

На правах рукописи



Сафрончик Мария Ильинична

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ
«ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ» ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД БИНГАМОВСКОГО
ТИПА С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА «ПРИСТЕННОГО СКОЛЬЖЕНИЯ» НА БАЗЕ
РЕОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СЛИБАРА – ПАСЛЯЯ

Специальность 1.2.2 –
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Саратов 2023

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования
«Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

**Научный
руководитель**

Андрейченко Дмитрий Константинович,
доктор физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВО «Саратовский национальный
исследовательский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского», заведующий кафедрой
математического обеспечения вычислительных
комплексов и информационных систем на базе филиала
ООО «Эпам Систэмз» в г. Саратове

**Официальные
оппоненты:**

Жигалов Максим Викторович,
доктор физико-математических наук, доцент,
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический
университет имени Гагарина Ю.А.», профессор кафедры
«Математика и моделирование», г. Саратов

Сычев Вячеслав Петрович,
доктор технических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта»,
профессор кафедры «Транспортное строительство»,
г. Москва

**Ведущая
организация:**

Федеральное государственное бюджетное учреждение
науки «Федеральный исследовательский центр
«Саратовский научный центр Российской академии
наук»», г. Саратов

Защита состоится «6» февраля 2024 года в 15:30 часов на заседании диссертационного совета 24.2.392.08 при федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83.

С диссертацией можно ознакомиться в зональной научной библиотеке СГУ и на сайте СГУ <https://www.sgu.ru/research/dissertation-council/24-2-392-08>

Автореферат разослан « » _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.392.08
доктор технических наук, доцент

Вешнева Ирина Владимировна

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Вязкопластические среды относятся к материалам со сложной реологией, которые проявляют как свойства вязкости, так и пластичности. Механизмы течения таких сред весьма специфичны и значительно отличаются от обычных, ньютоновских жидкостей, что обусловлено наличием сложной внутренней структуры. При течении вязкопластичных сред образуются два типа зон: зона течения, где среда проявляет свойства вязкой жидкости и зона, где среда ведет себя как твердое тело. Такие задачи относят к многофазным задачам типа Стефана. Часто именно поведение границ раздела зон представляет большой интерес в прикладных задачах. В современных технологических процессах различных отраслей химической, нефтяной, пищевой промышленности, медицине и других часто применяются вязкопластические материалы, к которым можно отнести цементные и глинистые растворы, торфомассы, различные виды смол и битумов, масляные краски и т.д. Исследование поведения таких сред имеет большое прикладное значение для оптимизации различных технологических процессов.

Исследованиям в области нестационарных многофазных течений вязкопластических сред просвещены работы многих отечественных и зарубежных ученых: А.А. Ильюшина, П.П. Мосолова, В.П. Мясникова, А.Ю. Ишлинского, П.М. Огибалова, А.Х. Мирзаджанзаде, А.И. Сафрончика, Д.М. Климова, А.Г. Петрова, Д.В. Георгиевского, А.В. Гноевого, R. Glowinski, A. Wachs, Г. Дюво, Ж.-Л. Лионса и др.

Основные математические трудности при решении задач о нестационарных многофазных течениях вязкопластических жидкостей связаны с тем, что приходится решать краевые задачи в областях с изменяющимися во времени границами раздела зон течения, а в определяющих соотношениях среды отсутствует информация о распределении напряжений в твердой зоне. Часто такие задачи допускают лишь аналитико-численные решения. Следовательно, **актуальна** проблема развития методов численного моделирования неустановившихся течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз.

Известные модели Шведова-Бингама, Гершеля – Балкли, Кэссона, Шульмана не учитывают экспериментально установленного для некоторых вязкопластических сред эффекта гистерезиса при восстановлении структуры, когда разрушение структуры таких материалов происходит при одном пределе текучести, а восстановление при другом, значительно меньшем. Данное свойство хорошо учитывается в модели Слибара – Палая, и для оптимизации ряда технологических процессов требуется развитие подобных математических моделей и соответствующих методов компьютерного моделирования.

Также ранее экспериментально выявлено аномальное поведение материала у твердых стенок, заключающееся в резком изменении сопротивления при определенных скоростях движения и скольжении жидкости вдоль твердых стенок, для которого в работе использован термин «эффект пристенного скольжения». В данной работе для учета этого эффекта предлагается использовать подход аналогичный подходу Н.П. Петрова для вязкой жидкости.

Целью данной работы является разработка метода компьютерного моделирования для задач неустановившегося течения вязкопластических сред с подвижной границей раздела фаз, обладающих свойством гистерезиса при восстановлении структуры, а также эффектом «проскальзывания» вдоль твердых стенок при превышении определенного порога скорости течения.

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

1. обзор реологических моделей, математических и численных методов моделирования особенностей динамики вязкопластических сред;
2. постановка и решение ряда начально-краевых задач течения «запаздывающих» вязкопластических сред с учетом эффекта «пристенного скольжения»;
3. построение аналитических решений начально-краевых задач развития течений вязкопластических сред для начальных моментов времени методами асимптотического интегрирования;
4. развитие проекционного метода Галеркина для численного интегрирования начально-краевых задач в областях с динамически изменяющейся границей;
5. разработка программного комплекса для моделирования динамики многофазных течений вязкопластических сред.

Объектом исследования являются вязкопластические среды и возникающие в них при технологических процессах неустановившиеся течения с подвижными границами раздела фаз.

Предметом исследования являются математические модели неустановившихся течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз в форме начально-краевых задач типа Стефана, соответствующие численные методы и алгоритмы компьютерного моделирования.

Методы исследования. В работе использованы методы механики вязкопластических сред, а также аналитические и численные методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

Достоверность полученных результатов обеспечивается корректной математической постановкой задач, адекватно описывающей рассматриваемые физические процессы, применением апробированных методов качественного и численного анализа математических моделей и подтверждается расчетами на основе численного моделирования, а также согласованием полученных результатов с данными экспериментальных и численных исследований других авторов.

Научная новизна.

Научная новизна работы состоит в следующих новых результатах.

1. Предложена математическая модель неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая, отличающаяся от известных аналогов учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки.
2. Предложен метод численного моделирования для решения задач неустановившегося течения вязкопластических сред, отличающийся от известных решений отображением области с подвижной границей на неподвижную область, применением дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина, и дальнейшим численным интегрированием по времени задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. По результатам сравнения с найденными точными автомодельными решениями показана высокая точность метода.
3. Научной новизной предложенного метода является возможность определить положение границы раздела фаз течения и его применимость на всех этапах компьютерного моделирования (развитие течения, переходные этапы, восстановление структуры).
4. Для корректной постановки задачи развития течения из состояния покоя, когда возникающая область течения характеризуется бесконечно малой

протяженностью в начальный момент, и требуется решать начально-краевые задачи с особой точкой, предложено использовать методы асимптотического интегрирования в малой окрестности особой точки.

5. На основе предложенных методов и алгоритмов разработан и реализован программный комплекс моделирования неустановившихся течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз.
6. Для задач с гистерезисом деформации и возможным «проскальзыванием» вдоль твердой стенки на основе численного моделирования впервые исследовано движение границы раздела фаз, что дает возможность более точного предсказания динамики поведения среды в различных фазах течения.
7. На основе компьютерного моделирования впервые исследовано влияние «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки на параметры течения на основе специально разработанного комплекса программ.

Теоретическая значимость.

Тематика работы обусловлена выполнением исследований по гранту РФФИ «Математические модели и компьютерное моделирование течений вязкопластических жидкостей» (проект РФФИ № 20-31-90040).

Развита теория, проведена постановка задач, разработаны математические модели и методы численного моделирования в задачах нестационарных многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами. Проведенная разработка является основой для дальнейшего развития методов численного анализа и компьютерного моделирования для начально-краевых задач типа Стефана с подвижной границей, в том числе и для сред с более сложными свойствами.

Практическая значимость.

Практическая значимость связана с тем, что полученные результаты могут быть использованы при проектировании и математическом моделировании технологических процессов в различных производствах, таких как добыча нефти и торфа, изготовление цемента, пластмасс, стекла, различных пищевых продуктов, прокат металлов и других связанных с использованием вязкопластических материалов.

Разработанный комплекс программ (свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2023662977) позволяет решать практико-ориентированные задачи исследования течения вязкопластических жидкостей по системам коммуникаций, моделирование технологических процессов в нефтяной, пищевой и других отраслях промышленности.

Результаты работы могут быть использованы в высшей школе для компьютерного моделирования при изучении курсов прикладной гидромеханики неньютоновских жидкостей.

На защиту выносятся следующие основные положения и результаты:

1. Разработана математическая модель неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая в которой учтено возможное «проскальзывание» вязкопластической среды вдоль твердой стенки.
2. Предложен и применен метод численного моделирования при решении задач неустановившихся течений вязкопластических сред, основанный на отображении области с подвижной границей на неподвижную область и дальнейшей дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина.
3. Предложена методика корректной постановки начально-краевых задач

развития вязкопластических течений на основе асимптотического интегрирования в окрестности особой точки возникновения области течения.

4. На основе предложенных математических моделей, методов и алгоритмов разработан программный комплекс моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами, обладающих свойствами гистерезиса деформаций и возможностью учета «проскальзывания» вдоль твердых стенок.
5. С помощью разработанного программного комплекса получены результаты численного моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая с учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки.

Апробация работы. Работа докладывалась на Международной научной конференции «Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении» (Саратов, 2002 г.), Международной научной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (Саратов, 2019), X Научной конференции молодых ученых «Presenting Academic Achievements to the World. Natural Science» (Саратов, 2019), на Международной научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» (Саратов, 2019), а также на научных семинарах кафедры математической кибернетики и компьютерных наук и кафедры математического и компьютерного моделирования ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Личный вклад автора: разработка математической модели неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая с учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки; разработка и реализация метода численного моделирования в задачах численного моделирования неустановившихся течений вязкопластических сред, основанного на отображении области с подвижной границей на неподвижную область и применении дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина; метод корректной постановки начально-краевых задач развития вязкопластических течений на основе асимптотического интегрирования; разработка проблемно-ориентированного комплекса программ моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами; результаты численного моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая с учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки.

Публикации. По результатам исследования опубликовано 13 статей в рецензируемых изданиях, из них 3 в изданиях, рекомендованных ВАК РФ (две категория К2 [2], [3] и одна категория К1 [1]).

Структура работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении аргументируются выбор темы диссертации, ее актуальность, дан обзор истории и современного состояния проблемы, поставлена цель и сформулированы задачи исследования, обоснованы научная новизна, практическая и теоретическая значимость результатов работы, сформулированы положения, выносимые на защиту, приведены сведения об апробации, личном вкладе автора и

опубликованных работах по теме диссертации.

В первой главе приводится обзор различных реологических моделей вязкопластических сред.

Обосновывается выбор модели Слибара – Паслая в качестве основы для построения математической модели неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с учетом гистерезиса деформации при нагружении и разгрузке.

$$\begin{array}{cc} \text{Нагружение} & \text{Разгрузка} \\ \tau - \tau_d = \eta \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau > \tau_s \quad \tau - \tau_d = \eta \left| \frac{\partial V}{\partial n} \right| \text{sign} \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau > \tau_d \\ 0 = \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau \leq \tau_s \quad 0 = \frac{\partial V}{\partial n} & \text{при } \tau \leq \tau_d \end{array} \quad (1)$$

Здесь τ_s – статический предел текучести, τ_d – динамический предел текучести, η – структурная вязкость, V – скорость, n – нормаль к направлению скорости. Все постановки задач в работе строятся на базе этой реологической модели.

Рассматривается эффект возможного «проскальзывания» вдоль твердой стенки и для его учета в модели предлагается использовать подход, аналогичный гипотезе Н.П. Петрова для вязкой жидкости.

$$\begin{array}{l} \tau - \tau^* = \lambda |V_{fluid} - V_{wall}|, \quad \tau > \tau^* \\ V_{fluid} = V_{wall}, \quad \tau \leq \tau^* \end{array} \quad (2)$$

Здесь V_{fluid} – скорость жидкости, V_{wall} – скорость твердой стенки. При этом коэффициент λ можно условно назвать коэффициентом «внешнего» трения вязкопластической среды о твердую стенку.

Наиболее вероятным соотношением между реологическими параметрами является $\tau_d < \tau_s < \tau^*$.

Описываются особенности моделирования задач развития линейных течений с фазовыми превращениями, основанные на отображении области с подвижной границей на неподвижную область и применении дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина, а также корректной постановки начально-краевых задач путем их асимптотического интегрирования. Приводится обзор методов численного интегрирования задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также сведения о программной реализации проблемно-ориентированного комплекса для моделирования неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз.

Во второй главе на основе предложенных математических моделей, методов и алгоритмов поставлена и решена задача о моделировании неустановившегося «запаздывающего» течения вязкопластической жидкости по наклонной плоскости с учетом эффекта пристенного скольжения. Рассмотрены все возможные этапы течения.

Этап разрушения структуры материала.

Пусть слой вязкопластической среды толщины H находится на горизонтальной плоскости в состоянии покоя. В момент $t = 0$ плоскость была наклонена на угол α к горизонту. Область течения развивается постепенно под действием силы тяжести при достижении касательным напряжением τ статического предела текучести τ_s и граница этой области заранее неизвестна.

Для начала «проскальзывания» соотношение между параметрами в рамках пятипараметрической модели должно быть следующим: $g \rho H \sin \alpha > \tau^* > \tau_s > \tau_d$, где

g – ускорение свободного падения, ρ – плотность среды.

Если соотношение между параметрами будет $\tau^* > g\rho H \sin \alpha > \tau_s$ то все этапы пройдут без «проскальзывания», при $\tau_s > g\rho H \sin \alpha$ разрушения структуры не произойдет.

Для единственной компоненты скорости краевая задача имеет вид:

$$\frac{\partial V_x(y,t)}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 V_x(y,t)}{\partial y^2} + g \sin \alpha, \quad 0 < y < h(t), \quad 0 < t \leq T_1 \quad (3)$$

$$V_x(y,0) = 0, \quad h(0) = 0 \quad (4)$$

$$V_x(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq T_0 \text{ без проскальзывания} \\ (\tau(0,t) - \tau^*) / \lambda, & T_0 < t \leq T_1 \text{ с проскальзыванием} \end{cases} \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y \rightarrow h(t)-0} = \frac{\tau_s - \tau_d}{\eta} \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)_{y \rightarrow +0} = \frac{\tau(0,t) - \tau_d}{\eta} \quad (8)$$

$$V_x|_{y \rightarrow h(t)-0} = U(t), \quad \text{где } \frac{dU(t)}{dt} = g \sin \alpha - \frac{\tau_s}{(H - h(t))\rho} \quad (9)$$

Здесь $\nu = \eta / \rho$ – аналог кинематической вязкости, $U(t)$ – скорость ядра течения.

Далее задача рассматривается в безразмерных переменных и параметрах, переход к которым осуществляется по формулам:

$$y = H\bar{y}, \quad V_x(y,t) = U_0 \bar{V}_x(\bar{y}, \bar{t}), \quad t = \frac{H^2}{\nu} \bar{t}, \quad \lambda = \frac{\eta}{H} \bar{\lambda}, \quad \tau_s = \delta \tau_d, \quad \tau^* = \gamma \tau_d \quad (10)$$

В дальнейшем для простоты записи символ $(\bar{\quad})$ над безразмерными величинами в формулах опускаем. Входящие в задачу параметры Рейнольдса, Сен-Венана и Фруда определяются по формулам:

$$\text{Re} = U_0 H / \nu; \quad \text{Sen}_d = \tau_d H / U_0 \eta; \quad \text{Fr} = U_0^2 / gH \quad (11)$$

Непосредственное численное интегрирование задач типа Стефана с подвижной границей затруднительно. В связи с этим целесообразно отображение области с подвижной границей на область с постоянными границами. Вводя новые переменные по формулам:

$$z = y / h(t), \quad V_x(z,t) = V_x(y,t) \quad (12)$$

получим краевую задачу в области с постоянными границами $0 < z < 1, 0 < t \leq T_1$.

$$\frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} = h^2(t) \left(\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} - z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} - \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha \right) \quad (13)$$

$$V_x(z,0) = 0, \quad h(0) = 0 \quad (14)$$

$$V_x(0,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq T_0 \\ \text{Sen}_d (\tau(0,t) - \gamma) / \lambda, & T_0 < t \leq T_1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\left(\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} \right)_{z=1} = h(t) \text{Sen}_d (\delta - 1) \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} \right)_{z=0} = h(t) \text{Sen}_d (\tau(0,t) - 1) \quad (18)$$

Из (13), (17) с учетом $\frac{d\bar{U}}{d\bar{t}} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha - \text{Sen}_d \frac{\delta}{(1 - \bar{h}(\bar{t}))}$ следует:

$$h'(t) = -\frac{1}{\text{Sen}_d(\delta-1)} \left(\frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} \Big|_{z=1} + \text{Sen}_d \frac{\delta}{(1-h(t))} \right) \quad (19)$$

Начально-краевая задача (13) – (18), (19) в области с неизвестной подвижной границей принадлежит к классу не вполне корректных задач, т.к. в начальный момент область течения отсутствует. Как следствие, требование отсутствия особенностей решения начально-краевой задачи (13) – (18) при $t \rightarrow +0$ приводит к представлению границы течения и поля скоростей в начальный момент в виде асимптотических рядов $h(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{1+k/2}$, $V_x(z,t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) t^{1+k/2}$, $t \rightarrow +0$. При этом начальные условия (14) выполнены автоматически. В результате с погрешностью $\underline{O}(t^3)$ найдено

$$h(t) = A_0 t + A_2 t^2, \quad A_0 = \frac{1}{\delta-1} \left(\frac{\sin \alpha \text{Re}}{\text{Sen}_d \text{Fr}} - \delta \right), \quad A_2 = -\frac{1}{2 \text{Sen}_d(\delta-1)} \left(\text{Sen}_d \delta A_0 + \frac{A_0^2 \text{Re}}{2 \text{Fr}} \sin \alpha \right) \quad (20)$$

$$V_x(z,t) = \text{Sen}_d(\delta-1) A_0 z t + t^2 \left[\left(\text{Sen}_d(\delta-1) A_2 + A_0^2 \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha \right) z - A_0^2 \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha \frac{z^2}{2} \right] \quad (21)$$

Дискретизация начально-краевой задачи (13) – (18), (19) по независимым пространственным переменным выполняется на основе проекционного метода Галёркина с базисными функциями в форме смещенных ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода.

$$V_x(z,t) \approx \sum_{n=0}^{N+2} V_{x_n}(t) T_n(2z-1), \quad T_n(z) = \cos(n \arccos z) \quad (22)$$

Уравнения (13) – (18), (19) с требуемой степенью точности заменяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности, которая далее интегрируется численно. При этом начальные условия ставятся относительно величины h и соответствующих Фурье-коэффициентов. Постановка начальных условий для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений значительно упрощается ввиду того, что выражение для $V_x|_{t=t_0}$, $0 < t_0 \ll 1$ представляет собой линейную комбинацию ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода не более чем 2-й степени.

Из (15), (17), (19), (22) следует

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) = 0, \quad \sum_{n=1}^{N+2} n^2 V_{x_n}(t) = \frac{h(t) \text{Sen}_d(\delta-1)}{2} \quad (23)$$

$$h'(t) = -\frac{1}{\text{Sen}_d(\delta-1)} \left(\frac{4}{3h^2(t)} \sum_{n=2}^{N+2} n^2(n^2-1) V_{x_n}(t) + \frac{\delta \text{Sen}_d}{1-h(t)} \right) \quad (24)$$

Для того, чтобы приближенно выполнить уравнение (22), требуем:

$$\int_0^1 \mathbb{F}[V] T_n(2z-1) dz = 0, \quad n = \overline{0, N}, \quad \mathbb{F}[V] = \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} - h^2(t) \left(\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} - z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} - \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha \right)$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \frac{4}{h(t)} \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(2)} V_m(t) - h(t) \sum_{m=0}^{N+2} A_{n,m}^{(0)} V_m'(t) + h'(t) \sum_{m=0}^{N+2} \left(A_{n,m}^{(1)} + \frac{1}{2} (A_{n+1,m}^{(1)} + A_{n-1,m}^{(1)}) \right) V_m(t) + \\ & + h(t) \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \alpha = 0, \quad A_{n,m}^{(0)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) dx, \quad A_{n,m}^{(k)} = \int_{-1}^1 T_n(x) T_m^{(k)}(x) dx \end{aligned} \quad (25)$$

(23), (25) представляет собой записанную в неявной форме систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Приведение её к нормальной

форме Коши $Y' = F(t, Y)$, $Y = (V_{x_0}, V_{x_1}, \dots, V_{x_N}, h)^T$ и нахождение величины Y' по известным в текущий момент времени t величинам Y выполняется в следующей последовательности. Из (23) находим $V_{x_{N+1}}$ и $V_{x_{N+2}}$ по $V_{x_0}, V_{x_1}, \dots, V_{x_N}$, из (24) находим $h'(t)$. Далее продифференцируем (23) по t .

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{x_n}(t) = 0, \quad \sum_{n=0}^{N+2} n^2 V'_{x_n}(t) = \frac{h'(t) \text{Sen}_d(\delta - 1)}{2} \quad (26)$$

Уравнения (25) и (26) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно V'_{x_n} , $n=0, 1, \dots, N, N+1, N+2$. Начальные условия для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (23), (25) следуют из асимптотического представления (20), (21) при $t=t_0$, $0 < t_0 < 1$.

Этап развития течения с «проскальзыванием»

На этом этапе при достижении касательным напряжением критического значения τ^* (γ в безразмерном виде) в момент времени T_0 меняется условие на твердой стенке $z=0$ на (16). Из условия (16) и реологического уравнения (18) получаем

$$V_x(0, t) = \frac{1}{\lambda} \left(\text{Sen}_d(1 - \gamma) + \frac{1}{h(t)} \frac{\partial V_x(0, t)}{\partial z} \right) \quad (27)$$

Первое уравнение (23) заменяется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V_{x_n}(t) \left(1 + \frac{2n^2}{\lambda h(t)} \right) = \frac{\text{Sen}_d(1 - \gamma)}{\lambda} \quad (28)$$

Первое уравнение (26) заменяется на

$$\sum_{n=0}^{N+2} (-1)^n V'_{x_n}(t) \left(1 + \frac{2n^2}{\lambda h(t)} \right) = \frac{2h'(t)}{\lambda h^2(t)} \sum_{n=1}^{N+2} (-1)^n n^2 V_{x_n}(t) \quad (29)$$

Со временем процесс стабилизируется и течение асимптотически приближается к установившемуся. Граница зоны течения находится из соотношения

$$h_0 = 1 - \frac{\text{FrSen}_d \delta}{\text{Re sin } \alpha} \quad (30)$$

Распределение скоростей для стационарного режима легко находится и имеет вид

$$V_x(z) = \frac{h_0 \text{Re}}{\text{Fr}} z \sin \alpha \left(1 - \frac{zh_0}{2} \right) - h_0 z \text{Sen}_d + \frac{\text{Sen}_d(\tau(0, t) - \gamma)}{\lambda} \quad (31)$$

Переходный этап с «проскальзыванием»

В момент времени T_1 угол наклона плоскости уменьшается $\beta < \alpha$. С этого момента начнется нестационарный переходный процесс, при котором напряжение на границе раздела фаз h_0 будет уменьшаться с τ_s до τ_d , (с δ до 1 в безразмерных параметрах). Граница зоны течения на этом этапе постоянна. Для того чтобы со временем начался процесс восстановления материала соотношение между параметрами выбирается следующим: $\text{Sen}_d \text{Fr} / \text{Re sin } \beta \leq 1$.

Если напряжение на твердой стенке $z=0$ к моменту времени T_1 превышает критическое напряжение γ , то либо весь переходный этап проходит с «проскальзыванием» и в момент T_2 начнется восстановление материала, либо в этот момент $\tau(0, T_2) = \gamma$ и начнется переходный этап без «проскальзывания».

При переходном этапе с «проскальзыванием» решается краевая задача в области $0 < z < 1$, $T_1 < t \leq T_2$. С начальными условиями (30), (31).

$$\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{h_0^2} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta \quad (32)$$

$$V_x(0,t) = \text{Sen}_d(\tau(0,t) - \gamma) / \lambda, \quad T_1 < t \leq T_2 \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} \right)_{z=1} = h_0 \text{Sen}_d(\tau(1,t) - 1) \quad (34)$$

$$\left(\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} \right)_{z=0} = h_0 \text{Sen}_d(\tau(0,t) - 1) \quad (35)$$

$$V_x(0,t) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{h_0} \frac{\partial V_x(0,t)}{\partial z} + \text{Sen}_d(1 - \gamma) \right) \quad (36)$$

По теореме импульсов

$$V_x(1,t) = V_x(1,T_1) + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}}(t - T_1) \sin \beta - \frac{\text{Sen}_d}{(1 - h_0)} \Phi_1(t), \quad \Phi_1(t) = \int_{T_1}^t \tau(1,\xi) d\xi, \quad \Phi_1(T_1) = 0 \quad (37)$$

Численное интегрирование краевой задачи (32)-(37) выполнялось аналогично на основе проекционного метода Галеркина с использованием представления (22), начальными условиями (31) и (37).

Переходный этап без «проскальзывания»

Если в момент T_2 касательное напряжение на твердой стенке $z=0$ уменьшается до значения γ , то условие «проскальзывания» заменяется условием прилипания.

$$\text{Условия (36) и (37) заменяются на } V_x(0,t) = 0, \quad T_2 < t \leq T_3 \quad (38)$$

$$V_x(1,t) = V_x(1,T_2) + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}}(t - T_2) \sin \beta - \frac{\text{Sen}_d}{1 - h_0} \Phi_2(t), \quad \Phi_2(t) = \int_{T_2}^t \tau(1,\xi) d\xi, \quad \Phi_2(T_2) = 0 \quad (39)$$

Численное интегрирование этой начально-краевой задачи выполнялось на основе проекционного метода Галеркина с использованием представления (22) с начальным условием (39) и распределением скоростей, сложившимся к началу данного этапа. Как только напряжение на границе раздела фаз уменьшится до 1 начнется этап восстановления структуры материала, и граница зоны течения снова станет подвижной.

Этап угасания течения с восстановлением структуры с «проскальзыванием»

В зависимости от параметров течения восстановление материала может начаться раньше, чем закончится «проскальзывание» вдоль твердой стенки. Тогда в момент времени T_2 начнется восстановление структуры материала.

На этом этапе получаем краевую задачу в области $0 < z < 1$, $T_2 < t < T_3$. С начальным условием (30) для подвижной границы раздела фаз, и распределением скоростей, сложившимся к началу данного этапа.

$$\frac{\partial V_x(z,t)}{\partial t} = \frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^2 V_x(z,t)}{\partial z^2} + z \frac{h'(t)}{h(t)} \frac{\partial V_x(z,t)}{\partial z} + \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta \quad (40)$$

$$V_x(z, T_2) = V_x^{(0)}(z, T_2), \quad h(T_2) = h_0 \quad (41)$$

$$V_x(0,t) = \text{Sen}_d(\tau(0,t) - \gamma) / \lambda, \quad T_2 < t \leq T_3 \quad (42)$$

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} \right)_{z=1} = 0 \quad (43)$$

$$V_x(0,t) = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{h(t)} \frac{\partial V_x(0,t)}{\partial z} + \text{Sen}_d(1 - \gamma) \right) \quad (44)$$

$$V_x(1,t) = U(t), \text{ где } \frac{dU(t)}{dt} = \frac{\text{Re}}{\text{Fr}} \sin \beta - \frac{\text{Sen}_d}{1-h(t)} \quad (45)$$

Выражение для $h'(t)$.

$$h'(t) = -\frac{1}{h^2(t)} \frac{\partial^4 V_x(z,t)}{\partial z^4} \left(\frac{1}{h(t)} \frac{\partial^3 V_x(z,t)}{\partial z^3} + \frac{h^2(t) \text{Sen}_d}{(1-h(t))^2} \right)^{-1} \quad (46)$$

Численное моделирование выполняется аналогично предыдущим этапам.

Если в момент T_3 касательное напряжение на твердой стенке $z=0$ уменьшается до значения γ , то процесс восстановления будет идти уже без «проскальзывания».

Этап угасания течения с восстановлением структуры без «проскальзывания»

На этом этапе получаем краевую задачу в области $0 < z < 1, t > T_3$. Меняется условие «проскальзывания» (42) на твердой стенке $z=0$ на прилипание $V_x(0,t) = 0, t > T_3$. Решение строится аналогично предыдущим этапам.

В зависимости от выбранной величины угла наклона восстановление структуры материала может быть как полным, так и частичным. Со временем процесс может стабилизироваться и течение асимптотически приблизится к установившемуся. Граница зоны течения в этом случае находится из соотношения $h_1 = 1 - \text{FrSen}_d / \text{Re} \sin \beta$.

Результаты численного моделирования представлены на рисунках 1 – 6.

На рисунке 1 представлено сравнение поведения границы зоны течения для нескольких начальных углов наклона плоскости. Для углов наклона $\alpha = \pi/3, \alpha = \pi/4, \alpha = \pi/6$ «проскальзывание» заканчивается на переходном этапе и восстановление проходит без него, для угла наклона $\alpha = \pi/2.25$ восстановление начнется с условием «проскальзывания» вдоль твердой стенки, процесс при данных параметрах скоротечный и «проскальзывание» быстро завершается. При угле наклона $\alpha = \pi/8$ «проскальзывания» не будет совсем и все этапы пройдут с условием прилипания. В этом случае, в момент времени T_0 процесс стабилизируется, угол наклона уменьшается и начинается переходный процесс до момента времени T_1 после которого начинается восстановление структуры материала.

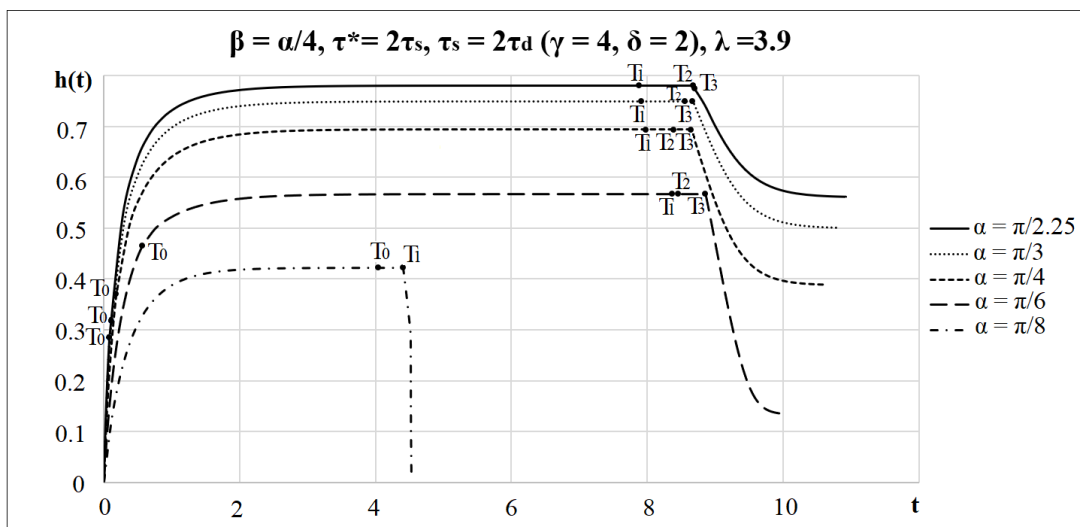


Рисунок 1 – Сравнение поведения границы зоны течения для различных начальных углов наклона α плоскости

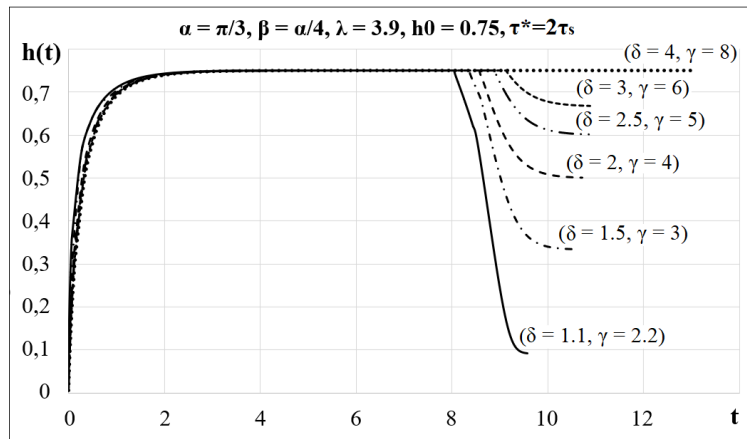


Рисунок 2 – Влияние на границу раздела фаз течения различных соотношений между динамическим и статическим напряжениями сдвига.

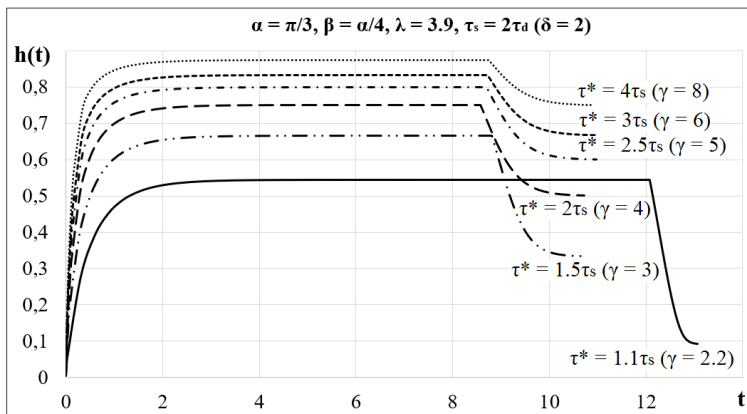


Рисунок 3 – Влияние на границу раздела фаз течения различных соотношений между критическим напряжением и статическим напряжениями сдвига.

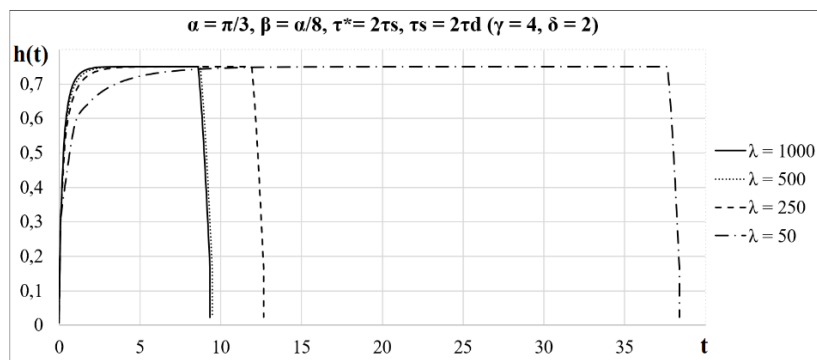


Рисунок 4 – Поведение границы течения при различных значениях коэффициента внешнего трения λ для угла наклона $\beta = \alpha/8$

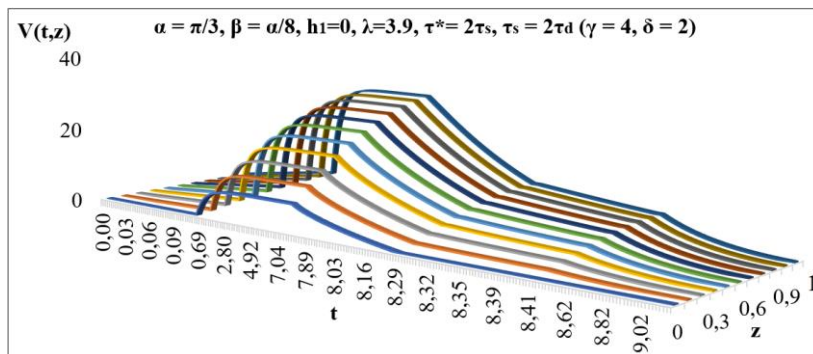


Рисунок 5 – Профиль скорости при полном восстановлении структуры материала

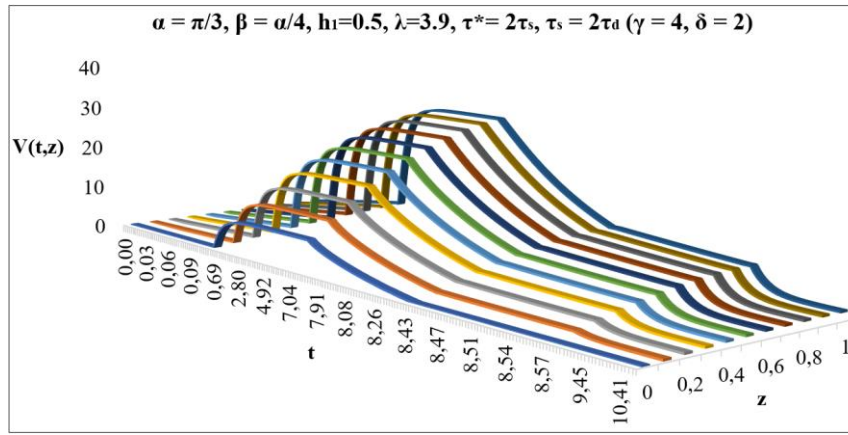


Рисунок 6 – Профиль скорости при выходе на новый установившийся режим течения $h_1 = 0.5$

В третьей главе поставлена и решена задача о моделировании неустановившегося «запаздывающего» течения вязкопластической жидкости в неподвижной трубе круглого сечения радиуса R под действием перепада давления с учетом эффекта пристенного скольжения. Рассмотрены все возможные этапы течения, приведены результаты численного моделирования.

Этап разрушения структуры материала.

Течение развивается из состояния покоя под действием заданного в момент $t=0$ перепада давления ΔP_1 на единицу длины трубы l . Ось OZ направлена вдоль трубы. Область течения развивается постепенно при достижении касательным напряжением статического предела текучести и граница этой области заранее неизвестна $r_0(t) < r < R$, где $r_0(t)$ радиус ядра течения. В начальный момент перепад давления задается таким, чтобы с течением времени проявился эффект «проскальзывания» $R\Delta P_1/2l > \tau^*$, если соотношение между параметрами будет $\tau_s < R\Delta P_1/2l < \tau^*$ то все этапы пройдут без «проскальзывания», при $R\Delta P_1/2l < \tau_s$ разрушения структуры не произойдет.

С учетом осевой симметрии течение описывается одним уравнением относительно осевой составляющей $V_z(r,t)$ и краевая задача на этапе развития течения имеет вид:

$$\rho \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial t} = \eta \left(\frac{\partial^2 V_z(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z(r,t)}{\partial r} \right) + \frac{\Delta P_1}{l} - \frac{\tau_d}{r}, \quad r_0(t) < r < R, \quad 0 < t \leq T_1 \quad (47)$$

$$V_z(r,0) = 0, \quad r_0(0) = R \quad (48)$$

$$V_z(R,t) = \begin{cases} 0, & 0 < t \leq T_0 \text{ без проскальзывания} \\ \frac{1}{\lambda} (\tau(R,t) - \tau^*), & T_0 < t \leq T_1 \text{ с проскальзыванием} \end{cases} \quad (49)$$

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r \rightarrow r_0(t)+0} = - \frac{\tau_s - \tau_d}{\eta} \quad (51)$$

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \right)_{r \rightarrow R-0} = - \frac{\tau(R,t) - \tau_d}{\eta} \quad (52)$$

Для определения неизвестной границы ядра течения $r = r_0(t)$ задается еще одно условие, применив теорему импульсов к массе ядра $M = l\rho\pi r_0^2(t)$, имеющей скорость $U_0(t)$ получим

$$V_z(r_0, t) = U(t), \text{ где } \frac{dU(t)}{dt} = \frac{\Delta P_1}{l\rho} - \frac{2\tau_s}{\rho r_0(t)}, \quad U(0) = 0 \quad (53)$$

Далее задача рассматривается в безразмерных переменных и параметрах, переход к которым осуществляется по формулам:

$$r = R\bar{r}, \quad V_z(r, t) = U_0\bar{V}_z(\bar{r}, \bar{t}), \quad t = \frac{R^2}{\nu}\bar{t}, \quad U = U_0\bar{U}, \quad \lambda = \frac{\eta}{R}\bar{\lambda}, \quad \frac{\Delta P_1}{l} = \frac{\tau_d}{R}\Delta\bar{P}_1, \quad (54)$$

$$\tau_s = \delta\tau_d, \quad \tau^* = \gamma\tau_d, \quad \text{Sen}_d = \frac{\tau_d R}{U_0\eta}, \quad \text{Re} = \frac{U_0 R}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{U_0^2}{gR}$$

Как и в случае плоскопараллельной задачи, описанной во второй главе, для численного интегрирования задачи (47) – (52) необходимо отобразить область с подвижной границей на область с постоянными границами. Вводя новые переменные по формулам: $r = 1 - (1 - r_0(t))x$, $V_z(r, t) = V_z(x, t)$ получим краевую задачу в области с постоянными границами $0 < x < 1$, $0 < t \leq T_1$.

$$\frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{(1 - r_0(t))^2} \frac{\partial^2 V_z(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{1 - r_0(t)} \left(x r_0'(t) + \frac{1}{1 - (1 - r_0(t))x} \right) \frac{\partial V_z(x, t)}{\partial x} + \quad (55)$$

$$+ \text{Sen}_d \left(\Delta P_1 - \frac{1}{1 - (1 - r_0(t))x} \right), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$V_z(x, 0) = 0, \quad r_0(0) = 1 \quad (56)$$

$$V_z(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < \bar{t} \leq \bar{T}_0 \\ \text{Sen}_d (\tau(0, t) - \gamma) / \lambda, & \bar{T}_0 < \bar{t} \leq \bar{T}_1 \end{cases} \quad (57)$$

$$V_z(0, t) = \begin{cases} 0, & 0 < \bar{t} \leq \bar{T}_0 \\ \text{Sen}_d (\tau(0, t) - \gamma) / \lambda, & \bar{T}_0 < \bar{t} \leq \bar{T}_1 \end{cases} \quad (58)$$

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=1} = (1 - r_0(t))(\delta - 1)\text{Sen}_d \quad (59)$$

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=0} = (1 - r_0(t))(\tau(0, t) - 1)\text{Sen}_d \quad (60)$$

Из (55) при $x=1$, (59) с учетом $\frac{dU(t)}{dt} = \text{Sen}_d \left(\Delta P_1 - \frac{2\delta}{r_0(t)} \right)$ следует:

$$r_0'(t) = \frac{1}{\text{Sen}_d(\delta - 1)} \left(\frac{1}{(1 - r_0(t))^2} \frac{\partial^2 V_z(1, t)}{\partial x^2} + \frac{\delta \text{Sen}_d}{r_0(t)} \right) \quad (61)$$

Начально-краевая задача (55) – (61) в области с неизвестной подвижной границей принадлежит к классу не вполне корректных задач, т.к. в начальный момент область течения отсутствует. В этом случае, как и для плоскопараллельной задачи, избавиться от особенностей решения при $t \rightarrow +0$ возможно приведя границу течения и поле скоростей, в начальный момент, к представлению в виде асимптотических рядов: $r_0(t) \sim 1 - \sum_{k=0}^{\infty} A_k t^{1+k/2}$, $V_z(x, t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) t^{1+k/2}$, $t \rightarrow 0$. При этом начальные условия (56) выполнены автоматически. В результате с погрешностью $\underline{O}(t^3)$ найдено

$$r_0(t) = 1 - A_0 t - A_2 t^2, A_0 = \frac{\Delta P_1 - 2\delta}{\delta - 1}, A_2 = \frac{1}{\delta - 1} \left(\frac{A_0^2 (\delta - \Delta P_1)}{2} - \delta A_0 \right) \quad (62)$$

$$V_z(x, t) = \text{Sen}_d \left\{ t(\delta - 1)A_0 x + t^2 \left[((\delta - 1)A_2 + A_0^2 (\Delta P_1 - \delta))x - A_0^2 (\Delta P_1 - \delta) \frac{x^2}{2} \right] \right\} \quad (63)$$

Как и в случае плоскопараллельной задачи из предыдущей главы дискретизация начально-краевой задачи (55) – (61) по независимым пространственным переменным выполняется на основе проекционного метода Галёркина с базисными функциями в форме ортогональных полиномов Чебышева 1-го рода $V_z(x, t) \approx \sum_{n=0}^{N+2} V_{z_n}(t) T_n(2x - 1)$, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Уравнения с требуемой степенью точности заменяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности, которая далее интегрируется численно. При этом начальные условия ставятся относительно величины $r_0(t)$ и соответствующих Фурье-коэффициентов.

На переходном этапе с «проскальзыванием» численно решается начально-краевая задача

$$\frac{\partial V_z(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{(1 - r_0)^2} \frac{\partial^2 V_z(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{1 - (1 - r_0)x} \left(\frac{1}{1 - r_0} \frac{\partial V_z(x, t)}{\partial x} + \text{Sen}_d \right) + \text{Sen}_d \Delta P_2 \quad (64)$$

$$V_z(0, t) = \frac{1}{\lambda} \left(\text{Sen}_d (1 - \gamma) + \frac{1}{1 - r_0(t)} \frac{\partial V_z(0, t)}{\partial x} \right) \quad (65)$$

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=0} = (1 - r_0) \text{Sen}_d (\tau(0, t) - 1) \quad (66)$$

$$\left(\frac{\partial V_z}{\partial x} \right)_{x=1} = (1 - r_0) \text{Sen}_d (\tau(1, t) - 1) \quad (67)$$

$$V_z(1, t) = V_z(1, T_1) + \text{Sen}_d \left(\Delta P_2 (t - T_1) - \frac{2}{r_0} \Phi_1(t) \right), \quad \Phi_1(t) = \int_{T_1}^t \tau(1, \xi) d\xi, \quad \Phi_1(T_1) = 0 \quad (68)$$

На переходном этапе без «проскальзывания» условия (65) и (68) заменяются следующими условиями

$$V_z(0, t) = 0, T_2 < t \leq T_3, V_z(1, t) = V_z(1, T_2) + \text{Sen}_d \left(\Delta P_2 (t - T_2) - \frac{2}{r_0} \Phi_2(t) \right), \quad \Phi_2(t) = \int_{T_2}^t \tau(1, \xi) d\xi \quad (69)$$

Моделирование угасания течения с восстановлением структуры с «проскальзыванием» и без «проскальзывания» выполняется аналогично.

Результаты численного моделирования задачи о неустановившемся «запаздывающем» течении вязкопластического материала в неподвижной трубе круглого сечения представлены на рисунках 7 – 10.

На рисунке 7 показано влияние перепадов давления на изменение границы зоны течения, когда «проскальзывание» материала завершается на переходном этапе. В случае, когда этап восстановления материала начинается с условием «проскальзывания» вдоль твердой стенки показан на рисунке 8. На рисунке 9 показано изменение границы зоны течения на всех этапах в случае, когда «проскальзывание» материала вообще отсутствует.

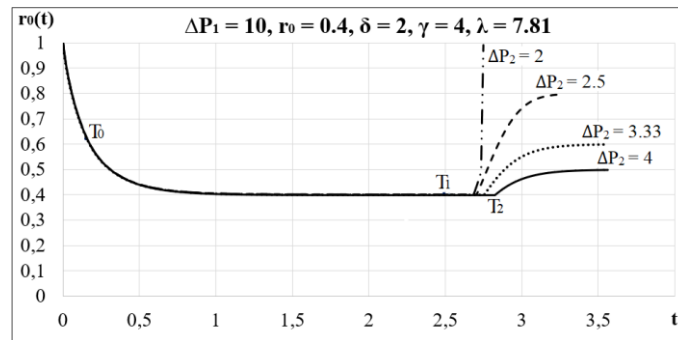


Рисунок 7 – Зависимость границы зоны течения от перепадов давления при неполном разрушении структуры и восстановлением структуры материала без «проскальзывания».

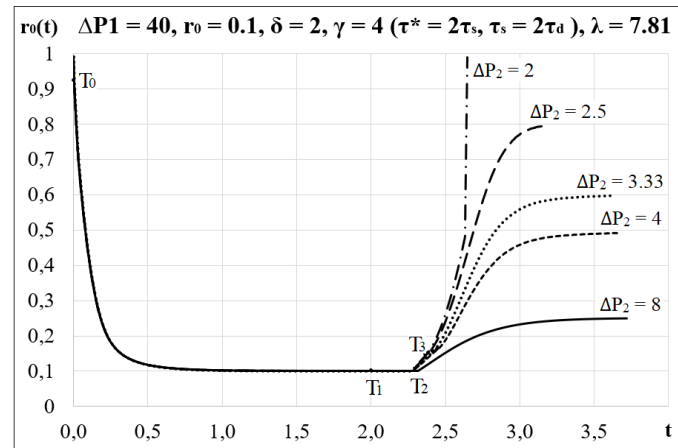


Рисунок 8 – Зависимость границы зоны течения от перепадов давления и началом восстановления структуры материала с «проскальзыванием».

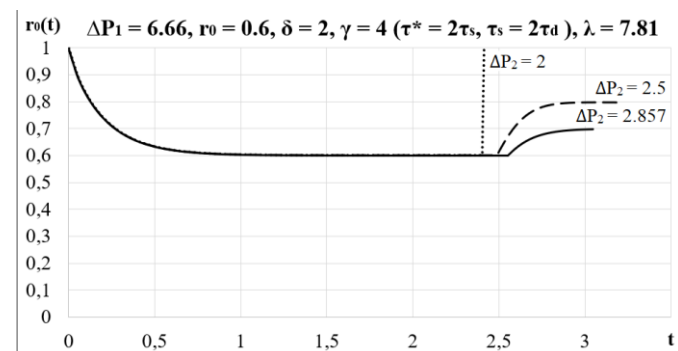


Рисунок 9 – Зависимость границы зоны течения при отсутствии «проскальзывания» на всех этапах течения.

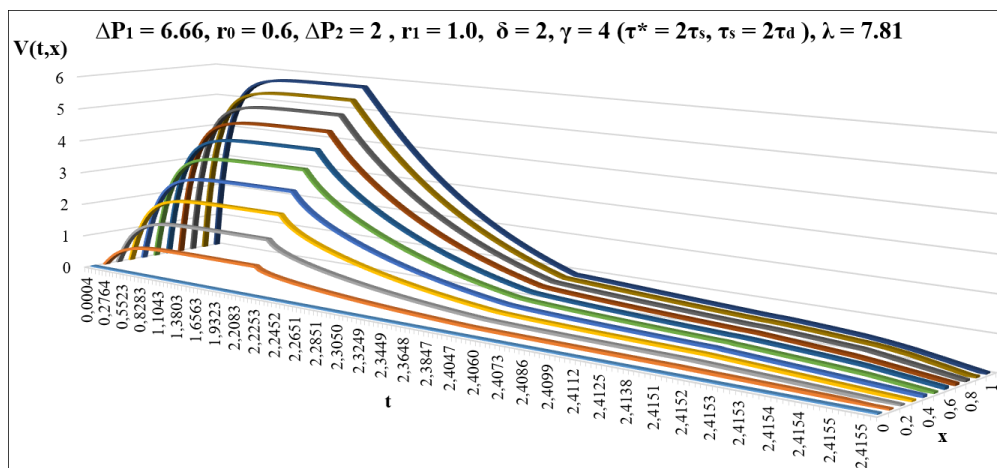


Рисунок 10 – Профиль скорости в отсутствие «проскальзывания» на всех этапах

В четвертой главе рассматриваются пять автомодельных решений для задач течений вязкопластических сред: для этапа развития течения по одному решению для плоскопараллельного и осесимметричного движения среды, два решения для этапа восстановления структуры при плоскопараллельном движении и одно решение для этапа восстановления структуры при осесимметричном движении среды. Для плоскопараллельного течения на этапе развития течения при отсутствии распределенных по объему внешних сил автомодельное решение ищется в виде $y_0(t) = \xi_0 \sqrt{t}$, $\xi_0 > 0$, $V_x = t^{1/2}V(\xi)$, $\xi = y / \sqrt{t}$, на этапе интенсивного угасания течения с восстановлением структуры материала – в виде $y_0(t) = 1 - \xi_0 \sqrt{t}$, $V_x = t^{-1/2}V(\xi)$, $\xi = (1 - y) / \sqrt{t}$, на этапе плавного угасания течения с восстановлением структуры материала – в виде $y_0(t) = 1 - \xi_0 \sqrt{t}$, $V_x = t^{1/2}V(\xi) - 1$, $\xi = (1 - y) / \sqrt{t}$, во всех случаях функция $V(\xi)$ выражается через интеграл вероятности. Для осесимметричного течения при отсутствии градиента давления на этапе развития течения автомодельное решение ищется в виде $r_0(t) = \xi_0 (t_{\max} - t)^{1/2}$, $t_0 \leq t \leq t_{\max}$, $t_0 = t_{\max} - 1 / \xi_0^2$, $\xi = r(t_{\max} - t)^{1/2}$, $V_z = (t_{\max} - t)^{1/2}V(\xi) - 1$, а на этапе торможения течения с восстановлением структуры – в виде $r_0(t) = \xi_0 t^{1/2}$, $\xi = r t^{-1/2}$, $V_z = t^{1/2}V(\xi) - 1$. В обоих случаях функция $V(\xi)$ выражается через функции Бесселя мнимого аргумента и функции Макдональда. Приводятся результаты тестирования алгоритмов компьютерного моделирования для проверки точности предложенных численных методов решения начально-краевых задач на основе автомодельных решений для этапа разгона среды. Для проверки корректности численных алгоритмов данные решения модифицировались так, чтобы учесть влияние распределенных по объему внешних сил в плоскопараллельном случае и градиента давления – в осесимметричном. Во всех исследованных случаях уже при использовании $N=9$ независимых слагаемых в рядах Фурье (22) по смещенным ортогональным полиномам Чебышева 1-го рода отличие численного решения от точного автомодельного наблюдается лишь в пятой или шестой значащих цифрах. Тем самым, предложенный вариант проекционного метода Галеркина оказывается достаточно эффективным для данного класса математических моделей.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ И КРАТКИЕ ВЫВОДЫ

1. Разработана математическая модель неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред на основе модели Слибара – Паслая, отличающаяся от известных аналогов учетом возможного «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки. На основе разработанной модели изучено влияние эффектов гистерезиса и «проскальзывания» вдоль твердой стенки на характеристики движения вязкопластической среды.
2. Предложен и реализован метод численного моделирования для решения задач неустановившегося течения вязкопластических сред, отличающийся от известных решений отображением области с подвижной границей на неподвижную область, применением дискретизации по независимой пространственной переменной на основе проекционного метода Галеркина, и дальнейшим численным интегрированием по времени задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.
3. Найдены точные аналитические автомодельные решения для ряда режимов нестационарных течений вязкопластической среды. По результатам сравнения с автомодельными решениями показана высокая точность предложенных методов численного моделирования.
4. На основе предложенного метода проведено детальное исследование продвижения границы радела фаз течения на всех этапах компьютерного моделирования (развитие течения, переходные этапы, восстановление структуры) и изучено

влияние эффектов гистерезиса и «проскальзывания» вязкопластической среды вдоль твердой стенки.

5. Выполнена корректная постановка начально-краевых задач развития течения с особенностями в начальный момент времени, и для этого использованы методы асимптотического интегрирования в малой окрестности особой точки.
6. Разработан программный комплекс моделирования вязкопластических сред с подвижными границами раздела фаз на основе предложенных в работе методов и алгоритмов.
7. Для задач неустановившихся многофазных течений вязкопластических сред с гистерезисом деформации и возможным «проскальзыванием» вдоль твердой стенки на основе численного моделирования исследовано движение границы раздела фаз.
8. Разработанный программный комплекс позволил выполнить детальное компьютерное моделирование влияния «проскальзывания» среды вдоль твердой стенки на параметры течения.
9. Разработанные методы численного анализа является основой для дальнейшего развития алгоритмов компьютерного моделирования для начально-краевых задач типа Стефана с подвижной границей, в том числе и для сред с более сложными свойствами.

Основные публикации по теме диссертации

Статьи в журналах из перечня ВАК Минобрнауки России

1. **Сафрончик, М.И.** Торможение пластины о слой «запаздывающей» вязкопластической среды с учетом пристенного скольжения / М.И. Сафрончик // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2009. – Т.9. – № 2. – С. 88-93.
2. **Андрейченко, Д.К.** Моделирование этапа развития течения вязкопластической среды по наклонной плоскости / Д.К. Андрейченко, **М.И. Сафрончик** // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и технические науки. – 2021. – № 9. – С. 31-36.
3. **Сафрончик, М.И.** Моделирование неустановившегося «запаздывающего» течения вязкопластической жидкости по наклонной плоскости с учетом эффекта пристенного скольжения / М.И. Сафрончик, Д.К. Андрейченко // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Серия: Естественные и Технические Науки. – 2022. – №10. С. 123-131.

Публикации в других научных изданиях

4. **Сафрончик, М.И.** Влияние пластических свойств смазочных материалов на работу подшипников / М.И. Сафрончик // Проблемы и перспективы прецизионной механики и управления в машиностроении: Материалы Международной научной конференции, Саратов, 14–19 октября 2002 года. – Саратов: СГТУ. – 2002. – С. 172-173.
5. **Могилевич, Л.И.** Запаздывающее течение вязкопластической среды в круглой трубе с учетом пристенного скольжения / Л.И. Могилевич, А.И. Сафрончик, **М.И. Сафрончик** // Саратов: Математика. Механика. – 2002. – №4. – С. 200-203.
6. **Сафрончик, М.И.** Сведение нестационарной задачи о движении вязкопластической среды к системе обыкновенных дифференциальных уравнений / М.И. Сафрончик // Саратов: Математика. Механика. – 2002. – №4. – С. 216-219.
7. **Сафрончик, А.И.** Неустановившееся «запаздывающее» течение Куэтта вязкопластической среды между параллельными стенками / А.И. Сафрончик, **М.И. Сафрончик** // Саратов: Математика. Механика. – 2003. – №5. – С. 177-180.
8. **Сафрончик, М.И.** Неустановившееся «запаздывающее» течение вязкопластической среды по наклонной плоскости / М.И. Сафрончик // Саратов: Математика. Механика. – 2003. – №5. – С. 180-184.

9. *Сафрончик, А.И.* Исследование нестационарных переходных процессов в вязкопластичных средах / А.И. Сафрончик, **М.И. Сафрончик** // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2005. – Т.5. – № 1. – С. 89-98.
10. *Сафрончик, М.И.* Развитие течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости / М.И. Сафрончик // Саратов: Математика. Механика. – 2009. – № 11. – С. 136-141.
11. *Сафрончик, М.И.* Об одном способе решения задачи о развитии течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости / М.И. Сафрончик, Д.К. Андрейченко // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2019): Материалы XVIII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова, Саратов, 26–30 июня 2019 года. – Саратов: Издательство научно-технической литературы. – 2019. – Том Часть 1. – С. 311-316.
12. *Сафрончик, М. И.* Моделирование этапов «запаздывающего» течения вязкопластичной среды по наклонной плоскости / М.И. Сафрончик, Д.К. Андрейченко // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Международной научной конференции, Саратов, 18–20 ноября 2021 года. – Саратов: ООО «Издательство «Научная книга», 2021. – С. 123-128.
13. *Safronchik, M. I.* Construction of one solution of the problem of the development of a flow of a viscoplastic fluid along an inclined plane / M. I. Safronchik // Presenting Academic Achievements to the World. Natural Science: материалы X научной конференции молодых ученых, Саратов, 16 апреля 2019 года. Vol. Выпуск 9. – Саратов: Издательство «Саратовский источник», 2020. – Р. 102-108.

Свидетельства о госрегистрации программ

14. *Сафрончик, М.И.* Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2023662977 Российская Федерация. Программный комплекс для моделирования динамики многофазных течений вязкопластичных сред: № 2023662382: заявл. 18.06.2023: опубл. 18.06.2023 / М. И. Сафрончик, Д. К. Андрейченко; заявитель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»