Принцип симметрии. Формула Кристоффеля–Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства функций, критерий нормальности. Теорема Пикара. ([7-а], гл. X, гл. XII, §8; [4-а], гл. VIII; [3-а], гл. II, §3)

2.6. Гармонические функции.

Гармонические функции, их связь с аналитическими. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных. Бесконечная дифференцируемость.

Теорема о среднем и принцип максимума. Теорема единственности. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга. ([11-а], стр. 295–304)

3. Функциональный анализ

3.1. Метрические и топологические пространства.

Сходимость последовательностей в метрических пространствах. Полнота и пополнение метрических пространств. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах. ([2], гл. II; [10-а], гл. IV)

3.2. Нормированные и топологические линейные пространства.

Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана. Отделимость выпуклых множеств. Нормированные пространства. Критерии компактности множеств в пространствах C и L*p*. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства. ([2-а], гл. III; [10-а], гл. IV)

3.3. Линейные функционалы и линейные операторы.

Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов. Спектр и резольвента. Компактные (вполне непрерывные) операторы. Теоремы Фредгольма. ([2-а], гл. IV, §§1–3,5,6; [10-а], гл. IV; [4-б], гл. VI, §1,2)

3.4. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них.

Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема. Диагонализация компактных самосопряженных операторов. Неограниченные операторы. ([8-а], гл. VI–VIII; [10-а], гл. V)

3.5. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах.

Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона. ([2-а], гл. X)

3.6. Обобщенные функции.

Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление). Структура обобщенных функций с компактным носителем. ([1-а], гл. II; [2-а], гл. IV, §4, гл. VIII, §8; [5-б], гл. 6, стр. 177–180)

5. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов

Самостоятельная работа аспирантов по подготовке к кандидатскому экзамену по дисциплине специальности включает проработку содержания дисциплины по рекомендуемым разделам основной и дополнительной литературы, а также изучение конспектов лекций по следующим дисциплинам научной специальности: дополнительные главы теории функций вещественного переменного, дополнительные главы теории функций комплексного переменного, дополнительные главы функционального анализа.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение

а) основная литература

1. Владимиров В.С. В. В. Жаринов. Уравнения математической физики. - 2-е изд., стер. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 7-е изд. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - 6-е изд., стер. - Москва; Санкт-Петербург: Лань, 2002.
4. Маркушевич А.И., Маркушевич Л.А.. Введение в теорию аналитических функций: учеб.- Москва: Просвещение, 1977.
5. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. - 5-е изд., стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008.
6. Никольский С.М. Курс математического анализа, т. II. М., Наука, 1991.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного [Электронный ресурс]: учебник - 15-е изд., стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2009.
8. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики, т. 1. Функциональный анализ. М., Мир, 1976.
9. Рудин У. Основы математического анализа.- 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2004.
10. Смирнов В.И. Курс высшей математики: учебник: [в 4 т.] - Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2008
11. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ, ч. 1.: учеб. для студентов ун-тов, обучающихся по специальностям "Математика", "Механика": в 2 ч. Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - Санкт-Петербург: Лань, 2004

б) дополнительная литература

1. Дьяченко М.И., Ульянов П.Л. Мера и интеграл. М., Факториал, 1998.
2. Евграфов М.А. Аналитические функции.: учеб. пособие - 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2008.
3. Зорич В.А. Математический анализ задач естествознания - Москва: Изд-во МЦНМО, 2008
4. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа - Москва: Лань, 2009.
5. Рудин У. Функциональный анализ. М., Мир, 1975.
6. Садовничий В.А. Теория операторов. М., Высш. Школа, 1999.
7. Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М., Мир, 1983.

7. Материально-техническое обеспечение кандидатского экзамена

Для самостоятельной работы аспиранта и приема кандидатского экзамена по дисциплине специальности, предусмотренного учебным планом подготовки аспирантов, имеется необходимая материально-техническая база, соответствующая действующим санитарным и противопожарным правилам и нормам:

1. Лекционная аудитория, оснащенная мультимедийными проекторами с возможностью подключения к Wi-Fi, документ-камерой, маркерными досками для демонстрации учебного материала.
2. Специализированные компьютерные классы с подключенным к ним периферийным устройством и оборудованием.
3. Аппаратурное обеспечение (и соответствующие методические материалы) для проведения самостоятельной работы по дисциплине.

8. Особенности освоения программы кандидатского экзамена для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Для аспирантов с ограниченными возможностями здоровья предусмотрены следующие формы организации педагогического процесса и контроля знаний:
-*для слабовидящих:*
обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;
для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;
задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом
(размер 16-20);
- *для глухих и слабослышащих:*
обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости аспирантам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;
- *для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих* все контрольные задания по желанию аспирантов могут проводиться в письменной форме.
Основной формой организации педагогического процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все аспиранты обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению 01.06.01 «Математика и механика», направленность «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Автор программы:
____________________(Бутерин С.А., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики)

Программа одобрена на заседании кафедры математической физики и вычислительной математики от 28 мая 2015 года, протокол № 13.
Программа актуализирована в 2016 г. (одобрена на заседании кафедры математической физики и вычислительной математики, протокол № 13, от 06 июня 2016 г.)

Подписи:

Зав. кафедрой математической физики
и вычислительной математики
доктор физ.-мат. наук, профессор ____________________________ В.А. Юрко

Декан
механико-математического факультета
кандидат физ.-мат. наук, доцент __________________________ А.М. Захаров

Приложение 1

Фонд оценочных средств

1. Задания для промежуточной аттестации

<u>Контрольные вопросы к экзамену</u>

1. Действительный анализ

1. Аддитивные функции множеств (меры), счетная аддитивность мер.
2. Конструкция лебеговского продолжения. Измеримые функции.
3. Сходимость функций по мере и почти всюду.
4. Теоремы Егорова и Лузина.
5. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла.
6. Сравнение интегралов Лебега и Римана.
7. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.
8. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду.
9. Функции с ограниченным изменением (вариацией).
10. Производная неопределенного интеграла Лебега. Задача восстановления функции по ее производной.
11. Абсолютно непрерывные функции.
12. Теорема Радона–Никодима.
13. Интеграл Стилтьеса.
14. Неравенства Гельдера и Минковского.
15. Пространства **L**p , их полнота.
16. Полные и замкнутые системы функций.
17. Ортонормированные системы в **L**2 и равенство Парсеваля.
18. Ряды по ортогональным системам; стремление к нулю коэффициентов Фурье суммируемой функции в случае равномерно ограниченной ортонормированной системы.
19. Условие сходимости ряда Фурье.
20. Представление функций сингулярными интегралами.
21. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд.
22. Преобразование Фурье интегрируемых и квадратично интегрируемых функций.
23. Свойство единственности для преобразования Фурье. Теорема Планшереля.
24. Преобразование Лапласа.
25. Преобразование Фурье–Стилтьеса.
26. Касательное пространство к многообразию в точке.
27. Дифференциальные формы на многообразии. Внешний дифференциал.
28. Интеграл от формы по многообразию. Формула Стокса.
29. Основные интегральные формулы анализа.

4. Комплексный анализ

1. Интегральная теорема Коши и ее обращение (теорема Мореры).
2. Интегральная формула Коши.
3. Теорема о среднем.
4. Принцип максимума модуля.
5. Лемма Шварца.
6. Интеграл типа Коши, его предельные значения. Формулы Сохоцкого.

7. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теорема Вейерштрасса.
8. Представление аналитических функций степенными рядами, неравенства Коши.
9. Нули аналитических функций. Теорема единственности.
10. Изолированные особые точки (однозначного характера).
11. Теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов.
12. Принцип аргумента. Теорема Руше.
13. Приближение аналитических функций многочленами.
14. Рост целой функции. Порядок и тип.
15. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение.
16. Разложение целой функции конечного порядка в бесконечное произведение, теорема Адамара.
17. Теорема Миттаг–Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.
18. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями.
19. Принцип сохранения области.
20. Критерии однолистности.
21. Теорема Римана.
22. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.
23. Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса).
24. Понятие Римановой поверхности.
25. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии.
26. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления бесконечного порядка.
27. Принцип симметрии.
28. Формула Кристоффеля–Шварца.
29. Модулярная функция.
30. Нормальные семейства функций, критерий нормальности.
31. Теорема Пикара.
32. Гармонические функции, их связь с аналитическими.
33. Инвариантность гармоничности при конформной замене переменных.
34. Бесконечная дифференцируемость.
35. Теорема о среднем и принцип максимума.
36. Теорема единственности.
37. Задача Дирихле. Формула Пуассона для круга.

5. Функциональный анализ

1. Сходимость последовательностей в метрических пространствах.
2. Полнота и пополнение метрических пространств.
3. Сепарабельность.
4. Принцип сжимающих отображений.
5. Компактность множеств в метрических и топологических пространствах.
6. Линейные пространства.
7. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Банаха–Хана.
8. Отделимость выпуклых множеств.
9. Нормированные пространства.
10. Критерии компактности множеств в пространствах C и Lp.
11. Евклидовы пространства.
12. Топологические линейные пространства.
13. Непрерывные линейные функционалы.

14. Общий вид линейных ограниченных функционалов на основных функциональных пространствах.
15. Сопряженное пространство.
16. Слабая топология и слабая сходимость.
17. Линейные операторы и сопряженные к ним. Пространство линейных ограниченных операторов.
18. Спектр и резольвента.
19. Компактные (вполне непрерывные) операторы.
20. Теоремы Фредгольма.
21. Изоморфизм сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространств.
22. Спектральная теория ограниченных операторов в гильбертовых пространствах.
23. Функциональное исчисление для самосопряженных операторов и спектральная теорема.
24. Диагонализация компактных самосопряженных операторов.
25. Неограниченные операторы.
26. Дифференцирование в линейных пространствах.
27. Сильный и слабый дифференциалы.
28. Производные и дифференциалы высших порядков.
29. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов.
30. Метод Ньютона.
31. Регулярные и сингулярные обобщенные функции.
32. Дифференцирование, прямое произведение и свертка обобщенных функций.
33. Обобщенные функции медленного роста; их преобразование Фурье.
34. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление).
35. Структура обобщенных функций с компактным носителем.

Критерии оценки:

оценка «отлично»	В совершенстве владеет понятиями и методами теории функций вещественного переменного, теорией функций комплексного переменного и функционального анализа.
оценка «хорошо»	Хорошо владеет понятиями и методами теории функций вещественного переменного, теорией функций комплексного переменного и функционального анализа.
оценка «удовлетворительно»	Недостаточно хорошо владеет понятиями и методами теории функций вещественного переменного, теорией функций комплексного переменного и функционального анализа.
оценка «неудовлетворительно»	Не владеет понятиями и методами теории функций вещественного переменного, теорией функций комплексного переменного и функционального анализа.

8. Особенности освоения программы кандидатского экзамена для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Для аспирантов с ограниченными возможностями здоровья предусмотрены следующие формы организации педагогического процесса и контроля знаний:
-для слабовидящих:
обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;
для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;
задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом
(размер 16-20);
- для глухих и слабослышащих:
обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости аспирантам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;
- для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих все контрольные задания по желанию аспирантов могут проводиться в письменной форме.
Основной формой организации педагогического процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все аспиранты обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО (уровень подготовки кадров высшей квалификации) по направлению 01.06.01 «Математика и механика», направленность «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Автор программы:
____________________(Бутерин С.А., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры математической физики и вычислительной математики)

Программа одобрена на заседании кафедры математической физики и вычислительной математики от 28 мая 2015 года, протокол № 13.
Программа актуализирована в 2016 г. (одобрена на заседании кафедры математической физики и вычислительной математики, протокол № 13, от 06 июня 2016 г.)

Подписи:

Зав. кафедрой математической физики
и вычислительной математики
доктор физ.-мат. наук, профессор ______________________________ В.А. Юрко

Декан
механико-математического факультета
кандидат физ.-мат. наук, доцент ______________________________ А.М. Захаров