

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО «СГУ имени Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Механико-математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Проректор СГУ

по учебно-методической работе  
профессор \_\_\_\_\_ Елина Е.Г.



\_\_\_\_\_ 2016 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное  
исчисление**

Направление подготовки

**22.03.01 «Материаловедение и технологии материалов»**

Профиль подготовки

**«Материаловедение и технология новых материалов»**

Квалификация выпускника

бакалавр

Форма обучения

очная

Саратов, 2016 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» являются:

а) знакомство с основными типами дифференциальных уравнений, систем дифференциальных уравнений, основными типами интегральных уравнений и некоторыми задачами вариационного исчисления;

б) освоение способов решения дифференциальных и интегральных уравнений, способов решения задач вариационного исчисления;

в) знакомство с различными математическими моделями, связанными с дифференциальными, интегральными уравнениями, с задачами вариационного исчисления;

г) выработка навыков использования полученных знаний в исследовательской и прикладной деятельности;

д) подготовка студентов к освоению дисциплин, изучаемых на старших курсах;

е) выработка способности приобретать новые и профессиональные знания, используя современные образовательные и информационные технологии.

## 2. Место дисциплины в структуре ООП бакалавриата

Дисциплина «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» относится к вариативной части, обязательных дисциплин блока Б1.В.ОД.8 учебного плана.

При освоении дисциплины «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» требуются глубокие знания по курсам «Математический анализ», «Алгебра и геометрия». В успешном освоении дисциплины «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» важное значение имеет владение основными фактами дифференциального и интегрального исчислений, теории функциональных рядов, методами исследования линейных алгебраических систем.

Полученные в курсе «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» знания необходимы при изучении дисциплин «Методы математической физики», «Комплексный анализ», спец. курсов.

## 3. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» являются:

Способность использовать в профессиональной деятельности знания о подходах и методах получения результатов в теоретических и экспериментальных исследованиях (ОПК-2);

Готовность применять фундаментальные математические, естественнонаучные и инженерные знания в профессиональной деятельности (ОПК-3).

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

*Знать*: основные факты теории дифференциальных и интегральных уравнений, теории вариационного исчисления и методов решения этих уравнений и основных задач вариационного исчисления.

*Уметь*: применять на практике методы решения задач, возникших в прикладных вопросах, связанных с математическими модулями, которые описываются дифференциальными и интегральными уравнениями.

*Владеть*: навыками решения практических задач.

#### 4. Структура и содержание дисциплины «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы, т.е. 144 часа.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра) Формы промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практ	КСР	сам. Работа		
1.	Дифференциальные уравнения 1 порядка	3	1-3	6	6		6	Консультации, контрольная работа, проверка домашнего задания.	
2.	Задача Коши для нормальной системы ДУ	3	4-6	6	6		6	Консультации, проверка домашнего задания.	
3.	Теория линейных ДУ n-порядка	3	7-9	6	6		8	Консультации, проверка домашнего задания.	
4.	Теория линейных систем ДУ	3	10-12	6	6		8	Консультации, проверка домашнего задания, контрольная работа.	
5.	Устойчивость решений системы ДУ.	3	13-14	4	4		6	Консультации, проверка домашнего задания.	
6.	Уравнения в частных производных.	3	15-17	6	6		6	Консультации, проверка домашнего задания.	
<b>ИТОГО</b>				<b>34</b>	<b>34</b>		<b>40</b>	<b>ЭКЗАМЕН (36 часов)</b>	

#### Содержание разделов учебной дисциплины

**Раздел 1. Дифференциальные уравнения 1 порядка.** Общие понятия. Примеры задач, описываемых ДУ. Простейшие ДУ: уравнения с разделяющимися переменными, однородные ДУ, линейные ДУ, уравнения в полных дифференциалах, интегрирующий множитель.

**Раздел 2. Задача Коши для нормальной системы ДУ.** Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Метод Пикара. Зависимость решения от параметров. Непрерывность и дифференцируемость. Зависимость от начальных условий. Системы высшего порядка и их связь с системами 1 порядка.

**Раздел 3. Теория линейных ДУ n-порядка.** Определитель Вронского. Критерий фундаментальности системы решений однородного уравнения. Теорема существования фундаментальной системы решений (ф.с.р.). Общее решение неоднородного уравнения. Формула Остроградского - Лиувилля. Теорема единственности. Метод вариаций произвольных постоянных. Линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера по-



строения ф.с.р. Нахождение частного решения по виду правой части уравнения. Уравнение Эйлера.

**Раздел 4. Теория линейных систем ДУ.** Векторная форма записи. Задача Коши для матричного уравнения. Матрициант. Матричная экспонента. Нахождение матрицианта в простейшем случае.

**Раздел 5. Устойчивость решений системы ДУ.** Определение устойчивости решений системы ДУ. Критерий устойчивости линейной системы.

**Раздел 6. Уравнения в частных производных.** Уравнения в частных производных 1 порядка. Линейные однородные ДУ. Задача Коши.

**Раздел 7. Интегральные уравнения.** Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтера 1-го и 2-го ряда. Альтернатива Фредгольма с вырожденным ядром.

**Раздел 8. Элементы вариационного исчисления.** Постановка задач классического и современного вариационного исчисления. Решение простейших задачи вариационного исчисления. Уравнение Эйлера. Решение изопараметрической задачи.

## **5. Образовательные технологии, применяемые при освоении дисциплины**

При проведении лекционных и практических занятий предусматривается использование информационных технологий.

Использование информационных технологий осуществляется, в частности, в процессе реализации активных и интерактивных форм проведения занятий.

При чтении лекций в качестве материала, иллюстрирующего возможности математического моделирования в различных ситуациях, активно используются примеры из практики обработки данных в процессе исследований в предметной области. Информационные и интерактивные технологии используются при обсуждении проблемных и неоднозначных вопросов, требующих выработки решения в ситуации неопределенности.

Удельный вес занятий, проводимых в интерактивных формах, определяется главной целью (миссией) программы, особенностью контингента обучающихся и содержанием конкретных дисциплин, и в целом в учебном процессе они должны составлять не менее 30 % аудиторных занятий.

### **Особенности проведения занятий для лиц с ОВЗ и инвалидов**

При обучении лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов используются подходы, способствующие созданию безбарьерной образовательной среды: технологии дифференциации и индивидуализации обучения, применение соответствующих методик по работе с инвалидами, использование средств дистанционного общения.

Для студентов с ограниченными возможностями здоровья предусмотрены следующие формы организации учебного процесса и контроля знаний:

- для слабовидящих:

обеспечивается индивидуальное равномерное освещение не менее 300 люкс;

для выполнения контрольных заданий при необходимости предоставляется увеличивающее устройство;

задания для выполнения, а также инструкция о порядке выполнения контрольных заданий оформляются увеличенным шрифтом (размер 16-20);

- для глухих и слабослышащих:

обеспечивается наличие звукоусиливающей аппаратуры коллективного пользования, при необходимости студентам предоставляется звукоусиливающая аппаратура индивидуального пользования;

- для лиц с тяжелыми нарушениями речи, глухих, слабослышащих все контрольные задания по желанию студентов могут проводиться в письменной форме.

Основной формой организации учебного процесса является интегрированное обучение инвалидов, т.е. все студенты обучаются в смешанных группах, имеют возможность постоянно общаться со сверстниками, легче адаптируются в социуме.

#### **6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины**

К самостоятельной работе относятся:

- самостоятельная работа на аудиторных занятиях (лекциях, семинарах, коллоквиумах, практических занятиях);

- внеаудиторная самостоятельная работа.

В процессе обучения предусмотрены следующие виды самостоятельной работы обучающегося:

- Работа с конспектами лекций;
- Проработка пройденных лекционных материалов по конспекту лекций, учебникам и пособиям в соответствии с вопросами, предложенными преподавателем;
- Написание рефератов по отдельным разделам;
- Проработка дополнительных тем, не вошедших в лекции, но обязательных согласно учебной программе модуля;
- Самостоятельное решение сформулированных задач по основным разделам курса;
- Подготовка к практическим и семинарским занятиям;
- Изучение обязательной и дополнительной литературы;
- Подготовка к текущему и промежуточному контролю знаний;
- Выполнение контрольных работ;
- Электронный поиск информации

При освоении дисциплины могут быть использованы следующие формы контроля самостоятельной работы:

- устный опрос;
- доклад;
- реферат;
- контрольная работа;
- другие по выбору преподавателя.

Самостоятельная работа студентов проводится с использованием конспектов лекций, материалов практических занятий, а также литературы, указанной в разделе 8.

Самостоятельная работа студентов обеспечивается регулярным проведением консультаций, домашних заданий и проведением контрольных работ.

#### **Темы самостоятельной работы.**

1. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для нормальной системы.
2. Интегрирование уравнений с разделяющимися переменными.
3. Интегрирование однородных дифференциальных уравнений.
4. Теорема об интегрировании линейных уравнений 1-го порядка.

5. Уравнения в полных дифференциалах.
6. Интегрирующий множитель.
7. Критерий фундаментальности системы решений для линейного уравнения n-го порядка.
8. Метод Эйлера.
9. Метод Лагранжа.
10. Интегрирование уравнения Эйлера.
11. Метод неопределенных коэффициентов.
12. Линейные системы дифференциальных уравнений 1-го порядка. Задача Коши.
13. Метод Эйлера решения уравнения  $Y' = A(x)Y$ .
14. Матричная экспонента.
15. Понятия устойчивости по Ляпунову уравнению  $Y' = F(x, Y)$ .
16. Асимптотическая устойчивость решения. Примеры.
17. Устойчивость для случая  $A$  - постоянная матрица.
18. Устойчивость возмущенной системы.
19. Линейные уравнения с частными производными. Пример задачи Коши.
20. Свойства 1-го интеграла характеристической системы уравнений.
21. Решение задачи Коши.
22. Теорема о решении интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.
23. Теорема о решении интегрального уравнения Вольтера 2-го рода.
24. Решение интегрального уравнения с вырожденным ядром.
25. Решение простейших задач вариационного исчисления.
26. Решение идопараметрической задачи.

Текущий контроль усвоения дисциплины «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» проводится в виде контрольных работ по темам:

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка.
2. Дифференциальные уравнения n-го порядка, системы линейных дифференциальных уравнений 1 порядка.

Контрольная работа «Дифференциальные уравнения 1 порядка».

Вариант 1.

1. Решить уравнение:  $(x^2 + 1)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$ .
2. Решить уравнение:  $y' + 2xy = 2x^3 y^3$ .
3. Решить уравнение:  $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$ .
4. Решить задачу Коши:  $y' \operatorname{ctg} x + y = 2; y(0) = -1$ .

Вариант 2.

1. Решить уравнение:  $y' + ye^x = e^{2x}$ .
2. Решить уравнение:  $y^{n-1}(ay' + y) = x$ .
3. Решить уравнение:  $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$ .
4. Решить Задачу Коши:  $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0; y(0) = 1$ .

Контрольная работа «Дифференциальные уравнения n – порядка, системы линейных дифференциальных уравнение 1 порядка».

Вариант 1.



1. Решить уравнение:  $y'' - y = 2e^x - x^2$ .
2. Решить уравнение:  $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$ .
3. Решить систему уравнений:
 
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2e^t, \\ \dot{y} = 3x - 2y + 4e^t. \end{cases}$$

Вариант 2.

1. Решить уравнение:  $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$ .
2. Решить уравнение:  $y'' + 4y = 2\operatorname{tg}x$ .
3. Решить систему уравнений:
 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + 2e^{-t}, \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t}. \end{cases}$$

**Контрольные вопросы для проведения промежуточной аттестации  
по итогам освоения дисциплины**

1. Теорема об общем интеграле уравнения с разделяющимися переменными.
2. Теорема об общем интеграле однородного уравнения.
3. Теорема об общем интеграле уравнения в полных дифференциалах.
4. Нахождение интегрирующего множителя для уравнения первого порядка.
5. Решение линейного уравнения первого порядка.
6. Теорема существования и единственности решения локальной задачи Коши для системы уравнений первого порядка.
7. Теорема о дифференцируемости решения системы уравнений первого порядка.
8. Теорема о непрерывной зависимости решения задачи Коши от параметров для системы уравнений первого порядка.
9. Критерий линейной независимости системы решений линейного однородного уравнения  $n$ -порядка.
10. Теорема о свойствах уравнений, имеющих одну и ту же фундаментальную систему решений.
11. Теорема об общем решении линейного однородного уравнения.
12. Теорема Остроградского – Лиувилля для линейного однородного уравнения  $n$ -порядка.
13. Теорема об общем решении линейного неоднородного уравнения  $n$ -порядка.
14. Метод вариаций произвольных постоянных нахождения решения линейного неоднородного уравнения  $n$ -порядка.
15. Метод неопределенных коэффициентов нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения  $n$ -порядка.
16. Решение уравнения Эйлера.
17. Критерий фундаментальности системы решений векторного уравнения.
18. Формула Остроградского – Лиувилля для системы решений векторного уравнения.
19. Теорема об общем решении линейного неоднородного векторного Уравнения.
20. Теорема о решении задачи Коши для матричного уравнения.
21. Теорема об общем решении линейного однородного векторного уравнения, выраженном через фундаментальную матрицу матричного уравнения.
22. Метод вариации произвольных постоянных задачи Коши для неоднородного линейного векторного уравнения.
23. Теорема о сходимости матричной экспоненты.
24. Теорема о нахождении матрицианта.
25. Краевая задача для линейного уравнения второго порядка. Собственные значения и собственные функции этой задачи.

26. Построение функции Грина краевой задачи для линейного уравнения второго порядка.
27. Определение устойчивости и асимптотической устойчивости для линейных систем. Критерий устойчивости для стационарных систем.
28. Критерий асимптотической устойчивости для стационарных систем.
29. Постановка задач классического и современного вариационного исчисления.
30. Лемма Дюбуа - Реймона.
31. Решение простейшей задачи вариационного исчисления.
32. Решение изопараметрической задачи.

## 7. Данные для учета успеваемости студентов в БАРС

3 семестр  
номер семестра

Таблица 1. Таблица максимальных баллов по видам учебной деятельности

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Семестр	Лекции	Лабораторные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа	Автоматизированное тестирование	Другие виды учебной деятельности	Промежуточная аттестация	Итого
3	10	0	40	10	0	0	40	100

### Программа оценивания учебной деятельности студента

#### Лекции

Посещаемость, опрос, активность за один семестр – от 0 до 10 баллов.

Критерии оценки:

- не более 50% от числа занятий в семестре – 0 баллов,
- от 51% до 60% – 2балл;
- от 61% до 70% – 4 балла;
- от 71% до 85% – 6 балла;
- от 86% до 99% – 8 балла;
- 100% занятий – 10 баллов.

#### Лабораторные занятия

Не предусмотрены

#### Практические занятия

Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения 1-го порядка» – от 0 до 20 баллов.

Критерий оценки:

- при полностью правильном и своевременном выполнении студентом контрольной работы – 20 баллов;
- при частично правильном выполнении (правильно выполненных контрольной работы – не менее 70%) – 15 баллов;
- при частично правильном выполнении (правильно выполненных заданий – не менее 50%) – 10 баллов;
- в остальных случаях – 0 баллов.



Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка, системы дифференциальных уравнений 1-го порядка» – от 0 до 20 баллов.

Критерий оценки:

- при полностью правильном и своевременном выполнении студентом контрольной работы – 20 баллов;
- при частично правильном выполнении (правильно выполненных контрольной работы – не менее 70%) – 15 баллов;
- при частично правильном выполнении (правильно выполненных заданий – не менее 50%) – 10 баллов;
- в остальных случаях – 0 баллов.

### **Самостоятельная работа**

Выполнение домашнего задания по темам «Дифференциальные уравнения 1-го порядка, задача Коши для нормальной системы ДУ» - от 0 до 5 баллов.

Критерий оценки:

- при полностью правильном и своевременном выполнении студентом всех домашних заданий – 5 баллов;
- при частично правильном выполнении (правильно выполненных заданий – не менее 70%) – 3 баллов;
- при частично правильном выполнении (правильно выполненных заданий – не менее 50%) – 1 балл;
- в остальных случаях – 0 баллов.

Выполнение домашнего задания по темам «Теория линейных ДУ  $n$ -го порядка», «Теория линейных систем ДУ» - от 0 до 5 баллов.

Критерий оценки:

- при полностью правильном и своевременном выполнении студентом всех домашних заданий – 5 баллов;
- при частично правильном выполнении (правильно выполненных заданий – не менее 70%) – 3 баллов;
- при частично правильном выполнении (правильно выполненных заданий – не менее 50%) – 1 балл;
- в остальных случаях – 0 баллов.

### **Автоматизированное тестирование**

Не предусмотрено.

### **Другие виды учебной деятельности**

Не предусмотрены.

### **Промежуточная аттестация**

Форма промежуточной аттестации в семестре – зачет; количество баллов – от 0 до 40.

Зачет проводится в устной форме в виде ответов на вопросы билета и два дополнительных вопроса из перечня вопросов к промежуточной аттестации. Билет содержит два вопроса из перечня вопросов к промежуточной аттестации.

Критерий оценки ответа на каждый вопрос при проведении промежуточной аттестации:

- на вопрос дан правильный, полный, развернутый ответ (допускаются незначительные погрешности) – 9-10 баллов;
- на вопрос дан правильный, но неполный ответ (например, при доказательстве теоремы, изложении метода отсутствуют отдельные логические шаги; допущена ошибка при вычислении; имеются другие неточности) – 6-8 баллов;

- на вопрос дан краткий ответ, содержащий только верно сформулированные факты (допускаются незначительные погрешности) – 5 баллов;
- в остальных случаях – 0 баллов.

Ранжирование оценок промежуточной аттестации:

**31-40 баллов** – ответ на «отлично».

**21-30 баллов** – ответ на «хорошо».

**11-20 баллов** – ответ на «удовлетворительно».

**0-10 баллов** – ответ на «неудовлетворительно».

Таким образом, максимально возможная сумма баллов за все виды учебной деятельности студента за один семестр по дисциплине «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» составляет 100 баллов.

Таблица 2. Пересчет полученной студентом суммы баллов по дисциплине «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление» в оценку (зачет):

50-100 баллов	Зачтено
0-49 баллов	Не зачтено

## 8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление»

а) Основная литература:

1. Гуревич А.П. Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. /А.П. Гуревич, В.В. Корнев.- Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, 2013. – 176 с. ISBN 978-5-292-04217-4 (38 экз.)

2. Демидович Б.П. Дифференциальные уравнения [Текст]/Б.П. Демидович, В.П. Моденов. – Москва: Лань, 2008. – 288 с. – (Классическая учебная литература по математике). – ISBN 978-5-8114-0677-7. - ЭБС «ЛАНЬ»

3. Юмагулов, М. Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория и приложения [Электронный ресурс] : учебное пособие / Юмагулов М. Г. - Москва, Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, 2008. - 181 с. Гриф УМО ISBN 978-5-93972-652-8 Книга находится в базовой версии ЭБС IPRbooks.

<http://www.iprbookshop.ru/16580>

б) дополнительная литература:

1. Филиппов Алексей Федорович. Сборник задач по дифференциальным уравнениям (Текст)/ А.Ф. Филиппов.- М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. – 174 с. (150 экз.)

2. А.Н. Тихонов, А.В. Васильев, А.А. Свешников. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. (2 экз.), 2005 (3 экз.)

3. И.Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.

в) программное обеспечение и Интернет-ресурсы:

1. А.П. Гуревич, В.В. Корнев «Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Часть 1»- [http://library.sgu.ru/uch\\_lit/611.pdf](http://library.sgu.ru/uch_lit/611.pdf).

**9. Материально-техническое обеспечение дисциплины «Дифференциальные, интегральные уравнения и вариационное исчисление».**

Учебная аудитория с обязательным наличием специализированной доски, мела (маркера), проектора и пр., с возможностью размещения всех обучающихся.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 22.03.01 «Материаловедение и технологии материалов», профиль подготовки «Материаловедение и технология новых материалов».

Автор доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики

 В.П. Курдюмов


Программа одобрена на заседании кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики от 03 октября 2014 года, протокол № 3.

Программа актуализирована в 2016 г. (одобрена на заседании кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики протокол № 1 от 29 августа 2016 года).


Зав. кафедрой дифференциальных уравнений и прикладной математики д.ф.-м.н., профессор

 А.П. Хромов

Декан механико-математического факультета, к.ф.-м.н.

 А.М. Захаров

Декан факультета nano- и биомедицинских технологий факультета, д.ф.н., профессор

 С.Б. Вениг