ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертационную работу Рыхлова Виктора Сергеевича «Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций», представленную на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность темы диссертации

В диссертации В.С. Рыхлова рассмотрены и решены важные задачи спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и дифференциальных оператор-функций или, по-другому, пучков дифференциальных операторов.

Перечислим основные вопросы спектральной теории, изученные в работе:

- построение асимптотики по спектральному параметру системы решений дифференциального уравнения общего вида и фундаментальной матрицы решений общей системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка,
- доказательство равномерной равносходимости разложений в ряды по собственным и присоединенным функциям обыкновенного дифференциального оператора произвольного n-го порядка с регулярными краевыми условиями, а также с ненулевым коэффициентом при $(n$-1)-й производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье, получение оценки разности частичных сумм или, по-другому, установление скорости равносходимости этих разложений в зависимости от свойств разлагаемой функции и коэффициента при $(n$-1)-й производной,
- доказательство кратной полноты в пространстве суммируемых с квадратом функций системы собственных и присоединенных функций некоторых классов обыкновенных дифференциальных полиномиальных оператор-функций с постоянными коэффициентами в сильно нерегулярных случаях.

Спектральная теория обыкновенных дифференциальных операторов и оператор-функций имеет богатую историю, берущую начало в ставших уже классическими работах Дж. Биркгофа, В.А. Стеклова, У.Э. Гобсона, А. Хаара, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна, Р.Э. Лангера, М.В. Келдыша, М.А. Наймарка, М.Г. Крейна, И.Ц. Гохберга, Б.М. Левитана, Н. Данфорда, Дж.Т. Шварца, В.А. Марченко. Дальнейшее развитие указанной теории связано с результатами В.А. Ильина, А.Г. Костюченко, М.Л. Расулова, А.П. Хромова, Ш.А. Алимова, В. Эберхарда, В.А. Садовничего, П. Джакова, Б.С. Митягина, В.П. Михайлова, Г.М. Кесельмана, Г.В. Радзиевского. В настоящий момент спектральная теория дифференциальных операторов и оператор-функций продолжает активно развиваться. Здесь следует упомянуть работы А.А. Шкаликова, В.А. Юрко, Я.Т. Султанаева, А.Г. Баскакова, А.Л. Скубачевского, К.А. Мирзоева, В.В. Власова, А.М. Савчука, И.В. Садовничей, С.М. Ситника, К.Б. Сабитова, М.Ш. Бурлуцкой.

Спектральная теория дифференциальных операторов и оператор-функций имеет много приложений в различных областях естествознания и техники, а также и в других разделах самой математики.

Указанные обстоятельства обуславливают актуальность тематики работы.

Научная новизна и достоверность диссертационного исследования

В первой главе решается задача построения асимптотических формул для решений линейного дифференциального уравнения произвольного порядка общего вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = \lambda y, \quad x \in [a,b],$$

с комплексным параметром λ и общей линейной дифференциальной системы первого порядка со спектральным параметром

$$Y' - A(x,\lambda)Y = 0,$$

где $A(x,\lambda)$ есть $(n \times n)$ матрицы-функции, при стремлении параметра λ к бесконечности. Здесь

$$A(x,\lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x) + \tfrac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda).$$

Такие асимптотические формулы существенно используются при исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов и пучков таких операторов. При наличии недостаточно гладких главных коэффициентов классические методы получения асимптотических формул сталкиваются с большими трудностями. Рыхлову В.С. удалось преодолеть эти трудности путём соответствующей замены искомой функции. Ввиду отсутствия достаточной гладкости главных коэффициентов, эта замена приводит обыкновенное дифференциальное уравнение к более сложному, квазидифференциальному уравнению. Но у этого уравнения сумма главных коэффициентов оказывается равной нулю, что и позволяет преодолеть все трудности классического подхода в случае недостаточно гладких главных коэффициентов и получить оценку остаточного члена при наименьших требованиях на главные коэффициенты, учитывающую свойства этих коэффициентов. Аналогичная идея была реализована при получении асимптотики фундаментальной матрицы решений при достаточно больших по модулю значениях спектрального параметра в случае общей линейной дифференциальной системы первого порядка. Полученные результаты дополняют и углубляют известные результаты Дж. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна, Р.Э. Лангера, И.М. Рапопорта, М.Л. Расулова и др.

Во второй главе рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор L, порождённый дифференциальным выражением n-го порядка с негладким коэффициентом при $(n-1)$-й производной

$$l(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y, \qquad p_j(x) \in L_1[0,1],$$

и регулярными по Биркгофу краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)\right) = 0, \qquad k = \overline{1,n}.$$

Исследуется вопрос о равномерной равносходимости разложений заданной функции в ряд по собственным и присоединенным функциям этого оператора и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также о равномерной оценке скорости равносходимости на любом компакте внутри основного интервала $(0,1)$. Исследование равносходимости спектральных разложений представляет собой активно развивающееся направление математики, начало которому было положено в классических работах В.А. Стеклова, У.Э. Гобсона, А. Хаара, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна и продолжено В.А. Ильиным, В.А. Садовничим, П. Джаковым, Б.С. Митягиным, А.М. Минкиным и др.

В.С. Рыхлов получил новые оценки скорости равносходимости в терминах общих модулей непрерывности разлагаемой функции и коэффициента $p_1(x)$ при $(n-1)$-й производной. Эти оценки позволили получить достаточные условия равносходимости в случае, когда модули непрерывности оцениваются сверху медленно меняющимися функциями и, в частности, логарифмическими функциями, что является весьма важным достижением. Автором впервые установлена тесная связь между множеством функций, для которых имеет место равносходимость, и свойствами та $p_1(x)$. Это весьма глубокий и нетривиальный результат. Существенную роль при получении оценок скорости равносходимости спектральных разложений и теорем равносходимости сыграли асимптотические формулы для решений дифференциальных уравнений с параметром, полученные Рыхловым В.С. в первой граве, а также доказанные автором аналоги классической теоремы Штейнгауза для обычных тригонометрических рядов также в терминах общих модулей непрерывности и их оценок сверху медленно меняющимися функциями.

В третьей главе диссертации исследуется кратная полнота в пространстве суммируемых с квадратом функций системы собственных и присоединенных функций некоторых классов нерегулярных полиномиальных дифференциальных пучков операторов $L(\lambda)$, порождённых однородной дифференциальной операцией

$$l(y,\lambda) \coloneqq \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \qquad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0,$$

и двухточечными краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) \coloneqq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1) = 0\,, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, а $\alpha_{ij}(\lambda)$ и $\beta_{ij}(\lambda)$ – произвольные полиномы по λ с комплексными коэффициентами.

Вопрос об n-кратной полноте корневых функций возникает при решении методом Фурье начально-граничных задач для соответствующих уравнений в частных производных. Основополагающие результаты в этом направлении были получены М.В. Келдышем в известной статье 1951 года. Исследованиями кратной полноты системы собственных и присоединенных функций различных классов дифференциальных операторных пучков занимались многие математики. Отметим результаты А.А. Шкаликова, А.П. Хромова, В. Эберхарда, Г. Фрайлинга, С.А. Тихомирова, М.Г. Гасымова, А.М. Магеррамова, А.И. Вагабова и др. Но есть классы полиномиальных дифференциальных пучков операторов с постоянными коэффициентами, для которых стандартные методы рассуждений не позволяют установить кратную полноту системы собственных и присоединенных функций.

В.С. Рыхловым предложен новый подход к исследованию кратной полноты, основанный на использовании введённых им обобщённых порождающих функций, с помощью которого удалось продвинуться в этом направлении и получить ряд глубоких и нетривиальных результатов. В.С. Рыхловым была исследована m-кратная полнота при $1 \leq m \leq n$ в пространстве суммируемых с квадратом функций системы собственных и присоединенных функций дифференциальных сильно нерегулярных полиномиальных пучков операторов n-го порядка в случае однородной дифференциальной операции с постоянными коэффициентами и произвольными краевыми условиями, то есть в тех случаях, для которых стандартные методы доказательства не проходят.

Таким образом, в диссертации получены новые принципиальные и важные результаты, вносящие существенный вклад в спектральную теорию дифференциальных операторов и пучков таких операторов. Многие результаты имеют завершающий характер – точные и не улучшаемые оценки и утверждения.

Достоверность результатов диссертации подтверждена строгими математическими доказательствами.

Замечания и вопросы по диссертационной работе

Отметим несколько замечаний и вопросов ко второй главе диссертационной работе В.С. Рыхлова.

1. Не для всех оценок скорости равносходимости спектральных разложений, полученных в диссертации, исследован вопрос о точности этих оценок.
2. Имея оценки скорости равносходимости спектральных разложений и используя оценки скорости сходимости разложений функций в тригонометрические ряды Фурье, следовало бы получить и оценки скорости сходимости исследуемых разложений к соответствующим функциям.
3. Автор не приводит примеров конкретных спектральных задач и классов функций, для которых можно было бы указать оценки скорости равносходимости разложений, зависящие только от параметра m – порядкового номера частичной суммы разложения.
4. В работе нет сравнения полученных оценок скорости равносходимости спектральных разложений с оценками других авторов для исследованных ранее случаев дифференциальных операторов.

Указанные замечания ни в коей мере не умаляют общей высокой оценки диссертационной работы.

Общая оценка диссертационной работы

Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Многие результаты имеют окончательный характер. Работа носит теоретический характер. Автором диссертации разработаны новые методы и подходы, при помощи которых получен ряд новых научных результатов при исследовании спектральных свойств различных классов обыкновенных дифференциальных операторов и пучков таких операторов. Методы и результаты могут найти применение при обосновании метода Фурье решения задач математической физики, при исследовании задач теории упругости, квантовой механики и других задач, приводящих к изучению несамосопряжённых операторов. То есть результаты диссертации обладают несомненной практической значимостью. Они достаточно полно опубликованы в центральных российских и зарубежных изданиях. По теме диссертации опубликовано 26 работ, из которых 21 работа опубликована в изданиях, индексируемых Web of Science, Scopus, RSCI и включённых в Перечень ВАК РФ. Результаты диссертации доложены на многочисленных российских и международных конференциях и научных семинарах.

Диссертация В.С. Рыхлова соответствует паспорту специальности 1.1.1. "Вещественный, комплексный и функциональный анализ" по следующим направлениям исследований: 1. Вещественный анализ, локальные и глобальные свойства функций вещественных переменных, их представления и приближения. 4. Теория приближения функций. 9. Функциональный анализ, отображения бесконечномерных пространств (функционалы, операторы). 11. Теория операторов, в том числе теория дифференциальных операторов.

Диссертация представляет собой законченное и целостное научное исследование, и удовлетворяет пунктам 9-11,13,14 «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842.

Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа В.С. Рыхлова «Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций», является законченной научно-квалификационно работой, в которой разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как крупное научное достижение в спектральной теории дифференциальных операторов и пучков таких операторов, а её автор – Рыхлов Виктор Сергеевич, без сомнения, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:
Ломов Игорь Сергеевич, доктор физико-математических наук
(специальность 01.01.02. Дифференциальные уравнения),
профессор кафедры общей математики
факультета вычислительной математики и кибернетики
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Контактные данные: тел.: +7 915 246 6628, e-mail: lomov@cs.msu.ru,
почтовый адрес: 119607 Москва, Мичуринский проспект, д. 25, корп.4, кв. 85.

Адрес места работы: 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52
e-mail: cmc@cs.msu.ru. Телефон: +7 (495) 939-30-10.

Подпись, дата: 20.08.2025 Ломов Игорь Сергеевич

Подпись И.С. Ломова
«УДОСТОВЕРЯЮ»
Декан факультета ВМК МГУ
имени М.В. Ломоносова
академик Соколов Игорь Анатольевич
20.08.2025