

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования «Саратовский национальный исследовательский  
государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

механико-математический факультет



**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**Прикладной функциональный анализ**

Направление подготовки магистратуры

**01.04.02 – ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

Профиль подготовки магистратуры

**Математическое и информационное обеспечение экономической  
деятельности**

Квалификация (степень) выпускника  
(*Магистр*)

Форма обучения  
очная

Саратов  
2016

## **1. Цели освоения дисциплины**

Целями освоения дисциплины (модуля) «Прикладной функциональный анализ» являются:

- ознакомление обучающихся с понятиями, фактами и методами, составляющими теоретические основы функционального анализа, и ознакомление с кругом прикладных задач, в которых теоретические результаты находят свое применение;
- получение обучающимися знаний по функциональному анализу, необходимых для понимания его приложений к математическим и прикладным дисциплинам (таким как вычислительные аспекты теории приближений, теория оптимизации, математические модели принятия решений, аппроксимация и оптимизация, вычислительная математика);
- ознакомление обучающихся с математическим аппаратом прикладного функционального анализа и выработка способности его использования в профессиональной и исследовательской деятельности.

## **2. Место дисциплины в структуре ООП магистратуры.**

Дисциплина «Прикладной функциональный анализ» относится к вариативной части блока 1 Дисциплины ООП (Б1.В.ОД.7).

Для освоения дисциплины «Прикладной функциональный анализ» необходимы знания, умения и навыки, полученные при изучении таких дисциплин ООП, как современные проблемы прикладной математики и информатики, непрерывные математические модели.

Освоение дисциплины «Прикладной функциональный анализ» способствует изучению таких дисциплин ООП, как актуарная математика, математические модели принятия решений, математические модели в теории страхования.

## **3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины (модуля).**

В результате освоения дисциплины «Прикладной функциональный анализ» у обучающегося частично формируются следующие компетенции:

- способность использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики (ОПК-4);
- способность проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты самостоятельно и в составе научного коллектива (ПК-1).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

•**Знать:** элементы классической теории функций и функционального анализа, основы теории операторов, геометрии нормированных пространств, а также ряд современных областей теории функций и функционального анализа таких, как теория всплесков, теория фреймов в банаховом пространстве.

•**Уметь:** моделировать эволюционные процессы при помощи дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, решать дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, применять результаты спектральной теории операторов, пользоваться изученными теоретическими результатами для решения практических задач прикладного функционального анализа.

•**Владеть:** представлениями о приложениях различных методов прикладного функционального анализа к решению ряда практических задач.

#### 4. Структура и содержание дисциплины (модуля).

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, 144 часа, в том числе: аудиторных – 70 часов, самостоятельной работы студента – 56 часов, часов на подготовку к экзамену – 18.

Дисциплина преподается в 3-м семестре.

Формы текущего контроля успеваемости: решение задач, устный блиц-опрос, итоговый опрос.

Формы промежуточной аттестации: экзамен в 3-м семестре.

#### Календарно-тематический план изучения дисциплины:

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра)
				лекции	практические	СРС	КСР	Формы промежуточной аттестации (по семестрам)
1	Элементы теории функций и функционального	3	1-6	6	6	16	4	Блиц-опрос, домашнее задание

	анализа							
2	Теория операторов	3	7-12	4	16	20	6	Решение задач, блиц-опрос, домашнее задание
3	Современные проблемы прикладного функционального анализа	3	13-18	8	14	20	6	Решение задач, домашнее задание, итоговый опрос
	ИТОГО			18	36	56	16	Экзамен 18 часов

### Содержание дисциплины (развернутая программа курса)

Раздел 1. Элементы теории функций и функционального анализа.

1.1. Линейные и выпуклые функционалы (продолжение линейного функционала, теорема Хана – Банаха, лемма об экстремальном функционале, лемма Гельфанда, функционал Минковского, сопряженное пространство).

1.2. Линейные операторы (принцип равномерной ограниченности Банаха – Штейнгауза и принцип накопления особенностей, сопряженный оператор, двойственность операторных инъекций и сюръекций, теорема Банаха об обратном операторе и принцип открытости отображения, теорема Банаха о равномерной ограниченности частных сумм базисного разложения).

1.3. Интеграл Лебега (мера на полукольце множеств, интеграл от ступенчатой и счетно-ступенчатой функции, верхний интеграл, нуль-множества, пространство Лебега, интеграл Лебега, предельный переход под знаком интеграла, мера Лебега, свойства интеграла Лебега как функции множества, прямое произведение мер).

Раздел 2. Теория операторов.

2.1. Компактные операторы (альтернатива Фредгольма, спектр и резольвента оператора, спектральная теорема).

2.2. Спектральная теория операторов (симметрические операторы, извлечение квадратного корня из симметрического оператора, спектральная теорема для симметрического и унитарного оператора, дифференциальные и интегральные операторы).

Раздел 3. Современные проблемы прикладного функционального анализа.

3.1. Базисы и фреймы в банаховом пространстве (ортонормированные базисы, базисы Бари, базисы Рисса, фреймы Даффина – Шеффера, атомарные разложения и банаховы фреймы).

3.2. Теория всплесков (кратномасштабный анализ, масштабирующая функция и масштабирующее уравнение, всплеск, основная теорема кратномасштабного анализа, примеры всплесков).

3.3. Эволюционные уравнения (аналитическая теория полугрупп, дифференциальные, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения).

## **5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины (модуля).**

Лекции, разбор конкретных ситуаций, обсуждение возможностей практического применения получаемых знаний и навыков, мозговой штурм, мастер-класс.

Реализация компетентного подхода предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий (компьютерные симуляции, разбор конкретных ситуаций, работа над проектами) в сочетании с внеаудиторной работой с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся.

Эффективность применения интерактивных форм обучения обеспечивается реализацией следующих условий:

- создание диалогического пространства в организации учебного процесса;
- использование принципов социально – психологического обучения в учебной и внеучебной деятельности;
- мониторинг личностных особенностей и профессиональной направленности студентов;
- формирование психологической готовности преподавателей к использованию интерактивных форм обучения, направленных на развитие внутренней активности студентов;

Использование интерактивных форм и методов обучения направлено на достижение ряда важнейших образовательных целей:

- стимулирование мотивации и интереса в области анализа сложных систем и обработки данных и в общеобразовательном, общекультурном и профессиональном плане;
- повышение уровня активности и самостоятельности обучаемых;
- развитие навыков анализа, критичности мышления, взаимодействия, коммуникации;
- саморазвитие и развитие обучаемых благодаря активизации мыслительной деятельности и диалогическому взаимодействию с преподавателем и другими участниками образовательного процесса.

В рамках учебного курса предусмотрены встречи с представителями научных организаций и представителями различных научных школ.

В рамках учебного курса предусмотрены встречи с представителями научных организаций и представителями различных научных школ.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется главной целью (миссией) программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием конкретных дисциплин, и в целом в учебном процессе они должны составлять не менее 30 % аудиторных занятий

### **Особенности проведения занятий для граждан с ОВЗ**

При обучении лиц с ограниченными возможностями используются подходы, способствующие созданию безбарьерной образовательной среды: технологии дифференциации и индивидуализации обучения, применение соответствующих методик по работе с инвалидами, использование средств дистанционного общения.

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья предусмотрены следующие формы организации учебного процесса и контроля знаний:

*-для слабовидящих:*

обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом (размер 16-20);

*- для глухих и слабослышащих:*

обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости студентам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

*- для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих*

все контрольные задания по желанию студентов могут проводиться в письменной форме.

Основной формой организации учебного процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все студенты обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины.**

При изучении дисциплины «Прикладной функциональный анализ» предусмотрены следующие виды самостоятельной работы обучающихся:

- разбор теоретического материала по конспектам лекций и пособиям;
- самостоятельное изучение указанных теоретических вопросов;
- решение задач по темам практических занятий.

***План самостоятельной работы по курсу «Прикладной функциональный анализ».***

План самостоятельной работы по курсу «Прикладной функциональный анализ» написан в форме вопросов промежуточной аттестации.

1. Теорема Хана-Банаха.
2. Выпуклые функционалы. Лемма Гельфанда.
3. Теорема Банаха – Штейнгауза.
4. Теорема Банаха об обратном операторе.
5. Пространство Лебега. Интеграл Лебега.
6. Теорема Леви.
7. Теорема Лебега.
8. Неопределенный интеграл Лебега.
9. Теорема Фубини.
10. Альтернатива Фредгольма.
11. Спектральная теорема для компактного оператора.
12. Спектральная теорема для симметрического оператора.
13. Спектральная теорема для унитарного оператора.
14. Теорема Банаха о базисном разложении.
15. Теоремы устойчивости Бари.
16. Теорема Лорча о базисах Рисса.
17. Фреймы Даффина – Шеффера.
18. Фреймы в банаховом пространстве.
19. Инфинитезимальный (порождающий) оператор полугруппы.
20. Теорема Хилле – Йосида.

***Типы заданий для практических занятий:***

- решить дифференциальное уравнение;
- решить интегральное уравнение;
- построить оператор анализа, оператор синтеза и рамочный оператор для данного фрейма;
- исследовать на фреймовость данную систему функций.

Текущий контроль осуществляется в ходе учебного процесса и консультирования студентов по результатам выполнения самостоятельных работ. Основными формами текущего контроля являются:

- обсуждение вынесенных в план самостоятельной работы вопросов и задач;
- решение на практических занятиях задач и их обсуждение;
- блиц-опрос;
- итоговый опрос.

***Вопросы для самоконтроля знаний при подготовке студентов к занятиям, самостоятельному изучению курса, к промежуточной аттестации (экзамену)***

1. Линейные функционалы в нормированном пространстве.
2. Сопряженное пространство.
3. Продолжение линейных функционалов.
4. Лемма об экстремальном функционале.
5. Принцип равномерной ограниченности.
6. Принцип открытости отображения.
7. Мера на полукольце множеств.
8. Интеграл от ступенчатой функции.
9. Интеграл от счетно-ступенчатой функции.
10. Верхний интеграл.
11. Интеграл Лебега, его свойства.
12. Предельный переход под знаком интеграла.
13. Свойства интеграла Лебега как функции множества.
14. Компактные операторы.
15. Симметрические операторы.
16. Унитарные операторы.
17. Базисы, квадратически близкие к ортонормированным.
18. Базисы, эквивалентные ортонормированным.
19. Основная теорема о фреймах в гильбертовом пространстве.
20. Фреймы как проекции базисов.
21. Фреймы в банаховом пространстве.
22. Экстремальное свойство коэффициентов разложения по фрейму.
23. Фреймы сдвигов.
24. Фреймы всплесков.
25. Аффинные фреймы.
26. Квантовые фреймы.
27. Группы и полугруппы операторов.



## 7. Данные для учета успеваемости студентов в БАРС

Таблица 1. Таблица максимальных баллов по видам учебной деятельности.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Семестр	Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа	Автоматизированное тестирование	Другие виды учебной деятельности	Промежуточная аттестация	Итого
3	10	0	20	30	0	0	40	100

### Программа оценивания учебной деятельности студента

3 семестр  
номер семестра

#### Лекции

Посещаемость, активность; количество баллов – от 0 до 10.

Критерии оценки:

- менее 50% от числа занятий в семестре – 0 баллов,
- от 50% до 74% – 5 баллов,
- не менее 75% – 10 баллов.

#### Лабораторные занятия

Не предусмотрены.

#### Практические занятия

Посещаемость, активность; количество баллов – от 0 до 20.

Критерий оценки:

при освоении студентом практической части дисциплины на «отлично» – 20 баллов, «хорошо» – 15 баллов, «удовлетворительно» – 10 баллов; «неудовлетворительно» – 0 баллов.

#### Самостоятельная работа

Выполнение домашних заданий; количество баллов – от 0 до 30.

Критерий оценки:

- при полностью правильном и своевременном выполнении студентом домашних заданий – 30 баллов;
- при частично правильном (правильно выполненных заданий – не менее 70%) – 20 баллов;

- при нерегулярном (правильно выполненных заданий - 30% - 70%) – 10 баллов;
- при невыполнении заданий (выполнено менее 30%) – 0 баллов.

### **Автоматизированное тестирование**

Не предусмотрено.

### **Другие виды учебной деятельности**

Не предусмотрено.

### **Промежуточная аттестация**

Форма промежуточной аттестации: экзамен; количество баллов – от 0 до 40.

Экзамен проводится в устной форме в виде ответов на вопросы билета и трех дополнительных вопросов из перечня вопросов к промежуточной аттестации. Билет содержит два вопроса из перечня вопросов к промежуточной аттестации.

Критерий оценки ответа на каждый вопрос при проведении промежуточной аттестации:

- на вопрос дан правильный, полный, развернутый ответ (допускаются незначительные погрешности) – 8 баллов;
- на вопрос дан правильный, но неполный ответ (например, при доказательстве теоремы, изложении метода отсутствуют отдельные логические шаги; допущена ошибка при вычислении; имеются другие неточности) – 6-7 баллов;
- на вопрос дан краткий ответ, содержащий только верно сформулированные факты – 5 баллов;
- в остальных случаях – 0 баллов.

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 3 семестр по дисциплине «Прикладной функциональный анализ» составляет 100 баллов.

Таблица 2. Таблица пересчета полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Прикладной функциональный анализ» в оценку (экзамен):

80-100 баллов	«отлично»
60-79 баллов	«хорошо»
30-59 баллов	«удовлетворительно»
0-29 баллов	«не удовлетворительно»

## **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля).**

### **а) основная литература:**

1. А.П. Гуревич, В.В. Корнев, А.П. Хромов, Сборник задач по функциональному анализу. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2012. 192с.
2. В.А. Треногин, Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва: Физматлит, 2009. 311с.
3. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Физматлит, 2006. 570с.
- 4) Треногин, В. А. Функциональный анализ [Электронный ресурс] : учебник / Треногин В. А. - Москва : Физматлит, 2007. - 488 с. - ISBN 978-5-9221-0804-1 : Б. ц.  
Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks

### **б) дополнительная литература:**

- 1) Хелемский А.Я., Лекции по функциональному анализу. Москва: МЦНМО, 2004. 552с.
- 2) Федоров В.М., Курс функционального анализа. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2005. 351с.
- 3) Рудин У., Функциональный анализ. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2005. 443с.
- 4) Канторович Л.В., Г.П. Акилов, Функциональный анализ. Санкт-Петербург: Невский Диалект, 2004. 813с.
- 5) Кшевецкий С.П., Численные методы и введение в функциональный анализ. Калининград: Изд-во Рос. гос. ун-та им. И. Канта, 2007. 209с.

### **в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы**

1. <http://library.sgu.ru>

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины (модуля)**

Доска, мел. Самостоятельная работа студентов также включает применение ИКТ.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.04.02 – ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА и профилю подготовки «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности».


Автор: профессор кафедры ТФиСА П.А. Терехин.



Программа разработана в 2014 году (одобрена на заседании кафедры теории функций и приближений от «29» августа 2014 года, протокол № 1).


Программа актуализирована в 2016 году на заседании кафедры теории функций и стохастического анализа, протокол № 2 от 6 сентября 2016 г.

Зав. кафедрой ТФиСА



С.П.Сидоров

Декан механико-математического ф-та



А. М. Захаров