ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

на диссертационную работу Рыхлова Виктора Сергеевича «Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» в диссертационный совет 24.2.392.08 на базе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Актуальность темы диссертационного исследования

Диссертационная работа В.С. Рыхлова посвящена ряду актуальных задач спектральной теории несамосопряжённых обыкновенных дифференциальных операторов. Вопросы спектральной теории, изучаемые в диссертационной работе В.С. Рыхлова касаются асимптотики по спектральному параметру решений дифференциального уравнения общего вида и фундаментальной матрицы решений общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, равномерной равносходимости разложений в ряды по с.п.ф. обыкновенного дифференциального оператора n-го порядка с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной в случае регулярных по Биркгофу краевых условий и в обычный тригонометрический ряд Фурье, оценок разности частичных сумм этих разложений в зависимости от свойств разлагаемой функции и коэффициента при $n-1$-й производной, кратной полноты в пространстве суммируемых с квадратом функций системы с.п.ф. некоторых классов обыкновенных дифференциальных полиномиальных операторных пучков с постоянными коэффициентами в сильно нерегулярных случаях.

Основы этой теории были заложены ещё в начале XX такими математиками, как В.А. Стеклов, У.Э. Гобсон, А. Хаар, Дж. Биркгоф, Я.Д. Тамаркин, М. Стоун. В 1951 году принципиальные результаты в этой теории получил М.В. Келдыш. Дальнейшее развитие указанной теории связано с результатами В.А. Ильина, А.Г. Костюченко, М.Л. Расулова, А.П. Хромова, В. Эберхарда, В.А. Садовничего, П. Джакова, Б.С. Митягина, В.П. Михайлова, Г.М. Кессельмана, Г.В. Радзиевского, Н.Д. Копачевского. В настоящее время спектральная теория дифференциальных операторов продолжает интенсивно развиваться в России и за рубежом, поскольку имеет много физических приложений и тесные взаимосвязи с рядом фундаментальных разделов математики. Из недавних результатов отметим здесь результаты таких математиков, как А.А. Шкаликов, В.А. Юрко, Я.Т. Султанаев, А.Г. Баскаков, А.Л. Скубачевский, К.А. Мирзоев, И.С. Ломов, В.В. Власов, А.М. Савчук, И.В. Садовничая, С.М. Ситник, М.Ш. Бурлуцкая и многих других.

Таким образом, тематика диссертационного исследования, безусловно, представляют значительный научный интерес.

Структура и содержание работы, научная новизна и достоверность диссертационного исследования

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, приложения и списка литературы. Общий объём диссертации 295 страниц, из них 266 страница текста. Список литературы включает 207 наименований на 24 страницах.

В **Главе 1** диссертации решается задача построения асимптотических при $\lambda \longrightarrow \infty$ формул для решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка общего вида с параметром $\lambda \in \mathbb{C}$

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = \lambda y, \quad x \in [a, b],$$

где $a_j \in L_1[a, b]$ $(j = 1, \ldots, n)$, $a_0(x)$ — абсолютно непрерывная функция, не обращающаяся в нуль на $[a, b]$, и общей линейной дифференциальной системы 1-го порядка со спектральным параметром $\lambda \in \mathbb{C}$

$$Y' - A(x, \lambda)Y = 0, \quad x \in [a, b],$$

где $A(x, \lambda)$, $Y = Y(x)$ есть $n \times n$ матрицы-функции,

$$A(x, \lambda) := \lambda A_1(x) + A_0(x) + \lambda^{-1}A_{-1}(x),$$

компоненты матрицы $A_1(x)$ абсолютно непрерывны, компоненты матрицы $A_0(x)$ суммируемы, нормы компонент матрицы $A_{-1}(x)$ в пространстве $L_1[a, b]$ ограничены по λ при $\lambda \longrightarrow \infty$.

Такие асимптотические формулы играют важную роль при исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов и пучков дифференциальных операторов. В случае недостаточно гладких главных коэффициентов классические методы получения асимптотических формул сталкиваются с большими трудностями. В.С. Рыхлову удалось преодолеть эти трудности путём нетривиального сведения обыкновенного дифференциального уравнения к соответствующему квазидифференциальному уравнению, у которого сумма главных коэффициентов равна нулю. Это и позволило в итоге преодолеть трудности классического подхода в случае недостаточно гладких главных коэффициентов и получить оценку остаточного члена при наименьших требованиях на главные коэффициенты, учитывающую свойства этих коэффициентов. Аналогичная идея была реализована при получении асимптотики фундаментальной матрицы решений при достаточно больших по модулю значений спектрального параметра в случае общей линейной дифференциальной системы 1-го порядка. Полученные результаты дополняют и углубляют известные результаты Дж. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна, Р.Э. Лангера, И.М. Рапопорта, М.Л. Расулова и др.

В **Главе 2** диссертации рассматривается дифференциальный оператор $\mathscr{L}$, порождённый дифференциальным выражением n-го порядка

$$\ell(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y, \quad x \in [0, 1],$$

$p_j \in L_1[0, 1]$ $(j = 1, \ldots, n)$ с ненулевым коэффициентом при $n-1$-й производной и регулярными по Биркгофу двухточечными краевым условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Big(a_{ij}y^{(j)}(0) + b_{ij}y^{(j)}(1)\Big) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Задача о разложении заданной функции в ряд по корневым функциям оператора $\mathscr{L}$ является одной из основных задач, возникающих при рассмотрении таких операторов. Наиболее полно эта задача решается в случае, когда удается доказать равносходимость (в том или ином смысле) разложений заданной функции в ряды по корневым функциям оператора $\mathscr{L}$ и по тригонометрической системе, так как тригонометрическая система достаточно хорошо изучена. В диссертации В.С. Рыхлова исследуется вопрос о равномерной равносходимости на любом компакте основного интервала разложений заданной функции в ряд по корневым функциям этого оператора и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также о равномерной оценке на любом компакте основного интервала разности соответствующих частичных сумм. Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой активно развивающееся направление математики, начало которому было положено В.А. Стекловым, У.Э. Гобсоном, А. Хааром, Я.Д. Тамаркиным, М. Стоуном и продолжено В.А. Ильиным, В.А. Садовничим, П. Джаковым, Б.С. Митягиным и др. В.С. Рыхлов получил новые оценки разности частичных сумм спектральных разложений в терминах общих модулей непрерывности. Эти оценки позволили найти достаточные условия равносходимости в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися и, в частности, логарифмическими функциями. Автором впервые установлена тесная связь между множеством функций, для которых имеет место равносходимость, и свойствами коэффициента при $n-1$-й производной. Это весьма глубокий и нетривиальный результат. Существенную роль при этом сыграли асимптотические формулы для решений дифференциальных уравнений с параметром, полученные В.С. Рыхловым в **Главе 1**, а также доказанные автором аналоги классической теоремы Штейнгауза для обычных тригонометрических рядов в терминах общих модулей непрерывности и их оценок сверху медленно меняющимися функциями.

В **Главе 3** диссертации исследуется кратная полнота в пространстве суммируемых с квадратом функций системы корневых функций некоторых классов сильно нерегулярных полиномиальных дифференциальных пучков $\mathscr{L}(\lambda)$, порождённых однородным дифференциальным выражением

$$\ell(y, \lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0,$$

и краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Big(\alpha_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1)\Big) = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, а $\alpha_{ij}(\lambda)$ и $\beta_{ij}(\lambda)$ — произвольные полиномы по λ с комплексными коэффициентами. Этот вопрос возникает при решении методом Фурье начально-граничных задач для соответствующих уравнений в частных производных. Основополагающие результаты в этом направлении были получены М.В. Келдышем. Исследованиями кратной полноты системы с.п.ф. различных классов дифференциальных оператор-функций занимались впоследствии такие математики, как А.А. Шкаликов, А.П. Хромов, В. Эберхард, Г. Фрайлинг, С.А. Тихомиров, М.Г. Гасымов, А.М. Магеррамов, А.И. Вагабов и др. Но есть классы полиномиальных дифференциальных пучков с постоянными коэффициентами, для которых стандартные методы рассуждений не позволяют установить кратную полноту системы их корневых функций. В.С. Рыхловым предложен новый метод исследования кратной полноты таких пучков, основанный на использовании введённых им так называемых обобщённых порождающих функций. С помощью этого метода удалось продвинуться в этом направлении и получить ряд глубоких и нетривиальных результатов. В.С. Рыхловым была исследована m-кратная полнота при $1 \leqslant m \leqslant n$ в пространстве суммируемых с квадратом функций системы корневых функций дифференциальных сильно нерегулярных полиномиальных пучков n-го порядка в случае однородного дифференциального выражения с постоянными коэффициентами и произвольными краевыми условиями, то есть в тех случаях, для которых стандартные методы доказательства не проходят.

Таким образом, в диссертационной работе получены новые принципиальные результаты, вносящие важный вклад в спектральную теорию дифференциальных операторов и пучков дифференциальных операторов. Результаты диссертации обладают несомненной научной новизной, а сама диссертация представляет собой законченное и целостное научное исследование, совокупность результатов которого можно оценить как значительное научное достижение.

В.С. Рыхлов многократно выступал с докладами по своим результатам на научных семинарах под руководством российских и зарубежных специалистов по спектральной теории операторов и функциональному анализу, на международных научных конференциях. Нет никаких сомнений, что результаты диссертации получены автором лично.

Достоверность результатов диссертации подтверждена строгими математическими доказательствами.

Замечания и вопросы по диссертационной работе

1) Равносходимость во второй главе исследовалась только на компактах внутри основного интервала. Что можно сказать о равносходимости на всём основном отрезке?

2) В третьей главе исследуется кратная полнота систем корневых функций обыкновенных дифференциальных оператор-функций, порождённых только однородными дифференциальными выражениями вида

$$\ell(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}.$$

Применимы ли разработанные методы не только к этому случаю, а и к случаю более общего неоднородного дифференциального выражения? Получатся ли результаты для дифференциальных выражений с переменными коэффициентами?

3) Стр. 70, строка 7 снизу — вместо «Так как $s \to \infty$ при $|\lambda| \to \infty$» должно быть, видимо, «Так как $s \to \infty$ и $s^2|\lambda|^{-1} \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$».

4) Стр. 152 — термин «дискретный оператор» использован только в тексте доказательства леммы 3.20 и никак не поясняется, за исключением отсылки к монографии [77]. Можно было бы описать ситуацию общепринятыми понятиями.

5) В диссертации имеются описки, которые, впрочем, не влияют на понимание текста.

Указанные замечания никак не умаляют значимости диссертационного исследования и не меняют общей положительной оценки работы.

Заключительная оценка диссертационной работы

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Работа носит теоретический характер. Автором диссертации разработаны новые методы и подходы, при помощи которых получен ряд новых научных результатов при исследовании спектральных свойств различных классов обыкновенных дифференциальных операторов и оператор-функций. Методы и результаты исследования могут найти применение при обосновании метода Фурье решения задач математической физики, при исследовании задач теории упругости, квантовой механики и других задач, приводящих к изучению несамосопряжённых операторов. Эти результаты являются достоверными и математически строго доказаны. Они достаточно полно опубликованы в центральных российских и зарубежных изданиях. По теме диссертации опубликовано 26 работ, из которых 21 работа опубликована в изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI и включённых в Перечень ВАК РФ. Результаты диссертации апробированы на многочисленных российских и международных конференциях и научных семинарах.

Диссертация В.С. Рыхлова соответствует паспорту специальности 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по следующим направлениям исследований:

1. Вещественный анализ, локальные и глобальные свойства функций вещественных переменных, их представления и приближения.

4. Теория приближения функций.

9. Функциональный анализ, отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы).

11. Теория операторов, в т.ч. теория дифференциальных операторов.

Работа представляет собой законченное и целостное научное исследование. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа В.С. Рыхлова «Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций», является законченной научно-квалификационно работой, выполненной на высоком уровне и полностью соответствующей требованиям новизны, научно-практической значимости и достоверности, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени доктора физико-математических наук в соответствии с пунктами 9–11, 13, 14 действующего «Положения о присуждении учёных степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. № 842, а её автор — Рыхлов Виктор Сергеевич, несомненно, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук,
доцент, заведующий кафедрой математического анализа Физико-технического института Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»
ЗАКОРА Дмитрий Александрович,

________________________ 29 июля 2025 г.

Контактные данные:

тел.: +7 (3652) 60-80-70, e-mail: dmitry.zakora@cfuv.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена диссертация: 01.01.02. — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Адрес места работы:

295007, Российская Федерация, Республика Крым, г. Симферополь,
проспект Академика Вернадского, 4, главный корпус «А»,
Физико-технический институт ФГАОУ ВО «Крымский федеральный университет имени В.И. Вернадского»,
тел.: +7 (3652) 60-80-70, e-mail: phystech@cfuv.ru

Подпись сотрудника Физико-технического института
ФГАОУ ВО «КФУ им. В.И. Вернадского»
Д.А. Закоры удостоверяю:
Проректор по научной деятельности «КФУ им. В.И. Вернадского»
д.т.н., профессор Н.В. Любомирский

________________________ 29 июля 2025 г.