

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Декан механико-математического  
факультета

А.М. Захаров  
"08." *августа* 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Тензорный анализ

Направление подготовки бакалавриата  
01.03.03 Механика и математическое моделирование

Профиль подготовки бакалавриата  
Механика деформируемых тел и сред

Квалификация (степень) выпускника  
Бакалавр

Форма обучения  
очная

Саратов,  
2021

Статус	ФИО	Подпись	Дата
Преподаватель-разработчик	Шевцова Ю.В.	<i>Шевцова Ю.В.</i>	08.10.2021
Председатель НМК	Тышкевич С.В.	<i>Тышкевич С.В.</i>	08.10.2021
Заведующий кафедрой	Галаев С.В.	<i>Галаев С.В.</i>	08.10.2021
Специалист Учебного управления			

## **1. Цели освоения дисциплины**

Основная цель курса «Тензорный анализ» состоит в ознакомлении студентов с основами тензорного анализа, дифференциально-геометрических методов изучения кривых и поверхностей и элементов теории дифференцируемых многообразий.

Одной из основных задач математического образования является овладение такими понятиями, которые применяются в различных областях математики и механики. Одним из таких понятий является понятие тензора, алгебраических операций с тензорами. Теория кривых и поверхностей демонстрирует на простейших примерах сущность дифференциально-геометрического метода изучения геометрических объектов и знакомит с понятием инвариантности вводимых понятий. Методы дифференциальной геометрии используются при изучении различных механических курсов, в том числе при изучении теории упругости и теории оболочек. Знакомство с понятием дифференцируемого многообразия позволяет расширить представление о масштабах возможных применений этих методов как в математике, так и в физике.

Задачи курса «Тензорный анализ»:

- сформировать у студентов положительную мотивацию на использование дифференциально-геометрических методов для решения различных математических и прикладных задач;
- дать знание об основных понятиях дифференциальной геометрии и их возможных применений в различных вопросах математики и ее приложений;
- продемонстрировать возможность работы с различными пакетами прикладных программ, позволяющих решать задачи дифференциальной геометрии.

Знания, полученные в результате освоения данного курса, позволят правильно использовать методы дифференциальной геометрии и тензорного анализа при постановке математических задач и нахождении методов их решения.

Студенты получают навыки проведения теоретического исследования и его применения для решения различных проблем теоретического и практического характера.

## **2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата**

Дисциплина «Тензорный анализ» (Б1.О.08) относится к обязательной части Блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана ООП бакалавриата по направлению 01.03.03 Механика и математическое моделирование, профилю подготовки «Механика деформируемых тел и сред». На ее изучение отводится 180 часов. Согласно учебному плану направления и профилю подготовки данный курс в пятом семестре заканчивается зачетом.

Для изучения дисциплины необходимы знания, полученные при изучении дисциплин «Аналитическая геометрия», «Математический анализ». Курс «Тензорный анализ» является основой для последующих курсов по

теории упругости и теории оболочек, механике деформируемого твердого тела.

### 3. Результаты обучения по дисциплине

Код и наименование компетенции	Код и наименование индикатора (индикаторов) достижения компетенции	Результаты обучения
<b>УК-1</b> Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	<b>1.1_Б.УК-1.</b> Анализирует задачу, выделяя ее базовые составляющие. Осуществляет декомпозицию задачи.	<b>Знать:</b> – постановку основных задач дифференциальной геометрии. <b>Уметь:</b> – анализировать задачи, выделяя ее базовые составляющие; – осуществлять декомпозицию задачи. <b>Владеть:</b> – навыками анализа задачи с выделением ее базовых составляющих.
	<b>2.1_Б.УК-1.</b> Находит и критически анализирует информацию, необходимую для решения поставленной задачи	<b>Знать:</b> - основные источники информации по дифференциальной геометрии и тензорному анализу и их применение в математике и механике. <b>Уметь:</b> – находить и критически анализировать информацию, необходимую для решения поставленной задачи. <b>Владеть:</b> – навыками работы с информацией из различных источников.
	<b>3.1_Б.УК-1.</b> Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивая их достоинства и недостатки.	<b>Знать:</b> – основные задачи дифференциальной геометрии и тензорного анализа. <b>Уметь:</b> – оценить достоинства и недостатки различных вариантов решения задач при применении дифференциальной геометрии в математике и механике. <b>Владеть:</b> – навыками выбора оптимального решения для поставленной задачи.
	<b>4.1_Б.УК-1.</b> Грамотно, логично, аргументировано формирует собственные суждения и оценки. Отличает факты от мнений, интерпретаций, оценок и т.д. в рассуждениях других участников деятельности.	<b>Знать:</b> – основные факты дифференциальной геометрии и тензорного анализа и направления их применения в математике и механике. <b>Уметь:</b> – логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь; <b>Владеть:</b> – навыками формирования собственных суждений и оценок в области применения дифференциальной геометрии; – навыками грамотного, логичного и аргументированного изложения своей

		позиции по вопросам применения дифференциальной геометрии.
	<b>5.1_ Б.УК-1.</b> Определяет и оценивает практические последствия возможных решений задачи.	<p><b>Знать:</b> – применение дифференциальной геометрии и тензорного анализа в математике и механике.</p> <p><b>Уметь:</b> – определить практические последствия решения задач в области применения дифференциальной геометрии.</p> <p><b>Владеть:</b> – навыками определения и оценивания практических последствий возможных решений задач дифференциальной геометрии.</p>
<b>УК-2.</b> Способен определять круг задач в рамках поставленной цели и выбирать оптимальные способы их решения, исходя из действующих норм, имеющихся ресурсов и ограничений.	<b>1.1_ Б.УК-2.</b> Формулирует в рамках поставленной цели проекта совокупность взаимосвязанных задач, обеспечивающих ее достижение. Определяет ожидаемые результаты решения выделенных задач.	<p><b>Уметь:</b> – сформулировать совокупность взаимосвязанных задач в рамках поставленной цели; – определить ожидаемые результаты решения выделенных задач.</p> <p><b>Владеть:</b> – навыками постановки и решения задач в рамках поставленной цели; – навыками публичного представления результатов решения конкретной задачи проекта.</p>
	<b>2.1_ Б.УК-2.</b> Проектирует решение конкретной задачи проекта, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из действующих правовых норм и имеющихся ресурсов и ограничений.	<p><b>Уметь:</b> – спроектировать решение конкретной задачи дифференциальной геометрии, выбирая оптимальный способ ее решения, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений.</p> <p><b>Владеть:</b> – навыками проектирования решения задачи дифференциальной геометрии, исходя из имеющихся ресурсов и ограничений.</p>
	<b>3.1_ Б.УК-2.</b> Решает конкретные задачи проекта заявленного качества и за установленное время.	<p><b>Знать:</b> – постановку и методы решения основных задач дифференциальной геометрии и тензорного анализа.</p> <p><b>Уметь:</b> – правильно распределить время, выделенное на решение поставленной задачи.</p> <p><b>Владеть:</b> – навыками постановки и решения задач в области применения дифференциальной геометрии в механике и математическом моделировании.</p>
	<b>4.1_ Б.УК-2.</b> Публично представляет результаты решения конкретной задачи проекта.	<p><b>Уметь:</b> – публично представлять результаты решения конкретной задачи.</p> <p><b>Владеть:</b> – навыками публичного представления результатов решения конкретной задачи</p>

<p><b>УК-6.</b> Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни.</p>	<p><b>1.1_Б.УК-6.</b> Применяет знание о своих ресурсах и их пределах (личностных, ситуативных, временных и т.д.) для успешного выполнения порученной работы.</p>	<p>дифференциальной геометрии.</p> <p><b>Знать:</b> – свои ресурсы и их пределы (личностные, ситуативные, временные и т.д.).</p> <p><b>Уметь:</b> – применять имеющиеся ресурсы (личностные, ситуативные, временные и т.д.) для успешного выполнения порученной работы.</p> <p><b>Владеть:</b> – навыками использования имеющихся ресурсов (личностных, ситуативных, временных и т.д.) для успешного выполнения порученной работы.</p>
	<p><b>2.1_Б.УК-6.</b> Понимает важность планирования перспективных целей деятельности с учетом условий, средств, личностных возможностей, этапов карьерного роста, временной перспективы развития деятельности и требований рынка труда.</p>	<p><b>Знать:</b> – основы планирования целей деятельности.</p> <p><b>Уметь:</b> – планировать цели деятельности с учетом условий, средств, личностных возможностей, временной перспективы развития деятельности.</p> <p><b>Владеть:</b> – навыками планирования целей деятельности при решении задач дифференциальной геометрии с учетом условий, средств, личностных возможностей, временной перспективы развития деятельности.</p>
	<p><b>3.1_Б.УК-6.</b> Реализует намеченные цели деятельности с учетом условий, средств, личностных возможностей, этапов карьерного роста, временной перспективы развития деятельности и требований рынка труда.</p>	<p><b>Знать:</b> – основы планирования целей деятельности.</p> <p><b>Уметь:</b> – реализовывать намеченные цели деятельности с учетом условий, средств, личностных возможностей, временной перспективы развития деятельности.</p> <p><b>Владеть:</b> – навыками реализации намеченных целей деятельности при решении задач дифференциальной геометрии с учетом условий, средств, личностных возможностей, временной перспективы развития деятельности.</p>
	<p><b>4.1_Б.УК-6.</b> Критически оценивает эффективность использования времени и других ресурсов при решении поставленных задач, а также относительно полученного результата.</p>	<p><b>Знать:</b> – основы планирования целей деятельности.</p> <p><b>Уметь:</b> – критически оценить эффективность использования времени и других ресурсов при решении поставленных задач, а также относительно полученного результата.</p> <p><b>Владеть:</b> – навыками корректировки плана в зависимости от эффективности использования времени и других ресурсов при решении поставленных задач, а также</p>

		относительно полученного результата.
	<b>5.1_Б.УК-6.</b> Демонстрирует интерес к учебе и использует предоставляемые возможности для приобретения новых знаний и навыков.	<b>Знать:</b> – свои ресурсы и их пределы (личностные, ситуативные, временные и т.д.). <b>Уметь:</b> – видеть предоставленные возможности. <b>Владеть:</b> – способностью к использованию предоставляемых возможностей для приобретения новых знаний и навыков.
<b>ОПК-1.</b> Способен использовать фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, в профессиональной деятельности.	<b>1.1_Б.ОПК-1.</b> Демонстрирует знание основных понятий, гипотез, теорем, методов фундаментальной и прикладной математики, механики, биомеханики и других естественных наук.	<b>Знать:</b> - методы решения задач профессиональной деятельности на основе дифференциальной геометрии и тензорного анализа. <b>Уметь:</b> - применять методы дифференциальной геометрии в решении задач профессиональной деятельности. <b>Владеть:</b> - навыками применения дифференциальной геометрии в решении задач профессиональной деятельности.
	<b>2.1_Б.ОПК-1.</b> Осуществляет первичный сбор и анализ данных в области фундаментальной и прикладной математики, механики, биомеханики и других естественных наук.	<b>Знать:</b> - профессиональную терминологию, способы воздействия на аудиторию в рамках профессиональной коммуникации <b>Уметь:</b> - использовать современные методы сбора, анализа и обработки научной информации, – изложить научные знания по дифференциальной геометрии. <b>Владеть:</b> - навыками сбора, обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования, способностью публично представлять научные результаты
	<b>3.1_Б.ОПК-1.</b> Корректно интерпретирует различные данные в области фундаментальной и прикладной математики, механики, биомеханики и других естественных наук.	<b>Знать:</b> - основные понятия, теоремы дифференциальной геометрии и тензорного анализа. <b>Уметь:</b> - доказывать основные теоремы дифференциальной геометрии и тензорного анализа; <b>Владеть:</b> - понятийным и формальным математическим аппаратом дифференциальной геометрии и тензорного анализа.
	<b>4.1_Б.ОПК-1.</b> Обладает навыками анализа математических задач и/или естественнонаучных фактов/явлений.	<b>Знать:</b> - основные понятия дифференциальной геометрии и тензорного анализа и их применение в профессиональной деятельности. <b>Уметь:</b> - применять дифференциальную геометрию в решении задач

		<p>профессиональной деятельности.</p> <p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками применения дифференциальной геометрии в профессиональной деятельности.</li> </ul>
	<p><b>5.1_Б.ОПК-1.</b> Применяет фундаментальные знания, полученные в области математических и естественных наук, при решении задач в области избранных видов профессиональной деятельности.</p>	<p><b>Знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основные понятия дифференциальной геометрии и тензорного анализа и их применение в области избранных видов профессиональной деятельности.</li> </ul> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять дифференциальной геометрии при решении задач в области избранных видов профессиональной деятельности.</li> </ul> <p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками применения дифференциальной геометрии при решении задач в области избранных видов профессиональной деятельности.</li> </ul>
	<p><b>6.1_Б.ОПК-1.</b> Имеет опыт теоретического исследования объектов профессиональной деятельности с помощью методов фундаментальной и прикладной математики, механики, биомеханики и других естественных наук.</p>	<p><b>Знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- методы решения задач профессиональной деятельности на основе дифференциальной геометрии.</li> </ul> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять методы дифференциальной геометрии в решении задач профессиональной деятельности.</li> </ul> <p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками применения дифференциальной геометрии и тензорного анализа в решении задач профессиональной деятельности.</li> </ul>
<p><b>ОПК-5.</b> Способен использовать в педагогической деятельности научные основы знаний в сфере математики и механики.</p>	<p><b>1.1_Б.ОПК-5.</b> Демонстрирует знание научных основ математики и механики.</p>	<p><b>Знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- основы дифференциальной геометрии и тензорного анализа;</li> </ul> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять методы дифференциальной геометрии для решения математических и прикладных задач математики;</li> </ul> <p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками применения дифференциальной геометрии в математике и механике.</li> </ul>
	<p><b>2.1_Б.ОПК-5.</b> Корректно интерпретирует научные знания в области математики и механики.</p>	<p><b>Знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- постановку и методы решения основных задач дифференциальной геометрии.</li> </ul> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- применять аппарат дифференциальной геометрии для решения задач механики и математического моделирования.</li> </ul> <p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- навыками профессионального мышления, необходимыми для использования методов дифференциальной геометрии в собственной научно-исследовательской деятельности.</li> </ul>
	<p><b>3.1_Б.ОПК-5.</b> Может</p>	<p><b>Знать:</b></p>

	<p>различным образом представлять и адаптировать знания в сфере математики и механики с учетом уровня аудитории.</p>	<p>– основные методы и способы сбора, обработки, анализа и обобщения информации.  <b>Уметь:</b>  – формулировать определения геометрических понятий и теорем на математическом языке;  - использовать аппарат дифференциальной геометрии в научно-исследовательской деятельности.  <b>Владеть:</b>  - навыками самостоятельных исследований в области дифференциальной геометрии.</p>
	<p><b>4.1 Б.ОПК-5.</b> Владеет научной терминологией и может публично представлять собственные и известные научные результаты в сфере математики и механики.</p>	<p><b>Знать:</b>  - профессиональную терминологию, способы воздействия на аудиторию в рамках профессиональной коммуникации  <b>Уметь:</b>  - использовать современный геометрический аппарат в научно-исследовательской деятельности.  <b>Владеть:</b>  - научной терминологией в области дифференциальной геометрии и тензорного анализа;  - навыками публичного представления научных результатов в сфере дифференциальной геометрии.</p>

#### 4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины «Тензорный анализ» составляет 5 зачетных единиц, 180 часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Контроль	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Формы промежуточной аттестации (по семестрам)
				лекции	Пр.занятия		КСР	СР		
					Общая трудоемкость	Из них - практическая подготовка				
1	Раздел 1. Основы тензорного исчисления	5	1-3/ 1, 2	6	4		36			
2	1.1 Основные понятия тензорного анализа	5	1	2			12			Опрос, проверка домашнего задания
3	1.2. Алгебраические операции над тензорами	5	2	2	2		12			Опрос, проверка домашнего задания
4	1.3. Метрический	5	3	2	2		12			Опрос, проверка



	тензор									домашнего задания
5	<b>Раздел 2. Теория кривых и поверхностей</b>	5	<b>4-15/ 3-14</b>	<b>22</b>	<b>22</b>		<b>40</b>			
6	2.1. Трехмерное евклидово пространство	5	4	2	2		12			Опрос, проверка домашнего задания
7	2.2. Кривая в пространстве.	5	5-8	8	8		12			Опрос, проверка домашнего задания
8	2.3. Поверхность в пространстве	5	9-15	12	12		16			Опрос, проверка домашнего задания
9	<b>Раздел 3. Дифференцируемые многообразия</b>	5	<b>16-18/ 15-17</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>1</b>	<b>25</b>			Опрос, проверка домашнего задания
10	3.1. Понятие дифференцируемого многообразия	5	16-18	6	6	1	20			Опрос, проверка домашнего задания
11	Контрольная работа	5	/18		2		<b>10</b>			Контрольная работа по разделам 1-3
12	<b>Промежуточная аттестация</b>	5								<b>Контрольная работа Зачет.</b>
	<b>ИТОГО (180 ч.)</b>	<b>5</b>		<b>34</b>	<b>34</b>	<b>1</b>	<b>111</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	

## СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### Раздел 1. Основы тензорного анализа

#### Тема 1.1. Основы тензорного исчисления

Определение тензора. Корректность определения тензора. Равенство тензоров

#### Тема 1.2. Алгебраические операции над тензорами

Определение алгебраических операций над тензорами. Правило суммирования. Теорема об алгебраических операциях над тензорами. Операции над кососимметричными тензорами. Внешние формы.

#### Тема 1.3. Метрический тензор

Определение метрического тензора. Опускание и поднятие индексов.

### Раздел 2. Теория кривых и поверхностей

#### Тема 2.1. Трехмерное евклидово пространство

Трехмерное евклидово пространство. Аффинные и декартовы системы координат и их преобразование. Движения (изометрии) евклидова пространства. Теорема об определении движения парой декартовых реперов. Собственные и несобственные движения.

#### Тема 2.2. Кривая в пространстве

Векторная функция скалярного переменного, ее определение и выражение в декартовых координатах. Предел векторной функции скалярного переменного. Непрерывность и дифференцируемость векторной функции скалярного переменного. Формальные свойства производной. Производная сложной функции. Геометрический смысл векторной функции скалярного переменного. Геометрический смысл производной. Длина дуги как параметр. Формула для вычисления длины дуги. Производная по длине дуги. Уравнение кривой. Касательная к кривой. Ориентация кривой.

Кривая в евклидовом пространстве и ее векторное уравнение. Допустимые замены параметра. Ориентация кривой. Натуральный параметр. Касательная к кривой. Лемма о производной векторной функции постоянного модуля. Вектор кривизны кривой и кривизна кривой. Формула для кривизны с помощью произвольного параметра. Необходимое и достаточное условие прямой.

Соприкасающаяся плоскость бирегулярной кривой. Треугольник Френе. Формулы Френе. Кручение и ее выражение с помощью произвольного параметра. Необходимое и достаточное условие плоской кривой. Инвариантность кривизны и кручения ориентированной кривой относительно собственных движений. Натуральное уравнение кривой. Две теоремы о задании кривой ее натуральными уравнениями.

### **Тема 2.3. Поверхность в пространстве**

Векторные функции двух переменных и их частные производные.

Поверхность в евклидовом пространстве и ее векторное уравнение.

Касательная плоскость и касательное пространство в точке поверхности.

Ориентация поверхности. Первый фундаментальный тензор и первая квадратичная форма поверхности и их выражение в координатах. Основные задачи, решаемые с помощью первой квадратичной формы: вычисление длины дуги кривой, угла между кривыми и площади области на поверхности.

Основной линейный оператор ориентированной поверхности и его матрица. Второй фундаментальный тензор поверхности, его свойства. Вторая квадратичная форма поверхности и ее выражение в координатах. Нормальная кривизна в точке кривой на поверхности. Теорема Менье. Нормальная кривизна по направлению в точке поверхности. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Полная (гауссова) и средняя кривизна. Омбилические точки и теорема о поверхности, все точки которой омбилические. Три типа точек на поверхности и поведение поверхности в окрестности каждой из них. Деривационные формулы и их коэффициенты. Условия Гаусса-Петерсона-Кодацци. Теорема Гаусса. Инвариантность двух основных тензоров поверхности, главных кривизн, полной и средней кривизны относительно собственных движений.

### **Раздел 3. Дифференцируемые многообразия**

#### **Тема 3.1. Понятие дифференцируемого многообразия.**

Дифференцируемые отображения и диффеоморфизмы пространства  $\mathbb{R}^n$ , их свойства.  $n$ -мерные карты и  $n$ -мерные атласы класса  $C^\infty$ . Отношение

эквивалентности атласов класса  $C^\infty$ . Максимальный атлас класса  $C^\infty$ .  
Определение  $n$ -мерного дифференцируемого многообразия класса  $C^\infty$ .  
Примеры дифференцируемых многообразий. Дифференцируемые отображения многообразий. Дифференцируемые функции.

### **Темы практических занятий**

**Практическое занятие 1.** Определение тензора. Алгебраические операции: линейная комбинация, тензорное произведение, симметрирование, альтернирование, свертка.

**Практическое занятие 2.** Уравнения некоторых кривых в пространстве

**Практическое занятие 3.** Векторная функция скалярного переменного и ее свойства. Геометрический смысл производной векторной функции. Касательная и нормальная плоскость к кривой.

**Практическое занятие 4.** Вычисление кривизны и кручения кривой, Формулы Френе и их применение.

**Практическое занятие 5.** Вычисление первой квадратичной формы. Применение первой квадратичной формы для вычисления длин дуг, углов между кривыми и площадей.

**Практическое занятие 6.** Вторая квадратичная форма. Вычисление нормальных и главных кривизн поверхности.

**Практическое занятие 7.** Вычисление средней и полной кривизны конкретных поверхностей, в частности сферы и псевдосферы.

**Практическое занятие 8.** Примеры дифференцируемых многообразий. Касательные векторы и касательное пространство дифференцируемого многообразия.

**Практическое занятие 9.** Контрольная работа.

## **5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины**

В учебном процессе при реализации компетентностного подхода используются активные и интерактивные формы проведения занятий:

1) при проведении лекционных занятий: информационные лекции, проблемные лекции, лекции беседы, лекции дискуссии, лекции с заранее запланированными ошибками.

Проведение лекционных занятий по дисциплине основывается на активном методе обучения, при котором студенты не пассивные слушатели, а активные участники занятия, отвечающие на вопросы преподавателя. Вопросы преподавателя нацелены на активизацию процессов усвоения материала. Преподаватель заранее намечает список вопросов, стимулирующих ассоциативное мышление и установления связей с ранее освоенным материалом.

2) при проведении практических занятий: традиционные занятия, занятия исследования, проблемные ситуации, ситуации с ошибкой.

Практические занятия проводятся на основе реализации метода обучения действием: определяются проблемные области, формируются группы. При проведении практических занятий ставятся следующие цели: применение знаний отдельных дисциплин и креативных методов для решения проблем; отработка у обучающихся навыков взаимодействия в составе коллектива; закрепление основ теоретических знаний.

Проведение некоторых практических занятий основывается на интерактивном методе обучения, при котором обучающиеся взаимодействуют не только с преподавателем, но и друг с другом. При этом доминирует активность обучающихся в процессе обучения. Место преподавателя в интерактивных занятиях сводится к направлению деятельности обучающихся на достижение целей занятия.

3) при организации самостоятельной работы студентов: поиск и обработка информации, в том числе с использованием информационно-коммуникационных технологий; исследование проблемной ситуации; постановка и решение задач из предметной области; отработка навыков применения стандартных методов к решению задач предметной области.

Успешное освоение материала курса предполагает большую самостоятельную работу студентов и руководство этой работой со стороны преподавателей. Применяются следующие формы контроля: устный опрос, проверка решения практических задач, контрольная работа.

При проведении лекционных и практических занятий предусматривается использование информационных технологий: пакеты офисных программ (LibreOffice и др.) для создания презентаций, которые могут быть использованы при введении нового материала, а также для быстрого обзора предыдущего теоретического материала к текущему занятию; стандартные пакеты программ для визуализации и решения задач; языки программирования для решения практических заданий.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется главной целью (миссией) программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием конкретных дисциплин, и в целом в учебном процессе они должны составлять не менее 30% аудиторных занятий. Занятия лекционного типа для соответствующих групп студентов не могут составлять более 50% аудиторных занятий.

### **Особенности проведения занятий для граждан с ОВЗ и инвалидностью**

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидностью используются подходы, способствующие созданию безбарьерной образовательной среды: технологии дифференциации и индивидуализации обучения, применение соответствующих методик по работе с инвалидами, использование средств дистанционного общения.

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов предусмотрены следующие формы организации учебного процесса и контроля знаний:

-для слабовидящих:

обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс; для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом (размер 16-20);

- для глухих и слабослышащих:

обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости студентам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих все контрольные задания по желанию студентов могут проводиться в письменной форме.

Основной формой организации учебного процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все студенты обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

## **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

**Самостоятельная внеаудиторная работа** студентов проводится в форме изучения и анализа лекционного материала, изучения отдельных теоретических вопросов по предлагаемой литературе, подбора дополнительных источников для извлечения информации, связанной с проблемами, изучаемыми в рамках данной дисциплины и решения задач с дальнейшим их разбором или обсуждением на аудиторных занятиях, подготовки к промежуточной аттестации.

**Самостоятельная аудиторная работа** студентов проводится в форме самостоятельного решения задач на практических занятиях с дальнейшим их разбором и обсуждением; проведения контрольной работы; поиска решений проблемных ситуаций, предложенных на лекциях и практических занятиях; поиска и устранения ошибок, заложенных в представлении материала преподавателем и допущенных другими студентами.

Студентам требуется вспомнить некоторые разделы логики и теории множеств, необходимые для усвоения основного материала. Основные факты напоминаются на первой лекции, однако большая часть выносится на самостоятельную подготовку. Рекомендуется использовать лекции по соответствующему курсу и предлагаемую в них литературу.

В процессе самостоятельной работы рекомендуется использовать указанные учебники и пособия, чтобы научиться самостоятельно работать с источниками. Конкретные указания для самостоятельной работы должны даваться на каждом практическом занятии.

### **План самостоятельной работы и варианты заданий**

#### **1. Основы тензорного исчисления – 14 ч.**

Определение тензора. Тензорные обозначения. Алгебраические операции с тензорами. Тензоры в евклидовом пространстве.

Решение задач: Гл.14, §§35-37, №35.1-35.8, 36.1-36.15, 36.21-36.27, 36.36, 37.8-37.13.

#### Литература

Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Физматлит, 2004.

#### 2. Векторный анализ -4 ч.

Вектор-функция скалярного аргумента, предел, непрерывность, дифференцируемость. Годограф.

Решение задач: Ч.1, §2, № 2.1-2.16. Ч.2, §17, № 17.12-17.16

#### 3. Теория кривых – 4 ч.

Касательная, угол между кривыми, нормаль и бинормаль. Длина дуги. Кривизна и кручение кривой.

Решение задач:

Ч.1., §2, № 2.17-2.19, Ч.2. §17, № 17.18-17.20, 17.33-17.36, Ч. 2, §18, № 18.10-18.16.

Ч.1., §2, № 2.20-2.21, §4, № 4.7-4.9, Ч.2. §17, № 17.37-17.40

Ч.1, §4, № 4.1-4.6, 4.10-4.15, 4.32-4.35, 4.45., Ч. 2, §18, № 18.1-18.5, 18.18.

#### 4. Теория поверхностей – 6 ч.

Определение поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая квадратичная форма поверхностей. Вторая квадратичная форма, гауссова и средняя кривизны. Линии на поверхностях.

Решение задач:

Ч.2., §17, №17.52-17.72.

Ч.1., §5, № 5.1-5.6.

Ч.1., §6, № 6.1-6.16, Ч.2., §20, № 20.1-20.7, 20.14-20.19.

Ч.2., §24, №24.1-24.22.

#### 5. Дифференцируемые многообразия – 14 ч.

Касательный вектор к многообразию. Связности и параллельный перенос.

Решение задач:

Ч.1., §9, №9.1-10.

Ч.1., §10, №10.12-1021.

#### Литература

Мищенко А.С, Соловьев Ю.П., Фоменко А.Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. М.: Физматлит, 2004.

### Примеры контрольных заданий для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

#### Варианты заданий для промежуточного тестирования

##### Вариант 1

##### Часть А

Выберите правильный вариант ответа.

- Пусть  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ . Тогда производная по  $t$  от  $[\bar{a}\bar{r}']$ , где  $\bar{a}$  - постоянный вектор, равна  
1)  $[\bar{a}'\bar{r}'']$ , 2)  $[\bar{a}\bar{r}'] + [\bar{a}\bar{r}'']$ , 3)  $[\bar{a}\bar{r}'']$ , 4) другой ответ.
- Уравнение касательной к кривой  $\bar{r}(t) = 4\cos t \bar{i} + 4\sin t \bar{j} + 3t \bar{k}$  в точке  $t = 0$  имеет вид  
1)  $\frac{x-4}{0} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ ; 2)  $\frac{x}{4} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-3}{3}$ ; 3)  $\frac{x-4}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z}{3}$ ; 4) другой ответ.

3. Уравнение соприкасающейся плоскости к кривой  $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + t \vec{j} + (t^3 - 20)\vec{k}$  в точке (9,3,7) имеет вид 1)  $9x - 27y - z + 7 = 0$ ; 2)  $9x + 27y - z + 169 = 0$ ; 3)  $9x + 27y - z + 51 = 0$ ; 4) другой ответ.

4. Уравнение касательной плоскости к поверхности  $z = x^2 + 2y^2$  в точке (1;1;3) имеет вид 1)  $2x + 4y - z - 3 = 0$ ; 2)  $x + 4y - z = 0$ ; 3)  $2x + 4y - z - 9 = 0$ ; 4) другой ответ.

### Часть В

Запишите ответ.

5. Найти кривизну и кручение кривой  $\vec{r}(t) = 2t \vec{i} + \ln t \vec{j} + t^2 \vec{k}$  в произвольной точке.

6. Найти натуральный параметр (или длину) кривой  $\vec{r}(t) = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j}$ .

7. Найти уравнение эволюты кривой  $y = 1 - \frac{x^2}{2}$ .

8. Найти первую квадратичную форма сферы  $\vec{r} = a \cos u \cos v \vec{i} + a \sin u \cos v \vec{j} + a \sin v \vec{k}$ .

### Часть С

Приведите подробное решение задачи.

9. Доказать, что объем тетраэдра, образованного пересечением координатных плоскостей и касательной плоскости поверхности  $x = u, y = v, z = \frac{a^3}{uv}$ , не зависит от выбора точки касания поверхности.

### Вариант 2

#### Часть А

Выберите правильный вариант ответа.

1. Пусть  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Тогда производная по  $t$  от  $(\vec{r}')^2$  равна 1)  $2\vec{r}''$ , 2)  $2(\vec{r}'\vec{r}'')$ , 3)  $2[\vec{r}'\vec{r}'']$ , 4) другой ответ.

2. Уравнение касательной к кривой  $\vec{r} = 2 \cos t \vec{i} + 3 \sin t \vec{j} + 2t \vec{k}$  в точке  $t = \frac{\pi}{2}$  имеет вид

1)  $\frac{x}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-\pi}{2}$ ; 2)  $\frac{x}{-2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-\pi}{2}$ ; 3)  $\frac{x+2}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{\pi}$ ; 4) другой ответ.

3. Уравнение соприкасающейся плоскости к кривой  $\vec{r}(t) = t^2 \vec{i} + (1-t)\vec{j} + t^3 \vec{k}$  в точке (1,0,1) имеет вид 1)  $3x - 6y - z - 2 = 0$ ; 2)  $3x + 6y - z - 2 = 0$ ; 3)  $3x + 3y - z - 2 = 0$ ; 4) другой ответ.

4. Уравнение касательной плоскости к поверхности  $z^2 = xy$  в точке (1;1;1) имеет вид 1)  $x + y - 2z = 0$ ; 2)  $x - y + 2z = 0$ ; 3)  $x + y - 2z = 0$ ; 4) другой ответ.

#### Часть В

Запишите ответ.

5. Найти кривизну и кручение кривой  $\vec{r} = e^t \vec{i} + e^{-t} \vec{j} + t\sqrt{2} \vec{k}$  в произвольной точке.

6. Найти натуральный параметр (или длину) кривой  $\vec{r}(t) = a(\cos t + t \sin t)\vec{i} + a(\sin t - t \cos t)\vec{j}$ .

7. Найти уравнение эволюты кривой  $x = 2 \cos t, y = \sin t$ .

8. Найти первую квадратичную форму цилиндра  $\vec{r} = a \cos u \vec{i} + b \sin u \vec{j} + c v \vec{k}$ .

#### Часть С

Приведите подробное решение задачи.

9. Доказать, что сумма квадратов длин отрезков, отсекаемых на осях координат касательной плоскостью поверхности  $x = u^3 \sin^3 v, y = u^3 \cos^3 v, z = (a^2 - u^2)^{3/2}$ , постоянна.

### Вариант 3

#### Часть А

Выберите правильный вариант ответа.

1. Пусть  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ . Тогда производная по  $t$  от  $[\bar{r}'\bar{r}'']$  равна  
1)  $[\bar{r}''\bar{r}'''] + [\bar{r}'\bar{r}''']$ , 2)  $[\bar{r}'\bar{r}''']$ , 3)  $[\bar{r}''\bar{r}''']$ , 4) другой ответ.
2. Уравнение касательной к кривой  $\bar{r} = t^3 \bar{i} + 2t^2 \bar{j} + 3t \bar{k}$  в точке  $t = 1$  имеет вид  
1)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{3}$ ; 2)  $\frac{x-3}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-3}{3}$ ; 3)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}$ ; 4) другой ответ.
3. Уравнение соприкасающейся плоскости к кривой  $\bar{r}(t) = e^t \bar{i} + e^{-t} \bar{j} + t \bar{k}$  в точке (1,1,0) имеет вид 1)  $x + y - 2z = 0$ ; 2)  $x - y + 2z + 2 = 0$ ; 3)  $z = 0$ ; 4) другой ответ.
4. Уравнение касательной плоскости к поверхности  $z = x^2 + y^2$  в точке (1;1;2) имеет вид 1)  $2x + 2y - z - 2 = 0$ ; 2)  $2x + 2y + z - 6 = 0$ ; 3)  $x + y - z = 0$ ; 4) другой ответ.

#### Часть В

Запишите ответ.

5. Найти кривизну и кручение кривой  $\bar{r}(t) = e^t \sin t \bar{i} + e^t \cos t \bar{j} + e^t \bar{k}$  в произвольной точке.
6. Найти натуральный параметр (или длину) кривой  $\bar{r}(t) = a \cos^3 t \bar{i} + a \sin^3 t \bar{j}$  равна 1);  
2)  $\frac{a}{2} \sin t$ ; 3)  $\frac{3a}{2} \cos \frac{t}{2}$ ; 4) другой ответ.
7. Найти уравнение эволюты кривой  $y^2 = 2(x+1)$ .
8. Найти первую квадратичную форму тора  
 $\bar{r} = (a + b \cos v) \cos u \bar{i} + (a + b \cos v) \sin u \bar{j} + b \sin v \bar{k}$

#### Часть С

Приведите подробное решение задачи.

9. Доказать, что касательная плоскость к коноиду  $x = u \cos v, y = u \sin v, z = a \sin 2v$  пересекает коноид по эллипсу.

### Вариант 4

#### Часть А

Выберите правильный вариант ответа.

1. Пусть  $\bar{r} = \bar{r}(t)$ . Тогда производная по  $t$  от  $\bar{a} \bar{r} \bar{r}'$ , где  $\bar{a}$  - постоянный вектор, равна  
1)  $\bar{a}' \bar{r}' \bar{r}''$ , 2)  $\bar{a} \bar{r} \bar{r}''$ , 3) 0, 4) другой ответ.
2. Уравнение касательной к кривой  $\bar{r} = e^t \bar{i} + 2e^t \bar{j} + t \bar{k}$  в точке  $t = 0$  имеет вид  
1)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{0}$ ; 2)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}$ ; 3)  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{1}$ ; 4) другой ответ.
3. Уравнение соприкасающейся плоскости к кривой  $\bar{r}(t) = 2t \bar{i} + \ln t \bar{j} + t^2 \bar{k}$  в точке (2,0,1) имеет вид 1)  $2x + 2y - z - 3 = 0$ ; 2)  $2x - 2y - z + 3 = 0$ ; 3)  $x - 2y - 2 = 0$ ; 4) другой ответ.
4. Уравнение касательной плоскости к поверхности  $z = 2x^2 - y^2$  в точке (1;1;1) имеет вид 1)  $4x - 2y - z - 1 = 0$ ; 2)  $4x - 2y + z - 3 = 0$ ; 3)  $4x + 2y - z = 0$ ; 4) другой ответ.

#### Часть В

Запишите ответ.



5. Найти кривизну и кручение кривой  $\vec{r}(t) = \cos^3 t \vec{i} + \sin^3 t \vec{j} + \cos 2t \vec{k}$  в произвольной точке

6. Найти натуральный параметр (или длину) кривой

$$\vec{r}(t) = \frac{a}{3}(2 \cos t + \cos 2t) \vec{i} + \frac{a}{3}(2 \sin t + \sin 2t) \vec{j}$$

7. Найти уравнение эволюты кривой  $xy = 4$ .

8. Найти первую квадратичную форму геликоида  $\vec{r} = u \cos v \vec{i} + u \sin v \vec{j} + av \vec{k}$ .

### Часть С

Приведите подробное решение задачи.

9. Доказать, что плоскости, касательные к поверхности  $z = xf(y/x)$ , проходят через одну и ту же точку.

## Примерные варианты контрольной работы

### Вариант 1.

1. Проверить, что у астроида  $x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} = a^{2/3}$  для любой касательной длина ее отрезка, заключенного между осями координат, постоянна.
2. Найти угол между кривыми  $x^2 + y^2 = 12x$ ,  $y = \sqrt[3]{(x-6)^2}$ .
3. Составьте уравнения соприкасающейся плоскости линии пересечения сферы  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  и гиперболического цилиндра  $x^2 - y^2 = 3$  в точке  $M(2;1;2)$ .
4. Определить радиус кривизны кривой  $y = xe^{-x}$ .
5. Определить координаты центра кривизны кривой  $y = \cos x$  в точке  $x = \frac{\pi}{4}$ .
6. Вычислить первую квадратичную форму поверхности  $\vec{r} = (a \operatorname{sh} u \cos v) \vec{i} + (a \operatorname{sh} u \sin v) \vec{j} + b \operatorname{ch} u \vec{k}$  (двуполостный гиперболоид вращения)

---

### Вариант 2

1. Написать уравнения главной нормали и бинормали кривой  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = t$  в точке  $t = 0$ .
2. В каких точках с одной и той же абсциссой (не равной нулю) касательные к кривым  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  параллельны?
3. Определить кручение кривой  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $z = \frac{x^3}{3}$  в любой точке и при  $x = 1$ .
4. Определить длину дуги кривой  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = \frac{2}{3}t^3$  от  $t = 0$  до  $t = 3$ .
5. Написать уравнение эволюты кривой  $x = 2 \cos t$ ,  $y = \sin t$ .
6. Вычислить первую квадратичную форму поверхности  $\vec{r} = (a \operatorname{ch} u \cos v) \vec{i} + (a \operatorname{ch} u \sin v) \vec{j} + b \operatorname{sh} u \vec{k}$  (однополостный гиперболоид вращения)

---

### Вариант 3

1. Найти углы, которые образует с осями координат вектор  $\vec{r}$  кривой  $x^2 = 2az$  и  $y^2 = 2bz$  в точке  $z = \sqrt{ab}$ .
2. Докажите, что все нормали развертки окружности  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$  одинаково удалены от начала координат.
3. Найти кривизну кривой  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = t^3$  в любой точке и при  $t = 0$ .

4. Определить длину дуги кривой  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $z = \frac{x^3}{6}$  от  $x = 0$  до  $x = 3$ .
5. Написать уравнение эволюты кривой  $y^2 = 2(x + 1)$ .
6. Вычислить первую квадратичную форму поверхности  $\bar{r} = u \cos v \bar{i} + u \sin v \bar{j} + u^2 \bar{k}$  (параболоид вращения)

Вариант 4

1. Проверить, что кривая  $x \sin(x + y) = 2x^2 - y^2$  касается с прямой  $y = x$  во всех общих точках, кроме начала координат.
2. Найдите точки на кривой  $x = 2/t$ ,  $y = \ln t$ ,  $z = -t^2$ , в которых бинормаль параллельна плоскости  $x - y + 8z + 2 = 0$ .
3. Найти длину дуги кривой  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = t\sqrt{2}$  от  $t = 0$  до  $t = 3$ .
4. Определить кручение кривой  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = t\sqrt{2}$  в любой точке и при  $t = 0$ .
5. Найти максимальную кривизну кривой  $y = e^x$ .
6. Вычислить первую квадратичную форму поверхности  $\bar{r} = u \cos v \bar{i} + u \sin v \bar{j} + av \bar{k}$  (прямой геликоид).

Вариант 5

1. Написать уравнения главной нормали и бинормали кривой  $y = x^2$ ,  $z = y^2$  в точке  $x = 1$ .
2. Найдите касательные к кривой  $x = t^2 - 1$ ,  $y = t^3 + 1$ , параллельные прямой  $2x - y + 3 = 0$ .
3. Определить кривизну кривой  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $z = \frac{x^3}{3}$  в любой точке и при  $x = 1$ .
4. Определить кручение кривой  $x = e^t \sin t$ ,  $y = e^t \cos t$ ,  $z = e^t$  в точке  $t = 0$ .
5. Написать уравнение эволюты кривой  $x = t^2$ ,  $y = \frac{t^3}{2}$ .
6. Вычислить первую квадратичную форму поверхности  $\bar{r} = a v \cos u \bar{i} + b v \sin u \bar{j} + c v \bar{k}$  (конус).

Вариант 6

1. Написать уравнения главной нормали и бинормали кривой  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ ,  $z = 4 \sin \frac{t}{2}$  в точке  $t = \pi$ .
2. Проверить, что расстояние от начала координат до любой нормали к кривой  $x = a(\cos t + t \sin t)$ ,  $y = a(\sin t - t \cos t)$  постоянно.
3. Определить длину дуги кривой  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 3 \sin t$ ,  $z = 4t$  от  $t = 0$  до произвольного  $t$ .
4. Определить кручение кривой  $x = 2t$ ,  $y = \ln t$ ,  $z = t^2$  в любой точке и при  $t = 1$ .
5. Определить координаты центра кривизны кривой  $xu = 4$  в точке  $x = 2$ .
6. Вычислить первую квадратичную форму поверхности  $\bar{r} = a \cos u \bar{i} + b \sin u \bar{j} + v \bar{k}$  (эллиптический цилиндр).

Вариант 7

1. Найдите углы, под которыми пересекаются кривые  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ .
2. Найдите касательные к кривой  $x = t^3$ ,  $y = t^2$ , проходящие через точку  $M(-7; -1)$ .

3. Определить радиус кривизны в произвольной точке кривой  $\rho = a(1 - \cos\varphi)$ .
4. Найти длину дуги кривой  $y = \frac{1}{2} \ln x$ ,  $z = \frac{x^2}{2}$  от  $x = 1$  до  $x = 2$ .
5. Определить координаты центра кривизны кривой  $y = \ln x$  в точке пересечения с осью абсцисс.
6. Вычислить первую квадратичную форму поверхности  $\bar{r} = u \cos v \bar{i} + u \sin v \bar{j} + av \bar{k}$  (прямой геликоид)

#### Вариант 8

1. Найти углы, которые образует с осями координат вектор бинормали кривой  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = t\sqrt{2}$  в точке  $t = 0$ .
2. Показать, что семейство гипербол  $x^2 - y^2 = a^2$  и  $xy = b$  образуют ортогональную сетку, т.е. любая кривая первого семейства пересекает любую кривую второго семейства под прямым углом.
3. Определить координаты центра кривизны кривой  $y^2 = x^3$  в точке  $(-1; -1/3)$ .
4. Определить кручение кривой  $x = \frac{y^2}{2}$ ,  $z = x^2$  в любой точке и при  $y = 1$ .
5. Написать уравнение эволюты кривой  $xy = 4$ .
6. Вычислить первую квадратичную форму поверхности  $\bar{r} = \frac{a}{2} \left( u + \frac{1}{u} \right) \bar{i} + \frac{b}{2} \left( u - \frac{1}{u} \right) \bar{j} + v \bar{k}$  (гиперболический цилиндр)

#### Вопросы для текущего контроля успеваемости

1. Определение тензора.
2. Алгебраические операции над тензорами.
3. Метрический тензор.
4. Свертка тензоров.
5. Векторная функция скалярного переменного.
6. Предел векторной функции скалярного переменного и его свойства.
7. Формальные свойства производной вектор-функции.
8. Кривая в евклидовом пространстве и ее уравнение.
9. Длина дуги и формула для нее.
10. Касательная к кривой в евклидовом пространстве.
11. Кривизна кривой и ее выражение с помощью произвольного параметра.
12. Соприкасающаяся плоскость брегулярной кривой.
13. Единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали ориентированной кривой в евклидовом пространстве.
14. Кручение и ее выражение с помощью произвольного параметра.
15. Необходимое и достаточное условие плоской кривой.
16. Уравнение поверхности.
17. Касательная плоскость и касательное пространство в точке поверхности.
18. Первая квадратичная форма поверхности и ее выражение в координатах.
19. Основные задачи, решаемые с помощью первой квадратичной формы: вычисление длины дуги, угла между кривыми и площади.
20. Вторая квадратичная форма ориентированной поверхности и ее выражение в координатах.
21. Нормальная кривизна.
22. Главные направления и главные кривизны.
23. Формула Эйлера. Гауссова и средняя кривизна.

24. Три типа точек на поверхности и локальное поведение поверхности в окрестности каждой из них.
25. Девивационные уравнения.
26. Уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци. Теорема Гаусса.
27. Дифференцируемые отображения и диффеоморфизмы пространства  $\mathbf{R}^n$
28. Определение дифференцируемого многообразия. Примеры многообразий.
29. Дифференцируемые отображения многообразий. Теорема о дифференцируемом отображении. Дифференцируемые функции.

### **Вопросы для промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

1. Определение тензора.
2. Алгебраические операции над тензорами.
3. Метрический тензор.
4. Свертка тензоров.
5. Векторная функция скалярного переменного и ее выражение в координатах. Предел векторной функции скалярного переменного и его свойства.
6. Непрерывность и дифференцируемость векторной функции скалярного переменного. Формальные свойства производной.
7. Кривая в евклидовом пространстве и ее уравнение. Длина дуги и формула для нее. Натуральный параметр.
8. Касательная к кривой в евклидовом пространстве. Лемма о производной векторной функции постоянного модуля.
10. Вектор кривизны кривой и его выражение с помощью произвольного параметра. Кривизна кривой и ее выражение с помощью произвольного параметра. Необходимое и достаточное условие прямой.
11. Соприкасающаяся плоскость бигулярной кривой. Трехгранник Френе.
12. Единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали ориентированной кривой в евклидовом пространстве. Формулы Френе. Кручение и ее выражение с помощью произвольного параметра.
13. Необходимое и достаточное условие плоской кривой. Инвариантность кривизны и кручения относительно изометрий. Однозначность (с точностью до собственного движения) задания кривой ее кривизной и кручением.
14. Уравнение поверхности. Касательная плоскость и касательное пространство в точке поверхности.
15. Первая квадратичная форма поверхности и ее выражение в координатах.
16. Основные задачи, решаемые с помощью первой квадратичной формы: вычисление длины дуги, угла между кривыми и площади.
17. Основной линейный оператор на ориентированной поверхности и вычисление его матрицы.
18. Вторая квадратичная форма ориентированной поверхности и ее выражение в координатах.
19. Нормальная кривизна. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Гауссова и средняя кривизна.
20. Три типа точек на поверхности и локальное поведение поверхности в окрестности каждой из них.
21. Теорема о поверхности, все точки которой омбилические или точки уплощения.
22. Девивационные уравнения.
23. Уравнения Гаусса и Петерсона-Кодацци. Теорема Гаусса.
24. Дифференцируемые отображения и диффеоморфизмы пространства  $\mathbf{R}^n$ .

25.  $n$ -мерные карты и  $n$ -мерные атласы класса  $C^r$ .
26. Отношение эквивалентности атласов класса  $C^r$ . Максимальный атлас класса  $C^r$ . Определение дифференцируемого многообразия. Примеры многообразий.
27. Дифференцируемые отображения многообразий. Теорема о дифференцируемом отображении. Дифференцируемые функции.

## 7. Данные для учета успеваемости студентов в БАРС

Таблица 1.1 Таблица максимальных баллов по видам учебной деятельности.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Семестр	Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа	Автоматизированное тестирование	Другие виды учебной деятельности	Промежуточная аттестация	Итого
5	10	0	20	20	0	10	40	100

### Программа оценивания учебной деятельности студента

#### 5 семестр

##### Лекции

*Посещаемость, активность, умение выделить главную мысль и др.  
(от 0 до 10 баллов)*

Критерии оценки:

- менее 25% – 0 баллов;
- от 25% до 50% – 3 баллов;
- от 51% до 75% – 6 баллов;
- от 76% до 100% – 10 баллов.

##### Лабораторные занятия

*Не предусмотрены*

##### Практические занятия

*Самостоятельность при выполнении работы, активность работы в аудитории, правильность выполнения заданий, уровень подготовки к занятиям и т.д. (от 0 до 20 баллов)*

Критерии оценки:

- менее 25% – 0 баллов;
- от 25% до 50% – 8 баллов;
- от 51% до 75% – 15 баллов;
- от 76% до 100% – 20 баллов.

##### Самостоятельная работа

*Качество и количество выполненных домашних работ, правильность выполнения и т.д. (от 0 до 20 баллов)*

Критерии оценки:

- менее 25% – 0 баллов;
- от 25% до 50% – 7 баллов;
- от 51% до 75% – 15 баллов;
- от 76% до 100% – 20 баллов.

Автоматизированное тестирование

*Не предусмотрено.*

Другие виды учебной деятельности

*Контрольная работа (от 0 до 10 баллов)*

Промежуточная аттестация – *от 0 до 40 баллов*

Формой промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины в 5 семестре является *зачёт*, который проводится в виде ответа на экзаменационный билет, состоящий из двух вопросов. Задаются еще два – три дополнительных вопроса из перечня вопросов для промежуточной аттестации. На прохождение аттестации студенту отводится 20 минут.

*При проведении промежуточной аттестации*

*ответ на «отлично» / «зачтено» оценивается от 31 до 40 баллов;*

*ответ на «хорошо» / «зачтено» оценивается от 21 до 30 баллов;*

*ответ на «удовлетворительно» «зачтено» оценивается от 11 до 20 баллов;*

*ответ на «неудовлетворительно» / «не зачтено» оценивается от 0 до 10 баллов.*

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за 5 семестр по дисциплине «Тензорный анализ» составляет 100 баллов.

**Таблица 2.1.** Таблица пересчета полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Тензорный анализ» в оценку (зачет):

<u>55</u> баллов и более	«зачтено»
меньше <u>55</u> баллов	«не зачтено»

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

### а) литература:

1. Вильчевская Е. Н. Тензорная алгебра и тензорный анализ [Электронный ресурс]: учебное пособие / Вильчевская Е. Н. - Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 2019. - 124 с. - URL: <http://www.iprbookshop.ru/99827.html>. - ISBN 978-5-7422-6705-8 : Б. ц. Книга находится в Премиум-версии ЭБС IPRbooks.

2. Келлер И.Э. Тензорное исчисление [Электронный ресурс]: учебное пособие / И. Э. Келлер. - 1-е, Новое. - Санкт-Петербург : Лань, 2012. - 176 с. - URL: [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_cid=25&pl1\\_id=3814](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=3814). - ISBN 978-5-8114-1352-2 : Б. ц. Книга из коллекции Лань - Математика. Книга находится в ЭБС "ЛАНЬ".

3. Мищенко А. С. Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии [Электронный ресурс]: учебное пособие / А. С. Мищенко. - 1. - Москва : Издательская фирма "Физико-математическая литература" (ФИЗМАТЛИТ), 2004. - 304 с. - URL: <http://znanium.com/go.php?id=544615>. - Б. ц. Книга находится в ЭБС "ИНФРА-М".



### б) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" предоставляет свободный доступ к полнотекстовой электронной учебно-методической библиотеке для профессионального образования. <http://window.edu.ru/>
2. Свободное программное обеспечение: LibreOffice, GeoGebra.
3. Лицензионное программное обеспечение: ОС Microsoft Windows 7, ОС Microsoft Windows 8, Microsoft Office 2007.

## 9. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Лекционные и практические занятия проводятся в аудиториях на 15 посадочных мест. В отведенных для занятий аудиториях имеются учебные доски для требуемых визуализаций излагаемой информации.

В ходе лекционных и практических занятий используются учебно-демонстрационные мультимедийные презентации, которые обеспечиваются следующим техническим оснащением:

1. Компьютеры (в комплекте с колонками).
2. Мультимедийный проектор
3. Экран.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 01.03.03 Механика и математическое моделирование и профилю подготовки «Механика деформируемых тел и сред».

Автор  
доцент кафедры геометрии

Ю.В. Шевцова

Программа одобрена на заседании кафедры геометрии от 8 октября 2021 года, протокол №5.



### Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

#### Рекомендуемая литература:

1. Новиков С.П., Тайманов И.А. Современные геометрические структуры и поля. М.: Изд-во МЦНМО, 2005.
2. Сизый С.В. Лекции по дифференциальной геометрии [Текст] : учеб. пособие / С.В. Сизый. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. - 375 с.
3. Лосик М.В. Сборник задач по топологии [Текст] : учеб.-метод. пособие для студентов, обучающихся по специальностям: - 01.01.00 "Математика", направление 52.12.00 - "Математика. Прикладная математика" / М.В. Лосик. - Саратов : Издательский центр "Наука", 2008. - 19 с.
4. Лосик М.В. Лекции по векторному и тензорному анализу [Текст] : учеб.-метод. пособие / М.В. Лосик; Саратов. гос. ун-т им. Н. Г. Чернышевского. - Саратов : Издательский центр "Наука", 2008. - 54 с.
5. Подран В.Е. Элементы топологии [Электронный ресурс] : рекомендовано методсоветом по направлению / В. Е. Подран. - 2-е изд. - Санкт-Петербург : Лань, 2008. - 192 с. - ISBN 978-5-8114-0763-7 : Б. ц. Книга из коллекции Лань - Математика.