«УТВЕРЖДАЮ»
Директор Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
им. В.А.Котельникова РАН
д.ф.-м.н. Филимонов Ю.А.

"31" мая 2017 г.

О Т З Ы В

ведущей организации на диссертацию
Семеновой Надежды Игоревны
«ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ В ЭРГОДИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ»,
представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.03 – Радиофизика.

Актуальность темы диссертации

"Время возврата Пуанкаре" является одним из базовых понятий теории динамических систем и теории устойчивости. Системы, в которых наблюдаются возвраты Пуанкаре, называются устойчивыми по Пуассону. К этому широчайшему классу систем относятся как эргодические системы с регулярной многочастотной динамикой, так и системы с перемешиванием, т.е. хаотические.

Фундаментальный подход, основанный на теории возвратов Пуанкаре, дает возможность на основе универсальных математических методов рассматривать такие разнородные явления, как циклы солнечной активности, глобальные изменения климата, динамика биологических популяций, распространение эпидемий, поведение ДНК, колебания в рыночной экономике и т.д. Свойство возвращаемости эволюционного процесса в окрестность предыдущего состояния позволяет прогнозировать его дальнейший ход. Поэтому, развитие строгих теоретических и численных методов в теории возвратов Пуанкаре представляет собой актуальную проблему теории динамических систем и статистической физики.

Если для частного случая эргодических систем с перемешиванием (т.е. для хаотических систем с затуханием корреляторов) накоплен значительный объем теоретических и численных результатов по статистике возвратов

Пуанкаре, то для не менее широкого класса эргодических систем без перемешивания остается открытым ряд вопросов как математического характера, так и вопросов соответствия теоретически предсказанных свойств наблюдаемым в численном и натурном эксперименте. Таким образом, важным является разработка новых математических моделей, методов и алгоритмов численного исследования эргодических динамических систем в виде отображений с дискретным временем, а также потоковых моделей неавтономных автогенераторов и консервативных осцилляторов.

Вопросам, сформулированным в теме диссертации, посвящено значительное количество работ. Однако известные работы не охватывают в должной мере вопросы зависимости статистики времен возврата Пуанкаре от принадлежности числа вращения эргодического квазипериодического режима к диофантовым и лиувиллевым иррациональным числам, влияния нелинейности и шума на квазипериодическую динамику, возможности обобщения результатов, полученных для дискретных отображений на потоковые системы консервативного и диссипативного классов.

Анализируя задачи, поставленные в представленной диссертационной работе, отметим, что в ней проведено:

– исследование применимости разработанной ранее теории возвратов Пуанкаре для линейного отображения окружности в случаях слабой и сильной нелинейности; изучение влияния меры иррациональности числа вращения на функцию зависимости времен возврата от размера области возврата;

– исследования влияния шума в отображении окружности с постоянным сдвигом на возвраты Пуанкаре; сравнение статистики возвратов при локальном и глобальном подходах;

– исследование применимости различных калибровочных функций для вычисления размерности Афраймовича-Песина для квазипериодических движений с различными числами вращения, для линейного и нелинейного случаев, а также в присутствии гауссова белого шума;

– распространение методов, разработанных для дискретной модели, на случай потоковой системы – генератора Ван-дер-Поля под периодическим внешним воздействием; исследование влияния амплитуды внешнего воздействия и нелинейности на статистику возвратов Пуанкаре;

– применение теории возвратов Пуанкаре к гамильтоновой системе – консервативному математическому маятнику под действием гармонической внешней силы; установление типа калибровочной функции и величины размерности Афраймовича-Песина для эргодического множества, получаемого в стробоскопическом сечении консервативного потока;

– исследование статистики возвратов Пуанкаре и размерности Афраймовича-Песина для критического аттрактора Фейгенбаума логистического отображения, как примера эргодического нехаотического множества с фрактальной геометрией.

На основе вышесказанного можно констатировать актуальность и своевременность данной работы и ее соответствие специальности 01.04.03.

Новизна исследований и полученных результатов, степень обоснованности используемых подходов и выводов.

Результаты, приведенные в диссертации, имеют приоритетный характер. Наиболее существенными из них являются следующие:

1. Впервые установлено, что в эргодических множествах без перемешивания, порождаемых отображением окружности с постоянным сдвигом, зависимость среднего значения минимального времени возврата Пуанкаре $<\tau_{inf}>$ от размеров области возврата ε при иррациональных числах вращения является ступенчатой функцией, которая для чисел вращения, соответствующих “золотому” и “серебряному” сечениям, представляет собой “лестницу Фибоначчи”.

2. Аналитически предсказаны и численно подтверждены универсальные свойства функции $<\tau_{inf}(\varepsilon)>$ для различных типов иррациональных чисел вращения (диофантово или лиувиллево, алгебраическое или трансцендентное), исследована возможность расчета размерности Афраймовича-Песина. Показано, что для диофантовых чисел с мерой иррациональности 2 размерность Афраймовича-Песина равна единице, что справедливо в случае и линейного, и нелинейного отображения. Численно подтвержден вид калибровочной функции для диофантовых чисел вращения (это обратно пропорциональная функция: $\phi(t)\sim 1/t$), позволяющей рассчитать размерность Афраймовича-Песина; показано, что для лиувиллевых чисел её использовать нельзя.

3. Для отображения окружности изучено влияние нелинейности и шума на “лестницу Фибоначчи”. Показано, что нелинейность отображения приводит к сглаживанию ступенчатой структуры $<\tau_{inf}(\varepsilon)>$, так что “лестница” стремится к прямой. При этом значение размерности Афраймовича-Песина остается равной единице. В случае воздействия на отображение гауссова белого шума также происходит разрушение “лестницы Фибоначчи”, однако по другому сценарию, а именно, появляется пороговое значение размера области возврата ε_{cr}, ниже которого величина $<\tau_{inf}>$ перестаёт нарастать.

4. Исследованы эргодические множества, получаемые в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван-дер-Поля при малых и больших амплитудах периодического внешнего воздействия. Показано, что при малых амплитудах зависимость $<\tau_{inf}(\varepsilon)>$ имеет вид ступенчатой функции (в т.ч. “лестницы Фибоначчи” при соответствующем выборе числа вращения). При возрастании амплитуды “лестница” разрушается, сглаживаясь и становясь близкой к линейной. При этом размерность Афраймовича-Песина остается равной единице, вплоть до случая амплитуд воздействия, близких к амплитуде собственных колебаний генератора, когда, вследствие сильной нелинейности, размерность Афраймовича-Песина становится меньше единицы.

5. Показано, что результаты, полученные для неавтономного генератора Ван-дер-Поля, можно распространить на консервативный осциллятор под гармоническим внешним воздействием, а именно:

– зависимость времени возврата $<\tau_{inf}(\varepsilon)>$ для $\varepsilon>\varepsilon_{cr}$ имеет вид лестницы Фибоначчи при соответствующих числах вращения и выходит на постоянный уровень при $\varepsilon<\varepsilon_{cr}$,

– уменьшение амплитуды внешнего воздействия приводит к сдвигу ε_{cr} в сторону меньших ε,

– при $\varepsilon>\varepsilon_{cr}$ зависимость $\ln<\tau_{inf}(\ln \varepsilon)>$ можно аппроксимировать прямой линией с коэффициентом наклона “–1”, что соответствует единичному значению размерности Афраймовича-Песина; при $\varepsilon<\varepsilon_{cr}$ эта размерность не определена.

6. На примере критического аттрактора Фейгенбаума квадратичного отображения показано, что для эргодического фрактального множества без перемешивания (т.е. нехаотического):

– зависимость усредненного минимального времени возврата Пуанкаре от масштаба области возврата является линейной в логарифмическом масштабе по обеим осям,

– в качестве калибровочной функции может быть использована функция $\phi(t)\sim 1/t$,

– размерность Афраймовича-Песина равна единице.

Рассмотренные автором модели соответствуют кругу исследуемых физических явлений, методы и алгоритмы подтверждаются проверкой точности и сходимости вычислений. Полученные автором теоретические и численные результаты являются последовательным развитием результатов других авторов и находятся в хорошем согласии с ними.

Достоверность результатов работы и обоснованность выводов не вызывает сомнений.

Замечания по работе

Имеются отдельные замечания по содержанию и структуре работы, которые, однако, не затрагивают существа защищаемых положений и выводов диссертации. А именно:

1. В Гл.1 рассматривается зависимость $<\tau_{inf}(\varepsilon)>$ для разных чисел вращения – диофантовых и лиувиллевых. Констатируется, что при расчете размерности Афраймовича-Песина для лиувиллевых трансцендентных чисел калибровка $\phi(t)=1/t$ неприменима. При этом не приводится работающая калибровочная функция. Этот вопрос остается открытым? Далее, сама ступенчатая функция $<\tau_{inf}(\varepsilon)>$ имеет слабо аппроксимируемый вид. Не следует ли из этого, что размерность Афраймовича-Песина для трансцендентных лиувиллевых чисел вращения теряет смысл?

2. В Гл.1 рассматривается линейное отображение окружности с шумом. Утверждается, что при наличии шума разрушается "лестница Фибоначчи", поскольку "шум добавляет ошибку в число вращения". Можно ли при этом продолжать говорить об определенной размерности Афраймовича-Песина, если зависимость $<\tau_{inf}(\varepsilon)>$ выходит на постоянный уровень при $\varepsilon<\varepsilon_{cr}$? Ведь само понятие размерности является асимптотическим, это коэффициент наклона зависимости $\ln<\tau_{inf}(\ln\varepsilon)>$.

3. В Гл. 1 при анализе влияния шума на времена возврата (п.1.11, стр.58-59) утверждается, что отличие от прежнего случая «объясняется неравномерностью вероятностного распределения, возникающей из-за добавления шума (см. Рис. 1.21)». Однако с этой трактовкой нельзя согласиться, т.к. стационарное распределение вероятностей остается равномерным и для стохастической системы (1.57). Действительно, при отсутствии шума равномерное распределение начальных состояний системы отображается через один шаг дискретного времени оператором Фробениуса – Перрона в такое же равномерное распределение (это неподвижная точка оператора Фробениуса – Перрона). Наличие шума приводит к тому, что распределение через один шаг дискретного времени представляет собой свертку равномерного распределения (образа оператора Фробениуса – Перрона) с функцией плотности распределения шума («гауссианой»), что дает то же самое равномерное распределение, т.е. последнее остается стационарным и для системы с шумом. Видимо, автор имеет здесь в виду флуктуации статистической оценки плотности распределения по временному ряду конечной длины, которые сильнее в случае сильного шума. При этом время возврата в окрестность также будет сильнее флуктуировать от одной реализации шума к другой и нарушит детерминированную (однозначную)

закономерность в зависимости времен возврата от размера окрестности. В связи с этим не вполне корректно представлено определение времени возврата для системы с шумом. В определении автора это – случайная величина, так что полученные графики для времени возврата не воспроизводимы в точности, т.к. зависят от реализации шума. Поэтому следовало бы говорить, что имеются в виду только шумы конечного малого диапазона значений, или использовать моменты или квантили распределения времен возврата и т.п. Нельзя согласиться и с тем, что указано в п.1.11 на стр.61 о влиянии сильного шума: «эффект аналогичен воздействию нелинейности, и объясняется ростом нелинейности при возрастании интенсивности шума». Сходство результатов есть, но система (1.57) линейна уже по ее записи, и это не зависит от того, какая в ней интенсивность шума.

4. В Гл.2 говорится о том, что влияние нелинейности на вид функции $\langle\tau_{inf}(\varepsilon)\rangle$ в осцилляторе Ван-дер-Поля под внешним воздействием аналогично действию шума в отображении окружности, поскольку возникает погрешность в задании числа вращения (стр.71). Однако, если в случае шумового воздействия число вращения, действительно, становится плохо определено, то в случае квазипериодического режима без шума оно может быть определено сколь угодно точно. Далее, для зависимости $\langle\tau_{inf}(\varepsilon)\rangle$ в системе Ван-дер-Поля без шума не наблюдается критического значения ε_{cr}, такого, что при $\varepsilon<\varepsilon_{cr}$ время возврата перестаёт увеличиваться, как это происходит в отображении окружности с шумом. Таким образом, представляется сомнительным рассуждение о том, что действие нелинейности в данном случае аналогично шумовому. Разрушение лестницы Фибоначчи здесь скорее повторяет сценарий с сильной нелинейностью в отображении окружности. Действительно, в режиме квазипериодических колебаний, что имеет место при малой амплитуде воздействия, рассмотренной на стр. 71, ам плитуды в данный момент времени должны однозначно зависеть от фаз. Тогда в стробоскопическом сечении зависимость следующего значения фазы от предыдущего значения фазы и амплитуды можно переписать, оставив лишь зависимость от предыдущего значения фазы (только с другой нелинейной функцией). Это дает совпадение с ситуацией нелинейности в отображении окружности, но не со случаем шума. В хаотическом же режиме амплитуды не определяются однозначно фазами, так что можно провести аналогию именно с влиянием шума.

5. Не вполне ясно из текста диссертации, чем помогает автору использование размерности Афраймовича – Песина в проведенном анализе. Эта характеристика в рассмотренных примерах обычно равна 1, чего и следует ожидать для регулярных режимов. В одном случае получена

величина, меньшая единицы (глава 2). Однако автором это никак не комментируется, а указывается лишь на связь такого результата с нелинейностью, в то время как множество других ситуаций с наличием нелинейности (в главах 1 и 3) не приводят к дробному значению размерности Афраймовича – Песина. Представляется, что использование здесь этой величины не дает особых преимуществ по сравнению с анализом самих значений времен возврата.

6. В Прил.А в качестве примера эргодического движения без перемешивания рассматривается критический аттрактор Фейгенбаума квадратичного отображения, который именуется "странным нехаотическим аттрактором" (СНА). Хотя этот критический аттрактор, действительно, является "странным" в смысле самоподобной геометрической структуры и "нехаотическим" в смысле отсутствия положительных значений ляпуновских показателей, термин СНА на протяжении долгих лет (Grebogi et.al., Physica D**13**, 1984, p.261) закреплён за другим типом аттракторов динамических систем, характерным для систем с выделенной квазипериодической переменной, и имеющим топологию "фрактального тора" для потоков, или же фрактало-подобной инвариантной кривой для дискретных отображений. Такие СНА характеризуются динамическими и метрическими свойствами (обобщенные размерности, спектр Фурье), отличными от свойств аттрактора Фейгенбаума, они могут обладать свойством структурной устойчивости ("грубости"), которой по определению не обладает критический аттрактор. И, наконец, критические явления, связанные с рождением СНА, описываются модификациями ренормгруппы Фейгенбаума-Каданова-Шенкера, а не классической ренормгруппой Фейгенбаума. Поэтому едва ли имеет смысл объединять эти типы аттракторов под одним термином, тем более что такое объединение не привносит никакого нового понимания их природы.

Общая оценка работы

В целом диссертация Семеновой Надежды Игоревны представляет собой законченное исследование, внесшее существенный вклад в развитие теории возвратов Пуанкаре, представляющее значительный интерес для теории динамических систем и эргодической теории. Решение поставленных в диссертации задач имеет важное значение для развития методов моделирования эргодических динамических систем различной физической природы, с регулярными и странными аттракторами.

Результаты работы по теме диссертации представлены в 10 научных публикациях, 7 из которых опубликовано в журналах, рекомендованных

ВАК, таких, как «Physics Reports», «Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation», «Chaos», «Discontinuity, Nonlinearity and Complexity», «Нелинейная Динамика», «Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика», и 3 – в сборниках трудов конференций.

Результаты работы доложены и дискутировались на международных научных конференциях, они использовались при выполнении двух грантов РФФИ.

Публикации по теме диссертации с достаточной полностью отражают основные результаты диссертационной работы. Автореферат с достаточной полнотой соответствует основным положениям диссертационной работы.

Результаты диссертации могут быть использованы при проведении научных исследований в академических НИИ (ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, ИПФ РАН и др.) и при преподавании статистической радиофизики, теории колебаний, нелинейной динамики на физическом факультете, факультете нелинейных процессов, факультете нано- и биомедицинских технологий Саратовского госуниверситета, в Нижегородском госуниверситете, Московском госуниверситете, Саратовском государственном техническом университете, и других вузах.

Можно заключить, что диссертационная работа Н.И. Семеновой по актуальности решенных задач, объему проведенных исследований, степени научной новизны и практической значимости результатов полностью удовлетворяет всем требованиям «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утверждённого постановлением Правительства РФ №842 от 24.09.2013 г., предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор Семенова Надежда Игоревна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.04.03 – Радиофизика.

Отзыв составили:

с.н.с., к.ф.-м.н. Жалнин А.Ю.

в.н.с., д.ф.-м.н. Смирнов Д.А.

Отзыв утвержден на заседании секции ученого совета СФ ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН (протокол № 5 от 31 мая 2017 года).

Секретарь секции ученого совета СФ ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН

д.ф.-м.н. Селезнев Е.П.