

УТВЕРЖДАЮ:

Проректор по научной и
инновационной деятельности
ФГБОУ ВО «ДонГУ»,
кандидат химических наук, доцент
Белый Александр Владимирович



2026 г.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Донецкий государственный университет»

Диссертация Краснощёких Глеба Витальевича «Классы функций с нулевыми сферическими средними относительно свёртки Бесселя и их применение» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ выполнена на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений.

Краснощёких Г.В. в 2022 году окончил государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Донецкий национальный университет», факультет математики и информационных технологий по направлению подготовки 01.04.01 «Математика» и получил квалификацию «Магистр» (диплом 107705 0148496, регистрационный номер 01/025, выдан 30.06.2022 г.).

Краснощёких Г.В. обучается в аспирантуре ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет» по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ с 01.12.2022 (приказ № 148/12 от 15.11.2022) по настоящее время. Обучение он совмещает с работой в должности инженера научно-исследовательской части ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, в качестве исполнителя разрабатываемой по государственному заданию Минобрнауки РФ фундаментальной научной темы «Инвариантные операторы в проблемах современного анализа и интегральной геометрии» (№ госрегистрации 124012400352-6).

Тема диссертации «Уравнения свёртки на гипергруппах Бесселя-Кингмана» утверждена на заседании учёного совета ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», протокол № 1 от 27.01.2023 г. На заседании

Учёного совета ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет», протокол № 4 от 17.04.2025 г., тема диссертации изменена на «Классы функций с нулевыми сферическими средними относительно свёртки Бесселя и их применение».

Научным руководителем приказом № 148/12 от 15.11.2022 назначен Волчков Виталий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет».

Сведения о сданных кандидатских экзаменах приведены в справке о сдаче кандидатских экзаменов № 49/04-22 от 08.12.2025.

Научную экспертизу диссертация проходила на расширенном заседании кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет». На заседании присутствовали:

1. Волчков Виталий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений;
2. Заставный Виктор Петрович, доктор физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений;
3. Машаров Павел Анатольевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений;
4. Лиманский Дмитрий Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений;
5. Иванов Александр Юрьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений;
6. Оридорога Леонид Леонидович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений;
7. Агибалова Анна Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений.

Рецензенты диссертации:

Заставный В.П. – д.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений представил положительный отзыв.

Лиманский Д.В. – к.ф.-м.н., доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений представил положительный отзыв.

По итогам обсуждения принято следующее заключение.

Актуальность темы диссертационного исследования.

Несмотря на более чем вековую историю изучения функций с нулевыми сферическими средними и важность этого направления для теории дифференциальных уравнений, интегральной геометрии, гармонического и комплексного анализа, а также для современных методов томографии и радиолокации, целый ряд ключевых задач, связанных со свёрткой Бесселя, до сих пор оставался нерешённым. В частности, отсутствовало описание классов локально суммируемых функций на интервале с нулевыми средними относительно свёртки Бесселя, не были установлены точные характеристики допустимой скорости убывания ненулевых функций таких классов, не решены задачи о множествах единственности и пр.

Поэтому тема диссертационной работы Г.В. Краснощёких, направленная на систематическое исследование указанных задач, является весьма актуальной. В работе впервые получены: теорема единственности типа Любича-Леонтьева для периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя; полное описание классов с нулевыми «сферическими» («шаровыми») средними относительно свёртки Бесселя; точные оценки интегральных средних, характеризующие допустимое убывание ненулевых функций из исследуемых классов; новые локальные теоремы о двух радиусах и теорема об одном радиусе. Получены аналоги известных теорем об инъективности оператора сферического среднего (Ф. Йон, Д. Смит, В.В. Волчков, С. Тангавелу) и о спектральном анализе на гипергруппе Бесселя-Кингмана (Б. Сельми, М.М. Несиби). Кроме того, установлены новые свойства решений обобщённого уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, теоремы о замыкании обобщённых сдвигов Бесселя и теорема единственности для сходящихся последовательностей линейных комбинаций функций Бесселя (аналог «гар»-теорем Н. Винера и Н. Левинсона).

Тематика и содержание диссертационного исследования отвечают «Приоритетным направлениям фундаментальных и поисковых научных исследований» (позиции 1.1.1.3. Математический анализ, 1.1.1.4. Дифференциальные уравнения (в том числе обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными), динамические системы, теория управления в том числе, оптимальное управление, приложения к задачам математической физики).

Личное участие соискателя в получении результатов, изложенных в диссертации. Все основные результаты диссертационной работы Краснощёких Г.В., включая: теорему единственности типа Любича-Леонтьева для периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя; описание классов функций с нулевыми «сферическими» («шаровыми») средними относительно свёртки Бесселя в виде рядов по нормированным функциям Бесселя; точные характеристики допустимой скорости убывания на

бесконечности ненулевых функций из исследуемых классов; различные варианты теоремы о двух радиусах и теорема об одном радиусе для этих классов; а также приложения к исследованию решений обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу, теоремы о замыкании обобщенных сдвигов Бесселя и теорему единственности для сходящихся последовательностей линейных комбинаций функций Бесселя, – получены лично соискателем. В совместно проведенных исследованиях и опубликованных в соавторстве работах научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Вит.В. Волчкову, принадлежит постановка задач, указание методов исследования и общее редактирование.

Степень достоверности результатов проведенных исследований обусловлена корректным использованием аппарата гармонического анализа, теории обобщенных функций, интегральных преобразований (преобразования Фурье-Бесселя) и методов комплексного анализа; строгостью постановок задач и строгостью математических доказательств всех теорем; использованием апробированных методов теории свертки Бесселя, обобщенного сдвига Бесселя и квазианалитических классов; согласованностью полученных результатов с классическими теоремами единственности Ф. Йона, Д. Смита, а также с известными теоремами о спектральном анализе на гипергруппе Бесселя-Кингмана (Б. Сельми, М.М. Несиби); отсутствием противоречий в выводах и логической непротиворечивостью всей совокупности полученных результатов; а также апробацией работы на многочисленных международных конференциях и публикацией основных результатов в 7 статьях в журналах, индексируемых в базе Scopus.

Новизна и практическая значимость результатов проведенных исследований. Все результаты, представленные в работе, являются новыми.

1. Получены теоремы единственности типа Любича-Леонтьева и Йона-Смита для периодических в среднем функций относительно свертки Бесселя.

2. Получено описание классов функций с нулевыми «сферическими» («шаровыми») средними относительно свертки Бесселя в виде рядов по нормированным функциям Бесселя.

3. Найдены точные характеристики допустимой скорости убывания на бесконечности ненулевых функций из указанных классов. В качестве следствий установлены аналоги известных теорем об инъективности оператора сферического среднего на $\mathbb{R}^n$, принадлежащих Ф. Йону, Д. Смиуту, В.В. Волчкову и С. Тангавелу.

4. Получено уточнение теоремы Б. Сельми и М.М. Несиби о двух радиусах на гипергруппе Бесселя-Кингмана. В некоторых случаях уточняется их теорема о спектральном анализе. Получены различные варианты теоремы о двух радиусах и теорема об одном радиусе для указанных классов.

5. Установлен ряд новых свойств решений задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (теоремы единственности, теоремы о представлении и теоремы об асимптотическом поведении).

6. Получены теоремы о замыкании обобщенных сдвигов Бесселя (в том числе аналоги теорем типа Ж.П. Кахана для обычных сдвигов).

7. Получена теорема единственности для сходящихся последовательностей линейных комбинаций функций Бесселя (ранее известная лишь для целых и полуцелых индексов).

Практическая значимость.

Результаты диссертационной работы относятся к области фундаментальных исследований. Они носят теоретический характер и могут быть использованы при решении различных задач, связанных с периодическими в среднем функциями относительно свертки Бесселя.

Научная специальность, отрасль науки, которой соответствует диссертация. Диссертационное исследование выполнено в области физико-математических наук и соответствует основным направлениям паспорта научной специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, представленным следующими пунктами: 1. Вещественный анализ, локальные и глобальные свойства функций вещественных переменных, их представления и приближения; 2. Метрическая теория функций, в которой на основе понятий меры и интеграла исследуются свойства функций и их производных, изучаются функциональные (в т. ч. ортогональные) ряды и их приложения; 3. Теория функциональных пространств; исследования классов функций, возникающих в математике и ее приложениях; 4. Теория приближения функций; 9. Функциональный анализ, отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы); 10. Теория векторных пространств, геометрия нормированных пространств, интегрирование и меры в функциональных пространствах, интегральные представления и преобразования; 11. Теория операторов, в т. ч. теория дифференциальных операторов; 17. Теория обобщенных функций.

Полнота изложения материалов диссертации в работах, опубликованных соискателем ученой степени.

Материалы диссертации Краснощёких Г.В. опубликованы в 19 работах, в том числе в 7 статьях в журналах, входящих в перечень рецензируемых изданий, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, и 12 публикациях в материалах международных и всероссийских конференций, что соответствует требованиям п.п. 11, 13 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Правительством Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842.

В изданиях, рекомендованных ВАК Минобрнауки России:

1. Волчков, Вит.В. Уточнение теоремы о двух радиусах на гипергруппе Бесселя-Кингмана / Вит.В. Волчков, Г.В. Краснощёких // Математические заметки. – 2024. – Т. 116, вып. 2. – С. 212-228. – DOI: 10.4213/mzml4184. (поддерживает 1.1.1., уровень «Белого списка» У2)
2. Волчков, Вит.В. О нулях периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя / Вит.В. Волчков, Г.В. Краснощёких // Чебышевский сборник. – 2024. – Т. 25, вып. 5. – С. 57-73. – DOI: 10.22405/2226-8383-2024-25-5-57-73. (поддерживает 1.1.1., уровень «Белого списка» У3)
3. Krasnoschekikh, G.V. A uniqueness theorem for mean periodic functions on the Bessel-Kingmann hypergroup / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics. – 2025. – Vol. 25, iss. 1. – P. 24-33. – DOI: 10.18500/1816-9791-2025-25-1-24-33. (поддерживает 1.1.1., уровень «Белого списка» У1, категория ВАК К1)
4. Krasnoschekikh, G.V. The one radius theorem for the Bessel convolution operator and its applications / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // Владикавказский математический журнал. – 2025. – Т. 27, № 2. – С. 24-33. – DOI: 10.46698/e5897-8783-0193-0. (поддерживает 1.1.1., уровень «Белого списка» У2)
5. Краснощёких, Г.В. Единственность и представление решений обобщенного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу / Г.В. Краснощёких, Вит.В. Волчков // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2025. – № 6. – С. 57-72. – DOI: 10.26907/0021-3446-2025-6-57-72. (поддерживает 1.1.1., уровень «Белого списка» У2, категория ВАК К1)
6. Краснощёких, Г.В. Шаровые средние относительно свёртки Бесселя и их применение / Г.В. Краснощёких, Вит.В. Волчков // Математические труды. – 2025. – Т. 35, № 2. – С. 93-107. – DOI: 10.25205/1560-750X-2025-28-2-62-86. (поддерживает 1.1.1., уровень «Белого списка» У2)
7. Волчков, Вит.В. Асимптотические свойства периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя / Вит.В. Волчков, Г.В. Краснощёких // Математические заметки. – 2025. – Т. 118, вып. 2. – С. 206-220. – DOI: 10.4213/mzml4380. (поддерживает 1.1.1., уровень «Белого списка» У1)

В прочих изданиях:

1. Krasnoschekikh, G.V. An analogue of the John uniqueness theorem on the Bessel-Kingmann hypergroup / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // Донецкие чтения 2023: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы VIII Международной научной конференции (Донецк, 25-27 октября 2023). – Том 1. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2023. – С. 104.
2. Krasnoschekikh, G.V. Spherical means on the Bessel-Kingmann hypergroups / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // Спектральная теория операторов и смежные вопросы: материалы Международной научно-

практической конференции, посвященной 75-летию Я. Т. Султанаева (Уфа, 26-27 октября 2023). – Уфа: Изд-во БГПУ, 2023. – С. 16.

3. Краснощёких, Г.В. Теорема о двух радиусах для периодических в среднем функций относительно свёртки Ганкеля / Г. В. Краснощёких, Вит. В. Волчков // Материалы Международной научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов-2024»: секция «Вычислительная математика и кибернетика» (Москва, 12-26 апреля 2024). – Москва: МГУ имени М.В. Ломоносова, 2024. – С. 81.

4. Krasnoschekikh, G.V. Functions with sign-constant “spherical means” with respect to the Bessel convolution / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // International Online Conference “One-Parameter Semigroups of Operators 2024: Stochastics and Dynamics” (Quebec, 3th-7th June 2024). – P. 73.

5. Краснощёких, Г.В. Периодические в среднем функции относительно свёртки Бесселя / Г.В. Краснощёких, Вит.В. Волчков // Сборник материалов XIX Владикавказской молодежной математической школы (Владикавказ, 24-28 июня 2024). – Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2024. – С. 50-51.

6. Krasnoschekikh, G.V. The ∞ -radii theorem on the Bessel-Kingmann hypergroup / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2024 (XXXV Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам) (Кача (Севастополь), 7-16 сентября 2024). – Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2024. – С. 73-75.

7. Krasnoschekikh, G.V. Characterization of spherical functions on the Bessel-Kingmann hypergroup / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // XXIIInd Hyper Complex Seminar 2024 (Lodz, 14th-18th September 2024). – P. 42.

8. Krasnoschekikh, G.V. Asymptotic properties of solutions to the generalized Euler-Poisson-Darboux equation / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // Донецкие чтения 2024: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы IX Международной научной конференции (Донецк, 15-17 октября 2024). – Том 1. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2024. – С. 94.

9. Krasnoschekikh, G.V. Quasi-analytic properties of mean-periodic functions with respect to the Bessel convolution / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchkov // Сборник материалов Международной конференции «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (Уфа, 17-21 марта 2025). – Уфа: Аэтерна, 2025. – С. 26-27.

10. Краснощёких, Г.В. Теоремы типа Лиувилля для периодических в среднем функций относительно свёртки Бесселя и их применение / Г.В. Краснощёких, Вит.В. Волчков // Сборник трудов XVII Международной Казанской школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные

вопросы» (Казань, 23-28 августа 2025). – Казань: КФУ, 2025. – Т. 69. – С. 101-102.

11. Краснощёких, Г.В. Проблемы инъективности оператора сферического среднего, ассоциированного со сверткой Бесселя / Г.В. Краснощёких, Вит.В. Волчков // Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2025 (XXXVI Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум Н.Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам) (Кача (Севастополь), 7-14 сентября 2025). – Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2025. – С. 73-74.

12. Krasnoschekikh, G.V. Uniqueness theorems for classes of functions with zero spherical means with respect to the Bessel convolution / G.V. Krasnoschekikh, Vit.V. Volchikov // Донецкие чтения 2025: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности: Материалы X Международной научной конференции (Донецк, 5-7 ноября 2025). – Том 1. – Донецк: Изд-во ДонГУ, 2025. – С. 98-100.

В публикациях соискателя в полном объеме отражены основные результаты диссертационной работы и выводы. Сведения об опубликованных работах достоверны. Личный вклад соискателя в опубликованных в соавторстве работах составляет не менее 80%.

Ценность научных работ соискателя заключается в том, что решённые в диссертации задачи являются закономерным продолжением фундаментальных исследований в области гармонического анализа, теории свёртки Бесселя и интегральной геометрии. Результаты диссертации могут найти применение в теории сингулярных дифференциальных уравнений, теории аппроксимации, а также при решении различных задач, связанных с периодическими в среднем функциями относительно свертки Бесселя.

Материалы диссертации были доложены и обсуждены на научном семинаре «Гармонический анализ и интегральная геометрия» в ФГБОУ ВО «Донецкий государственный университет» (руководитель – профессор Вит.В. Волчков) в 2024-2025 гг., а также на ряде международных конференций, в том числе: «Донецкие чтения: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности» (Донецк, 2023-2025), «Спектральная теория операторов и смежные вопросы» (Уфа, 2023), «Ломоносов-2024» (Москва, 2024), «One-Parameter Semigroups of Operators 2024: Stochastics & Dynamics» (Квебек, 2024), «XIX Владикавказская молодёжная математическая школа» (Владикавказ, 2024), «Крымская осенняя математическая школа-симпозиум Н.Д. Копачевского» (Севастополь, 2024-2025), «XXII Ind Hyper Complex Seminar 2024» (Лодзь, 2024), «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (Уфа, 2025), XVII Международная Казанская школа-конференция «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, 2025).

Общее заключение.

Диссертация «Классы функций с нулевыми сферическими средними относительно свёртки Бесселя и их применение» Краснощёких Глеба Витальевича рекомендуется к защите на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, так как соответствует требованиям п.п. 9-11, 13, 14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного Правительством Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук.

Присутствовало на заседании 7 человек, в том числе 2 доктора наук и 5 кандидатов наук. Результаты голосования: «за» – 7 человек, «против» – нет, «воздержались» – нет (протокол заседания кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений № 6 от 22.01.2026 г.).

Заведующий кафедрой
математического анализа и
дифференциальных уравнений
доктор физико-математических наук, профессор



Волчков Виталий Владимирович

ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ НИЧ

 М.В. ФОМЕНКО

20.03.2026

