ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу В.С. Рыхлова «Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность темы диссертации

В диссертационной работе Рыхлова В.С. исследуются некоторые вопросы спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов. Очень много задач математики, механики, физики и техники приводят к необходимости исследования различных спектральных свойств дифференциальных операторов. Вопросы спектральной теории, которые исследуются в диссертации, касаются асимптотики по спектральному параметру решений дифференциальных уравнений общего вида, а также решений общих систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, равномерную равносходимость разложений в ряды по собственным и присоединенным функциям дифференциального оператора n-го порядка с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной в случае регулярных краевых условий и в обычный тригонометрический ряд Фурье, оценку разности частичных сумм этих разложений или, по-другому, скорости равносходимости в зависимости от свойств разлагаемой функции и коэффициента при $(n-1)$-й производной, кратную полноту в пространстве суммируемых с квадратом функций системы собственных и присоединенных функций некоторых классов обыкновенных дифференциальных полиномиальных оператор-функций или, по-другому, пучков дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в случаях, когда они сильно нерегулярны.

Основополагающие результаты в спектральной теории таких операторов были получены на протяжении XX веке такими известными математиками, как Дж. Биркгоф, В.А. Стеклов, У.Э. Гобсон, А. Хаар, Я.Д. Тамаркин, Д. Джексон, М. Стоун, Р.Э. Лангер, М.В. Келдыш, М.А. Наймарк, М.Г. Крейн, И.Ц. Гохберг, Б.М. Левитан, Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц, В.А. Марченко. В дальнейшем развитие указанной теории связано с результатами В.А. Ильина, А.Г. Костюченко, М.Л. Расулова, А.П. Хромова, В. Эберхарда, В.А. Садовничего, П. Джакова, Б.С. Митягина, В.П. Михайлова, Г.М. Кесельмана, Г.В. Радзиевского. Эта область математики продолжает интенсивно развиваться и в настоящее время. В связи с этим следует отметить значимые работы таких математиков как А.А. Шкаликов, А.Л. Скубачевский, В.А. Юрко, И.С. Ломов, С.М. Ситник, А.Г. Баскаков, Я.Т. Султанаев, К.А. Мирзоев, В.В. Власов, А.М. Савчук, И.В. Садовничая, М.Ш. Бурлуцкая.

Таким образом спектральная теория дифференциальных операторов и оператор-функций имеет богатую историю и активно развивается в настоящее время. Указанные обстоятельства определяют актуальность тематики работы.

Научная новизна и достоверность диссертационного исследования

Диссертационная работа Рыхлова В.С. содержит 295 страниц и состоит из введения, трёх глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы, включающего 207 наименований.

В первой главе диссертации строятся асимптотические формулы для решений линейного дифференциального уравнения n-го порядка общего вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = \lambda y, \quad x \in [a,b],$$

с комплексным параметром λ и общей линейной дифференциальной системы 1-го порядка со спектральным параметром

$$Y' - A(x,\lambda)Y = 0,$$

где $A(x,\lambda)$ есть $n \times n$ матрицы-функции, при стремлении параметра λ к бесконечности.
Здесь

$$A(x,\lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x) + \tfrac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda).$$

Такие асимптотические формулы часто используются при исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов и оператор-функций. Но в случае недостаточно гладких главных коэффициентов классические методы получения асимптотических формул сталкиваются со значительными, порой непреодолимыми трудностями. Автор диссертации В.С. Рыхлов сумел преодолеть эти трудности и получить оценку остаточного члена при наименьших требованиях на главные коэффициенты, учитывающую свойства этих коэффициентов. Аналогичная идея была реализована при получении асимптотики фундаментальной матрицы решений при достаточно больших по модулю значений спектрального параметра в случае общей линейной дифференциальной системы 1-го порядка. Полученные результаты дополняют и углубляют известные результаты Дж. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна, Р.Э. Лангера, М.А. Наймарка, И.М. Рапопорта, М.Л. Расулова, А.И. Вагабова и др.

Во второй главе рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальным выражением n-го порядка

$$l(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y, \quad p_j(x) \in L_1[0,1],$$

с негладким коэффициентом при $(n-1)$-й производной и краевым условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)\right) = 0, \quad k = \overline{1,n},$$

которые предполагаются регулярными по Биркгофу. Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по собственным и присоединённым функциям этого оператора и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также о равномерной оценке разности соответствующих частичных сумм или, как говорят, скорости равносходимости. Начало исследованию равносходимости спектральных разложений было положено в классических работах В.А. Стеклова, У.Э. Гобсона, А. Хаара, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна и продолжено В.А. Ильиным, В.А. Садовничим, П. Джаковым, Б.С. Митягиным, А.М. Минкиным, И.С. Ломовым и др. Рыхлов В.С. получил новые оценки разности частичных сумм спектральных разложений в терминах общих модулей непрерывности коэффициента $p_1(x)$ при $(n-1)$-й производной и разлагаемой функции. На основе этих оценок удалось получить достаточные условия равносходимости в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями и, в частности, логарифмическими функциями, что является важным достижением. Автор диссертации установил тесную связь между множеством функций, для которых имеет место равносходимость, и свойствами коэффициента $p_1(x)$ при $(n-1)$-й производной. Это весьма глубокий и совсем нетривиальный результат. При этом существенную роль в получении оценок разности частичных сумм спектральных разложений и теорем равносходимости сыграли асимптотические формулы для решений дифференциальных уравнений с параметром, которые формулируются и доказываются в первой граве диссертационной работы, а также доказанные автором аналоги классической теоремы Штейнгауза для обычных тригонометрических рядов также в терминах общих модулей непрерывности и их оценок сверху медленно меняющимися функциями.

В третьей главе диссертации рассматриваются некоторые классы нерегулярных дифференциальных оператор-функций $L(\lambda)$, порождённых дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) \coloneqq \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \quad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0,$$

и двухточечными краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) \coloneqq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda) y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, а $\alpha_{ij}(\lambda)$ и $\beta_{ij}(\lambda)$ – произвольные полиномы по λ с комплексными коэффициентами, и исследуется кратная полнота системы их корневых функций в пространстве суммируемых с квадратом функций. В частности, вопрос об n-кратной полноте системы собственных и присоединённых функций возникает при решении методом Фурье начально-граничных задач для соответствующих уравнений в частных производных. Основополагающие результаты по этой теме были получены М.В. Келдышем в известной статье 1951 года. В дальнейшем исследованиями кратной полноты системы собственных и присоединённых функций различных классов дифференциальных оператор-функций занимались многие математики. Здесь следует отметить известные результаты таких математиков, как А.А. Шкаликов, А.П. Хромов, В. Эберхард, Г. Фрайлинг, С.А. Тихомиров, М.Г. Гасымов, А.М. Магеррамов, А.И. Вагабов и др.

Но есть классы полиномиальных дифференциальных оператор-функций с постоянными коэффициентами, для которых стандартные методы рассуждений не позволяют установить кратную полноту системы собственных и присоединённых функций. Рыхловым В.С. предложен оригинальный подход к исследованию кратной полноты системы собственных и присоединённых функций, основанный на использовании введённых им обобщённых порождающих функций. С помощью этого нового подхода удалось исследовать m-кратную полноту при $1 \leq m \leq n$ в пространстве суммируемых с квадратом функций системы собственных и присоединённых функций дифференциальных сильно нерегулярных полиномиальных оператор-функций n-го порядка в случае однородного дифференциального выражения с постоянными коэффициентами и произвольными краевыми условиями, то есть в тех случаях, для которых стандартные методы доказательства не проходят, и получить ряд глубоких и нетривиальных результатов.

Таким образом, в диссертационной работе Рыхлова В.С. получены новые принципиальные результаты, вносящие важный вклад в спектральную теорию дифференциальных операторов и оператор-функций. Все результаты диссертационной работы Рыхлова В.С. являются достоверными и получены с помощью строгих математических доказательств.

Замечания и вопросы по диссертационной работе

1. Некоторые факты, возможно, следовало бы сразу изложить и доказать в более общей форме. Так, например, в первой главе отдельно получена асимптотика системы решений дифференциального уравнения общего вида со спектральным параметром и затем получаются асимптотические формулы для более общей дифференциальной системы первого порядка. Нельзя ли было получить асимптотические формула для дифференциального уравнения как следствие асимптотических формул для более общей дифференциальной системы?
2. В последние годы А.А. Шкаликов и А.П. Косарев получили асимптотические формулы для системы дифференциальных уравнений, аналогичной рассмотренной в диссертации системы уравнений (1.63) на стр. 63. Следовало более подробно рассмотреть вопрос о том, как соотносятся их результаты с результатами диссертации, в частности, с Теоремой 1.9.
3. Имеется несколько случаев использования автором обозначений, сокращений, которые не являются общепризнанными. Сокращения же определяются, но их количество и интенсивное использование, особенно во введении, затрудняет восприятие текста.
4. Текст содержит опечатки. Это затрудняет восприятие текста, хотя это не влияет на корректность изложения и доказательства результатов. Перечислять опечатки не представляется целесообразным.

Указанные замечания ни в коей мере не влияют на общую положительную оценку диссертационной работы.

Общая оценка диссертационной работы

Диссертация может быть признана научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение.

Все результаты диссертации получены автором самостоятельно, о чем можно сделать вывод на основе анализа публикационной активности автора и сравнения основных результатов и положений, включенных в диссертацию с результатами, включенными в публикации. Все результаты диссертации являются новыми. Работа носит теоретический характер. Автором диссертации разработаны новые методы и подходы, при помощи которых получен ряд принципиальных научных результатов в исследовании спектральных свойств различных классов обыкновенных дифференциальных операторов и оператор-функций. Результаты диссертации и методы могут найти применение при обосновании метода Фурье решения задач математической физики, при исследовании задач теории упругости, квантовой механики и других задач, приводящих к изучению несамосопряжённых операторов. Эти результаты являются достоверными и математически строго доказаны. Они достаточно полно опубликованы в центральных российских и зарубежных изданиях. По теме диссертации опубликовано 26 работ, из которых 21 работа опубликована в изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI и включённых в Перечень ВАК РФ. Результаты диссертации апробированы на многочисленных российских и международных конференциях и научных семинарах.

Диссертация Рыхлова В.С. соответствует паспорту специальности 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ» по следующим направлениям исследований.

- Вещественный анализ, локальные и глобальные свойства функций вещественных переменных, их представления и приближения (п. 1).
- Теория приближения функций (п. 4).
- Функциональный анализ, отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы) (п. 9).
- Теория операторов, в т. ч. теория дифференциальных операторов (п. 11).

Работа представляет собой законченное и целостное научное исследование, удовлетворяет пунктам 9-11,13,14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа Рыхлова В.С. «Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций», является законченной научно-квалификационно работой, в которой разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в спектральной теории дифференциальных операторов и оператор-функций, а её автор – Рыхлов Виктор Сергеевич, без сомнения, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:
Половинкин Игорь Петрович,
доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.02. Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление), доцент;
профессор кафедры математического и прикладного анализа факультета прикладной математики, информатики и механики
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Воронежский государственный университет»
394018, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1.
e-mail: polovinkin@yandex.ru
Телефон: +7 (473) 220-75-21, +7 (473) 220-83-48

Подпись, дата: 25.07.2025 И.П. Половинкин

Подпись И.П. Половинкина
«УДОСТОВЕРЯЮ»
Исполняющий обязанности
проректора по науке,
инновациям и цифровизации
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Воронежский государственный университет»
Доктор физико-математических наук,
доцент

Д.В.Костин