«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научной деятельности ФГБОУ ВО «СОГУ имени Коста Левановича Хетагурова», доктор экономических наук, профессор
_______________ Тиникашвили Т.Ш.
«11» ________ 2025 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации о научно-практической ценности диссертационной работы
Рыхлова Виктора Сергеевича
на тему «Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций»,
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа Рыхлова В.С. посвящена изучению ряда важных задач спектральной теории несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторов и оператор-функций. Вопросы спектральной теории, изучаемые в диссертации касаются асимптотики по спектральному параметру решений дифференциального уравнения общего вида и фундаментальной матрицы решений общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, равномерной равносходимости разложений в ряды по с.п.ф. обыкновенного дифференциального оператора n-го порядка с ненулевым коэффициентом при n-1-й производной в случае регулярных по Биркгофу краевых условий и в обычный тригонометрический ряд Фурье, оценок разности частичных сумм этих разложений в зависимости от свойств разлагаемой функции и коэффициента при n-1-й производной, кратной полноты в пространстве суммируемых с квадратом функций системы с.п.ф. некоторых классов обыкновенных дифференциальных полиномиальных операторных пучков с постоянными коэффициентами в сильно нерегулярных случаях. Автору удалось найти новые подходы к исследованию таких задач и получить результаты, вносящие существенный вклад в спектральную теорию дифференциальных операторов и оператор-функций

Актуальность темы диссертации

Спектральная теория несамосопряженных дифференциальных операторов и оператор-функций является одним из важнейших разделов спектральной теории линейных операторов. Основы этой теории были заложены ещё в начале XX такими математиками, как В.А. Стеклов, У.Э. Гобсон, А. Хаар, Дж. Биркгоф, Я.Д. Тамаркин, М. Стоун. В 1951 году принципиальные результаты в этой теории получил М.В. Келдыш. Дальнейшее развитие указанной теории связано с результатами В.А. Ильина, А.Г. Костюченко, М.Л. Расулова, А.П. Хромова, В. Эберхарда, В.А.

Садовничего, П. Джакова, Б.С. Митягина, В.П. Михайлова, Г.М. Кесельмана, Г.В. Радзиевского, Н.Д. Копачевского. В настоящее время спектральная теория дифференциальных операторов продолжает интенсивно развиваться в России и за рубежом, поскольку имеет много физических приложений и тесные взаимосвязи с рядом фундаментальных разделов математики. Из недавних результатов отметим результаты А.А. Шкаликова, В.А. Юрко, Я.Т. Султанаева, А.Г. Баскакова, А.Л. Скубачевского, К.А. Мирзоева, И.С. Ломова, В.В. Власова, А.М. Савчука, И.В. Садовничей, С.М. Ситника, М.Ш. Бурлуцкой и многих других.

Все вышеперечисленное обуславливает актуальность тематики диссертационной работы.

Научная новизна и достоверность диссертационного исследования

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, приложения и списка литературы. Общий объём диссертации 295 страниц, из них 266 страница текста. Список литературы включает 207 наименований на 24 страницах.

В первой главе диссертации решается задача построения асимптотических формул для решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка общего вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = \lambda y, \quad x \in [a,b],$$

с комплексным параметром λ и общей линейной дифференциальной системы 1-го порядка со спектральным параметром

$$Y' - A(x,\lambda)Y = 0,$$

где $A(x,\lambda)$ есть $n \times n$ матрица-функции, при стремлении параметра λ к бесконечности, где

$$A(x,\lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x) + \tfrac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda).$$

Такие асимптотические формулы играют важную роль при исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов и оператор-функций. В случае недостаточно гладких главных коэффициентов в дифференциальном уравнении классические методы получения асимптотических формул сталкиваются с большими трудностями. Рыхлову В.С. удалось преодолеть эти трудности путём нетривиального сведения обыкновенного дифференциального уравнения к соответствующему квазидифференциальному уравнению, у которого сумма главных коэффициентов равна нулю. Это и позволило в итоге преодолеть трудности классического подхода в случае недостаточно гладких главных коэффициентов дифференциального уравнения и получить новую оценку остаточного члена при наименьших требованиях на главные коэффициенты, учитывающую свойства этих коэффициентов. Аналогичная идея была реализована при получении асимптотики фундаментальной матрицы решений при достаточно больших по модулю значений спектрального параметра в случае общей линейной дифференциальной системы 1-го порядка. Была также получена новая оценка остаточного члена при наименьших требованиях на элементы главных матриц. Полученные результаты дополняют и углубляют известные результаты Дж. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна, Р.Э. Лангера, И.М. Рапопорта, М.Л. Расулова и др.

Во второй главе диссертации рассматривается дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальным выражением n-го порядка

$$l(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y, \quad p_j(x) \in L_1[0,1],$$

с негладким коэффициентом при $n-1$-й производной и регулярными по Биркгофу двухточечными краевым условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(a_{kj} y^{(j)}(0) + b_{kj} y^{(j)}(1) \right) = 0, \quad k = \overline{1,n}.$$

Задача о разложении заданной функции в ряд по с.п.ф. оператора L является одной из основных задач, возникающих при рассмотрении таких операторов. Наиболее полно эта задача решается в случае, когда удается доказать равносходимость (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по с.п.ф. оператора L и по тригонометрической системе, так как тригонометрическая система достаточно хорошо изучена. В диссертации Рыхлова В.С. исследуется вопрос о равномерной равносходимости на любом компакте основного интервала разложений заданной функции в ряд по с.п.ф. этого оператора и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также о равномерной оценке на любом компакте основного интервала разности соответствующих частичных сумм или, как еще говорят, скорости равносходимости. Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой активно развивающееся направление математики, начало которому было положено В.А. Стекловым, У.Э. Гобсоном, А. Хааром, Я.Д. Тамаркиным, М. Стоуном и продолжено В.А. Ильиным, В.А. Садовничим, П. Джаковым, Б.С. Митягиным, А.П. Хромовым, А.М. Минкиным, И.В. Садовничей, М.Ш. Бурлуцкой и др. Рыхлов В.С. получил новые оценки разности частичных сумм спектральных разложений в терминах общих модулей непрерывности разлагаемой функции и коэффициента при $n-1$-й производной. Эти оценки позволили найти достаточные условия равносходимости в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися и, в частности, логарифмическими функциями. Автором впервые установлена тесная связь между множеством функций, для которых имеет место равносходимость, и свойствами коэффициента при $n-1$-й производной. Это весьма глубокий и нетривиальный результат. Существенную роль при этом сыграли асимптотические формулы для решений дифференциальных уравнений с параметром, полученные Рыхловым В.С. в первой главе, а также доказанные автором аналоги классической теоремы Штейнгауза для обычных тригонометрических рядов в терминах общих модулей непрерывности и их оценок сверху медленно меняющимися функциями.

В третьей главе диссертации исследуется кратная полнота в пространстве суммируемых с квадратом функций системы с.п.ф. некоторых классов сильно нерегулярных полиномиальных дифференциальных оператор-функций $L(\lambda)$ или по-другому пучков, порождённых однородным дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \qquad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0,$$

и общими двухточечными краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda) y^{(j)}(1) = 0\,, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, а $\alpha_{ij}(\lambda)$ и $\beta_{ij}(\lambda)$ – произвольные полиномы по λ с комплексными коэффициентами. Основополагающие результаты в этом направлении были получены М.В. Келдышем. Исследованиями кратной полноты системы с.п.ф. различных классов дифференциальных оператор-функций занимались впоследствии такие математики, как А.А. Шкаликов, А.П. Хромов, В. Эберхард, Г. Фрайлинг, С.А. Тихомиров, М.Г. Гасымов, А.М. Магеррамов, А.И. Вагабов и др. Но есть классы полиномиальных дифференциальных оператор-функций с постоянными коэффициентами, для которых стандартные методы рассуждений не позволяют установить кратную полноту системы их с.п.ф. Рыхловым В.С. предложен новый подход к исследованию кратной полноты таких оператор-функций, основанный на использовании введённых им так называемых обобщённых порождающих функций, с помощью которого удалось продвинуться в этом направлении и получить ряд глубоких и нетривиальных результатов. Рыхловым В.С. была исследована m-кратная полнота при $1 \le m \le n$ в пространстве суммируемых с квадратом функций системы с.п.ф. дифференциальных сильно нерегулярных полиномиальных оператор-функций n-го порядка $L(\lambda)$ в случае однородного дифференциального выражения с постоянными коэффициентами и произвольными двухточечными краевыми условиями, то есть в тех случаях, для которых стандартные методы доказательства не проходят.

Таким образом, в диссертационной работе получены новые принципиальные результаты, вносящие важный вклад в спектральную теорию дифференциальных операторов и дифференциальных оператор-функций.

Не вызывает сомнения, что результаты диссертации получены автором лично. Рыхлов В.С. многократно выступал с докладами по своим результатам на научных семинарах под руководством российских и зарубежных специалистов по спектральной теории операторов и функциональному анализу, на международных научных конференциях.

Достоверность результатов диссертации подтверждена строгими математическими доказательствами.

Результаты диссертации обладают несомненной научной новизной. Автором диссертации разработаны новые методы и подходы, при помощи которых получен ряд новых научных результатов при исследовании спектральных свойств различных классов обыкновенных дифференциальных операторов и оператор-функций.

Значимость полученных в диссертации результатов

На основании изложенного выше, совокупность результатов диссертационного исследования, выполненного соискателем В.С. Рыхловым, можно оценить как *принципиальное научное достижение*, вносящее значительный вклад в развитие спектральной теории дифференциальных операторов и оператор-функций.

Научная и практическая ценность диссертации, конкретные рекомендации по использованию результатов и выводов

Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в спектральной теории дифференциальных операторов и оператор-функций и ее приложениях, а также при построении математических моделей различных прикладных задач. Разработанные подходы могут быть обобщены на другие классы операторов и оператор-функций: операторы, порожденные более общими дифференциальными выражениями, оператор-функции с кратными характеристиками, с многоточечными краевыми условиями, на графах, с коэффициентами-распределениями и др. Результаты работы носят достаточно общий характер и могут найти применение при обосновании метода Фурье решения задач математической физики, при исследовании задач теории упругости, квантовой механики и других задач, приводящих к изучению несамосопряжённых операторов. Результаты диссертационной работы могут быть интересны специалистам, работающим в СГУ им. Н.Г. Чернышевского, МГУ им. М.В. Ломоносова, СПбГУ, ВГУ, СОГУ им. К.Л. Хетагурова, МИАН им. В.А. Стеклова и других высших учебных заведениях и научных центрах. Результаты диссертации могут составить содержание спецкурсов по спектральной теории дифференциальных операторов и оператор-функций для студентов и аспирантов математических и физических специальностей университетов.

Замечания по диссертационной работе

Диссертационная работа Рыхлова В.С. хорошо оформлена. Изложение иллюстрируется рисунками. Определения и полученные результаты иллюстрируются многочисленными примерами, что способствует лучшему понимаю излагаемой теории. Но есть несколько замечаний:

1. Во Введении используется термин «дефект» системы вектор-функций, а определение этого понятия дается только на стр. 138, что затрудняет понимание текста. Хотя этот термин конечно же вполне понятен большинству математиков, занимающихся вопросам полноты систем функций или вектор-функций.
2. На стр. 16 в последнем абзаце и далее в тексте диссертации используется без пояснения термин «полураспадающиеся краевые условия», а пояснение дается только на стр. 183.
3. На протяжении второй и третьей глав диссертации используется два термина «собственные и присоединенные функции» и «корневые функции» для одного и того же понятия. Было бы более логичным использовать какой-то один термин.
4. На протяжении всей диссертации используется термин «дифференциальная оператор-функция», хотя в статьях по этой теме часто используется термин «обыкновенный дифференциальный пучок» или «пучок дифференциальных операторов».
5. В диссертации много цветных рисунков, которые поясняются в тексте диссертации. Но пояснение дается, как если бы рисунки были черно-белыми. Пояснения были бы более понятными, если бы учитывался цвет линий.
6. На стр. 261 в 4-й строке сверху написано: «зануляются еще дополнительно десять коэффициентов», но никаких вычислений не приводится. Наверное, стоило хотя бы немного пояснить этот момент.

Указанные замечания не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Общая оценка диссертационной работы

Диссертация представляет собой законченное и целостное научное исследование. Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Работа носит теоретический характер. Автором диссертации разработаны новые методы и подходы, при помощи которых получен ряд новых научных результатов при исследовании спектральных свойств различных классов обыкновенных дифференциальных операторов и оператор-функций. Эти результаты являются достоверными и математически строго доказаны. Они достаточно полно опубликованы в центральных российских и зарубежных изданиях. По теме диссертации опубликовано 26 работ, из которых 21 работа опубликована в изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI и включённых в Перечень ВАК РФ. Результаты диссертации апробированы на многочисленных российских и международных конференциях и научных семинарах.

Диссертация Рыхлова В.С. соответствует паспорту специальности 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ», направления исследований «теория дифференциальных операторов, функциональный анализ, вещественный анализ, представление функций вещественной переменной, теория приближения функций». Работа представляет собой законченное и целостное научное исследование, и Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Рыхлова В.С. «Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций», является законченной научно-квалификационно работой, выполненной на высоком уровне и полностью соответствующей требованиям новизны, научно-практической значимости и достоверности, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук в соответствии с пунктами 9-11,13,14 действующего «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842, а её автор – Рыхлов Виктор Сергеевич, несомненно, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Отзыв обсужден и утвержден на заседании кафедры алгебры и анализа, протокол № от 10.06.2025 г.

Заключение составлено:
Кулаев Руслан Черменович,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.02. Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление),
декан факультета математики и компьютерных наук
ФГБОУ ВО «СОГУ имени Коста Левановича Хетагурова»
Адрес: 362025, Республика Северная Осетия-Алания,

Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
e-mail: r.ch.kulaev@yandex.ru
Телефон: +7 (918) 828-66-42

Подпись, дата: 11.06.25г. Р.Ч. Кулаев

Тотиева Жанна Дмитриевна,
доктор физико-математических наук
(специальность 1.1.2. Дифференциальные уравнения
и математическая физика),
профессор кафедры кафедры алгебры и анализа
ФГБОУ ВО «СОГУ имени Коста Левановича Хетагурова»
Адрес: 362025, Республика Северная Осетия-Алания,
Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
e-mail: jannatuaeva@inbox.ru
Телефон: +7 (918) 825-70-43

Подпись, дата: 11.06.25г. Ж.Д. Тотиева

Подписи Р.Ч. Кулаева и Ж.Д. Тотиевой
«УДОСТОВЕРЯЮ»
Ученый секретарь ФГБОУ ВО «СОГУ» Ф.А. Кокаева

Сведения о ведущей организации:
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Северо-Осетинский государственный университет имени Коста Левановича Хетагурова»
Адрес: 362025, Россия, Республика Северная Осетия-Алания, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
Адрес электронной почты: nosu@nosu.ru
Телефон/факс: +7 (8672) 33-33-73, доб. 119, 120
Официальный сайт: www.nosu.ru