ОТЗЫВ

на автореферат диссертации В.С. Рыхлова

«Спектральные свойства дифференциальных оператор-функций», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

В диссертационной работе Рыхлова В.С. исследуются некоторые актуальные вопросы спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов и оператор-функций. В частности, решаются задачи об асимптотике по спектральному параметру системы решений линейных дифференциальных уравнений и систем уравнений со спектральным параметром, о равномерной равносходимости на компакте основного интервала разложений в ряды по с.п.ф. линейного дифференциального оператора n-го порядка с ненулевым коэффициентом при $n-1$-ой производной и в обычный тригонометрический ряд Фурье, о кратной полноте в пространстве $L_2[0,1]$ системы с.п.ф. некоторых классов полиномиальных обыкновенных дифференциальных оператор-функций с постоянными коэффициентами в сильно нерегулярных случаях.

Работа состоит из трех глав. В первой главе исследуется асимптотика по параметру λ решений дифференциального уравнения n-го порядка вида

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = \lambda y, \quad x \in [a,b],$$

при $|\lambda| \to \infty$ и фундаментальной матрицы решений линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$Y' - A(x,\lambda)Y = 0,$$

где $A(x,\lambda)$ есть $n \times n$ матрицы-функции, при $|\lambda| \to \infty$, здесь

$$A(x,\lambda) = \lambda A_1(x) + A_0(x) + \tfrac{1}{\lambda}A_{-1}(x,\lambda).$$

Результаты по асимптотике получены при минимальных требованиях на главные коэффициенты ($a_0(x), a_1(x)$ в уравнении и $A_1(x), A_0(x)$ в системе). Получена не встречавшаяся ранее оценка остаточного члена, учитывающая свойства этих главных коэффициентов. Эти результаты развивают соответствующие исследования Дж. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна, Р.Э. Лангера, М.Л. Расулова, А.В. Вагабова. Такие асимптотические формулы хорошо используются при исследовании различных спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов и оператор-функций. Во второй главе с использованием полученных асимптотических формул исследуется вопрос о равномерной равносходимости на компакте основного интервала разложений в ряды по с.п.ф. дифференциального оператора L, порождённого выражением n-го порядка

$$l(y) := y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_n(x)y, \qquad p_j(x) \in L_1[0,1],$$

с ненулевым коэффициентом $p_1(x)$, регулярными (по Биркгофу) краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^{n-1} \left(a_{kj}y^{(j)}(0) + b_{kj}y^{(j)}(1)\right) = 0, \qquad k = \overline{1,n},$$

и в обычный тригонометрический ряд Фурье. Решение этого вопроса весьма важно, ввиду того что тригонометрическая система хорошо изучена. Установлена тесная связь между множеством тех функций $f(x)$, для разложений по собственным и присоединенным функциям оператора L которых имеет место равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье, и свойствами коэффициента $p_1(x)$.

Получены интересные оценки разности частичных сумм этих разложений в терминах интегральных модулей непрерывности разлагаемой функции и коэффициента $p_1(x)$. Новым в исследовании этого вопроса является использование теории медленно меняющихся функций. Весьма интересный результат получается в случае, когда имеет место оценка модулей непрерывности медленно меняющимися функциями. Эти результаты развивают и дополняют теоремы равносходимости и оценки скорости равносходимости, полученные ранее В.А. Стекловым, А. Хааром, Я.Д. Тамаркиным, М. Стоуном, В.А. Ильиным, А.П. Хромовым, Г.В. Радзиевским, А.М. Минкиным, И.С. Ломовым. В третьей главе диссертации исследуется кратная полнота в пространстве $L_2[0,1]$ в сильно нерегулярных случаях системы с.п.ф. некоторых классов обыкновенных дифференциальных полиномиальных оператор-функций с постоянными коэффициентами $L(\lambda)$, порождённых однородным дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) \coloneqq \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)}, \quad p_{js} \in \mathbb{C}, \qquad p_{n0} \neq 0, \quad p_{0n} \neq 0,$$

и двухточечными краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) \coloneqq \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij}(\lambda) y^{(j)}(0) + \beta_{ij}(\lambda) y^{(j)}(1) = 0\,, \quad i = \overline{1,n},$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ – спектральный параметр, а $\alpha_{ij}(\lambda)$ и $\beta_{ij}(\lambda)$ – произвольные полиномы по λ с комплексными коэффициентами. Предварительно дается классификация таких оператор-функций по степени их нерегулярности. Рассмотрение дифференциального выражения с постоянными коэффициентами позволяется дать конечную классификацию в отличие от общего случая. Это позволило для исследования кратной полноты с.п.ф. предложить новый подход с использованием обобщённых порождающих функций. Этот подход позволил продвинутся в решении вопроса о кратной полноте с.п.ф. в неисследованных ранее случаях сильно нерегулярных оператор-функций. Эти результаты развивают и расширяют результаты М.Г. Гасымова, А.М. Магеррамова, А.А. Шкаликова, Г. Фрайлинга, С.А. Тихомирова, А.И. Вагабова.

Из автореферата и вышеизложенного можно сделать вывод, что представленная В.С. Рыхловым диссертация вполне соответствует требованиям к диссертациям на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в соответствии с пунктами 9-11,13,14 действующего «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства РФ от 24 сентября 2013 г. №842, а её автор несомненно заслуживает присвоения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Сведения о составителе отзыва:
Сакбаев Всеволод Жанович
Почтовый адрес: 125047, г. Москва, Миусская пл., 4, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.
Телефон: +7 499 978-13-14.
Адрес электронной почты: fumi2003@mail.ru
Наименование организации: Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр Институт прикладной
математики имени М.В. Келдыша Российской академии наук».
Должность: ведущий научный сотрудник.

Доктор физико-математических наук
(01.01.02. Дифференциальные уравнения, динамические
системы и оптимальное управление),
В едущий научный сотрудник профессор кафедры высшей математики
ФИЦ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН «20» 08.25 [подпись] В.Ж. Сакбаев
(дата) (подпись)

Подпись в.н.с. В.Ж. Сакбаева удостоверяю
Ученый секретарь ИПМ им. М.В. Келдыша РАН А.А. Давыдов

Федеральное государственное учреждение «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук» • Минобрнауки России • ОГРН 1037739115787 • МОСКВА •