

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи



КОРНЕЕВ Иван Александрович

**КОЛЕБАНИЯ И БИФУРКАЦИИ В СИСТЕМАХ С  
МЕМРИСТИВНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ.**

1.3.4. — Радиоп физика

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор, ВАДИВАСОВА Т.Е.

Саратов — 2021

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Особенности динамики мемристивного генератора . . . .</b>	<b>24</b>
1.1 Введение . . . . .	24
1.2 Модели и методы исследования . . . . .	25
1.3 Мемристивный генератор с мемристором Чуа . . . . .	29
1.3.1 Жесткое возникновение колебаний . . . . .	29
1.3.2 Мягкое возникновение колебаний . . . . .	36
1.3.3 Экспериментальное исследование аналоговой модели мемристивного генератора с мемристором Чуа . . . . .	40
1.4 Мемристивный генератор с гладкой характеристикой мемристив- ного элемента . . . . .	46
1.5 Выводы по первой главе . . . . .	52
<b>Глава 2. Синхронизация мемристивных систем . . . . .</b>	<b>55</b>
2.1 Введение . . . . .	55
2.2 Вынужденная синхронизация мемристивных автогенераторов . .	58
2.2.1 Математическая модель мемристивного генератора с внеш- ним воздействием . . . . .	58
2.2.2 Квазигармонический анализ неавтономного мемристивного генератора . . . . .	59
2.2.3 Сравнение численных результатов с анализом приближен- ной фазовой модели . . . . .	61
2.3 Взаимная синхронизация диссипативно связанных мемристивных генераторов . . . . .	66

2.3.1	Исследуемая система . . . . .	66
2.3.2	Полная синхронизация идентичных мемристивных генераторов . . . . .	68
2.3.3	Частотно-фазовая синхронизация мемристивных генераторов с расстройкой . . . . .	74
2.4	Синхронизация периодических автогенераторов, связанных через мемристивную проводимость . . . . .	76
2.4.1	Математическая модель исследуемой системы . . . . .	76
2.4.2	Численное исследование системы . . . . .	78
2.4.3	Квазигармонический анализ системы . . . . .	82
2.4.4	Влияние конечной памяти мемристора на синхронизацию . . . . .	87
2.4.5	Численное исследование автогенераторов ван дер Поля, связанных через мемристор Чуа . . . . .	90
2.5	Полная синхронизация хаотических систем с мемристивной связью . . . . .	91
2.5.1	Синхронизация генераторов хаоса, связанных через мемристор . . . . .	91
2.5.2	Моделирование полной синхронизации хаоса в мемристивно связанных системах с помощью логистических отображений . . . . .	102
2.6	Выводы по второй главе . . . . .	107

### **Глава 3. Волновые процессы в ансамбле мемристивно связанных осцилляторов . . . . . 111**

3.1	Введение . . . . .	111
3.2	Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов . . . . .	113
3.2.1	Исследуемая система . . . . .	113
3.2.2	Влияние начальных условий на форму бегущей волны . . . . .	115

3.2.3	Влияние «неидеальной» мемристивной связи на волновые процессы . . . . .	120
3.3	Влияние мемристивной связи на бегущие волны в ансамбле осцилляторов ФитцХью—Нагумо . . . . .	122
3.3.1	Исследуемая система . . . . .	122
3.3.2	Автоколебательный режим . . . . .	124
3.3.3	Возбудимый режим . . . . .	126
3.3.4	Влияние неидеального характера мемристивной связи . . .	131
3.4	Синхронизация двухслойной мультиплексной сети хаотических отображений с нелокальной диссипативной внутрислойной связью и мемристивной связью между слоями . . . . .	132
3.5	Выводы по третьей главе . . . . .	138
	<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>142</b>
	<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .</b>	<b>147</b>

## ВВЕДЕНИЕ

Известны три базовых пассивных элемента электрических цепей: резистор, конденсатор и катушка индуктивности. Идея существования четвертого базового радиотехнического элемента, названного мемристором, была предложена в 1971 году Леоном Чуа [1]. В модели мемристора, рассмотренного Л. Чуа, магнитный поток  $\varphi(t)$  нелинейно связан с протекающим через мемристор зарядом  $q(t)$ :  $d\varphi = M(q) \cdot dq$ , в результате можно представить  $M(q) = \frac{d\varphi}{dq}$ . Используя выражения  $d\varphi = Udt$ ,  $dq = Idt$ , где  $U$  — напряжение на мемристоре,  $I$  — ток, проходящий через мемристор, можно получить вольт-амперную характеристику элемента:  $U = M(q)I$ . Это означает, что  $M(q)$  — это контролируемое зарядом сопротивление (memristance), которое зависит от всей прошлой истории процесса  $I(t)$ :

$$M(q) = \frac{d\varphi}{dq} = \varphi' \left( \int_{-\infty}^t I(\theta) d\theta \right). \quad (1)$$

Аналогично можно записать  $dq = W \cdot d\varphi$ , следовательно,  $W(\varphi) = \frac{dq}{d\varphi}$ . В результате получим  $I = W(\varphi)U$ . Здесь  $W(\varphi)$  — это управляемая магнитным потоком проводимость (memductance), которая зависит от всей прошлой истории процесса  $U(t)$ :

$$W(\varphi) = \frac{dq}{d\varphi} = q' \left( \int_{-\infty}^t U(\theta) d\theta \right). \quad (2)$$

Формула (1) описывает мемристор управляемый электрическим зарядом, а формула (2) — мемристор, управляемый магнитным потоком. Обе записи эквивалентны, а выбор функции  $M(q)$  или  $W(\varphi)$  определяется из условий конкретной задачи. Из (1) и (2) следует фундаментальное свойство мемристора — зависимость электрических характеристик элемента от всей предыстории его

функционирования. Если известно значение заряда или магнитного потока в некоторый момент времени  $t_0$ , то, в соответствии с (1) и (2) получаем:

$$M(q) = \varphi' \left( q(t_0) + \int_{t_0}^t I(\theta) d\theta \right), \quad W(\varphi) = q' \left( \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t U(\theta) d\theta \right). \quad (3)$$

Начальные значения управляющих переменных  $q(t_0)$  и  $\varphi(t_0)$  влияют на значения сопротивления и проводимости мемристора бесконечно долго. Такой элемент можно назвать идеальным мемристором.

В дальнейшем Л. Чуа обобщил свою идею [2] и расширил определение мемристора на случай произвольного двухполюсника, который может быть описан следующими соотношениями:

$$y = G_M(\mathbf{z}, x, t)x, \quad \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(\mathbf{z}, x, t). \quad (4)$$

Здесь  $x$  — входной сигнал,  $y$  — отклик системы.  $\mathbf{z} \in \mathbf{R}^m$  — векторная переменная, задающая мгновенное состояние мемристора. Его характеристика  $G_M$  представляет собой скалярную нелинейную функцию, зависящую от управляющей переменной  $\mathbf{z}$ , значение которой связано со входной переменной инерционно, т.е. зависит от предыстории мемристора. Скорость изменения переменной  $\mathbf{z}$  задается непрерывной функцией  $\mathbf{f}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ . Важно отметить, что определение мемристивного элемента (4) является математической интерпретацией, которая не конкретизирует физического смысла динамических переменных и их функциональной зависимости. Л. Чуа и соавторы отметили тот факт, что уравнение (4) не накладывает ограничений на природу мемристивных элементов и систем [3, 4]. Например, ему удовлетворяют такие устройства, как термистор и газоразрядная лампа [2, 5]. Есть хорошо известные примеры мемристивных устройств, которые были разработаны более века назад [6]. К коцепции мемристора близко понятие инерционной нелинейности. Цепочки инерционной нелинейности, используемые в радиоэлектронных устройствах, обладают похожими свойствами [7–10]. В настоящее время разработаны реальные мемристоры

на основе полупроводниковых и органических материалов, графена, твердых оксидных плёнок и др. [11–15]. Эти мемристоры не являются строго идеальными и с течением времени «забывают» предысторию состояний. В работах [14, 16, 17] было показано, что эффект «забывания» в мемристорах на основе оксида металла связан с процессом диффузии заряженных частиц в некоторой области с высокой концентрацией миграционных примесей, толщина которой играет роль управляющей переменной. Однако такое «забывание» может происходить очень медленно. Ожидается, что мемристивные устройства могут найти практическое применение в электронике и компьютерной технике, в частности, для создания элементов памяти [18–24]. Мемристивные элементы используются в искусственных нейронных сетях, предназначенных для обработки информации [25–31].

Системы, содержащие мемристивные элементы часто встречаются в различных областях физики, а также в нейродинамике и других науках, касающихся биологических систем. Мемристивные связи могут играть существенную роль в ансамблях реальных нейронов взаимодействующих сложным образом, через электрические и магнитные поля [26, 32–35]. Таким образом, имеется целый класс динамических систем, содержащих мемристоры. Назовем их мемристивными системами. Изучение динамики мемристивных систем важно с фундаментальной точки зрения, поскольку их поведение обладает существенными особенностями, которые пока еще недостаточно изучены. В то же время оно является актуальным в связи с возможным применением мемристивных устройств в задачах хранения и обработки информации.

Математические модели мемристивных систем могут иметь в фазовом пространстве линии равновесий или, напротив, совсем не иметь точек равновесия. В последнем случае в мемристивных системах наблюдаются так называемые скрытые аттракторы и мультистабильность [36, 37]. Кроме того, для ряда мемристивных систем типичен режим гиперхаоса [38–40]. Примером простой мемристивной системы с линией равновесия может служить радиотехнический

генератор, схема которого содержит в качестве нелинейности мемристивную проводимость [38, 39, 41–44]. Динамика систем с линией равновесий отличается рядом особенностей. Для таких систем характерны притягивающие предельные множества, состоящие из неизолированных точек равновесия и замкнутых орбит, а также бифуркации, происходящие при фиксированных параметрах с изменением начального состояния. В работах [42, 43, 45, 46] было показано, что притягивающее предельное множество (аттрактор) в автогенераторе, содержащем мемристор, состоит из непрерывного множества устойчивых точек равновесия, а также из непрерывного множества замкнутых орбит, образующих некоторую двумерную поверхность в трехмерном фазовом пространстве. В зависимости от выбора начальных условий в установившемся режиме можно наблюдать устойчивое равновесие или замкнутую кривую, размер, расположение и форма которой непрерывным образом зависят от начальных условий. Каждая из таких кривых соответствует установившемуся периодическим колебаниям диссипативной системы, но не является предельным циклом Андронова-Пуанкаре, поскольку не является изолированной, т.е. в любой сколь угодно малой окрестности такой кривой имеется множество подобных.

Бифуркации в генераторе с мемристивной проводимостью, в фазовом пространстве которого существует линия равновесий, рассматривались в [41–44]. В работах [41–43] используется модель мемристора, проводимость которого принимает два постоянных значения в зависимости от величины управляющей переменной (мемристор Чуа). В то же время характеристику мемристора можно представить в виде гладкой функции. Вопрос о том, как влияет на бифуркацию возникновения колебаний мемристивного генератора характеристика мемристора в имеющихся работах не рассматривался. Также не было проведено сопоставление численного моделирования с результатами теоретического анализа бифуркаций в мемристивном генераторе с применением квазигармонического приближения, и усредненных уравнений для амплитуды и фазы колебаний.

Как отмечалось выше, периодическим колебаниям в мемристивной системе с линией равновесия вместо изолированного предельного цикла соответствует непрерывное множество замкнутых кривых. В связи с этим возникает естественный вопрос, можно ли периодические колебания в автономной мемристивной системе считать автоколебательным процессом. С одной стороны, система, демонстрирующая данный колебательный режим, является автономной, нелинейной и диссипативной и, соответственно, должна рассматриваться как автоколебательная. С другой стороны, образом периодических автоколебаний служит предельный цикл, что не является справедливым в данном случае. По-видимому, рассмотрение систем с линиями равновесий требует обобщения существующего определения периодических автоколебаний, которые в данном случае не должны быть связаны с предельным циклом, как изолированной замкнутой кривой. Автоколебательный характер мемристивных систем с линиями равновесий может найти свое подтверждение в эффекте частотно-фазовой синхронизации таких систем. Захват частот и фаз колебаний при взаимодействии или внешнем воздействии (синхронизация в смысле Гюйгенса) является фундаментальным свойством автоколебаний [47]. Однако в мемристивных системах с линией равновесия он до настоящего времени не был установлен. Взаимодействие генераторов, содержащих мемристоры, рассматривалось в работе [36], где была показана возможность адаптивной полной синхронизации мемристивных систем, в том числе в режиме гиперхаоса. Имеется много работ, посвященных адаптивной синхронизации искусственных нейронных сетей [48–52], в которых определяются условия их полной или запаздывающей синхронизации. Однако вопрос о существовании и особенностях частотно-фазовой синхронизации колебаний мемристивных генераторов остается открытым.

Важным направлением в исследовании мемристивных систем является анализ эффектов взаимодействия автогенераторов и возбудимых осцилляторов, не являющихся мемристивными системами, но взаимодействующих между собой посредством мемристивных элементов связи. Интерес к данному направ-

лению исследований, в частности, связан с задачами моделирования динамики реальных нейронов, взаимодействующих через сложным образом распределенные и меняющиеся во времени электрические и магнитные поля. Такие взаимодействия могут быть смоделированы с помощью мемристивных элементов связи [26, 32, 34, 35, 53]. Однако работ, посвященных особенностям взаимодействия автоколебательных систем, соединенных мемристивными связями, в настоящее время имеется не так много. Динамика двух мемристивно-связанных периодических автогенераторов (автогенераторов Ван дер Поля) исследовалась экспериментально на аналоговой модели радиотехнической цепи в [54]. Было установлено явление захвата основной частоты колебаний в определенной области значений частотной расстройки, однако не были рассмотрены особенности синхронизации, связанные с мемристивным характером связи. В [33] исследовалась синхронизация импульсов зажигания в двух нейронах Хиндмарша-Розе со связью через неидеальный мемристор. Показана синхронизация зажигания в хаотическом и периодическом режимах. Системы с хаотической динамикой, связанные через идеальную мемристивную проводимость, исследовались в [54, 55]. Рассматривались два хаотических осциллятора Чуа с однонаправленной [54] и взаимной [55] мемристивной связью. В обоих случаях был установлен эффект полной хаотической синхронизации. В ряде работ мемристоры применяются в адаптивных цепочках связи, например, в [56, 57]. В работе [58], так же, как и в [33], исследовались мемристивно-связанные идентичные нейроны Хиндмарша-Розе, однако мемристор полагался идеальным. Была установлена зависимость эффекта полной хаотической синхронизации от начальных состояний нейронов и элемента связи и построены области синхронизации на плоскости параметров «коэффициент связи – начальное значение переменной состояния мемристора», а также на плоскости начальных значений двух динамических переменных взаимодействующих нейронов. Таким образом, в имеющихся работах, посвященных синхронизации «обычных» автогенераторов с мемристивной связью, было показано влияние начальных условий только на эффект полной синхронизации

хаоса. Аналогичное влияние на границы фазового захвата в научной литературе не упоминается. Не было проведено теоретического анализа зависимости режима синхронизации от начальных условий, не рассматривался вопрос о том, сохраняется ли данная зависимость в случае неидеальных мемристоров связи.

Мемристивные связи особенно интересны с точки зрения моделирования динамики ансамблей взаимодействующих активных элементов (автогенераторов, возбудимых или бистабильных осцилляторов). Прежде всего это связано с моделированием процессов в нейродинамике с использованием осцилляторных и автоколебательных моделей нейронов. В ряде работ исследовалось распространение волн и образование пространственных структур в ансамблях и сетях с мемристивными связями (например, [59–62]). Важной и интересной является также задача синхронизации сложных пространственно-временных режимов во взаимодействующих ансамблях или слоях многослойной сети при мемристивном характере связи этих ансамблей или слоев. В [63] рассматривалась синхронизация сложных кластерных структур в мемристивно-связанных слоях сети из нейронов Хиндмарш-Розе. Была показана возможность синхронизации химерных структур в двух слоях. При этом состояния мемристоров также демонстрировали соответствующую структуру когерентных и некогерентных кластеров. При определенных параметрах мемристивной связи наблюдалась не только синхронизация слоев, но также полная синхронизация состояний всех нейронов. В данной работе мемристивная связь между слоями существенно отличалась от идеальной. Возможно поэтому, влияние начальных условий на синхронизацию пространственных структур не было обнаружено. Важно отметить, что пока еще остается много неясного, в том, как влияет мемристивный характер связи элементов ансамбля на пространственно-временную динамику. Недостатком большинства работ, является отсутствие четкого ответа на вопрос, приводит ли мемристивная связь к качественно новым явлениям коллективной динамики ансамблей и в чем состоят эти новые явления.

Результаты проведенного анализа научных публикаций по теме диссертации убедительно свидетельствуют о том, что изучение особенностей динамики мемристивных систем является современной и актуальной научной проблемой нелинейной теории колебаний и волн, традиционно относящейся к задачам радиофизики. В исследованиях по данному направлению принимают участие большое количество известных научных коллективов, среди которых много специалистов по нелинейной динамике. На основе сказанного можно сделать вывод о том, что актуальность научного направления и тема настоящей диссертационной работы сочетается с научными интересами широкого круга специалистов в мировой науке и является востребованной и важной для исследований в современной радиофизике.

**Целью данной работы** является решение актуальной радиофизической задачи, состоящей в установлении и изучении особенностей динамики мемристивных систем: бифуркационных механизмов возникновения колебаний в генераторах, содержащих мемристивную проводимость (мемристивных генераторах); эффектов вынужденной и взаимной синхронизации мемристивных генераторов; эффектов синхронизации периодических и хаотических автогенераторов, взаимодействующих через мемристор; особенностей формирования бегущих волн в ансамблях мемристивно-связанных автогенераторов и возбудимых осцилляторов с периодическими граничными условиями; эффекта взаимной синхронизации химерных состояний в слоях мультиплексной сети мемристивно-связанных хаотических систем; влияния неидеальности мемристивных элементов на динамику мемристивных систем.

Для достижения поставленных целей в рамках диссертационной работы необходимо было решить следующие **основные задачи**:

1. Изучить бифуркационные механизмы возникновения колебаний в мемристивном генераторе с различным видом нелинейности и различными характеристиками мемристивной проводимости. Провести сравнение результа-

- тов численного и аналогового моделирования с теоретическими результатами, полученными в рамках квазигармонического приближения;
2. Установить, существует ли эффект вынужденной частотно-фазовой синхронизации колебаний мемристивного генератора внешним гармоническим воздействием и, в случае его существования, численно и теоретически проанализировать влияние начального состояния мемристивного элемента на границы области фазового захвата;
  3. Исследовать колебания двух диссипативно-связанных мемристивных генераторов в случае их идентичности и в случае наличия частотной расстройки. Установить, наблюдаются ли в данной системе эффекты полной (синфазной) и частотно-фазовой синхронизации. В случае существования данных эффектов, выявить наличие особенностей синхронизации, связанных с мемристивным характером генераторов;
  4. Установить, наблюдается ли взаимная частотно-фазовой синхронизации в математической модели генераторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивную проводимость. Провести численное и аналитическое исследование границ области синхронизации и их зависимости от начального состояния мемристора. Рассмотреть влияние конечной памяти мемристора связи на эффект взаимной синхронизации периодических генераторов;
  5. Установить, существует ли эффект полной синхронизации хаоса в системе мемристивно-связанных идентичных радиофизических генераторов Анищенко-Астахова и в модельной системеме логистических отображений с дискретным аналогом мемристивной связи. На примаре этих систем, определить, влияет ли начальное состояние мемристора связи на порог полной синхронизации хаоса в случае идеального мемристора и мемристора с конечной памятью;
  6. Исследовать характеристики бегущих волн в моделях автоколебательных распределенных систем с мемристивным взаимодействием элементов. В ка-

честве моделей рассмотреть кольцо мемристивно-связанных генераторов ван дер Поля и нейронов ФитцХью-Нагумо в автоколебательном режиме. Исследовать характеристики волн возбуждения в кольце мемристивно-связанных нейронов ФитцХью-Нагумо в возбуждимом режиме. Установить, влияют ли начальные состояния мемристивных элементов связи на форму волнового профиля и частоту колебаний во времени в случае идеальной мемристивной связи и при конечной памяти мемристивных элементов;

7. На примере простой модели однородной мультиплексной двухслойной сети логистических отображений в режиме хаотической динамики с нелокальной диссипативной внутрислойной связью и мемристивным взаимодействием слоев рассмотреть возможность полной синхронизации сложных кластерных режимов, таких как химерные состояния и выяснить, к каким особенностям динамики сети может приводить мемристивный характер межслойного взаимодействия.

Основным **методом исследований** является численное моделирование и теоретический анализ в рамках квазигармонического приближения с использованием укороченных уравнения для амплитуды и фазы колебаний. В некоторых задачах также применялся метод аналогового моделирования динамики системы.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Материал диссертационной работы изложен на 160 страницах, содержит 52 иллюстрации и список цитируемой литературы из 110 наименований.

Во **введении** обоснована актуальность темы диссертации, дан краткий обзор представленных в научной литературе результатов, соответствующих теме диссертационного исследования, сформулирована цель исследования и обозначены задачи, приводятся положения, выносимые на защиту, обосновывается новизна и научно-практическая значимость результатов исследования.

В **первой главе** диссертации рассматриваются особенности поведения радиотехнического генератора периодических колебаний, содержащего мемристор (мемристивного генератора). Исследуется несколько модификаций мемристивного генератора, связанных с различным видом вольт-амперной характеристики активного нелинейного элемента, а также характеристики мемристора. Приведены результаты исследования вида аттрактора в фазовом пространстве мемристивного генератора и бифуркационных механизмов возникновения колебаний при изменении управляющего параметра. Численное моделирование дополняется анализом усредненных уравнений для амплитуды и фазы колебаний. Показана особая чувствительность поведения системы к начальному состоянию, связанная с наличием в фазовом пространстве линии равновесий. Отмечаются бифуркации «без параметра», наблюдающиеся в мемристивном генераторе при изменении начальных условий. Предложена аналоговая модель генератора с мемристивной проводимостью и описаны результаты натуральных экспериментов, которые показывают принципиальную роль неидеального характера мемристивного элемента.

Во **второй главе** анализируются особенности синхронизации в мемристивных системах. Выделяются две задачи: синхронизация колебаний мемристивных генераторов с «обычной» диссипативной связью и синхронизация «обычных» автоколебательных систем, взаимодействующих через мемристор. В рамках первой задачи рассматривается вынужденная синхронизация мемристивного генератора, а также взаимная синхронизация двух мемристивных генераторов, взаимодействующих через обычную проводимость. В случае вынужденной синхронизации, кроме численного моделирования, применяется квазигармонический анализ. Исследуется как полная (синфазная) синхронизация периодических колебаний двух идентичных генераторов, так и частотно-фазовая синхронизация генераторов с частотной расстройкой. Анализируется влияние на эффекты синхронизации начальных состояний мемристивных элементов. В рамках второй задачи численно и аналитически исследуется частотно-фазовая

синхронизация периодических генераторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивную проводимость. Рассмотрены мемристоры с кусочно-линейной характеристикой (мемристор Чуа) и с гладкой квадратичной характеристикой. Устанавливается зависимость границ области синхронизации от начального состояния мемристора связи. Выясняется влияние неидеального характера мемристора на эффект синхронизации. Также в рамках второй задачи исследуется полная синхронизация хаотических колебаний мемристивно-связанных идентичных генераторов Анищенко-Астахова и логистических отображений. Исследуется зависимость порога полной синхронизации от начального состояния мемристивной связи в случае мемристора без забывания (идеального мемристора) и мемристора с забыванием.

В **третьей главе** рассматривается влияния мемристивного характера связей на динамику осцилляторных ансамблей. Исследуются особенности волновых процессов в ансамблях автогенераторов и возбудимых осцилляторов, связанных через мемристивные элементы, при периодических граничных условиях. Такие ансамбли можно рассматривать как модели мемристивных активных сред. Как в случае автогенераторов, так и в случае возбудимых осцилляторов в одномерном ансамбле с периодическими граничными условиями могут распространяться бегущие волны. Проводится исследование влияния начальных состояний мемристоры связи на характеристики волновой моды в случае идеальных мемристоры и мемристоры с конечной памятью. В последнем разделе главы исследуется полная синхронизация слоев двухслойной мультиплексной сети хаотических логистических отображений, находящихся в режиме химерных состояний, при введении мемристивной связи между слоями. Анализируется влияние на эффект синхронизации начальных состояний мемристивных элементов связи в случае мемристивной связи без забывания и при наличии забывания.

В **заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и выводы.

**Научная новизна** результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые установлены детали бифуркационных механизмов возникновения колебаний в генераторе с мемристивной проводимостью при кусочно-гладкой и гладкой характеристиках мемристора. При этом впервые результаты численного моделирования подтверждены теоретическими результатами, полученными в рамках квазигармонического анализа, а также результатами аналогового моделирования.
2. Впервые методами численного моделирования и квазигармонического анализа показан эффект фазового захвата для мемристивных генераторов периодических колебаний и установлена зависимость границ частотно-фазовой синхронизации мемристивного генератора периодических сигналов от начальных условий, в частности, от начального состояния мемристора.
3. Впервые методами компьютерного эксперимента было показано существование порога синфазной синхронизации двух взаимодействующих мемристивных генераторов периодических сигналов.
4. На примере генераторов ван дер Поля впервые численно и аналитически показано, что границы области частотно-фазовой синхронизации периодических генераторов с расстройкой частот, связанных через мемристор зависят от начального состояния мемристора и непрерывным образом меняются с изменением начального значения переменной, задающей состояние мемристора связи.
5. Численно и, частично, в аналоговом эксперименте, показано, что малое отклонение мемристивного элемента от идеального приводит к исчезновению большинства особенностей мемристивных систем, таких как существование линий равновесий и поверхностей замкнутых кривых, существование

- бифуркаций без параметра, зависимость границ синхронизации периодических колебаний от начальных условий.
6. На примере идентичных хаотических генераторов Анищенко-Астахова, логистических отображений с мемристивной связью и двухслойной мультиплексной однородной сети логистических отображений с нелокальной диссипативной внутрислойной связью и мемристивной связью между слоями впервые установлено, что граница полной синхронизации сосредоточенных и распределенных систем со сложной динамикой при взаимодействии через неидеальные мемристоры сохраняет определенную зависимость от начального состояния мемристивных элементов связи, если они обладают достаточно длинной памятью.
  7. Впервые было исследовано распространение бегущих волн в кольце автоколебательных и возбудимых элементов с мемристивными связями, являющееся простейшей моделью мемристивной активной среды. На примере двух моделей, кольца генераторов ван дер Поля с квазигармоническим поведением и кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо в режиме сильно релаксационных автоколебаний, было показано, что при связи через идеальные мемристоры форма бегущей волны зависит от начальных условий, в частности от начальных состояний мемристоров связи.
  8. На примере кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо в возбудимом режиме впервые было обнаружено, что не только форма профиля волны возбуждения, но и скорость распространения волны по кольцу (и, соответственно, период колебаний осцилляторов ансамбля) существенно зависит от начальных состояний мемристоров связи. Было показано, что данная зависимость частично сохраняется при неидеальных мемристорах связи с очень длительной памятью (очень малым параметром забывания).

**Достоверность научных результатов работы** Достоверность полученных результатов обеспечивается: применением обоснованных методов теоретического и численного анализа нелинейных процессов в радиофизических системах, демонстрирующих сложное поведение; согласованием данных, полученных посредством компьютерного моделирования и в экспериментах с использованием средств аналогового моделирования, с результатами теоретического анализа; отсутствием противоречий с уже известными результатами, полученными другими авторами, и установившимися представлениями в данной области знаний.

**На защиту выносятся следующие положения:**

1. В генераторе с идеальным мемристором Чуа, проводимость которого принимает одно из двух постоянных значений в зависимости от значений управляющей переменной, при вариации параметра, контролирующего подкачку энергии в систему, могут наблюдаться как жесткая, так и мягкая бифуркации возникновения колебаний, в которых принимают участие непрерывные множества точек равновесия и замкнутых кривых. Жесткий бифуркационный сценарий имеет место в генераторе с постоянной отрицательной проводимостью и состоит в возникновении непрерывного множества замкнутых кривых конечного размера. Мягкий сценарий возникновения колебаний реализуется в случае кубической характеристики активного элемента и аналогичен суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. В результате бифуркации в этом случае рождается непрерывное множество замкнутых кривых бесконечно малого радиуса.
2. В генераторе с постоянным отрицательным сопротивлением и идеальным мемристором, проводимость которого задается гладкой функцией управляющей переменной, при вариации параметра, контролирующего подкачку энергии в систему, происходит мягкая бифуркация возникновения колебаний. Эта бифуркация соответствует суперкритической бифуркации

Андропова-Хопфа и для различных точек на линии равновесия происходит не одновременно, а при различных значениях управляющего параметра.

3. Частота и фаза колебаний мемристивного генератора с идеальной мемристивной проводимостью могут быть захвачены при внешнем периодическом воздействии или вследствие взаимодействия с другим генератором. При этом граница области синхронизации зависит от начального состояния системы и, при фиксированных параметрах системы, может управляться с помощью начального значения переменной, задающей состояние мемристора.
4. Граница полной синхронизации систем со сложной динамикой, как сосредоточенных, так и распределенных, взаимодействующих через мемристивные элементы связи, зависит от начального состояния этих элементов связи, причем эта зависимость сохраняется и в случае, когда мемристоры не являются строго идеальными, а характеризуются конечным, но достаточно длительным временем памяти.
5. В ансамбле возбудимых осцилляторов с мемристивными связями и периодическими граничными условиями можно управлять характеристиками бегущих волн возбуждения (формой импульсов и периодом колебаний осцилляторов), меняя начальные состояния мемристоров связи, причем влияние начальных состояний имеет место не только в случае идеальных мемристоров, но и в случае мемристоров с конечным, но достаточно длительным временем памяти.

**Научная и практическая значимость** результатов диссертации определяется тем, что в работе рассматриваются особенности динамики, бифуркации и эффекты синхронизации важного с теоретической и практической точек зрения и малоизученного класса колебательных систем, который составляют системы, содержащие мемристивные устройства. Полученные результаты су-

ществленным образом дополняют существующие на сегодняшний день представления нелинейной теории колебаний и волн. Научно-практическая значимость работы состоит в следующем:

1. Установлены основные бифуркационные сценарии возникновения периодических колебаний в генераторе с мемристивной проводимостью для различных характеристик мемристора и различных характеристик активного нелинейного элемента, показаны особенности бифуркационных сценариев, связанные с мемристивным характером системы и наличием в фазовом пространстве системы линии равновесий.
2. Установлен эффект фазового захвата при внешнем гармоническом воздействии на мемристивный генератор и взаимодействии двух мемристивных генераторов с частотной расстройкой. Нетривиальность данного результата связана с тем, что периодическим колебаниям в фазовом пространстве мемристивного генератора вместо изолированной замкнутой кривой (предельного цикла) соответствует поверхность, состоящая из множества замкнутых кривых.
3. Показана особая роль начальных условий при вынужденной и взаимной синхронизации мемристивных генераторов, а также при синхронизации «обычных» периодических и хаотических генераторов, взаимодействующих через мемристивные элементы связи. Таким образом, показано, что в некоторых случаях с помощью выбора начального состояния мемристоров можно существенно влиять на эффект синхронизации.
4. Показана важность эффекта забывания мемристивных элементов, который всегда присутствует в реальных мемристивных устройствах и учет которого существенным образом влияет на динамику мемристивных систем, наблюдающиеся в них бифуркации и эффекты синхронизации.

5. Установлена важная роль мемристивных связей в формирование бегущих волн в ансамблях автогенераторов и возбудимых осцилляторов с периодическими граничными условиями. Показано, что характеристики волновых процессов зависят от выбора начальных состояний мемристивных элементов связи. Особенно сильно эта зависимость проявляется в случае возбудимой динамики элементов ансамбля. Не только форма импульсов возбуждения, но и скорость распространения волны (и, соответственно, период колебаний осцилляторов) в этом случае существенно зависят от начальных состояний мемристоров связи, причем такая зависимость сохраняется в случае мемристоров с забыванием, если скорость забывания достаточно мала. Полученные результаты свидетельствуют о возможности управления волновыми процессами в возбудимых системах с помощью влияния на начальные состояния мемристивных связей. Такие свойства возбудимых мемристивных ансамблей могут быть важны в задачах нейродинамики.

**Апробация работы.** Результаты, представленные в диссертационной работе, неоднократно докладывались на всероссийских и международных конференциях, школах и семинарах:

1. Школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2014», Саратов, Россия, 24–28 ноября 2014.
2. Международная конференция «Dynamics, Bifurcations and Chaos», Нижний Новгород, Россия, 2–9 июля 2017.
3. Школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых — 2017», Саратов, Россия, 30 ноября – 1 декабря 2017.
4. Международная конференция «Saratov Fall Meeting», Саратов, Россия, 24–29 сентября 2016.
5. Международная конференция «Dynamics, Bifurcations and Chaos», Нижний Новгород, Россия, 16–20 июля 2018.

6. Международная конференция «Saratov Fall Meeting», Саратов, Россия, 25–29 сентября 2018.
7. Международная конференция «Workshop on Control of Self-Organizing Nonlinear Systems», Лютерштадт-Виттенберг, Германия, 20–22 августа 2019.
8. Международная конференция «Saratov Fall Meeting», Саратов, Россия, 24–29 сентября 2020.
9. XIX научная школа «Нелинейные волны – 2020», Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Россия, 29 февраля – 6 марта 2020.

**Гранты.** Исследования, результаты которых вошли в настоящую диссертационную работу, проводились при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 19-32-90030, № 20-52-12004) и Российского научного фонда (проект № 20-12-00119).

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 рецензируемых научных журналах [64–73], входящих в системы Web of Science, Scopus, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук. Одна работа опубликована в сборнике тезисов конференции [74]. Получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [75, 76].

**Личный вклад.** Все защищаемые результаты диссертации получены автором лично в ходе численных и натурных экспериментов, а также аналитическими методами в квазигармоническом приближении. Разработаны программы, с помощью которых проводились численные расчеты и обработка экспериментальных данных. Планирование и постановка задач, интерпретация и обсуждение результатов, написание научных статей осуществлялись совместно с научным руководителем и соавторами.

# Глава 1. Особенности динамики мемристивного генератора

## 1.1 Введение

В первой главе диссертационной работы изучаются особенности поведения радиотехнического генератора периодических колебаний, содержащего мемристор (мемристивного генератора). Исследуется несколько модификаций мемристивного генератора, связанных с различным видом вольт-амперной характеристики активного элемента (отрицательного сопротивления), а также с видом характеристики самого мемристора. Математические модели мемристивных генераторов были предложены и частично исследованы в работах [1, 41–43], в том числе и схема, рассматриваемая в диссертационной работе. Однако проведенные исследования не являлись полными, особенности бифуркаций, наблюдаемых в мемристивной системе не были достаточно детально описаны, а численное моделирование не сопоставлялось с результатами приближенных аналитических методов и натурных экспериментов.

В настоящей главе приведены результаты исследования бифуркаций возникновения колебаний в мемристивном генераторе. Показана особая чувствительность поведения системы к начальному состоянию, связанная с наличием в фазовом пространстве линии равновесий. Как было отмечено во введении к работе, одной из особенностей мемристивных систем является наличие многообразия равновесий. Существование таких многообразий служит причиной зависимости установившегося режима от начального состояния системы, особого характера притягивающего предельного множества (аттрактора) и особого характера бифуркаций. В работе рассматриваются бифуркации в генераторе с

кусочно-линейным мемристором Чуа, а также с мемристором, имеющим гладкую характеристику. Показано, что при вариации параметра, управляющего подкачкой энергии в систему, могут наблюдаться как жесткий, так и мягкий сценарий возникновения колебаний. Особенности этих бифуркаций определяются видом характеристик мемристора и активного элемента. Кроме того, в рассматриваемом генераторе наблюдаются так называемые бифуркации без параметров, то есть бифуркации, которые происходят при фиксированных значениях параметров системы и изменении начальных условий. Такие бифуркации характерны для систем с линией равновесий [42, 44, 45]. Численное исследование бифуркационных явлений в рассматриваемом мемристивном генераторе дополняется анализом усредненных уравнений для амплитуды и фазы колебаний. Кроме того, предложена аналоговая модель мемристивной проводимости и всего генератора в целом. Проведены натурные эксперименты, которые показывают принципиальную роль эффекта забывания, характерного для реальных мемристоров.

Результаты, представленные в данной главе, опубликованы в работах [64–66].

## 1.2 Модели и методы исследования

В данной главе будут рассматриваться модели мемристивного генератора, которые можно представить в виде последовательного колебательного контура, включающего элемент с отрицательным сопротивлением и мемристор (рисунк 1.1). Элемент с отрицательным сопротивлением в общем случае имеет нелинейную вольт-амперную характеристику  $U_N(i)$ . Схема, приведенная на рисунке 1.1, описывается следующими динамическими переменными:  $U$  — напряжение на емкости  $C$ ,  $I$  — ток через индуктивность  $L$  и переменная  $\varphi$ , управляющая мемристором. Используя правила Кирхгофа, можно вывести следующие

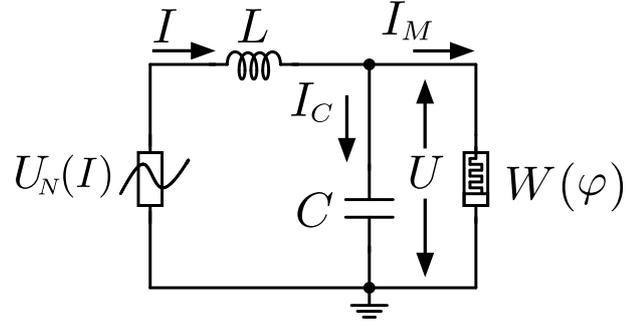


Рисунок 1.1. Схема исследуемой системы.

дифференциальные уравнения:

$$I = C \frac{dU}{dt'} + W_M(\varphi)U, \quad L \frac{dI}{dt'} + U_N(I) + U = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt'} = U, \quad (1)$$

где  $W_M(\varphi)$  — проводимость мемристора. Запишем систему уравнений (1) в безразмерном виде:

$$\dot{x} = \alpha(y - G_M(z)x), \quad \dot{y} = -x - f(y), \quad \dot{z} = x, \quad (2)$$

где  $x = U/U_0$ ,  $y = I/I_0$  и  $z = \varphi/(L\varphi_0)$  — безразмерные переменные,  $U_0 = 1$  В,  $I_0 = 1$  А,  $\varphi_0 = 1 \text{ с} \times U_0$ ;  $t = [U_0/(I_0L)]t'$  — безразмерное время;  $\alpha = (L/C)(I_0/U_0)^2$  безразмерный параметр, численно равный  $L/C$ . В дальнейшем полагаем, что  $\alpha = 1$ . Функции  $f(y)$  и  $G_M(z)$  является безразмерным эквивалентом функций  $U_N(I)$  и  $W_M(\varphi)$ .

В соответствии с [1] управляющая мемристивной проводимостью переменная  $\varphi$  понимается как магнитный поток. Динамика нормированной переменной  $z(t)$  описывается уравнением

$$\dot{z} = x, \quad (3)$$

Уравнение (3) соответствует идеальному мемристор (мемристор с «идеальной памятью»), поскольку в этом случае

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^t x(\theta) d\theta,$$

такой мемристор бесконечно долго «помнит» начальное значение управляющей переменной  $z(t_0)$  и все значения входной переменной  $\Delta x$  в предыдущие моменты времени  $\theta \in [t_0, t]$ .

В реальных мемристорах управляющая переменная  $z$ , как правило, не связана с магнитным потоком и имеет другой физический смысл. Так, в реальных мемристивных устройствах она может представлять собой толщину области с высокой концентрацией миграционных примесей в полупроводниковых мемристорах [11] или площадь проводящей области в ионных устройствах [13, 14, 77]. В этом случае уравнение (3) для управляющей переменной может видоизмениться. Так, в ряде работ [14, 16, 17] связь переменной  $z$ , управляющей характеристикой мемристивного элемента, с входной переменной  $x$  описывается уравнением вида:

$$\dot{z} = -\delta z + x. \quad (4)$$

В [14, 16, 17] показано, что для полупроводниковых мемристоров слагаемое вида  $\delta z$  возникает в связи с диффузией в активном слое. Коэффициент  $\delta$  может быть очень мал. В этом случае мемристор будет близок к идеальному. Однако в пределе  $t \rightarrow \infty$  он все равно будет забывать начальное состояние, в связи с чем модель (4) получила название «мемристор с эффектом забывания».

Первоначально предложенный Леоном Чуа управляемый потоком мемристор [1] описывается кусочно-линейной зависимостью  $q(\varphi)$ , изображенной на рисунке 1.2,а черной кривой. А проводимость мемристора (рисунок 1.2,б) выражается как:

$$W(\varphi) = \begin{cases} a, & |\varphi| < \varphi, \\ b, & |\varphi| \geq \varphi, \end{cases} \quad (5)$$

где  $a$  и  $b$  параметры проводимости мемристора.

Кусочно-линейную зависимость можно аппроксимировать кубической функцией  $q(\varphi) = a\varphi + \frac{1}{3}b\varphi^3$  (серая кривая на рисунке 1.2,а). Тогда проводи-

мость мемристора  $W(\varphi)$  равна

$$W(\varphi) = a + b\varphi^2. \quad (6)$$

Замена проводимости (5) на (6) не влечет за собой качественных изменений в функционировании мемристора. Классическая петля на вольт-амперной характеристике мемристора, при подаче на вход периодического воздействия  $U_{ext} = U_0 \sin(\omega_{ext}t)$ , сохраняется (рисунок 1.2,б).

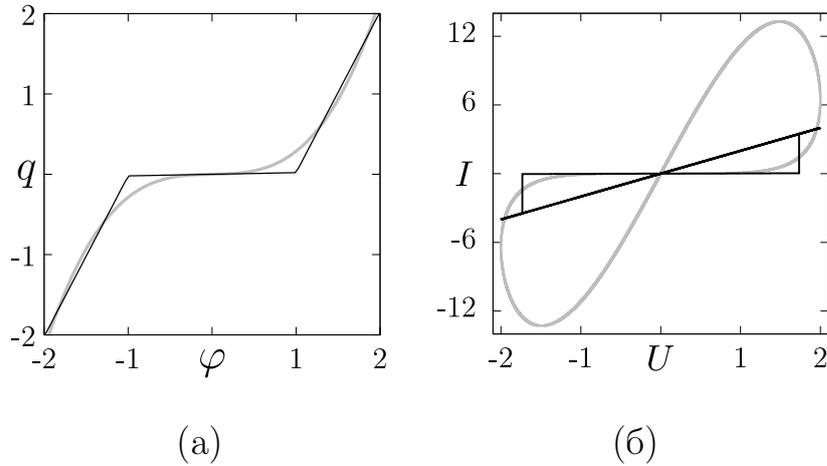


Рисунок 1.2. (а) Зависимость  $q(\varphi)$  мемристора Чуа [1] (черная кривая) и ее аппроксимация функцией  $q(\varphi) = 0.02\varphi + \frac{0.8}{3}\varphi^3$  (серая кривая).

(б) Вольт-амперная характеристика мемристора, управляемого периодическим сигналом напряжения  $U_{ext} = 2 \sin(t)$ , соответствующая мемристорам Чуа (черная кривая) и кубическому мемристорам с параметрами  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$  (серая кривая).

В безразмерном виде соответствующие характеристики мемристора (5), (6) записываются как

$$G_M(z) = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| \geq 1. \end{cases} \quad (7)$$

$$G_M(z) = a + bz^2. \quad (8)$$

### 1.3 Мемристивный генератор с мемристором Чуа

В данном разделе будут исследованы модели мемристивного генератора (рисунок 1.1) с кусочно-линейной мемристивной проводимостью (мемристор Чуа). Как будет показано, негладкая характеристика мемристора может приводить к особенностям бифуркационного механизма возникновения колебаний.

#### 1.3.1 Жесткое возникновение колебаний

Рассмотрим колебательный контур (рисунок 1.1) с постоянным отрицательным сопротивлением  $U_N(I) = -RI$  и мемристором Чуа (7). Тогда уравнения исследуемой системы (2) примут вид:

$$\dot{x} = y - G_M(z)x, \quad \dot{y} = -x + \beta y, \quad \dot{z} = x, \quad G_M(z) = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| \geq 1, \end{cases} \quad (9)$$

где  $\beta$  — параметр системы, который зависит от свойств элемента с отрицательным сопротивлением.  $a = 0.02$ ,  $b = 2$  — параметры мемристивной проводимости.

Система (9) с мемристором Чуа (7) изучалась в работах [41–43]. Очевидно, что эта система имеет линию равновесий, состоящую из множества всех точек на оси OZ. Одно из собственных значений для всех этих точек равновесия ( $\sigma_1$ ) всегда равно нулю, а остальные собственные значения ( $\sigma_{2,3}$ ) зависят от параметров и положения точки на оси OZ:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_{2,3} = \frac{\beta - G_M(z)}{2} \pm \sqrt{\frac{(G_M(z) + \beta)^2}{4} - 1}. \quad (10)$$

Равенство нулю одного из собственных значений означают, что каждая точка на линии равновесия нейтрально устойчива в направлении оси OZ. При этом,

в окрестности каждой точки на линии равновесия можно выделить плоскость  $Q(x, y, z)$ , содержащую траектории, соответствующие притяжению или отталкиванию в окрестности этой точки. В плоскости  $Q(x, y, z)$  устойчивость точки равновесия, принадлежащей линии равновесий, определяется с помощью анализа линейной устойчивости для изолированных неподвижных точек на фазовой плоскости. Далее, под терминами «устойчивая» или «неустойчивая» точка на линии равновесий, будем понимать поведение траекторий в окрестности точки равновесия в плоскости  $Q(x, y, z)$ .

Изменение параметра  $\beta$  приводит к следующим бифуркационным изменениям в фазовом пространстве. В случае  $0 \leq \beta < 0.02$  аттрактором системы является многообразие устойчивых равновесий, к которым притягиваются все траектории (рисунок 1.3,а). Когда параметр  $\beta$  достигает значения  $\beta = 0.02$ , точки равновесия с координатами  $-1 < z < 1$  становятся неустойчивыми, в то время как другие точки линии равновесий с  $|z| \geq 1$  остаются устойчивыми (они становятся неустойчивыми при  $\beta = 2$ ). Стартующая из окрестности неустойчивой точки  $(0; 0; z \in (-1; 1))$  фазовая траектория начнет отдаляться от начального положения, двигаясь по спирали, что в итоге заканчивается движением по инвариантной замкнутой кривой (синяя линия на рисунке 1.3(б)). Любые изменения начальных условий приводят к попаданию на другую инвариантную замкнутую кривую. Таким образом, при  $\beta > 0.02$  аттрактор состоит из непрерывного множества замкнутых кривых, образующих двумерную поверхность при  $-1 < z < 1$ , и множества точек на оси OZ, для которых  $|z| \geq 1$  (рисунок 1.3,в-е). Дальнейшее увеличение параметра  $\beta$  до  $\beta = 2$  не приводит к качественным изменениям аттрактора.

Исследуем траектории системы (9) на устойчивость по Ляпунову. На рисунке 1.4 приведены зависимости показателей Ляпунова, от параметра  $\beta$ , рассчитанные для двух различных траекторий. Можно видеть, что при прохождении бифуркационного значения  $\beta = 0.02$  сигнатура спектра характеристических ляпуновских показателей (ЛХП) изменяется с  $(0, -, -)$  на  $(0, 0, -)$ . После

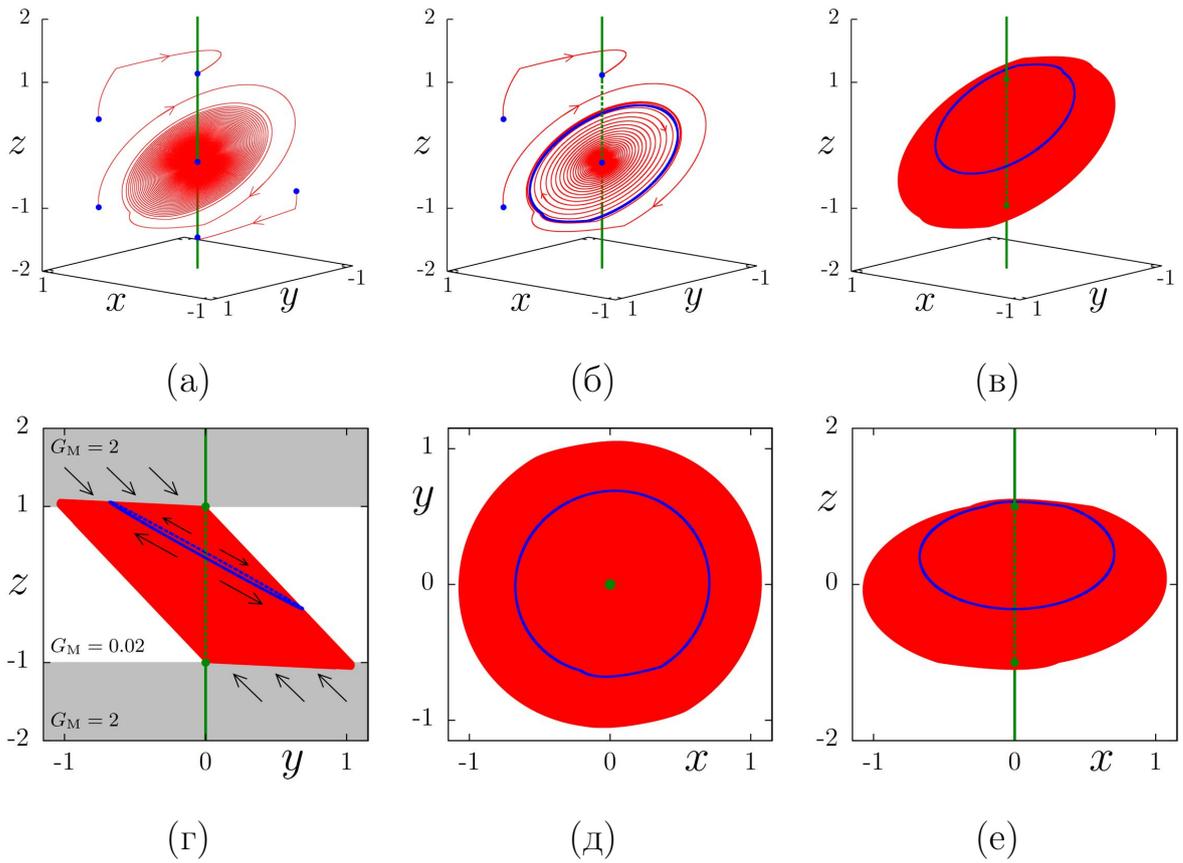


Рисунок 1.3. Фазовые траектории и аттрактор в фазовом пространстве системы (9): (а) движение к линии устойчивых равновесий из различных начальных точек (траектории окрашены красным цветом) при  $\beta = 0.01$ ; (б) движение к линии устойчивых равновесий или к инвариантной замкнутой кривой (окрашена синим цветом); (в) неизолированная замкнутая кривая, соответствующая движению на аттракторе из начального состояния  $(x_0 = y_0 = 0.5, z_0 = -0.1)$ ; (в)-(е) проекции аттрактора, приведенного на фрагменте (в), в различных плоскостях ( $\beta = 0.5$ ). На всех фрагментах многообразие устойчивых равновесий показано зеленой сплошной линией; многообразие неустойчивых равновесий – зеленой пунктирной линией; двумерная поверхность, образованная многообразием инвариантных замкнутых кривых, окрашена в красный цвет; точки, соответствующие начальным условиям, показаны синими заполненными кружками.

бифуркации все равновесия, лежащие на оси  $OZ$  в диапазоне  $-1 < z < 1$ , теряют устойчивость, в то же время существует нулевой показатель Ляпунова,

характеризующий отсутствие сжатия и растяжения в среднем по направлению OZ. Важно отметить, что две разные траектории с разными начальными условиями  $z_0$ , образующие две разные инвариантные кривые, характеризуются одинаковыми значениями показателей Ляпунова (красные линии и синие точки на рисунке 1.4).

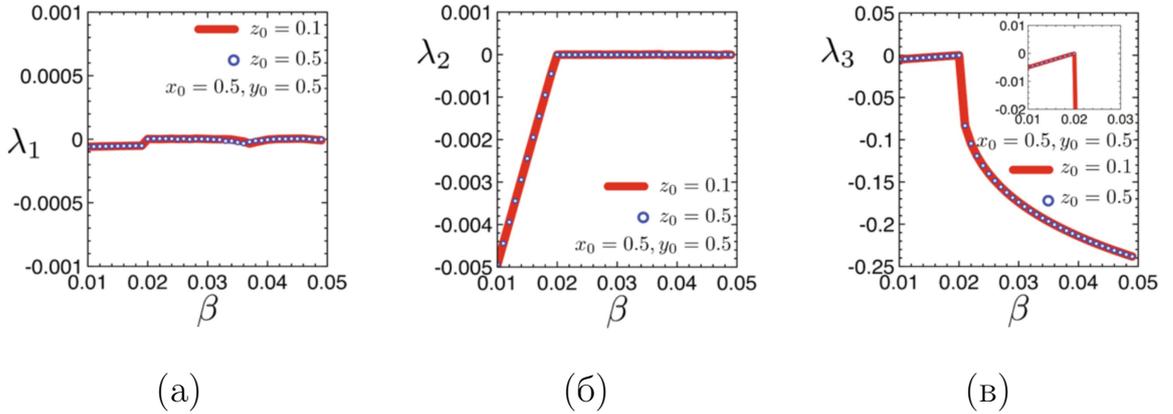


Рисунок 1.4. Показатели Ляпунова для двух различных траекторий (соответствующих различным начальным условиям) в зависимости от параметра  $\beta$  при  $a = 0.02$  и  $b = 2$ .

**Квазигармонический анализ.** К сожалению, в силу негладкого характера функции  $G_M(z)$ , анализ устойчивости неподвижных точек не позволяет выявить бифуркационные механизмы формирования замкнутой поверхности аттрактора при  $-1 < z < 1$ . Для того, чтобы понять причины наблюдаемой при  $\beta = 0.02$  трансформации аттрактора, приведем систему (9) к осцилляторному виду:

$$\ddot{x} = (\beta - G_M(z))\dot{x} + (\beta G_M(z) - 1)x, \quad \dot{z} = x. \quad (11)$$

Первое уравнение системы (11) не включает переменную  $z$  в явном виде. Зависимость решения от переменной  $z$  определяется функцией  $G_M(z)$  (7), которая принимает два значения  $a$  и  $b$ . Это позволяет аналитически решить первое уравнение системы (11), а затем рассмотреть два случая функции  $G_M(z)$ . В случае фиксированного  $G_M(z)$ , первое уравнение системы (11) описывает линейный осциллятор с частотой колебаний  $\omega_0 = \sqrt{1 - \beta G_M(z)}$ . В этом случае

решение может быть найдено как гармоническая функция в комплексном представлении:

$$x(t) = \Re\{A(t) \exp(j\omega_0 t)\} = \frac{1}{2}\{A \exp(j\omega_0 t) + A^* \exp(-j\omega_0 t)\}, \quad (12)$$

где  $A(t)$  - комплексная амплитуда,  $A^*(t)$  - комплексно сопряженная функция, а  $j$  - мнимая единица. Тогда первая производная равна:

$$\dot{x} = \frac{1}{2}\{j\omega_0 A \exp(j\omega_0 t) - j\omega_0 A^* \exp(-j\omega_0 t)\}. \quad (13)$$

Предполагается, что выполняется следующее условие для первой производной:  $\dot{A} \exp(j\omega_0 t) + \dot{A}^* \exp(-j\omega_0 t) = 0$ . С учетом этого условия вторая производная выражается как:

$$\ddot{x} = \left(j\omega_0 \frac{dA}{dt} - \frac{\omega_0^2 A}{2}\right) \exp(j\omega_0 t) - \left(j\omega_0 \frac{dA^*}{dt} + \frac{\omega_0^2 A^*}{2}\right) \exp(-j\omega_0 t). \quad (14)$$

Подставим выражения (12)-(14) в первое уравнение системы (11):

$$\begin{aligned} j\omega_0 \frac{dA}{dt} \exp(j\omega_0 t) &= \frac{\beta - G_M(z)}{2} j\omega_0 A \exp(j\omega_0 t) - \\ &- \frac{\beta - G_M(z)}{2} j\omega_0 A^* \exp(-j\omega_0 t) - \omega_0^2 A^* \exp(-j\omega_0 t). \end{aligned} \quad (15)$$

Коэффициенты при  $\exp(j\omega_0 t)$  в левой и правой частях уравнения (15) должны быть равны. Используя это равенство, можно вывести уравнение для комплексной амплитуды  $A$ :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\beta - G_M(z)}{2} A. \quad (16)$$

Представив комплексную величину  $A(t)$  в полярных координатах:  $A(t) = \rho(t) \exp(j\phi(t))$ , из (16) получаем систему уравнений для вещественной амплитуды и фазы:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}(\beta - G_M(z))\rho, \quad \frac{d\phi}{dt} = 0. \quad (17)$$

Уравнения системы (17) независимы: первое уравнение не включает фазу  $\phi$ , а второе уравнение не включает амплитуду  $\rho$ . Задача о существовании периодических колебаний и бифуркаций в системе (11) сводится к анализу амплитудного уравнения (17). Решением амплитудного уравнения является  $\rho = 0$ ,

что соответствует нахождению в точке равновесия  $x = 0, y = 0, z \in (-\infty; +\infty)$ . Данное решение устойчиво для  $\beta > G_M(z)$  и неустойчиво для  $\beta < G_M(z)$ . Рассмотрение двух случаев  $G_M(z) = 0.02$  и  $G_M(z) = 2$  приводит к написанному выше выводу:  $\beta = 0.02$  – бифуркационная величина, соответствующая потере устойчивости равновесий ( $x = y = 0; z \in (-1; 1)$ ). Из решения уравнения для постоянной амплитуды можно сделать вывод, что в момент бифуркации никаких других новых устойчивых или неустойчивых решений не появляется. После бифуркации траектории в фазовом пространстве просто начинают отдаляться от окрестности неподвижных точек, потерявших устойчивость, при этом описывая близкие к гармоническим колебания с медленно растущей амплитудой. Колебания  $x(t)$  можно представить как  $x(t) = \rho(t) \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ . Из первого уравнения системы (11) следует, что  $\omega_0 \approx 1$ , поскольку  $\beta G_M(z) \ll 1$ . Тогда из первого уравнения системы (9) следует  $y = \dot{x} - G_M(z)x \approx \dot{x} = -\rho(t)s \in (t + \phi_0)$ , потому что  $G_M(z) = 0.02$  в интервале  $-1 < z < 1$ . Из третьего уравнения системы (11) получим формулу для колебаний  $z(t)$ :

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t \rho(t) \cos(t + \phi_0) dt \approx \rho(t) \int_0^t \cos(t + \phi_0) d(t + \phi_0) = \\ &= \rho(t) \sin(t + \phi_0) + z_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Следовательно, в случае  $0.02 < \beta < 2$ , можно представить колебания динамических переменных системы (9) для начальных условий в окрестности точек равновесия ( $x = y = 0; z \in (-1; 1)$ ) следующим образом:

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos(t + \phi_0), \\ y(t) = -\rho(t) \sin(t + \phi_0), \\ z(t) = \rho(t) \sin(t + \phi_0) + z_0, \end{cases} \quad (19)$$

где  $z_0$  – начальное условие, соответствующее каждой точке линии равновесий. Численное моделирование колебаний, приводящих к движениям вдоль инвариантной замкнутой кривой в плоскостях  $(x, y)$ ,  $(x, z)$ ,  $(y, z)$ , подтвердило правильность решения (19) (рисунок 1.3, г-е).

При увеличении параметра  $\beta$  от 0.02 происходит рост амплитуды колебаний  $x(t)$ , что приводит к увеличению амплитуд колебаний  $y(t)$  и  $z(t)$ . Это неизбежно ведет к выходу динамической переменной  $z(t)$  за пределы  $z \in (-1; 1)$ . Затем фазовая точка достигает подпространства, где диссипация, определяемая свойствами мемристора (для этой области  $G_M(z) = 2$ , серые области на рисунке 1.3,г), превышает энергию накачки, характеризующуюся отрицательным сопротивлением (параметр  $\beta$ ). Рост амплитуды прекращается. В результате наблюдаются колебания с постоянной амплитудой. Абсолютное значение динамической переменной  $z$  достигает окрестности единицы один раз за период колебаний. Эти установившиеся колебания отвечают движению вдоль инвариантной замкнутой кривой на аттракторе. Описанный переход к колебательному режиму с ростом параметра  $\beta$  характеризуется конечной амплитудой возникающих колебаний и может рассматриваться как жесткое возбуждение колебаний. В этом случае возбуждение жестких колебаний не связано с локальными бифуркациями предельных множеств. Этот сценарий отличается от классических бифуркационных механизмов. Например, он отличается от субкритической бифуркации Андронова-Хопфа, при которой переход к автоколебательному режиму наблюдается после слияния неустойчивого предельного цикла и устойчивой неподвижной точки. В системе (9) бифуркационный переход определяется кусочно-линейной характеристикой мемристора (7). Бифуркации, вызванные кусочно-линейной нелинейностью, хорошо известны [78]. Они часто встречаются в механике [79], биологии [80], электронике [81–83], и это лишь некоторые из них. Выделяют различные виды таких бифуркаций. Одна из них – это С-бифуркации (border collision bifurcations). Они возникают, когда фазовая точка пересекает границу в фазовом пространстве между областями, в которых динамика системы различается. Этот класс бифуркаций изучался на примерах дискретных отображений [82, 84–86] и систем с непрерывным временем [87–89]. Описанное бифуркационное изменение в системе (9) является С-бифуркацией.

В системе (9) наблюдается бифуркация возникновения колебаний без параметра. При уменьшении модуля значения переменной  $z$  в точках  $z \in [-1; 1]$  происходит бифуркация и возникают колебания с бесконечно малой амплитудой, которая затем растет. Однако эту бифуркацию нельзя сопоставить с суперкритической бифуркацией Андронова-Хопфа, поскольку собственные значения точки равновесия при бифуркации меняются скачком.

### 1.3.2 Мягкое возникновение колебаний

Мягкое возникновение колебаний можно наблюдать в генераторе с мемристором Чуа (рисунок 1.1) в случае нелинейной характеристики активного элемента, которая задается полиномом третьей степени  $U_N(I) = -R_1I + R_3I^3$ . Тогда функция  $f(y)$  в системе (2) выражается как  $f(y) = -\beta_1y + \beta_3y^3$  и модель мемристивного генератора принимает вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - G_M(z)x, \\ \dot{y} = -x + \beta_1y - \beta_3y^3, \\ \dot{z} = x, \\ G_M(z) = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| \geq 1. \end{cases} \end{cases} \quad (20)$$

параметры  $\beta_1$  и  $\beta_3$  определяются вольт-амперной характеристикой нелинейного элемента.

Рассмотрим динамику системы (20) при фиксированных параметрах  $\beta_3 = 1$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 2$ . В системе (20) также как в (9) имеется непрерывное множество точек равновесия  $(0; 0; z \in (-\infty; +\infty))$ , образующих линию равновесий в фазовом пространстве, совпадающую с осью  $OZ$ . Собственные значения равновесий для систем (9) и (20) одинаковы (формулы (10)). Значение параметра  $\beta_1 = 0.02$  в системе (20) является бифуркационным значением, соответствующим

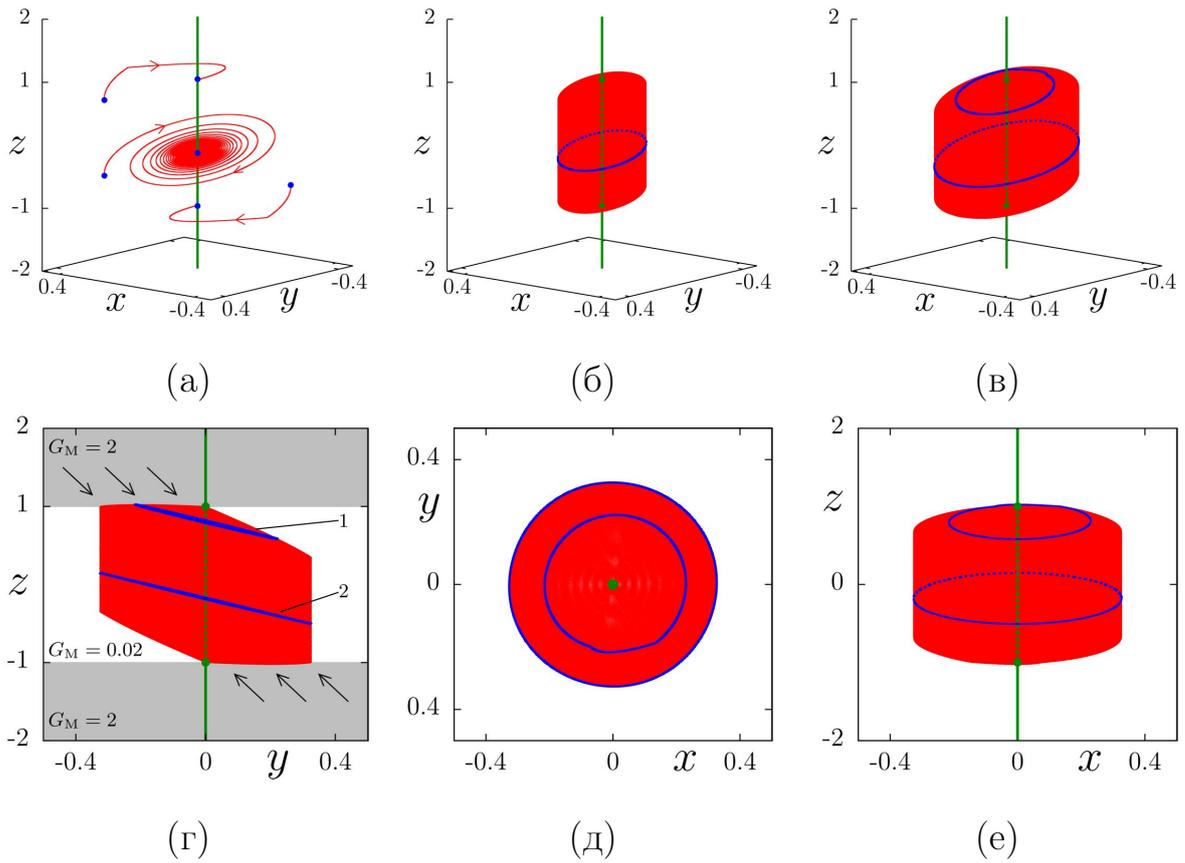


Рисунок 1.5. Траектории и аттрактор в фазовом пространстве системы (20): (а) движение к линии равновесий из различных начальных точек (траектории окрашены красным цветом) при  $\beta = 0.01$ ; (б) аттрактор системы при  $\beta = 0.05$ ; (в) аттрактор системы при  $\beta = 0.1$ ; (в)-(е) проекции аттрактора и инвариантных замкнутых кривых при  $\beta = 0.1$ ; На всех фрагментах: многообразие устойчивых равновесий показано зеленой сплошной линией; многообразие неустойчивых равновесий – зеленой пунктирной линией; двумерная поверхность, образованная многообразием инвариантных замкнутых кривых (окрашены в синий цвет), окрашена в красный цвет; точки, соответствующие начальным условиям, показаны синими кружками.

щим потере устойчивости равновесий ( $x = y = 0, z \in (-1; 1)$ ). Как и в случае постоянной отрицательной проводимости, после бифуркации аттрактор системы (20) состоит из непрерывного множества замкнутых кривых, которые образуют двумерной поверхности и множества устойчивых точек равновесия на оси OZ. Бифуркационные изменения проиллюстрированы на рисунке 1.5,а,б.

Однако, в отличие от системы (9), в этом случае плавное увеличение параметра  $\beta_1$  приводит к постепенному росту амплитуды колебаний  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$ , соответствующих движениям вдоль инвариантных замкнутых кривых (рисунков 1.5,б,в). С ростом параметра  $\beta_1$  радиус двумерной цилиндрической поверхности, образованной многообразием инвариантных замкнутых кривых, растет. Дальнейшее увеличение параметра  $\beta_1$  приводит к формированию аттрактора, идентичного аттрактору (риунок 1.5,в) системы (9).

**Квазигармонический анализ.** Проведем квазигармонический анализ колебаний, как и в разделе 1.3.1. Осцилляторная форма записи системы (20):

$$\ddot{x} = -x - G_M(z)\dot{x} + \beta_1(\dot{x} + G_M(z)x) - (\dot{x} + G_M(z)x)^3, \quad \dot{z} = x. \quad (21)$$

Будем искать квазигармоническое решение первого уравнения системы (21) на частоте  $\omega_0 = \sqrt{1 - \beta G_M(z)}$ . Два значения функции  $G_M(z)$  рассматриваются независимо друг от друга. Подставляя уравнения (12)-(14) в первое уравнение системы (21), приближаем все быстро осциллирующие члены к их средним значениям за один период  $T = 2\pi\omega_0$ , что дает

$$\begin{aligned} \omega_0 \frac{dA}{dt} = & -\frac{j(\omega^2 - 1)}{2}A - \frac{G_M(z)\omega_0}{2}A - \\ & - \frac{4\beta_1 - 3(G_M^2(z) + \omega_0^2)|A|^2}{8} (jG_M(z) - \omega_0) A. \end{aligned} \quad (22)$$

Уравнение (22) можно переписать как систему уравнений для действительной амплитуды и фазы:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\frac{G_M(z)}{2}\rho + \frac{4\beta_1 - 3(G_M^2(z) + \omega_0^2)\rho^2}{8}\rho, \\ \frac{d\phi}{dt} = \frac{3(G_M^2(z) + \omega_0^2)\rho^2}{8\omega_0}G_M(z). \end{cases} \quad (23)$$

Как и в предыдущем случае, задача анализа периодических решений в системе (21) сводится к анализу амплитудных уравнений. Амплитудное уравнение системы (23) имеет два стационарных решения. Первое решение,  $\rho_1 = 0$ , соответствует равновесиям ( $x = 0, y = 0, z \in (-\infty; +\infty)$ ), которые устойчивы при

$\beta < G_M(z)$  и неустойчивы для  $\beta > G_M(z)$ . Второе решение,  $\rho_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\beta_1 - G_M(z)}{G_M^2(z) + \omega_0^2}}$ , существует при  $\beta_1 > G_M(z)$  и соответствует множеству инвариантных кривых в окрестности состояний равновесия. Рассматривая два случая  $G_M(z) = 0.02$  и  $G_M(z) = 2$  для подпространств  $|z| < 1$  и  $|z| \geq 1$ , мы получаем следующую картину бифуркационных изменений при увеличении параметра  $\beta_1$ . При  $\beta_1 = 0.02$  устойчивые равновесия ( $x = y = 0; |z| < 1$ ) становятся неустойчивыми и в их окрестности появляются инвариантные замкнутые кривые. Амплитуда колебаний  $x(t)$ , соответствующая движению вдоль инвариантной замкнутой кривой, плавно увеличивается с ростом  $\beta_1$  по закону:

$$\rho(\beta_1) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\beta_1 - 0.02}{0.02^2 + 1}} \approx \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\beta_1 - 0.02}, \quad (24)$$

поскольку  $\omega_0 \approx 1$  вблизи линии равновесия  $x = y = 0$  (это следует из первого уравнения системы (21)). Такой сценарий возникновения колебаний в системе (20) соответствует суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа (мягкому механизму возникновения колебаний) при изменении управляющего параметра.

Проведенный анализ динамики системы (20) с помощью квазигармонического приближения позволяет прояснить структуру аттрактора после бифуркации. Аттрактор включает две полуоси устойчивых равновесий ( $x = y = 0; |z| \geq 1$ ) и замкнутую поверхность, состоящую из нескольких частей. Центральная часть образована непрерывным многообразием одинаковых инвариантных замкнутых кривых (одна из них — кривая 2 на рисунке 1.5, в-е). Центральная поверхность соответствует области пространства, где характер колебаний определяется свойствами нелинейного отрицательного сопротивления, аналогично автогенератору ван дер Поля. В этой области мгновенное значение  $z(t)$  не достигает единицы. Для центральной поверхности получена зависимость амплитуды колебаний  $x(t)$  от параметра  $\beta_1$  (24). Если значение  $|z(t)| = 1$  достигается один раз за период колебаний (например, кривая 1 на рисунке 1.5, в-е), то ограничение амплитуды колебаний осуществляется комбинированным воздействием нелинейного элемента и мемристора.

Как в случае постоянной отрицательной проводимости (Раздел 1.3.1), так и при нелинейной проводимости с кубической вольт-амперной характеристикой, в генераторе имеется бифуркация возникновения колебаний без параметра.

### 1.3.3 Экспериментальное исследование аналоговой модели мемристивного генератора с мемристором Чуа

В целях экспериментального исследования поведения мемристивного генератора была разработана специальная установка.

**Аналоговая модель генератора (9).** Схема экспериментальной установки, соответствующей генератору с мемристором Чуа и постоянной отрицательной проводимостью (уравнения (9)), представлена на рисунке 1.6. При проектировании экспериментальной установки использовались принципы аналогового моделирования [90, 91]. Мотивация выбора подобного типа экспериментов объясняется необходимостью регистрации мгновенных значений всех трех динамических переменных, в том числе и  $z(t)$ , определяющей режим работы мемристора и значения которой проблематично считывать в стандартном радиофизическом эксперименте с использованием реального мемристора. Главная часть аналоговой модели есть интегратор на базе операционного усилителя, напряжение на выходе которого  $U_{out}$  пропорционально интегралу от входного сигнала  $U_{in}$ :  $U_{out} = -\frac{1}{R_0 C_0} \int_0^t U_{in} dt$  или  $R_0 C_0 U_{out} = -U_{in}$ , где  $C_0$  и  $R_0$  – емкость и сопротивление конденсатора и резистора при интеграторе. Аналоговая модель системы (9) на рисунке 1.6,а содержит три интегратора U1, U2 и U8, напряжения на выходе которых принимаются за мгновенные значения динамических переменных  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$ . Затем сигналы подвергаются дальнейшей обработке в соответствии с правыми частями уравнений системы (9). Необходимые преобразования производятся посредством аналоговых умножителей AD633JN, инвертирующих и неинвертирующих усилителей на базе операцион-

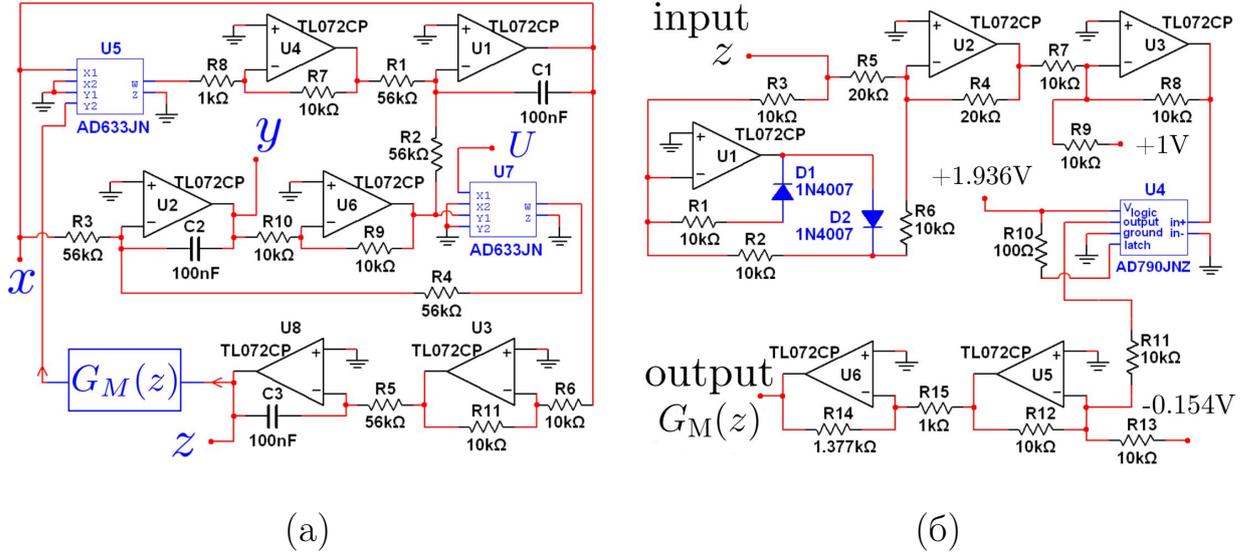


Рисунок 1.6. Схема экспериментальной установки (аналоговая модель системы (9)): (а) общая схема; (б) электронная реализация функции  $G_M(z)$  (7).

ных усилителей TL072CP. Преобразования в соответствии с функцией  $G_M(z)$  (рисунок 1.6,б) удалось добиться с помощью схемы, содержащей компаратор AD790JNZ. Полученные после преобразования сигналы подключаются к входам интеграторов. Реализации колебаний во времени снимались с помощью АЦП NI-PCI 6133 (производства компании National Instruments) с частотой дискретизации 50 кГц. Рабочее напряжение установки  $\pm 15$  В. Дальнейшая обработка и визуализация записанных временных рядов осуществляется на компьютере. Уравнения, описывающие работу экспериментальной установки, имеют вид:

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = y - G_M(z) + \xi_1(t), \\ R_0 C \dot{y} = -x + \beta y + \xi_2(t), \\ R_0 C \dot{z} = x + \xi_3(t), \\ G_M(z) = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| \geq 1. \end{cases} \end{cases} \quad (25)$$

где  $a = 0.02$ ,  $b = 2$ ,  $R_0 = R_{1-5} = 56$  кОм,  $C = 100$  нФ. Величина  $\beta$  контролируется напряжением  $U$  на входе аналогового множителя U7 так, что  $\beta = 0.1U$ . Система (25) содержит несколько источников шума  $\xi_{1-3}$ , которые обеспечива-

ются внутренними источниками шума, неточностью измерений и внешними шумовыми воздействиями. Важно отметить, что уравнения (25) не учитывают особенностей функционирования реальных операционных усилителей и их отличий от идеальных операционных усилителей. Например, учет малого, но ненулевого тока на входе операционных усилителей приводит к существованию чрезвычайно малой, но ненулевой постоянной в третьем уравнении систем (9).

Эксперименты подтвердили предположение о том, что поведение, наблюдаемое в системе (9), не может быть полностью реализовано экспериментально. В момент включения экспериментальной установки (начальные условия заданы приблизительно равными нулю) можно наблюдать колебания, траектории которых соответствуют верхней части многообразия, образующего аттрактор системы (9) при  $z > 0$ . Соответствующая часть графика, полученная экспериментально, показана на рисунке 1.7,а красным цветом. Таким образом, устой-

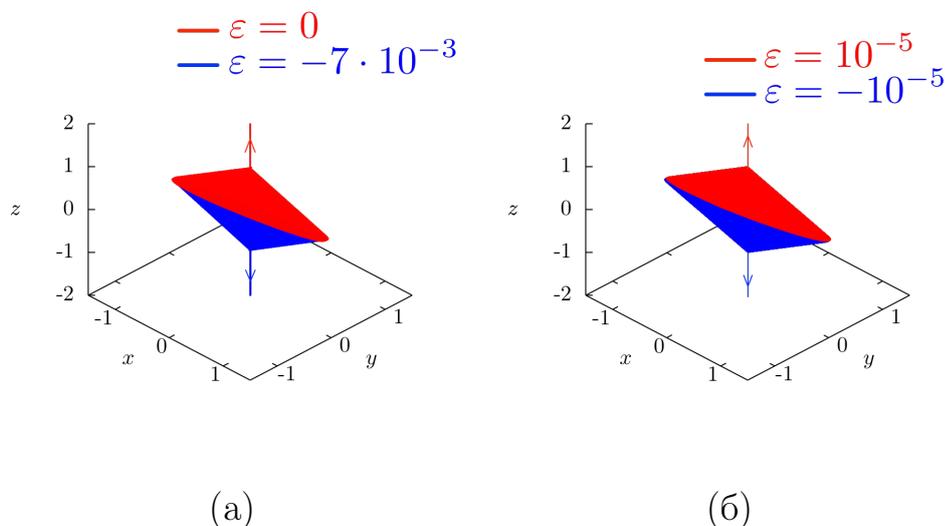


Рисунок 1.7. (а) Траектория, генерируемая аналоговой моделью мемристивного генератора (25), (б) Траектория системы (26), полученная в численном эксперименте. Параметры  $a = 0.02$ ,  $b = 2$ ,  $\beta = 0.05$ .

чивое предельное множество, получаемое при численном моделировании, не может быть получено в натуральных экспериментах. Наблюдается монотонный рост переменной  $z$ , что приводит к ее максимально возможному значению, ограни-

ченному напряжением питания +15 В. Подобное поведение можно получить численно (рисунок 1.7,б), добавив к третьему уравнению чрезвычайно малую величину  $\varepsilon$ . В этом случае система (9) может быть записана следующим образом:

$$\dot{x} = y - G_M(z)x, \quad \dot{y} = -x + \beta, \quad \dot{z} = x + \varepsilon. \quad (26)$$

Направление роста  $z$  в численном эксперименте зависит от знака  $\varepsilon$  (рисунок 1.7,б). Наличие пренебрежимо малых дополнительных величин  $\varepsilon$  в системе уравнений, описывающих экспериментальную схему, логично и реально. Это можно объяснить нестрогим соответствием между математическими моделями и реальными устройствами. Влияние постоянной величины  $\varepsilon$  оказывается более сильным по сравнению с влиянием шума, поскольку мы можем достичь очень низкого уровня шума в наших натуральных экспериментах. При наличии внешнего шума от специального широкополосного генератора шума, рисунок показан на рисунке 1.7,б разрушается, и переменная  $z$  быстрее достигает своего максимального значения. Малую величину  $\varepsilon$  можно добавить к третьему уравнению системы (25) в натуральных экспериментах. Изменение  $\varepsilon$  позволяет нам обратить движение в направлении оси  $OZ$  (направление роста  $z$  зависит от величины  $\varepsilon$ ).

**Аналоговая модель системы (20).** Для экспериментального исследования системы уравнений (20) была модернизирована установка, изображенная на рисунке 1.6. В схему на рисунке 1.6,а, были добавлены два умножителя AD633JN (U7 и U9) и два операционных усилителя TL072CP (U8 и U10), которые реализуют функцию  $f(y) = -\beta_1 y + \beta_3 y^3$ . Получившаяся схема показана на рисунке 1.8. С помощью платы сбора данных (National Instruments NI-PCI 6133) производилась запись сигналов с соответствующих выходов, обозначенных на рисунке 1.8. Все сигналы оцифровывались с частотой дискретизации 50 кГц.

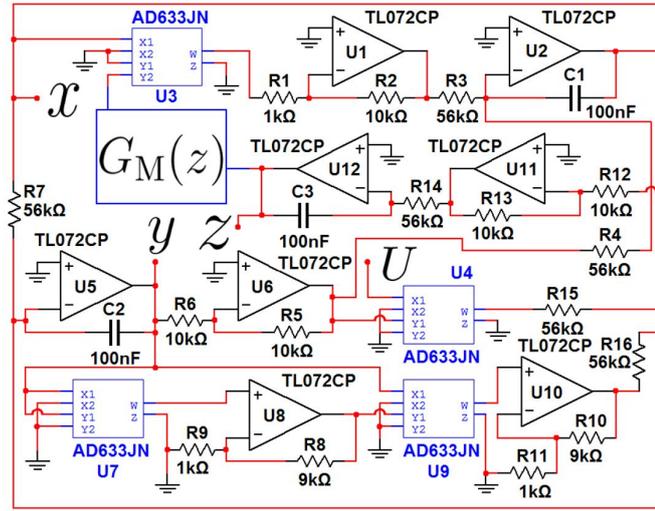


Рисунок 1.8. Схема аналоговой модели системы (20); электронная реализация функции  $G_M(z)$  показана на рисунке 1.6,б.

Схема на рисунке 1.8 описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} R_0 C \dot{x} = y - G_M(z) + \xi_1(t), \\ R_0 C \dot{y} = -x + \beta_1 y - \beta_3 y^3 + \xi_2(t), \\ R_0 C \dot{z} = x + \xi_3(t), \\ G_M(z) = \begin{cases} a, & |z| < 1, \\ b, & |z| \geq 1, \end{cases} \end{cases} \quad (27)$$

где  $a = 0.02$ ,  $b = 2$ ,  $R_0 = 56$  кОм,  $C = 100$  нФ. Величина  $\beta_1$  контролируется напряжением  $U$  на входе аналогового умножителя  $U4$  так, что  $\beta_1 = 0.1U$ . Параметр  $\beta_3 = 1$ . Уравнение (27) может быть преобразовано в уравнение (20) следующей подстановкой:  $t = t/\tau_0$ ,  $x = x/v_0$ ,  $y = y/v_0$ ,  $z = z/v_0$ ,  $\tau_0 = R_0 C_0 = 5.6$  мс – постоянная времени схемы,  $v_0 = 1$  В.

Уравнения, описывающие функционирование экспериментальной установки (27), не учитывают некоторых особенностей реальных операционных усилителей. Это имеет принципиальное значение, так как наличие ненулевой константы в третьем уравнении  $\dot{z} = x$  разрушает линию равновесия. Анализ точек равновесия в модифицированных системах (9) и (20) с третьим уравнением  $\dot{z} = x + \varepsilon$  подтверждает этот факт. Численно смоделированная динамика системы (20) для ненулевого  $\varepsilon$  хорошо согласуется с поведением эксперименталь-

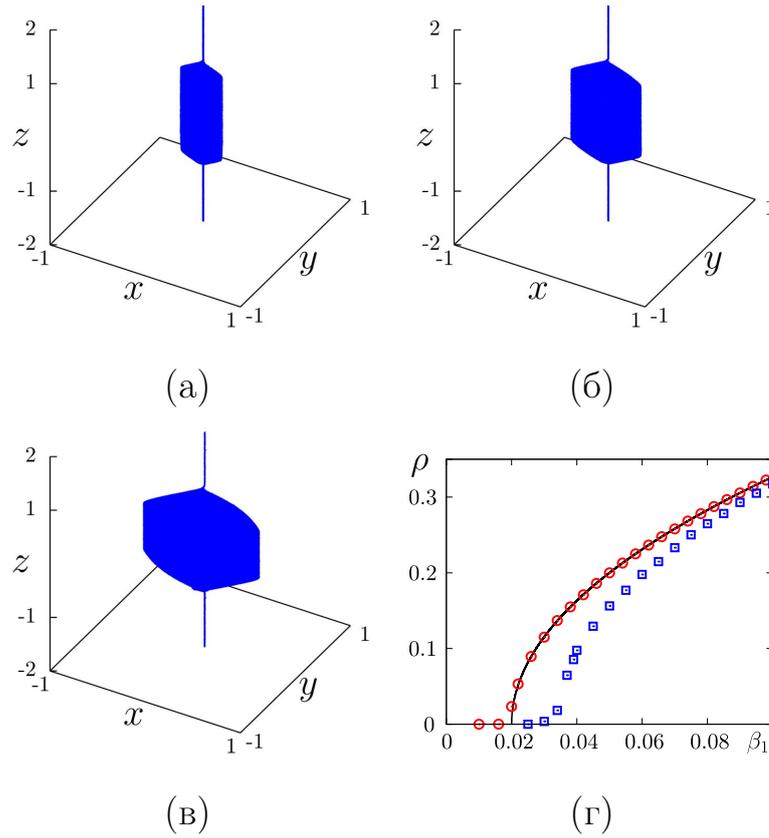


Рисунок 1.9. Траектория, создаваемая экспериментальной установкой (система (27)): (а)  $\beta_1 = 0.04$ ; (б)  $\beta_1 = 0.1$ ; (в)  $\beta_1 = 0.2$ . (г) Зависимость амплитуды колебаний  $x(t)$  системы (20), для которой  $|z(t)| < 1$ , от параметра  $\beta_1$ : полученная аналитически (сплошная черная линия) и зарегистрированная при численном моделировании (красные кружки). Зависимость максимальной амплитуды колебаний  $x(t)$  при работе экспериментальной установки (27) от параметра  $\beta_1$  показана синими квадратами.

ной установки (27). Подключив аддитивное постоянное напряжение ко входу интегратору U5 (рисунок 1.8), можно замедлить и обратить вспять монотонное движение вдоль оси OZ. Важно отметить, что монотонное движение вдоль оси OZ может быть замедлено и обращено вспять, но не может быть остановлено, поскольку невозможно с абсолютной точностью уравновесить влияние внутреннего параметра  $\varepsilon$  в реальных экспериментах. Поэтому стационарные колебательные режимы не могут быть получены в аналоговом эксперименте. В силу этих причин экспериментальное исследование динамики в зависимо-

сти от начальных условий не представляется возможным. Тем не менее, существует сходство между динамической моделью и экспериментальной установкой. В процессе  $z$ -координатного монотонного дрейфа (этот процесс ограничен напряжением питания) экспериментально полученная траектория очерчивает фигуру, очень похожую на аттрактор математической модели, соответствующий аналогичным значениям параметров (рисунок 1.8). Динамика экспериментальной установки с параметром роста  $\beta_1$  показала структурное изменение при  $\beta_1 \approx 0,03$ . Для  $\beta_1 > 0,03$  периодические колебания  $x(t)$  и  $y(t)$  индуцируются, когда значения  $z(t)$  находятся внутри диапазона  $(-1;1)$  (рисунок 1.9,а-в). Максимальная амплитуда колебаний  $x(t)$ , соответствующих прохождению через область  $z \in (-1;1)$ , постепенно увеличивается с ростом параметра  $\beta_1$ . Экспериментально зарегистрированная максимальная амплитуда колебаний  $x(t)$  близка к теоретически рассчитанной амплитуде колебаний, соответствующих движению по инвариантной замкнутой кривой в центральной части двумерной поверхности (как кривая 2 на рисунке 1.5,г) в математической модели фазового пространства (рисунок 1.9,г).

## 1.4 Мемристивный генератор с гладкой характеристикой мемристивного элемента

Рассмотрим динамику мемристивного генератора (рисунок 1.1) с постоянным отрицательным сопротивлением в случае, когда мемристивная проводимость имеет гладкую характеристику (8). Подобная система рассматривалась для случая мемристора Чуа в разделе 1.3.2. Уравнения исследуемой системы с гладкой характеристикой мемристора (8) записываются в следующем виде:

$$\dot{x} = y - G(z)x, \quad \dot{y} = -x + \beta y, \quad \dot{z} = x, \quad G_M(z) = a + bz^2, \quad (28)$$

где  $\beta$  — параметр, связанный с абсолютной величиной постоянного отрицательного сопротивления.  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$  — параметры проводимости мемристивного элемента.

Данная система, как и системы рассмотренные ранее, имеет линию равновесий, совпадающую с осью  $OZ$ . Собственные значения точек на линии равновесий получаются такими же, как у системы, рассмотренной в разделе 1.3.1 (выражение (10)). Увеличение параметра  $\beta$  приводит к следующим бифуркационным изменениям в фазовом пространстве. В случае  $0 \leq \beta < a$  аттрактором системы является многообразие устойчивых равновесий, и все траектории притягиваются к нему (рисунок 1.10,а). При  $\beta \geq a$  точки равновесия с координатой  $z \in \left(-\sqrt{\frac{\beta-a}{b}}; \sqrt{\frac{\beta-a}{b}}\right)$  становятся неустойчивыми, в то время как другие точки линии равновесий, с  $|z| > \sqrt{\frac{\beta-a}{b}}$ , остаются устойчивыми. Фазовые траектории, стартующие из окрестности  $(0; 0; |z| < \sqrt{\frac{\beta-a}{b}})$ , удаляются от исходного состояния по спирали. Это движение завершается движением по инвариантной замкнутой кривой (синяя линия на рисунке 1.10,б). Любые изменения начальных условий приводят к попаданию на другую инвариантную замкнутую кривую. При фиксированных параметрах и различных начальных условиях можно наблюдать различные стационарные режимы, то есть либо точку равновесия с  $|z| > \sqrt{\frac{\beta-a}{b}}$ , либо периодические колебания с различными амплитудами. Структура аттрактора изменяется при  $\beta = a$ . После бифуркации аттрактор состоит из непрерывного множества замкнутых кривых, образующих двумерную поверхность, и непрерывного множества точек на оси  $OZ$ , для которых  $|z| \geq \sqrt{\frac{\beta-a}{b}}$  (рисунок 1.10,в). Двумерная поверхность расширяется при увеличении параметра  $\beta$  (рисунок 1.10,в-е).

**Квазигармонический анализ.** Чтобы проанализировать эволюцию аттрактора, приведем систему (28) к осцилляторному виду:

$$\ddot{x} - (\beta - a)\dot{x} + (1 - \beta a)x = b\beta z^2 x - 2bx^2 z - bz^2 \dot{x}, \quad \dot{z} = x. \quad (29)$$

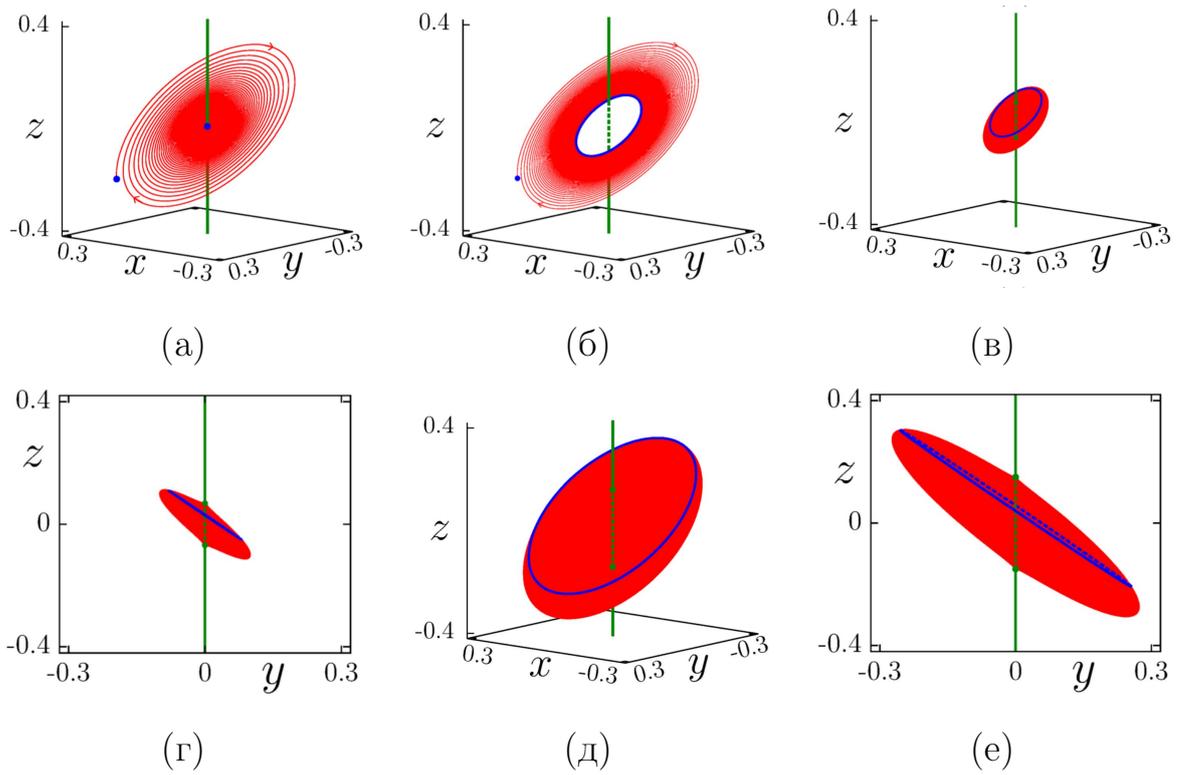


Рисунок 1.10. Траектории и аттрактор системы (28): (а) движение к линии равновесий (траектория окрашена красным цветом) для  $\beta = 0.01$ ; (б) движение к неизолрированной замкнутой кривой (окрашена синим цветом) для  $\beta = 0.022$ ; (в) Аттрактор при  $\beta = 0.022$  и его проекция (г); (д) Аттрактор при  $\beta = 0.035$  и его проекция (е). Многообразие устойчивых равновесий показано зеленой сплошной линией; многообразие неустойчивых равновесий показано зеленой пунктирной линией; точки, соответствующие начальным условиям, показаны синими заполненными кружками. Двумерная поверхность, образованная многообразием инвариантных замкнутых кривых, окрашена в красный цвет. Инвариантная замкнутая кривая на аттракторе окрашена в синий цвет.

Будем искать квазигармоническое решение первого уравнения системы (29) на частоте  $\omega_0 = \sqrt{1 - \beta a}$ . Представим переменную  $x(t)$  как

$$x(t) = \frac{1}{2}(A \exp(j\omega_0 t) + A^* \exp(-j\omega_0 t)), \quad (30)$$

где  $A(t)$  - комплексная амплитуда,  $A^*(t)$  - комплексно сопряженная функция. Предполагается, что выполняется следующее условие для первой производной:  $\frac{dA}{dt} \exp(j\omega_0 t) + \frac{dA^*}{dt} \exp(-j\omega_0 t) = 0$ . С учетом этого условия первая и вторая производные представляются как

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} (j\omega_0 A \exp(j\omega_0 t) - j\omega_0 A^* \exp(-j\omega_0 t)), \quad (31)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left( j\omega_0 \frac{dA}{dt} - \frac{\omega_0^2}{2} A \right) \exp(j\omega_0 t) - \left( j\omega_0 \frac{dA^*}{dt} + \frac{\omega_0^2}{2} A^* \right) \exp(-j\omega_0 t). \quad (32)$$

Используя (30), переменную  $z(t)$  можно приближенно задать в виде:

$$z(t) \approx \frac{1}{2j\omega_0} (A \exp(j\omega_0 t) - A^* \exp(-j\omega_0 t)) + z_0, \quad (33)$$

где  $z_0$  - начальное значение переменной  $z$ .

Подставим выражения (30)-(33) в первое уравнение системы (29), и усредняя все члены уравнения за период  $T = 2\pi/\omega_0$ , получим уравнение для комплексной амплитуды  $A$ :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{A}{2} \left( \beta - a - \frac{b|A|^2}{4\omega_0^2} - z_0^2 b \right) - \frac{jAb\beta}{2\omega_0} \left( \frac{|A|^2}{4\omega_0^2} + z_0^2 \right). \quad (34)$$

Уравнение (34) может быть переписано как система уравнений для вещественной амплитуды  $\rho$  и фазы  $\phi$ :

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{2} \left( \beta - a - \frac{b\rho^2}{4\omega_0^2} - bz_0^2 \right), \\ \frac{d\phi}{dt} = -\frac{b\beta}{2\omega_0} \left( \frac{\rho^2}{4\omega_0^2} + z_0^2 \right). \end{cases} \quad (35)$$

В рассматриваемом диапазоне значений параметра  $\beta$ , частота колебаний  $\omega_0$  близка к единице:  $\omega_0 = \sqrt{1 - \beta a} \approx 1$ . Определение существования периодического движения и бифуркаций в системе (29) сводится к анализу уравнения для вещественной амплитуды. Амплитудное уравнение системы (35) имеет два решения. Первое решение,  $\rho_1 = 0$ , соответствует точкам равновесия на оси  $OZ$ :  $x = 0, y = 0, z \in (-\infty; \infty)$ . При условии  $\beta = a$ , решение  $\rho_1$  устойчиво для

$|z_0| > \sqrt{\frac{\beta-a}{b}}$  и неустойчиво для  $|z_0| < \sqrt{\frac{\beta-a}{b}}$ . Второе вещественное решение:

$$\rho_2 = 2\sqrt{\frac{\beta-a}{b} - z_0^2} \quad (36)$$

появляется при  $\beta \geq a + z_0^2 b$ . Оно устойчиво и соответствует появлению замкнутых кривых в окрестности точек равновесия с координатами  $\left(x = y = 0, |z| = \sqrt{\frac{\beta-a}{b}}\right)$ . Следует отметить, что частота колебаний, соответствующих движениям вдоль неизолированных замкнутых кривых, зависит исключительно от значений параметров и не зависит от выбора  $z_0$ . Это связано с тем, что при подстановке значения  $\rho_2$  в выражение для  $\frac{d\phi}{dt}$  (второе уравнение системы (35)) получаем:  $\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\beta}{2}(\beta - a)$ .

Таким образом, выявляется следующая картина бифуркационных изменений в системе (28). Увеличение параметра  $\beta$  приводит к потере устойчивости равновесий с координатами  $(x = y = 0, z_0)$ , для которых выполняется условие  $|z_0| < \sqrt{\frac{\beta-a}{b}}$ . Когда точка равновесия теряет устойчивость, в ее окрестности появляется неизолированная замкнутая кривая. Амплитуда колебаний,  $\rho = \rho(\beta, z_0)$ , соответствующих движениям вдоль неизолированной замкнутой кривой, зависит как от параметра  $\beta$ , так и от координаты  $z(0) = z_0$  (уравнение (36)) и постепенно увеличивается, начиная с нуля, с ростом параметра  $\beta$  (рисунок 1.11,а). Такой сценарий мягкого возбуждения колебаний в системе (28) аналогичен суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа в нелинейных диссипативных системах с конечным числом изолированных точек равновесия. Более того, наблюдающийся рост амплитуды пропорционально корню квадратному из значения параметра надкритичности (36) характерен для систем с суперкритической бифуркацией Андронова-Хопфа. Однако, в отличие от классической бифуркации рождения предельного цикла, рассматриваемая бифуркация состоит в том, что возникающие в системе с линией равновесий периодические колебания не являются истинными самоподдерживающимися колебаниями в полном смысле этого слова, поскольку неизолированные замкнутые кривые в отдельности не являются аттракторами.

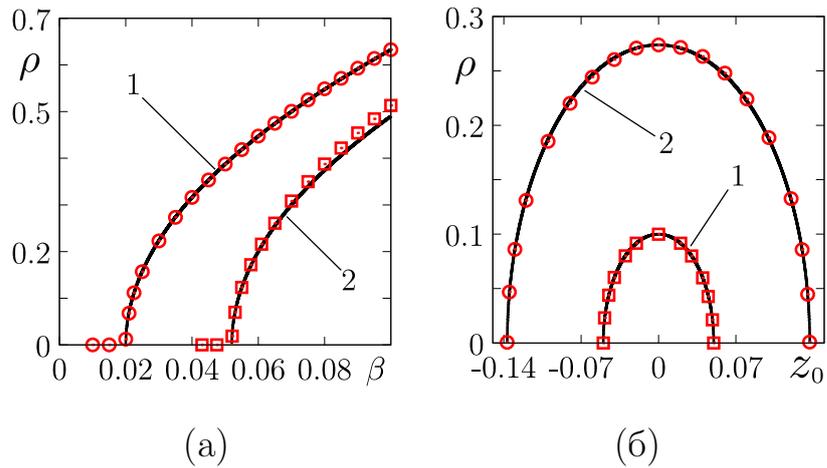


Рисунок 1.11. (а) Зависимости амплитуды  $\rho$  колебаний  $x(t)$  от параметра  $\beta$ , рассчитанные по формуле (36) для  $z_0 = 0$  (черная кривая 1) и  $z_0 = 0.2$  (черная кривая 2) и и полученные численно при соответствующих начальных условиях:  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$  (красные круги) и  $x_0 = y_0 = z_0 = 0.2$  (красные квадраты). (б) Зависимости амплитуды  $\rho$  колебаний  $x(t)$  от начального значения  $z_0$ , полученные по формуле (36) для  $\beta = 0.022$  (черная кривая 1) и  $\beta = 0.035$  (черная кривая 2) и рассчитанные численно при тех же значениях параметра для начальных условий  $x_0 = y_0 = 0$ . Другие параметры:  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ .

Зависимость (36) показывает, что бифуркацию можно наблюдать в случае фиксированного значения параметра  $\beta$ , изменяя начальное значение переменной  $z$ , т.е. имеет место бифуркация без параметра. Пусть  $a < \beta < 1$ . Тогда при  $|z_0| < \frac{\beta - a}{b}$  происходит мягкое возникновение колебаний, амплитуда которых растет как корень квадратный из модуля отклонения квадрата  $z_0$  от критического значения. При этом собственные значения точки равновесия в момент бифуркации плавно пересекают вещественную ось с ненулевой скоростью. Таким образом, бифуркация без параметра в данном случае является полным аналогом суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа.

## 1.5 Выводы по первой главе

В работе были проведены исследования нескольких модификаций генератора с мемристивной проводимостью. Они различаются видом вольт-амперной характеристики активного элемента и характеристики мемристивной проводимости. Важной особенностью всех рассмотренных модификаций генератора с идеальным мемристивным элементом является наличие в фазовом пространстве линии равновесий, совпадающей с координатной осью  $OZ$ , где  $z$  – переменная, управляющая мемристором. Динамика моделей мемристивного генератора исследовалась с применением совокупности различных методов: численных расчетов, квазигармонического анализа и аналогового моделирования. Были выяснены особенности структуры фазового пространства мемристивного генератора и происходящих в системе бифуркаций.

Было показано, что во всех рассмотренных случаях наличие оси равновесий приводит к особому характеру всех предельных множеств, формирующихся в фазовом пространстве системы. Так аттрактор системы в режиме существования колебаний состоит из поверхности, образованной непрерывным множеством замкнутых кривых, соответствующих периодическим колебаниям, и участков линии равновесий, образованных устойчивыми точками равновесия. При этом существует также отталкивающее предельное множество, представляющее собой отрезок линии равновесий, соответствующий неустойчивым точкам равновесия. В зависимости от начальных условий могут наблюдаться устойчивые состояния равновесия или колебания с различной амплитудой, которая плавно меняется при движении вдоль оси  $OZ$ . Также было показано, что наличие линии равновесий и связанный с ней особый характер предельных множеств приводят к особенностям происходящих в системе бифуркаций. Важным свойством бифуркаций в мемристивном генераторе является то, что они наблюдаются не только при изменении параметров, но также и при постоянных параметрах и

вариации начальных условий (бифуркации без параметров). Конкретный характер бифуркаций зависит от характера нелинейности активного элемента и мемристивной проводимости.

Было показано, что в генераторе с идеальным мемристором Чуа (имеющим кусочно-линейную характеристику, соответствующую двум постоянным значениям проводимости в зависимости от управляющей переменной  $z$ ) при вариации параметра, управляющего подкачкой энергии в систему, могут наблюдаться как жесткий, так и мягкий сценарии возникновения колебаний. Особенность как жестких, так и мягких бифуркационных сценариев в генераторе с мемристором Чуа состоит в том, что в них принимают участие непрерывные множества точек равновесия и замкнутых кривых. Характер бифуркации определяется видом вольт-амперной характеристики активного элемента.

В генераторе с идеальным мемристором, проводимость которого задается гладкой функцией управляющей переменной  $z$ , был установлен мягкий сценарий возникновения колебаний. Он аналогичен суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. В результате бифуркации в этом случае рождается множество замкнутых кривых бесконечно малого радиуса, амплитуда которых растет при увеличении значения управляющего параметра системы.

Кроме бифуркаций, происходящих при вариации управляющего параметра, во всех рассмотренных моделях генератора с мемристором Чуа были установлены бифуркации без параметра. В случае постоянной отрицательной проводимости и активного элемента с кубической вольт-амперной характеристикой бифуркация без параметра носит характер: при смещении вдоль линии равновесий (вдоль оси  $OZ$ ) в направлении уменьшения абсолютной величины переменной  $z$  происходит рождение замкнутой кривой бесконечно-малого радиуса. Затем размер замкнутой кривой растет до некоторого значения.

Численное и аналоговое моделирование показало, к каким изменениям в динамике системы приводит неидеальный характер мемристивного элемента. Если время памяти мемристора сколь угодно велико, но конечно, то в фазовом

пространстве не существует линии равновесий. Вместо нее остается единственная точка равновесия в начале координат. Предельное множество, состоящие из неизолированных замкнутых орбит вырождаются в единственный предельный цикл. Описанные выше бифуркации превращаются в «обычные» бифуркации предельных циклов, наблюдающиеся при изменении управляющего параметра. Однако если мемристивный элемент близок к идеальному мемристору в системе наблюдаются длительные переходные процессы, в течении которых фазовая траектория может находиться вблизи аттрактора системы с идеальным мемристором, воспроизводя форму соответствующей поверхности.

## Глава 2. Синхронизация мемристивных систем

### 2.1 Введение

Во второй главе диссертационной работы рассматриваются особенности синхронизации в мемристивных системах. При этом выделяются две задачи: синхронизация колебаний мемристивных генераторов с «обычной» диссипативной связью и синхронизация «обычных» автоколебательных систем, взаимодействующих через мемристор.

Важность первой из указанных задач связана с вопросом об автоколебательном характере поведения мемристивных генераторов. Действительно, притягивающее предельное множество в фазовом пространстве мемристивного генератора, рассмотренного в Главе 1, может включать непрерывное множество замкнутых орбит, заполняющих некоторую двумерную поверхность в трехмерном фазовом пространстве. Каждая из таких кривых соответствует установившемуся периодическим колебаниям диссипативной системы, но не является предельным циклом Андронова-Пуанкаре, поскольку не является изолированной, т.е. в любой сколь угодно малой окрестности такой кривой имеется множество подобных. Возникает естественный вопрос, можно ли периодические колебания в автономной мемристивной системе считать автоколебательным процессом. С одной стороны, система, демонстрирующая данный колебательный режим, является автономной, нелинейной и диссипативной и, соответственно, должна рассматриваться как автоколебательная. С другой стороны, образом периодических автоколебаний служит предельный цикл, что не является справедливым в данном случае. Автоколебательный характер процесса в системе с отмеченными особенностями динамики может быть подтвержден существованием эф-

фекта частотно фазовой синхронизации (синхронизация Гюйгенса), являющегося одним из фундаментальных свойств автоколебаний [47]. Взаимодействие автоколебательных систем, содержащих мемристоры, рассматривалось в ряде работ, например в [36]. В них показана возможность адаптивной синхронизации мемристивных систем, в том числе в режиме гиперхаоса. Однако работ, в которых бы был установлен захват частот и фаз в мемристивных системах, а также работ, посвященных вынужденной синхронизации при анализе научной литературы не было обнаружено. В настоящей главе диссертации представлены результаты исследования как вынужденной синхронизации мемристивного генератора, так и взаимной синхронизации двух мемристивных генераторов.

Во второй задаче мемристор используется в качестве элемента связи автоколебательных систем, которые сами по себе не являются мемристивными. Мемристивные связи могут играть существенную роль в ансамблях реальных нейронов, взаимодействующих сложным образом через электрические и магнитные поля [26, 32–35]. Работ, посвященных особенностям взаимодействия мемристивно связанных автоколебательных систем, в настоящее время имеется не так много. Динамика двух мемристивно-связанных периодических автогенераторов (автогенераторов ван дер Поля) исследовались экспериментально на аналоговой модели радиотехнической цепи в [67, 69]. Было показано явление захвата основной частоты колебаний в определенной области значений частотной расстройки. В работе [33, 58] исследовалась синхронизация импульсов зажигания в двух нейронах Хиндмарша-Розе со связью через «неидеальную» мемристивную проводимость. Нейрон Хиндмарша-Розе может демонстрировать как периодические так и хаотические последовательности импульсов зажигания. Показана синхронизация зажигания в хаотическом и периодическом режимах. Также рассмотрено влияние параметров мемристивной связи на частоту зажигания взаимодействующих нейронов. Системы с хаотической динамикой, взаимодействующие через идеальную мемристивную проводимость, также исследовались в ряде работ. Так в [54, 55] рассматриваются два хаотических осциллятора

Чау с однонаправленной [54] и взаимной [55] мемристивной связью. В обоих случаях был установлен эффект полной хаотической синхронизации. В ряде работ мемристоры применяются в адаптивных цепочках связи, например, в [56, 57]. Однако в отмеченных работах не была установлена систематическая зависимость границ частотной или полной синхронизации от начального состояния мемристора связи. В настоящей главе диссертации рассматриваются особенности синхронизации как периодических автогенераторов, взаимодействующих через мемристор, так и генераторов хаоса. В качестве периодического генератора выбрана базовая модель автоколебательной системы — осциллятор ван дер Поля. Рассматривается эффект захвата частот и фаз взаимодействующих осцилляторов с расстройкой частот. В качестве модели хаотического генератора выбран радиофизический генератор с инерционной нелинейностью Анищенко-Астахова. В этом случае рассматривается полная синхронизация хаоса в двух идентичных хаотических генераторах. Особенности полной хаотической синхронизации при взаимодействии через мемристивный элемент также смоделированы с помощью двух определенным образом связанных логистических отображений.

Важным вопросом в исследовании эффектов синхронизации мемристивных систем, который также рассматривается в диссертационной работе, является влияние неидеального характера мемристивных элементов на наблюдаемые эффекты синхронизации. Такое влияние практически не изучено. Очевидно, что реальные мемристоры обладают конечным временем памяти. С учетом этого зависимость от начального состояния в мемристивной системе с течением времени исчезает. В диссертации рассматривается вопрос, будет ли ограничение времени памяти реального мемристора проявляться в задачах синхронизации, если скорость «забывания» достаточно мала и в элементе связи происходит длительный переходный процесс.

Результаты проведенных исследований эффектов синхронизации мемристивных систем опубликованы в работах [67–70, 73].

## 2.2 Вынужденная синхронизация мемристивных автогенераторов

### 2.2.1 Математическая модель мемристивного генератора с внешним воздействием

На рисунке 2.1 показана схема мемристивного генератора с колебательным контуром, содержащим постоянное отрицательное сопротивление  $U_N(I) = -RI$  и мемристор с гладкой характеристикой (8). Аналогичная схема рассмат-

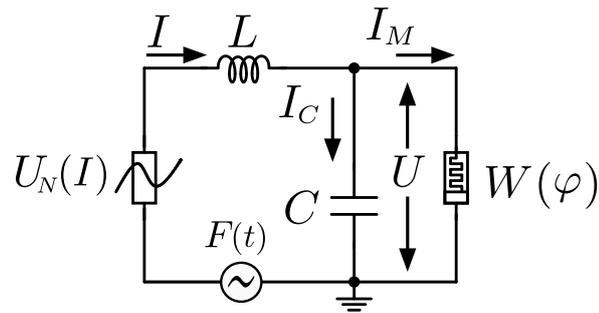


Рисунок 2.1. Схема исследуемой мемристивной системы с внешним воздействием

ривалась ранее в разделе 1.4, но теперь в неё добавлено внешнее гармоническое воздействия  $F(t)$ . Уравнения системы в нормированных переменных имеют вид:

$$\dot{x} = y - G(z)x, \quad \dot{y} = -x + \beta y + F(t), \quad \dot{z} = x, \quad G_M(z) = a + bz^2, \quad (2.1)$$

где  $x \sim U$  — напряжение на емкости  $C$ ,  $y \sim I$  — ток через индуктивность  $L$ ,  $z \sim \varphi$  — магнитный поток, управляющий мемристором,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — безразмерные параметры ( $\alpha \sim 1/C$ ,  $\beta \sim R/L$ ),  $G_M$  — проводимость мемристора, управляемая магнитным потоком,  $F(t) = B \cos(\omega_{ex}t)$  — гармоническое внеш-

нее воздействие. Параметры мемристора имеют следующие значения:  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ . Также, для простоты, положим  $\alpha = 1$ .

В отсутствии внешнего воздействия (при  $B = 0$ ) система (2.1) демонстрирует динамику, которая была рассмотрена в разделе 1.4.

## 2.2.2 Квазигармонический анализ неавтономного мемристивного генератора

Будем полагать неавтономные колебания мемристивного генератора на частоте воздействия  $\omega_{ex}$  близкими к гармоническим и представим динамические переменные в виде:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} (A(t)e^{j\omega_{ex}t} + A^*(t)e^{-j\omega_{ex}t}), \\ \dot{x}(t) &= \frac{j\omega_{ex}}{2} (A(t)e^{j\omega_{ex}t} - A^*(t)e^{-j\omega_{ex}t}), \\ z(t) &= z_0 - \frac{j}{2\omega_{ex}} (A(t)e^{j\omega_{ex}t} - A^*(t)e^{-j\omega_{ex}t}), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $A(t) = \rho(t)e^{j\phi(t)}$  — комплексная амплитуда колебаний, которая предполагается медленно меняющейся функцией по сравнению с периодом колебаний  $T_{ex} = 2\pi/\omega_{ex}$ ,  $z_0 = z(0)$  — начальное значение переменной  $z$ ,  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица, знак «\*» означает комплексное сопряжение. Выражение для переменной  $z(t)$  соответствует предположению  $x(0) = 0$ . Применяв метод усреднения, приходим к следующему усредненному уравнению для комплексной амплитуды:

$$\dot{A} = \frac{A}{2} \left( \beta - a - \frac{b|A|^2}{4\omega_{ex}^2} - bz_0^2 \right) - \frac{jA}{2} \left[ 2\Delta + \frac{b\beta}{\omega_{ex}} \left( z_0^2 + \frac{|A|^2}{4\omega_{ex}^2} \right) \right] - \frac{jB}{2\omega_{ex}}, \quad (2.3)$$

где введен параметр расстройки

$$\Delta = \frac{\omega_{ex}^2 - \omega_0^2}{2\omega_{ex}^2} \approx \omega_{ex} - \omega_0, \quad (2.4)$$

где  $\omega_0 = 1 - \beta a$  — собственная частота автоколебаний в отсутствии воздействия.

Если положить  $B = 0$ ,  $\Delta = 0$  и заменить  $\omega_{ex}$  на  $\omega_0$ , то уравнение (2.3) полностью совпадет с соответствующим уравнением для комплексной амплитуды мемристивной системы (2.1) в автономном случае (раздел 1.4). Разделяя вещественную и мнимую части равенства, получаем систему двух уравнений для вещественной амплитуды  $\rho$  и фазы  $\phi$ :

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \frac{\rho}{2} \left( \beta - a - bz_0^2 - \frac{b\rho^2}{4\omega_{ex}^2} \right) - \frac{B}{2\omega_{ex}} \sin \phi, \\ \dot{\phi} = -\Delta - \frac{b\beta}{2\omega_{ex}} \left( z_0^2 + \frac{\rho^2}{4\omega_{ex}^2} \right) - \frac{B}{2\rho\omega_{ex}} \cos \phi. \end{cases} \quad (2.5)$$

Здесь фаза  $\phi$  представляет собой мгновенную разность фаз внешнего воздействия и колебаний мемристивного генератора. Из этих уравнений видно, что начальное значение переменной  $z$ , управляющей мемристивной проводимостью, влияет не только на амплитуду колебаний, но и на динамику разности фаз колебаний и внешней силы.

Будем считать, что частота воздействия  $\omega_{ex}$  близка к собственной частоте  $\omega_0 \approx 1$ , а амплитуда колебаний  $\rho$  мало отличается от амплитуды невозмущенных колебаний  $\rho_0$  при тех же начальных условиях и том же начальном значении  $z_0$ :

$$\rho_0 = 2\sqrt{\frac{\beta - a}{b} - z_0^2}. \quad (2.6)$$

В сделанных предположениях можно приближенно описать явление вынужденной синхронизации только уравнением динамики фазы  $\phi$ :

$$\dot{\phi} = -\Delta_{eff} - \frac{B}{2\rho_0} \cos \phi, \quad (2.7)$$

где  $\Delta_{eff}$  - параметр эффективной расстройки:

$$\Delta_{eff} = \Delta + \frac{\beta}{2}(\beta - a). \quad (2.8)$$

Уравнение (2.7) представляет собой простейшую модель фазовой синхронизации, известную как уравнение Адлера. Из него следует условие захвата фазы, когда разность фаз колебаний и воздействия постоянна:

$$|\Delta_{eff}| \leq \frac{B}{2\rho}. \quad (2.9)$$

После подстановки в фазовое уравнение системы (2.5) значения  $\rho_0$  вместо  $\rho$  зависимость эффективной расстройки от начального значения  $z_0$  исчезает, однако приведенная амплитуда воздействия  $\frac{B}{2\rho}$  зависит от величины  $z_0$ . Это обстоятельство приводит к эффекту влияния начального значения переменной  $z$  на фазовый захват. Граница области захвата, соответствующая равенству в (2.8), непрерывно смещается в некоторых пределах изменения  $z_0$ .

В присутствии воздействия средняя частота автоколебаний  $\tilde{\omega}_0$  отличается от невозмущенного значения  $\omega_0$ . При этом можно ввести среднюю разностную частоты (частоту биений)

$$\Omega = \langle \dot{\phi} \rangle = \langle \tilde{\omega}_0(t) \rangle - \omega_{ex} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t}, \quad (2.10)$$

которая в области синхронизации равна нулю, так как частота автоколебаний равна частоте воздействия. Скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по времени. Для фазовой модели (2.7) частота биений определяется приближенным выражением

$$\Omega = \sqrt{\Delta_{eff}^2 - \left(\frac{B}{2\rho_0}\right)^2}. \quad (2.11)$$

С учетом (2.4) и (2.8) можно получить зависимость частоты биений  $\Omega$  от частоты воздействия  $\omega_{ex}$ :

$$\Omega = \sqrt{\left(\frac{\omega_{ex}^2 - (1 - \beta a)^2}{2\omega_{ex}^2} + \frac{\beta}{2}(\beta - a)\right)^2 - \left(\frac{B}{2\rho_0}\right)^2}. \quad (2.12)$$

### 2.2.3 Сравнение численных результатов с анализом приближенной фазовой модели

При численном исследовании синхронизации мгновенная фаза колебаний определялась по результатам интегрирования уравнений (2.1) как

$$\Phi(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \pm \pi k, \quad (2.13)$$

где  $k$  целочисленная переменная, значение которой в каждый момент времени определяется исходя из требования непрерывности функции  $\Phi(t)$ . Далее, зная разность фаз  $\phi(t) = \Phi(t) - \omega_{ex}t$ , легко рассчитать среднюю частоту биений (2.11). При малых значениях амплитуды воздействия можно ожидать достаточно хорошего совпадения результатов, полученных для исходных уравнений (2.1) и приближенной модели (2.7).

Были проведены расчеты зависимости средней частоты биений  $\Omega$  от частоты внешнего воздействия  $\omega_{ex}$  для уравнений (2.1) при начальных условиях  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$  и с использованием приближенного выражения (2.12). Результаты для двух значений амплитуды воздействия приведены на рисунке 2.2 а,б. При амплитуде воздействия  $B = 0.002$  наблюдается хорошее совпадение численного результата и приближенной оценки (2.12) (рисунок 2.2 а). В то же время при  $B = 0.003$  уже заметны некоторые отличия в ширине области синхронизации. Кроме того, меняется механизм синхронизации (рисунок 2.2 б). Резкий скачок частоты биений на границе области синхронизации при численном моделировании (2.1), свидетельствует о том, что при  $B = 0.003$  механизмом синхронизации является подавление автоколебаний, которое не может быть описано с помощью фазовой модели (2.7).

Различия в характере границы области синхронизации при  $B = 0.002$  и  $B = 0.003$  проиллюстрированы на рисунке 2.2 в,г с помощью системы укороченных уравнений (2.5) для амплитуды и фазы. Так как в правых частях уравнений (2.5) есть деление на  $\rho$ , то интегрирование системы осуществлялось с начальными условиями, несколько отличными от нулевых:  $\rho(0) = 0.0001$ ,  $\phi(0) = 0$ ,  $z(0) = 0$ . Малость значения  $\rho(0)$  обеспечивала выход на практически тот же самый установившийся режим, что и нулевые начальные условия в системе (2.1). На рисунке 2.2 в, г приведены фазовые портреты на плоскости переменных  $\rho \cos \phi$ ,  $\rho \sin \phi$  для системы укороченных уравнений (2.5). На каждом фрагменте показаны результаты, для трех значений частоты  $\omega_{ex}$ : вблизи области синхронизации (кривые 1 и 2) и в области синхронизации (точка

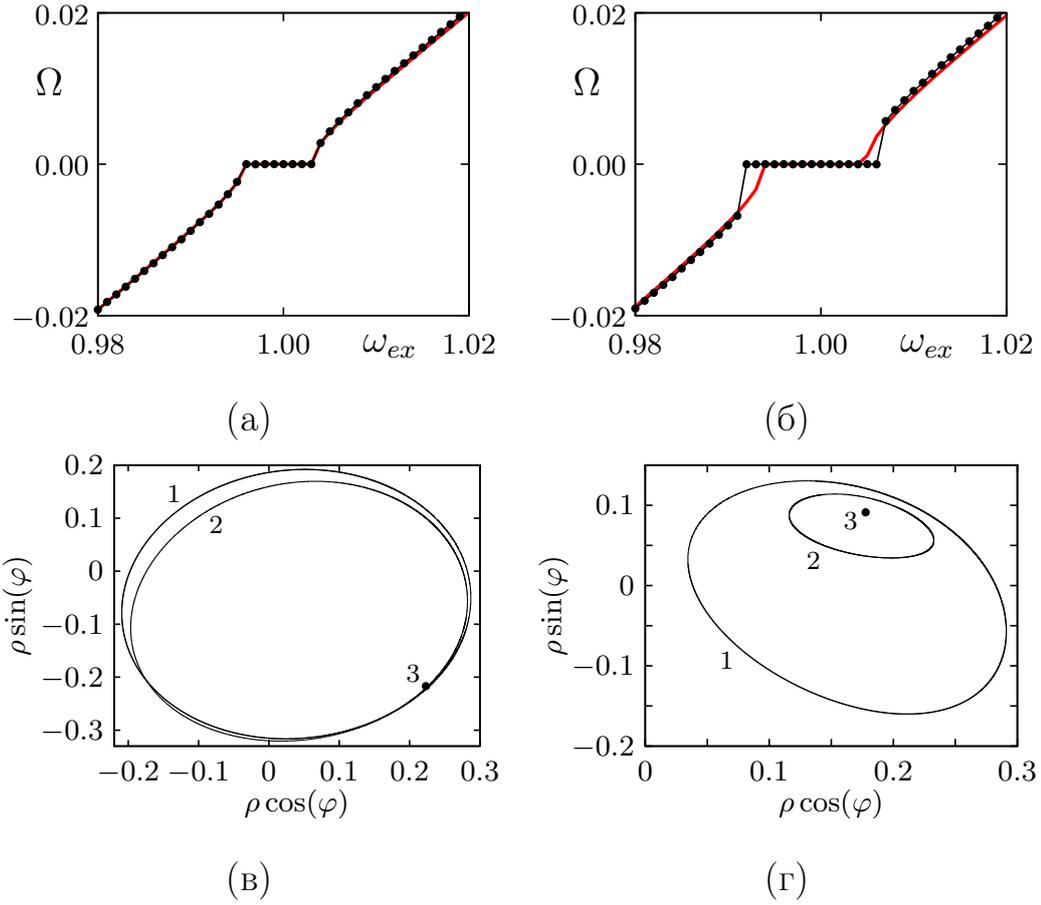


Рисунок 2.2. Зависимости частоты биений  $\Omega$  от частоты внешнего воздействия  $\omega_{ex}$ , полученные численно для уравнений (2.1) (черные кружки) и с использованием приближенного выражения (2.12) (красная линия) при  $B = 0.002$  (а) и  $B = 0.003$  (б); Фазовые портреты системы укороченных уравнений (2.5) при  $B = 0.002$ ,  $\omega_{ex} = 0.993$  (кривая 1), 0.995 (кривая 2), 0.997 (кривая 3) (в) и  $B = 0.003$ ,  $\omega_{ex} = 0.992$  (кривая 1), 0.9925 (кривая 2), 0.9928 (кривая 3) (г). Начальные условия для системы (2.1):  $x(0) = y(0) = z(0) = 0$ .

Начальные условия для укороченных уравнений (2.5):

$$\rho(0) = 0.0001, \quad \varphi(0) = 0, \quad z(0) = 0. \quad \text{Другие параметры: } \beta = 0.035, \quad a = 0.02, \\ b = 0.8.$$

равновесия 3). В случае, представленном на рисунке 2.2,в, точка равновесия возникает на замкнутой кривой, что свидетельствует о SNIPER бифуркации (a saddle-node infinite period (SNIPER) bifurcation), характерной для границы захвата фазы. На рисунке 2.2,г видно, что при приближении к границе синхро-

низации замкнутые кривые стягиваются в точку, т.е. имеет место бифуркация Андронова-Хопфа, соответствующая подавлению автоколебаний внешним воздействием.

Как показывают приведенные выше результаты, фазовая модель хорошо описывает вынужденную синхронизацию в мемристивном генераторе (2.1) только при очень маленьких амплитудах воздействия. Так при  $z(0) = 0$  хорошее соответствие наблюдается только при  $B \leq 0.002$ . Однако фазовая модель отражает принципиальную особенность синхронизации мемристивного генератора — зависимость эффекта синхронизации от начальных условий, в частности от начального значения переменной, управляющей мемристором  $z(0) = z_0$ . Вообще говоря, амплитуда автономных колебаний, а значит и граница синхронизации в системе (2.1), зависят не только от  $z(0)$ , но также и от начального значения  $x(0)$ . Однако при выводе укороченных уравнений (2.5), полагалось, что  $x(0) = 0$ . Рассмотрим, как влияет значение  $z_0$ , на режим синхронизации. На рисунке 2.3 приведены области синхронизации, полученные численно для ис-

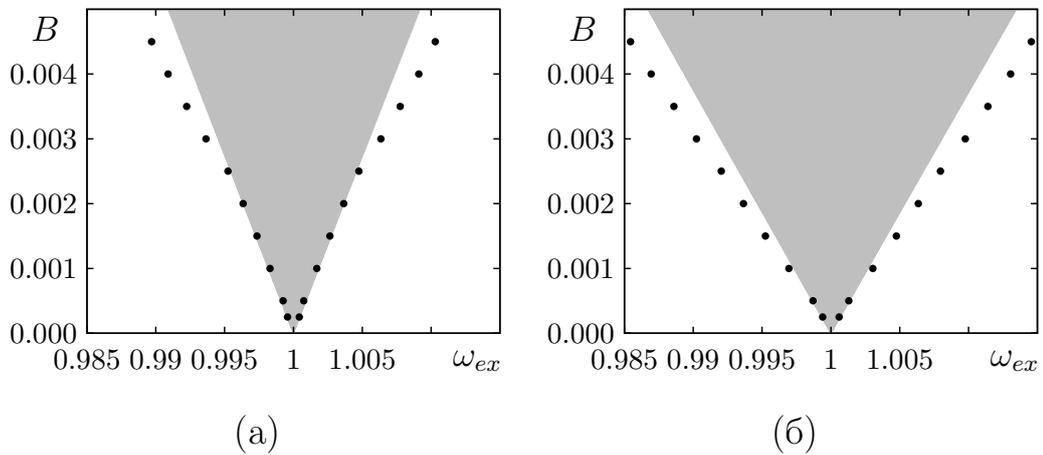


Рисунок 2.3. Области синхронизации мемристивного генератора для двух начальных значений переменной  $z$ :  $z_0 = 0$  (а) и  $z_0 = 0.1$  (б) при  $x(0) = y(0) = 0$ . Черные кружки соответствуют границам области синхронизации, полученным численно для системы (2.1), серая область — область синхронизации в соответствии с (2.9). Параметры системы:  $\beta = 0.035$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$

ходной системы (2.1) и с помощью приближенного выражения (2.9), для двух

начальных значений переменной  $z$ :  $z_0 = 0$  (рисунок 2.3,а) и  $z_0 = 0.1$  (рисунок 2.3,б) при  $x(0) = y(0) = 0$ . Можно видеть существенное различие в ширине области синхронизации, как при численном исследовании исходных уравнений генератора, так и при использовании фазового приближения.

Следует подчеркнуть, что зависимость установившегося синхронного или несинхронного режима не является следствием обычной мультистабильности (т.е. сосуществования нескольких аттракторов в фазовом пространстве системы (2.1)). Границы области синхронизации непрерывным образом смещаются при изменении начального значения  $z_0$  как это следует из приближенной фазовой модели. Для подтверждения данного эффекта на рисунке 2.4 приведена зависимость интервала значений параметра расстройки  $\Delta$ , при которых наблюдается

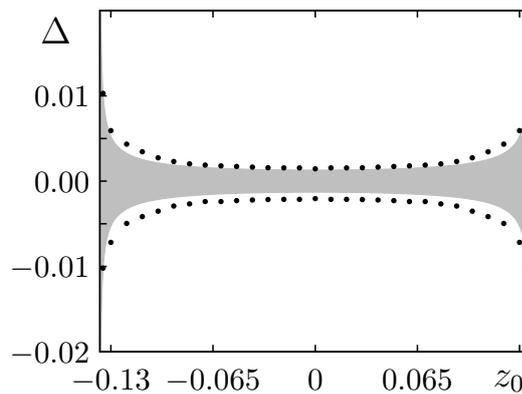


Рисунок 2.4. Интервал значений параметра частотной расстройки  $\Delta$ , соответствующий режиму вынужденной синхронизации мемристивного генератора, в зависимости от начального значения  $z_0$  при  $B = 0.001$ ,  $x(0) = y(0) = 0$ . Черные кружки соответствуют численному исследованию системы (2.1), серая область — выполнению условий (2.9) для фазовой модели. Параметры системы:  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.035$ ,  $\gamma = 1$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$

синхронизация, от значения  $z_0$ , полученная при  $B = 0.001$ ,  $x(0) = y(0) = 0$ . Результаты, полученные для исходной системы (2.1), сравниваются с приближенными аналитическими результатами, полученными в соответствии с (2.5). Поскольку значение амплитуды воздействия выбрано малым, то наблюдается хорошее соответствие результатов численного исследования исходной системы

и аналитической оценки зависимости в фазовом приближении. Ширина области синхронизации минимальна при  $z_0$  и увеличивается с ростом  $|z_0|$ , стремясь к бесконечности при достижении некоторых граничных значений  $z_0 = \pm z_m$ . Оценка на основании фазовой модели (2.8) дает значение

$$z_m = \sqrt{\frac{\beta - a}{b}} \approx 0.13693. \quad (2.14)$$

При  $|z_0| \geq z_m$  биения не наблюдаются вне зависимости от амплитуды воздействия. Очевидно это связано с тем фактом, что в этом случае в автономном генераторе (2.1) колебания отсутствуют и траектории стремятся к устойчивому равновесию (одной их точек на оси  $0Z$  с координатой  $|z| \geq z_m$ )).

## 2.3 Взаимная синхронизация диссипативно связанных мемристивных генераторов

### 2.3.1 Исследуемая система

Исследуемая система представляет собой два мемристивных генератора, взаимодействующих через обычную проводимость (диссипативная связь). На рисунке 2.5 приведена схема исследуемой системы. Она состоит из двух идентич-

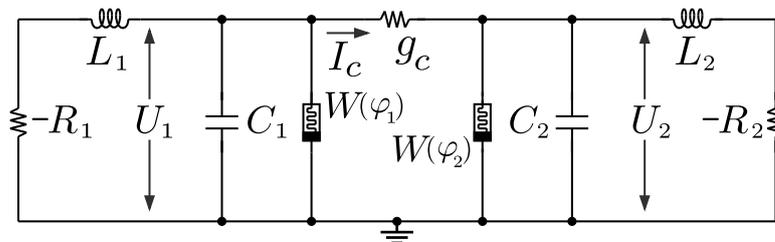


Рисунок 2.5. Радиотехническая схема двух диссипативно связанных мемристивных генераторов.

ных RLC-контуров с постоянной отрицательной проводимостью и мемристивными элементами с гладкой характеристикой (8). Парциальный мемристивный генератор был подробно описан в Главе 1. Уравнения системы в безразмерных переменных имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 - G_M(z_1)x_1 + k(x_2 - x_1), & \dot{y}_1 = -x_1 + \beta y_1, & \dot{z}_1 = x_1 - \delta z_1, \\ \dot{x}_2 = y_2 - G_M(z_2)x_2 - k(x_2 - x_1), & \dot{y}_2 = p(-x_2 + \beta y_2), & \dot{z}_2 = x_2 - \delta z_2, \\ G_M(z_1) = a + bz_1^2, & G_M(z_2) = a + bz_2^2 \end{cases} \quad (2.15)$$

Переменные  $x_1, x_2$  представляют собой нормированные напряжения на конденсаторах  $C_1, C_2$ ;  $y_1, y_2$  - токи через индуктивности  $L_1, L_2$ ;  $z_1, z_2$  - переменные, управляющие мемристивными проводимостями (мемристивные переменные). Парциальные генераторы полагаются идентичными за исключением расстройки частот. Этого можно добиться, если все элементы двух генераторов на рисунке 2.5 выбрать одинаковыми за исключением индуктивностей  $L_1, L_2$ , отношение которых определяет отношение частот генераторов. Уравнение системы (2.15) содержит следующие безразмерные параметры:  $k$  — коэффициент, регулирующий силу связи;  $p = \omega_2^2/\omega_1^2 = L_1/L_2$  — коэффициент частотной расстройки;  $\beta = 0.035$  — параметр, определяемый величиной отрицательного сопротивления.

Будем полагать, что зависимость мемристивных проводимостей от переменных  $z_1$  и  $z_2$  задается одной и той же гладкой функцией (8), где  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ . При этом уравнения, описывающие динамику мемристивных переменных в общем случае содержат малый параметр  $\delta$ , который определяет неидеальность мемристивных элементов. Равенство  $\delta = 0$  соответствует идеальному мемристору. При этом в фазовом пространстве системы (2.15) существует инвариантное многообразие (плоскость)  $S$ , состоящая из точек равновесия с координатами  $x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = 0, y_2 = 0$  и произвольными  $z_1$  и  $z_2$ . При фиксированных значениях параметров часть точек плоскости  $S$  является устойчивыми, а часть - неустойчивыми. В результате потери устойчивости точ-

ками равновесия в парциальных генераторах возникают колебания. При этом, как и в отдельно-взятом мемристивном генераторе, в системе (2.15) будет существовать множество различных фазовых траекторий, соответствующих установившемуся режиму, характеристики которого непрерывным образом зависят от начального состояния. При  $\delta \neq 0$  «неидеальные» мемристоры, по-сути, играют роль инерционных нелинейных элементов, для которых начальные значения переменных  $z_{1,2}(0)$  со временем перестают влиять на значения проводимостей  $G_M(z_{1,2}(t))$ . При  $\delta > 0$  в системе исчезает многообразие точек равновесия.

При определенной связи, можно ожидать синхронизацию колебаний взаимодействующих мемристивных систем. Рассмотрим эффекты полной и частотно-фазовой синхронизации колебаний в системе (2.15), а также исследуем влияние параметра «неидеальности» мемристивных элементов на явление синхронизации.

### 2.3.2 Полная синхронизация идентичных мемристивных генераторов

Для наблюдения режима полной (синфазной) синхронизации колебаний рассмотрим систему идентичных мемристивных генераторов (2.15) при  $p = 1$ . Если в системе (2.15)  $\delta = 0$ , то в инвариантном многообразии  $S$ , как и в отдельно взятом генераторе, существует инвариантное множество, состоящее из замкнутых траекторий, несколько различных по форме и размеру, и точек равновесия. Если оно становится асимптотически устойчивым в трансверсальном направлении, т.е. аттрактором, то возникает режим полной синхронизации. О характере аттрактора в системе (2.15) можно получить представление на основании проекций фазовых портретов, приведенных на рисунке 2.6,а-в, построенным при  $k = 0.1$ . Фазовые портреты представляют собой непрерывное множество замкнутых кривых, соответствующих различным начальным условиям

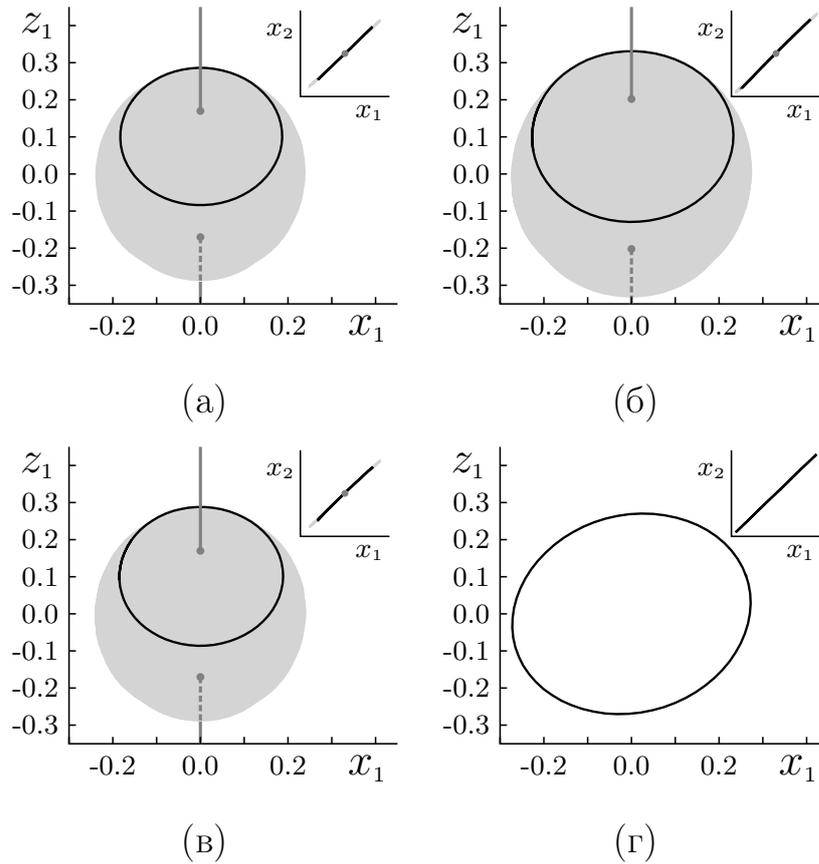


Рисунок 2.6. Проекция фазовых траекторий на притягивающем предельном множестве системы (2.15) при различных начальных условиях: (а)  $z_1(0) \in [-0.3 : 0.3]$ ,  $z_2(0) = 0.1$  (серая поверхность),  $z_1(0) = z_2 = 0.1(0)$  (черная кривая) при  $k = 0.1$ ,  $\delta = 0$ ; (б)  $z_1(0) \in [-0.3 : 0.3]$ ,  $z_2 = 0$  (серая поверхность),  $z_1(0) = 0.1$ ,  $z_2(0) = 0$  (черная кривая) при  $k = 0.1$ ,  $\delta = 0$ ; (в)  $z_1(0) \in [-0.3 : 0.3]$ ,  $z_2(0) = -0.1$  (серая поверхность),  $z_1(0) = 0.1$ ,  $z_2(0) = -0.1$  (черная кривая),  $k = 0.1$ ,  $\delta = 0$ ; (г)  $z_1(0) \in [-0.3 : 0.3]$ ,  $z_2(0) = 0.1$  (черная кривая),  $k = 0.1$ ,  $\delta = 0.1$ . Начальные значения других переменных выбирались следующими:  $x_1(0) = x_2(0) = 0.001$ ;  $y_1(0) = y_2(0) = 0.001$ .

$z_1(0)$  при фиксированных  $x_1(0)$ ,  $y_1(0)$ ,  $x_2(0)$ ,  $y_2(0)$  и трех значениях  $z_2(0)$ . Серая область на проекциях  $x_1, z_1$  соответствует множеству замкнутых траекторий на аттракторе, получаемых для соответствующего множества начальных условий. Это множество несколько меняется с изменением  $z_2(0)$ , что можно видеть на рисунке 2.6,а,б. Форма множества на рисунке 2.6,в повторяет форму

на рисунке 2.6,а, что связано с симметрией аттрактора. Черным цветом на рисунке 2.6,а-в изображена одна из множества возможных замкнутых кривых на поверхности аттрактора. Единственная замкнутая кривая, приведенная на рисунке 2.6,г, соответствует притягивающему предельному циклу в системе при выбранных параметрах в случае неидеального мемристора ( $\delta = 0.1$ ).

Не все траектории, в серой области на рисунке 2.6,а-в принадлежат строго инвариантному многообразию  $S$ , хотя на проекциях  $x_1, z_1$  и  $x_1, x_1$  они так близко расположены к биссектрисе, что отклонения от нее на глаз не заметно. Для регистрации режима полной синхронизации использовалось следующее условие:

$$D = \frac{1}{M} \sum_0^M [(x_1(t_i) - x_2(t_i))^2 + (y_1(t_i) - y_2(t_i))^2 + (z_1(t_i) - z_2(t_i))^2] \leq 0.00001, \quad (2.16)$$

где  $i$  — номер отсчета по времени,  $M$  — число отсчетов. Рассмотрим влияние начальных значений мемристивных переменных  $z_1(0)$  и  $z_2(0)$  на установление режима полной синхронизации при различных коэффициентах связи в случае идеальных мемристивных проводимостей ( $\delta = 0$ ). На рисунке 2.7,а,б приведены диаграммы режимов на плоскости значений  $z_1(0), k$  при двух фиксированных значениях  $z_2(0) = 0$  (а) и  $z_2(0) = 0.1$  (б). Начальные значения всех других динамических переменных были выбраны одинаковыми и равными 0.001. Серым тоном выделена область, соответствующая режиму полной синхронизации колебаний генераторов согласно критерию (2.16). В белой области возможны как несинхронные колебательные режимы, для которых замкнутые траектории не лежат в инвариантном многообразии  $S$ , так и устойчивые точки равновесия, располагающиеся на плоскости  $O Z_1 Z_2$ . Можно видеть, что режим полной синхронизации колебаний имеет порог по связи, зависящий от начального состояния первого мемристора (т.е. от значения мемристивной переменной  $z_1(0)$ ). Аналогично, он зависит и от начального состояния второго мемристора. Пороговое значение коэффициента связи обращается в ноль только при выборе

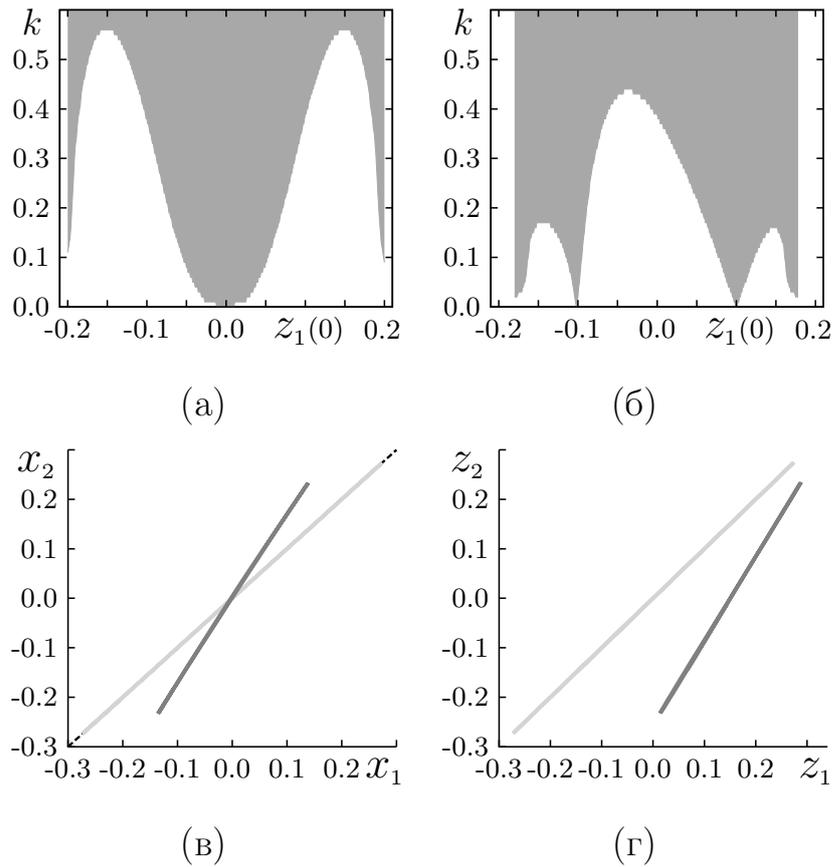


Рисунок 2.7. Область полной синхронизации колебаний (серый тон) исследуемой системы (2.15) при  $\delta = 0$  на плоскости значений параметра связи  $k$  и начальных значений переменной  $z_1(0)$  при  $z_2(0) = 0$  (а) и  $z_2(0) = 0.1$  (б); Проекции колебаний (в, г) в случае синхронного режима при  $z_1(0) = z_2(0) = 0$  (светло-серый цвет) и несинхронного режима при  $z_1(0) = 0.15$ ,  $z_2(0) = 0$  (темно-серый цвет) при  $k = 0.01$ . Черной пунктирной линией на фрагменте показана биссектриса прямого угла на координатной плоскости. Другие начальные условия:  $x_1(0) = x_2(0) = 0.001$ ;  $y_1(0) = y_2(0) = 0.001$

начального состояния в инвариантном многообразии  $S$ , что в рассматриваемом случае соответствует равенству  $z_1(0) = z_2(0)$ . Начальные значения мемристивных переменных, при которых реализуется колебательный режим, ограничены (примерно в интервале  $[-0.2, 0.2]$ ), поэтому значительной расстройкой значений  $z_1(0)$  и  $z_2(0)$  задать не удастся. Несмотря на это, рисунок 2.7,а,б показывает существенный диапазон изменения порогового значения  $k \in [0, 0.6]$ .

На рисунке 2.8 показаны диаграммы на плоскости начальных значений  $z_1(0), z_2(0)$ , построенные для различной силы связи при  $\delta = 0$ . На них черными точками отмечены синхронные режимы, соответствующие условию (2.16). Увеличение коэффициента связи приводит к увеличению области синхронизации, что видно на рисунке 2.8.

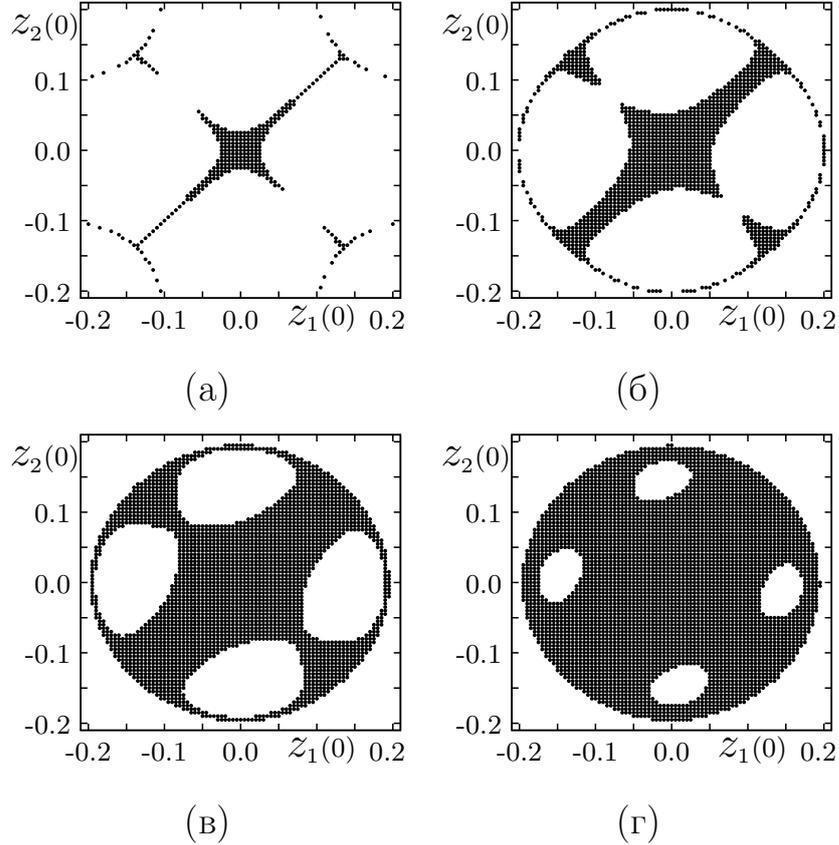


Рисунок 2.8. Область полной синхронизации колебаний (черные точки) двух идентичных генераторов на плоскости  $z_1(0), z_2(0)$  при различных значениях коэффициента связи:  $k = 0.01$  (а);  $k = 0.1$  (б);  $k = 0.3$  (в);  $k = 0.5$  (г). Другие начальные условия:  $x_1(0) = x_2(0) = 0.001$ ;  $y_1(0) = y_2(0) = 0.001$

Отличное от нуля, значение параметра  $\delta$  ведет к разрушению плоскости равновесий. При этом, для любого коэффициента связи  $k > 0$  имеет место полная синхронизация колебаний независимо от начальных условий (график не приводится). Однако время установления синхронного режима при малых  $\delta$  может быть очень велико. Рассмотрим влияние  $\delta$  на длительность переходного процесса  $t_{tr}$ , приводящего к установлению полной синхронизации в соответ-

ствии с критерием (2.16). При фиксированном значении коэффициента связи  $k = 0.01$  была рассчитана зависимость длительности переходного процесса от величины  $\delta$  для двух начальных условий: (1) соответствующих отсутствию полной синхронизации при  $\delta = 0$  и (2) приводящих к полной синхронизации при любом значении  $\delta$ . Результаты приведены на рисунке 2.9. В первом случае

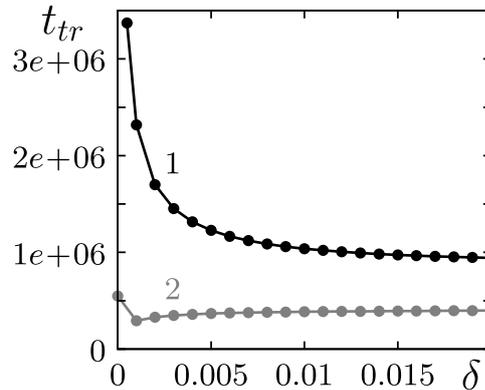


Рисунок 2.9. Зависимость длительности переходного процесса  $t_{tr}$  от параметра

$\delta$  при  $k = 0.001$  при начальных условиях  $x_1(0) = 0.15$ ,  $x_2(0) = 0.01$ ,  
 $y_1(0) = 0.01$ ,  $y_2(0) = 0.001$ ,  $z_1(0) = 0$ ,  $z_2(0) = 0.15$  (линия 1) и  $x_1(0) = 0.05$ ,  
 $x_2(0) = 0.01$ ,  $y_1(0) = y_2(0) = 0.1$ ,  $z_1(0) = z_2(0) = 0$  (линия 2)

длительность переходного процесса стремится к бесконечности при  $\delta \rightarrow 0$  и выходит на некоторый постоянный уровень с ростом  $\delta$ . При достаточно малых значениях  $\delta$  длительность переходного процесса может превышать любое заданное время наблюдения. Во втором случае длительность переходного процесса всегда конечна и слабо зависит от величины  $\delta$ . Таким образом, при малом  $\delta$ , когда мемристоры близки к идеальным, на конечном времени наблюдения поведение связанных генераторов будет мало отличаться от поведения идеальной мемристивной системы.

### 2.3.3 Частотно-фазовая синхронизация мемристивных генераторов с расстройкой

Рассмотрим систему (2.15) при наличии малой частотной расстройки ( $p \neq 1$ ). Можно предположить, что для резистивно взаимодействующих мемристивных систем с частотной расстройкой предельное множество траекторий включает как периодические, так и квазипериодические траектории, а реализация соответствующего режима зависит от начальных значений динамических переменных. Проведенные расчеты полностью подтвердили данное предположение. В зависимости от начальных значений переменных  $z_1(0), z_2(0)$  при одних и тех же значениях коэффициента связи  $k$  и параметра частотной расстройки  $p$  наблюдались как периодические (синхронные), так и квазипериодические (несинхронные) колебания. Численно были построены области частотно-фазовой синхронизации на плоскости параметров  $k, p$  при различных значениях  $z_1(0), z_2(0)$ . На рисунке 2.10,а приведены две области частотно-фазовой синхронизации колебаний в системе (2.15) при  $\delta = 0$ , полученные для различных начальных значений  $z_2(0)$  (при одинаковых начальных значениях прочих переменных). Они построены для малых значений коэффициента связи и соответствуют синхронизации через фазовый захват. С ростом коэффициента связи наблюдается эффект подавления автоколебаний одного из генераторов, а область существования периодического (синхронного) режима резко расширяется (на графиках не изображено). Особенностью мемристивной системы является зависимость границ частотно-фазового захвата от начальных условий. Это хорошо видно на рисунке 2.10,а. Важно также то, что такая зависимость является непрерывной. Непрерывная зависимость границ области захвата от начального значения одной из мемристивных переменных проиллюстрирована на рисунке 2.10,б, на котором приведена область синхронизации на плоскости значений частотной расстройки  $p$  и величины  $z_1(0)$  при фиксированных дру-

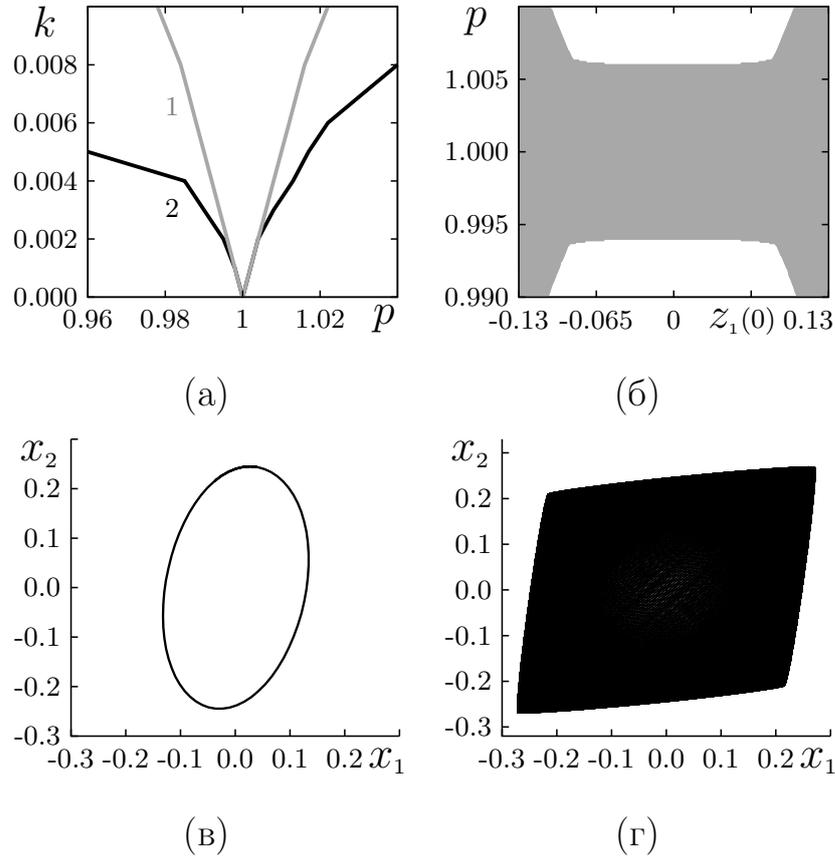


Рисунок 2.10. Взаимная частотно-фазовая синхронизация мемристивных генераторов (2.15) с расстройкой по частотам при  $\delta = 0$ : (а) синхронизации для различных начальных значений мемристивных переменных при  $z_1(0) = z_2(0) = 0$  (линия 1) и  $z_1(0) = 0, z_2(0) = 0.1$  (линия 2); (б) область синхронизации на плоскости значений частотной расстройки  $p$  и величины  $z_1(0)$  при  $z_2(0) = 0, k = 0.003$ . (в,г) фазовые проекции, полученные при  $k = 0.003$  и  $p = 0.993$ , иллюстрирующие режим частотно-фазовой синхронизации при  $z_1(0) = 0.11$  и  $z_2(0) = 0$  (в) и биений вне области синхронизации при  $z_1(0) = z_2(0) = 0$  (г).

гих начальных условиях и  $k = 0.003$ . Также на рисунке 2.10, в, г приведены фазовые проекции, соответствующие синхронному режиму периодических колебаний и несинхронному режиму двухчастотных биений, наблюдающимся при одних и тех же параметрах системы, но разным выборе начальных условий.

## 2.4 Синхронизация периодических автогенераторов, связанных через мемристивную проводимость

### 2.4.1 Математическая модель исследуемой системы

Рассмотрим систему двух автогенераторов ван дер Поля, связанных через мемристивную проводимость. На рисунке 2.11 каждый парциальный автоге-

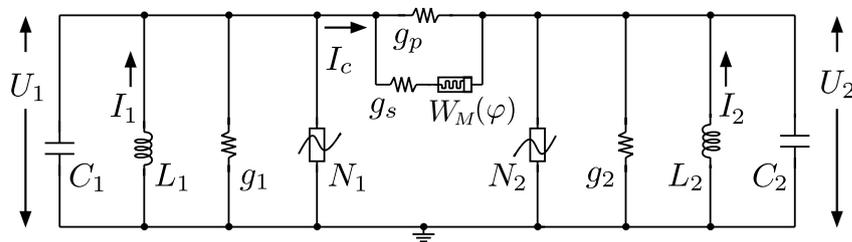


Рисунок 2.11. Эквивалентная схема двух автогенераторов, связанных через мемристор

нератор состоит из параллельно соединенных конденсаторов  $C_i$ , катушек индуктивности  $L_i$ , постоянной проводимости  $g_i$  и нелинейной отрицательной проводимости  $N_i$ , где  $i = 1, 2$  — номер парциального генератора. Будем задавать вольт-амперные характеристики отрицательных проводимостей  $N_i$  (рисунок 2.11) в виде кубических функций:  $I_i = -\alpha_i U_i + \beta_i U_i^3$ , где  $I_i$  — токи, протекающие через нелинейные элементы,  $U_i$  — напряжения на них,  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  — размерные коэффициенты, которые будем полагать положительными. В качестве мемристивной проводимости рассмотрим идеализированный мемристор с гладкой характеристикой (8). Используя правила Кирхгофа, можно получить следующую систему

уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dU_1}{dt_*} + \frac{1}{C_1}i_1 + \frac{g_1}{C_1}U_1 + \frac{kW_M(\varphi)}{C_1}(U_1 - U_2) - \frac{\alpha_1}{C_1}U_1 + \frac{\beta_1}{C_1}U_1^3 = 0, \\ \frac{dU_2}{dt_*} + \frac{1}{C_2}i_2 + \frac{g_2}{C_2}U_2 + \frac{kW_M(\varphi)}{C_2}(U_2 - U_1) - \frac{\alpha_2}{C_2}U_2 + \frac{\beta_2}{C_2}U_2^3 = 0, \\ \frac{1}{C_1} \frac{di_1}{dt_*} = \frac{1}{C_1 L_1} U_1, \\ \frac{1}{C_2} \frac{di_2}{dt_*} = \frac{1}{C_2 L_2} U_2, \\ \frac{d\varphi}{dt_*} = U_1 - U_2, \end{array} \right. \quad (2.17)$$

где  $t_*$  — физическое время. Предполагается, что следующие параметры равны:  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \beta$ ,  $g_1 = g_2 = g$ ,  $C_1 = C_2 = C$ . Обозначим:  $\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C}$  и  $\omega_2^2 = \frac{1}{L_2 C}$ ,  $p = \omega_1^2 / \omega_2^2$  и введем безразмерное время и безразмерные переменные следующим образом:

$$\begin{aligned} t &= \omega_1 t_*, & x_1 &= \sqrt{\frac{\beta}{C\omega_1}} U_1, & x_2 &= \sqrt{\frac{\beta}{C\omega_1}} U_2, \\ y_1 &= \frac{1}{\omega_1 C} \sqrt{\frac{\beta}{C\omega_1}} i_1, & y_2 &= \frac{1}{p\omega_1 C} \sqrt{\frac{\beta}{C\omega_1}} i_2, & z &= \omega_1 \sqrt{\frac{\beta}{C\omega_1}} \varphi. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тогда уравнения (2.17) принимают вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 + y_1 - (\gamma - x_1^2) x_1 + kG_M(z)(x_1 - x_2) = 0, \\ \dot{x}_2 + py_2 - (\gamma - x_2^2) x_2 + kG_M(z)(x_2 - x_1) = 0, \\ \dot{y}_1 = x_1, \\ \dot{y}_2 = x_2, \\ \dot{z} = x_1 - x_2, \end{array} \right. \quad (2.19)$$

где  $\dot{x}_{1,2} = \frac{dx_{1,2}}{dt}$ ,  $\dot{y}_{1,2} = \frac{dy_{1,2}}{dt}$ ,  $\gamma = \frac{\alpha - g}{C\omega_1}$ . Точки равновесия системы (2.19) имеют координаты  $x_{1,2} = 0$ ,  $y_{1,2} = 0$ ,  $z \in (-\infty; \infty)$ . Это означает, что в фазовом пространстве системы (2.19) существует линия равновесий. Каждая точка на оси  $OZ$  является точкой равновесия.

Динамическая переменная  $z$  может быть исключена из системы (2.19). Действительно, из последнего уравнения следует, что  $\dot{z} = \dot{y}_1 - \dot{y}_2$ . Тогда можно

представить  $z(t) = z(0) + y_1(t) - y_2(t) - y_1(0) + y_2(0)$ . Это означает, что значение проводимости мемристора в любой момент времени зависит как от мгновенных значений  $y_1$  и  $y_2$ , так и от начальных значений  $y_1(0)$ ,  $y_2(0)$  и  $z(0)$ . Отсюда следует, что система (2.19) описывает два взаимодействующих автогенератора с диссипативной связью, сила которой зависит как от мгновенных, так и от начальных значений динамических переменных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 + y_1 - (\gamma - x_1^2) x_1 = \\ = kG_M(z(0) + y_1 - y_2 - y_1(0) + y_2(0))(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 + py_2 - (\gamma - x_2^2) x_2 = \\ = kG_M(z(0) + y_1 - y_2 - y_1(0) + y_2(0))(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_1 = x_1, \\ \dot{y}_2 = x_2. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Это дает возможность контролировать силу связи путем изменения начальных условий. Таким образом, можно наблюдать или не наблюдать эффект частотно-фазового захвата при фиксированных значениях параметров.

Будем исследовать систему двух связанных автогенераторов ван дер Поля (2.19) при фиксированных параметрах:  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$  и  $\gamma = 0.1$ . В качестве управляющих параметров будем рассматривать расстройку частот  $p$  и коэффициент связи  $k$ .

## 2.4.2 Численное исследование системы

Численное моделирование проводилось путем интегрирования уравнений (2.19) с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом по времени  $h = 0.001$ . Численно полученные временные реализации были использованы для построения фазовых портретов и расчета мгновенной фазы автоколебаний в парциальных генераторах. Мгновенные фазы автогенераторов  $\Psi_1(t)$

и  $\Psi_2(t)$  определяются следующим образом

$$\Psi_i(t) = \operatorname{arctg} \frac{y_i(t)}{x_i(t)} \pm \pi n(t), \quad i = 1, 2, \quad (2.21)$$

где  $n(t)$  — целочисленная переменная, определяемая из условия непрерывности зависимости фазы от времени. Используя мгновенные фазы, можно найти разность фаз  $\Delta\Psi(t) = \Psi_2(t) - \Psi_1(t)$  и среднюю разностную частоту (частоту биений):

$$\Omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta\Psi(t+T) - \Delta\Psi(t)}{T}. \quad (2.22)$$

Очевидно, что в области синхронизации в пределах точности вычислений должно выполняться равенство:  $\Omega = 0$ . В случае большой силы связи синхронизация может быть реализована путем подавления автоколебаний одного из автогенераторов. В этом случае расчет частоты биений по формуле (2.22) приводит к неправильным результатам.

Интегрирование системы (2.19) при отсутствии расстройки ( $p = 1$ ) показывает, что при любом значении коэффициента связи  $k > 0$  вне зависимости от начального состояния генераторов в системе устанавливается синфазный режим. В этом случае взаимодействие через мемристивную проводимость приводит к тем же результатам, что и обычная диссипативная связь. Различие наблюдается только в процессе установления, характер которого для системы (2.19) сильно зависит от начальных значений переменных.

Рассмотрим систему (2.19) при наличии малой частотной расстройки  $p \neq 1$ . Для диагностики взаимного захвата частот и фаз генераторов в численных экспериментах рассчитывались мгновенные фазы колебаний (2.21) парциальных генераторов и определялась частота биений (2.22). Зависимость частоты биений  $\Omega$  от расстройки  $p$  позволяет обнаружить эффект захвата частот и фаз колебаний и определить интервал синхронизации. Эффект синхронизации генераторов через мемристор имеет существенную особенность: ширина области захвата зависит от начальных условий. На рисунке 2.12,а приведены зависимости частоты биений от частотной расстройки, полученные численно для разных

начальных значений переменной  $z$  при фиксированном коэффициенте связи  $k = 0.02$ . Границы области синхронизации существенно отличаются для раз-

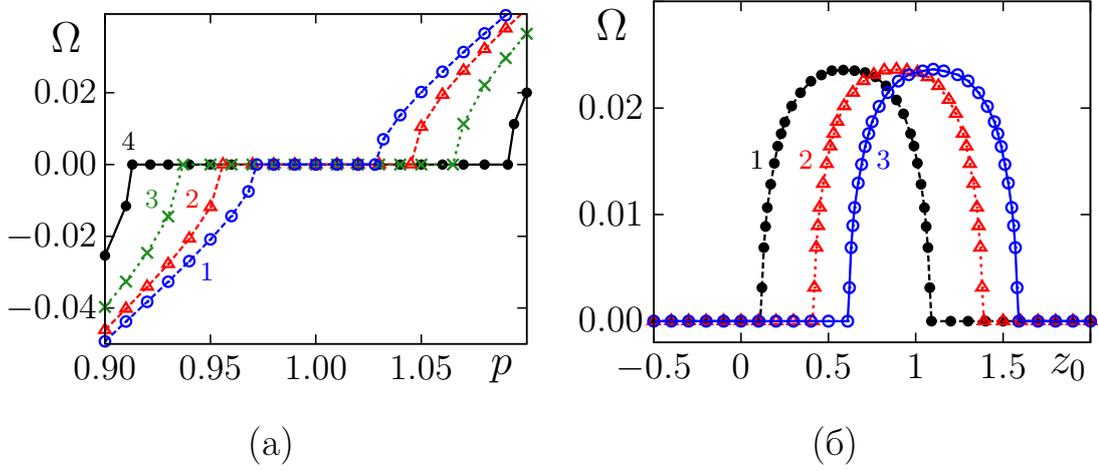


Рисунок 2.12. (а) Зависимость средней разностной частоты  $\Omega$  от частотной расстройки  $p$  для различных начальных значений  $z_0$ :  $z_0 = 0$  (кривая 1),  $z_0 = -0.25$  (кривая 2),  $z_0 = -0.5$  (кривая 3),  $z_0 = -0.75$  (кривая 4).

Параметры:  $\gamma = 0.1$ ,  $k = 0.02$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ . Другие начальные условия -  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.4$ . (б) Зависимость средней разностной частоты  $\Omega$  от начального значения  $z(0) = z_0$  для различных наборов начальных значений других динамических переменных:  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.3$ ,  $y_2(0) = -0.1$  (кривая 1),  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.4$  (кривая 2),  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.2$ ,  $y_2(0) = -0.6$  (кривая 3). Параметры:  $\gamma = 0.1$ ,  $p = 1.05$ ,  $k = 0.1$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ .

личных  $z_0$ . С ростом абсолютной величины  $|z_0|$  ширина области синхронизации увеличивается. Однако существует некоторое критическое значение  $|z_0^{cr}|$ , при превышении которого область синхронизации перестает увеличиваться. Такой эффект наблюдается при различных начальных условиях и может быть связан с переходом к синхронизации через подавление автоколебаний одного из генераторов. На рисунке 2.12,б показано влияние начальных условий на частоту биений при фиксированных параметрах:  $p = 1.05$  и  $k = 0.1$ . На всех приведен-

ных графиках можно выделить интервал значений  $z_0$ , для которого синхронизация не наблюдается. Границы этого интервала зависят от начальных значений других переменных. При этом сам характер зависимости для всех случаев идентичен и отличается только смещением на некоторую величину  $z_0 = \text{const}$ .

Для иллюстрации поведения системы при наличии и отсутствии синхронизации в случае фиксированной расстройки и различных начальных условий на рисунке 2.13 приведены фазовые проекции установившихся колебаний. Тра-

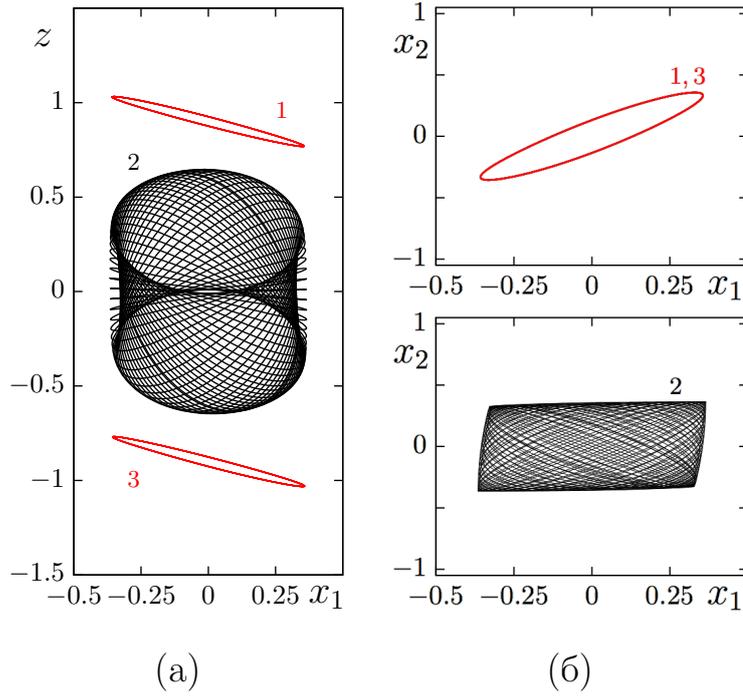


Рисунок 2.13. Фазовые траектории системы (2.19) в плоскостях  $x_1, z$  (а) и  $x_1, x_2$  (б). Кривые 1 и 2 соответствуют режиму синхронизации, траектория 3 — квазипериодическим колебаниям. Начальные условия:  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = -0.1, z(0) = 1, 5$  (кривая 1),  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = 0.1, z(0) = 0.4$  (кривая 2),  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.5, y_2(0) = -0.4, z(0) = 0.0$  (кривая 3). Параметры:  $p = 1, 05, k = 0.1, \gamma = 0.1, a = 0.02, b = 0.8$ .

ектории были получены для разных начальных условий при одинаковых значениях параметров. Две совпавшие замкнутые кривые (1 и 3) на рисунке 2.13 иллюстрируют синхронные колебания. Проекции синхронных колебаний иден-

тичны в пространстве  $x_1, x_2$  и  $y_1, y_2$  (например, рисунок 2.13,б). Однако в полном фазовом пространстве наблюдается сдвиг вдоль оси  $OZ$  (кривые 1 и 3 на рисунке 2.13,а). Проекция несинхронных колебаний (кривая 2 на рисунок 2.13) описывают фигуру, топологически эквивалентную двумерному тору. Фигуры, полученные для разных начальных условий, имеют разную форму.

В связи с полученными данными возникает вопрос, будут ли зависеть характеристики колебаний от начальных условий непрерывным образом? Результаты, приведенные на рисунке 2.13, свидетельствуют в пользу такого предположения. Данная особенность динамики типична для систем с линией равновесий, в том числе она обнаружена в исследуемых системах. Таким образом, можно предположить, что границы области синхронизации непрерывно меняются при изменении начальных условий в некоторой области значений параметров  $k$  и  $p$ . Однако более убедительное обоснование данного предположения требует теоретического анализа модели (2.19).

### 2.4.3 Квазигармонический анализ системы

Автоколебания в парциальных автогенераторах системы (2.19) близки к гармоническим при малых положительных значениях параметра  $\gamma$ . В таком случае можно получить укороченные уравнения для мгновенных амплитуд и фаз, применив метод усреднения Ван дер Поля. В квазигармоническом приближении решение уравнения (2.19) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} y_{1,2}(t) &= \operatorname{Re} \left[ A_{1,2}(t)e^{jt} \right] = \frac{1}{2} \left( A_{1,2}(t)e^{jt} + A_{1,2}^*(t)e^{-jt} \right), \\ x_{1,2}(t) &= \frac{j}{2} \left( A_{1,2}(t)e^{jt} - A_{1,2}^*(t)e^{-jt} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  — мгновенные комплексные амплитуды автоколебаний в парциальных автогенераторах,  $A_1^*(t)$  и  $A_2^*(t)$  — комплексные сопряженные функции,  $j$  — мнимая единица. Предполагается, что амплитуды  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  медленно изменяются в течение периода автоколебаний  $T_0 = 2\pi$ . Кроме того,

предполагается, что выполняется следующее условие для первых производных:  $\dot{A}_{1,2}e^{jt} + \dot{A}_{1,2}^*e^{-jt} = 0$ . Уравнение для переменной  $z(t)$  можно вывести, используя последнее уравнение системы (2.19) и подстановку (2.23):

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0) + \int_0^t (x_1(\tau) - x_2(\tau))d\tau = z(0) + y_1(t) - y_2(t) + \\ &+ y_2(0) - y_1(0) = C_0 + \frac{1}{2}(A_1 - A_2)e^{jt} + \frac{1}{2}(A_1^* - A_2^*)e^{-jt}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где  $C_0 = z(0) + y_2(0) - y_1(0)$  - константа, определяемая начальным состоянием системы. Затем выражения (2.23) и (2.24) подставляются в уравнение (2.19). Учитывая условие для комплексных амплитуд и характеристику мемристора (8) получаем уравнения для комплексных амплитуд. После усреднения за период  $T_0$  получается следующая система укороченных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{A}_1 &= \frac{\gamma}{2}A_1 - \frac{3}{8}A_1|A_1|^2 + \frac{k}{2}(a + bC_0^2)(A_2 - A_1) + \frac{kb}{8}|A_2 - A_1|^2(A_2 - A_1), \\ \dot{A}_2 &= \frac{\gamma}{2}A_2 - \frac{3}{8}A_2|A_2|^2 + \frac{j(p-1)}{2}A_2 + \frac{k}{2}(a + bC_0^2)(A_1 - A_2) + \\ &+ \frac{kb}{8}|A_1 - A_2|^2(A_1 - A_2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Перейдем от системы (2.25) к уравнениям для вещественных амплитуд  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  и фаз  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  парциальных генераторов, полагая  $A_{1,2} = \rho_{1,2} \exp[j\phi_{1,2}]$ . Подставляя выражения для комплексных амплитуд и их производных в (2.25) и разделяя вещественные и мнимые части равенств, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{\gamma}{2}\rho_1 - \frac{3}{8}\rho_1^3 + \frac{k}{2} \left[ a + b \left( C_0^2 + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{4} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\rho_1\rho_2}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \right) \right] (\rho_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - \rho_1), \\ \dot{\phi}_1 &= \frac{k}{2} \left[ a + b \left( C_0^2 + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{4} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\rho_1\rho_2}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \right) \right] \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin(\phi_2 - \phi_1), \\ \dot{\rho}_2 &= \frac{\gamma}{2}\rho_2 - \frac{3}{8}\rho_2^3 + \frac{k}{2} \left[ a + b \left( C_0^2 + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{4} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\rho_1\rho_2}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \right) \right] (\rho_1 \cos(\phi_2 - \phi_1) - \rho_2), \\ \dot{\phi}_2 &= \frac{p-1}{2} - \frac{k}{2} \left[ a + b \left( C_0^2 + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{4} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{\rho_1\rho_2}{2} \cos(\phi_2 - \phi_1) \right) \right] \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin(\phi_2 - \phi_1). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Введя разность фаз  $\theta = \phi_2 - \phi_1$ , уравнения (2.26) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_1 &= \frac{\gamma}{2}\rho_1 - \frac{3}{8}\rho_1^3 + \frac{k}{2}\left[a + b\left(C_0^2 + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{4} - \frac{\rho_1\rho_2}{2}\cos\theta\right)\right](\rho_2\cos\theta - \rho_1), \\ \dot{\rho}_2 &= \frac{\gamma}{2}\rho_2 - \frac{3}{8}\rho_2^3 + \frac{k}{2}\left[a + b\left(C_0^2 + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{4} - \frac{\rho_1\rho_2}{2}\cos\theta\right)\right](\rho_1\cos\theta - \rho_2), \\ \dot{\theta} &= \Delta - \frac{k}{2}\left[a + b\left(C_0^2 + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{4} - \frac{\rho_1\rho_2}{2}\cos\theta\right)\right]\left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)\sin\theta,\end{aligned}\quad (2.27)$$

где введено обозначение для частотной расстройки  $\Delta = \frac{p-1}{2}$ .

Используя фазовое приближение для описания связанных генераторов, будем считать, что вещественные амплитуды колебаний меняются очень мало и их можно считать равными стационарному значению в отсутствии связи:

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_0 = \sqrt{\frac{4\gamma}{3}}. \quad (2.28)$$

С учетом (2.28) (2.27) получаем уравнение для разности фаз

$$\dot{\theta} = \Delta - kF(\theta) = \Delta - k\left[a + b\left(C_0^2 + \frac{\rho_0^2}{2} - \frac{\rho_0^2}{2}\cos\theta\right)\right]\sin\theta. \quad (2.29)$$

Если выражение в квадратных скобках заменить на константу  $\eta$ , то получаем уравнение Адлера, описывающее в фазовом приближении синхронизацию квазигармонических генераторов с диссипативной связью:

$$\dot{\theta} = \Delta - \Delta_s \sin\theta, \quad \Delta_s = k\eta. \quad (2.30)$$

Область фазовой синхронизации соответствует существованию устойчивого решения  $\theta^0 = \text{const}$ . В этом случае мгновенная разностная частота (частота биений) есть  $\Omega = \dot{\theta} \equiv 0$  и область синхронизации, исходя из модели (2.30), определяется условием:

$$|\Delta| \leq \Delta_s. \quad (2.31)$$

Вне этой области частота биений определяется известным выражением

$$\Omega = \langle \dot{\theta} \rangle = \sqrt{\Delta^2 - \Delta_s^2}, \quad |\Delta| \geq \Delta_s. \quad (2.32)$$

Здесь скобки  $\langle \dots \rangle$  означают операцию усреднения по времени. В случае уравнения (2.29) границы области синхронизации не могут быть вычислены аналитически. Однако тем, что в уравнение (2.29) входит  $\cos \theta$ , можно пренебречь в случае большого абсолютного значения константы  $C_0$ . В этом случае будут справедливы выражения (2.31) (2.32), где параметр  $\Delta_s$  определяется приближенным равенством:

$$\Delta_s \approx k \left[ a + b \left( C_0^2 + \frac{2\gamma}{3} \right) \right]. \quad (2.33)$$

На рисунке 2.14,а сравниваются графики функции  $F(\theta)$ , определяющей правую часть уравнений (2.29) с графиком  $\sin \theta$ . Для двух выбранных значений начальных условий, соответствующих  $C_0 = -0.4$  и  $C_0 = -1.4$ , графики практически совпадают. Это означает, что для оценки зависимости частоты биений от расстройки можно воспользоваться условием (2.31) и выражением (2.32). Сравнение приближенных теоритических результатов с соответствующими зависимостями  $\Omega(p)$ , полученными в результате численного моделирования системы (2.19), приведены на рисунке 2.14,б. При выбранных значениях параметров и начальных условий совпадение является практически полным.

Рисунок 2.15 также демонстрирует хорошее соответствие численных данных с приближенными теоритическими результатами. На рисунке 2.15,а показана зависимость  $\Omega$  от начального значения  $z(0) = z_0$ , полученная численно и по приближенной аналитической формуле для системы (2.19). Границы области синхронизации (рисунок 2.15,б), рассчитанны с использованием условия (2.31) для двух значений константы  $C_0$  и численно при соответствующих начальных условиях. Если значение константы  $C_0$  близко к нулю, то нужно учитывать слагаемое  $\cos(\theta)$  в уравнении (2.29). В результате появляется заметное различие между результатами численного моделирования и теоретическим подходом, использующим выражения (2.31) и (2.32). Тем не менее, теоретические результаты, представленные выше, позволяют сделать вывод, что непрерывное изменение начальных условий  $y_1(0)$ ,  $y_2(0)$  и  $z(0)$  в определенных интервалах

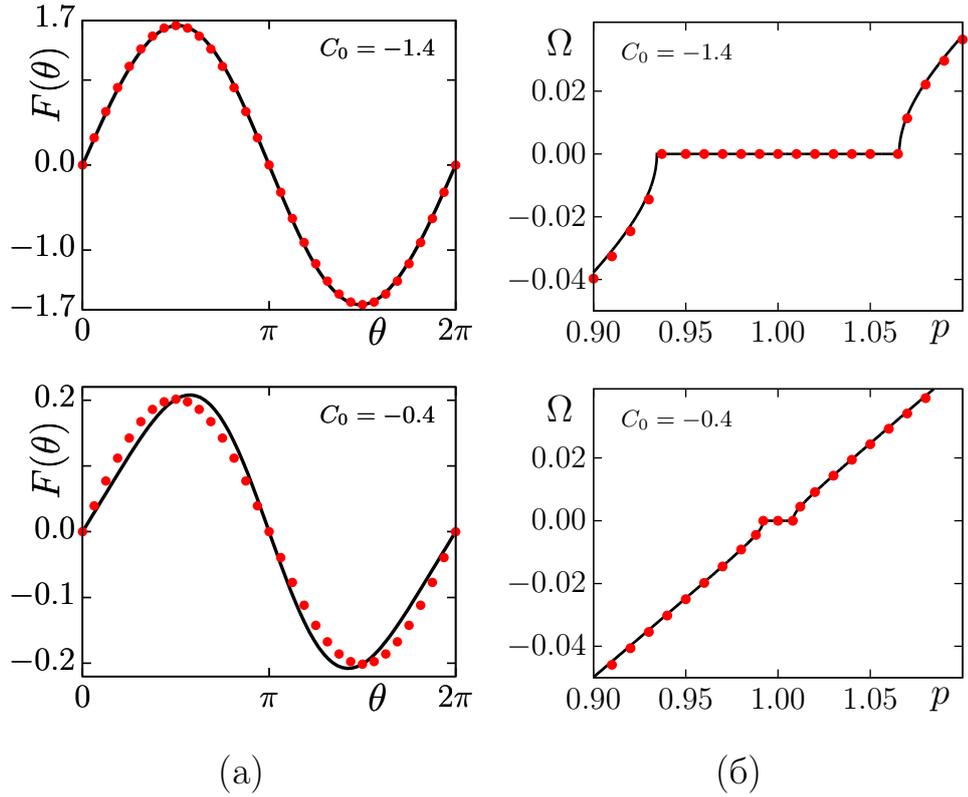


Рисунок 2.14. (а) Сравнение функции  $F(\theta)$  в правой части уравнения (2.29) (кружки) при  $C_0 = -1,4$  (верхняя панель) и  $C_0 = -0.4$  (нижняя панель) и функции  $\eta \sin(\theta)$  (черная кривая); (б) Зависимости частоты биений в зависимости от частотной расстройки  $\Omega(p)$ . Численные результаты изображены кружками, а соответствующие теоретические кривые (2.32) линией. Начальными условиями для переменной  $z$  являются  $z(0) = -0.5$  (верхняя панель) и  $z(0) = 0.5$  (нижняя панель). Другими начальными условиями являются  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.4$ .

Параметры системы (2.19):  $\gamma = 0.1$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ ,  $k = 0.02$ .

приводит к непрерывному изменению величины  $\Delta_s$  и, в соответствии с (2.33), границ области фазового захвата.

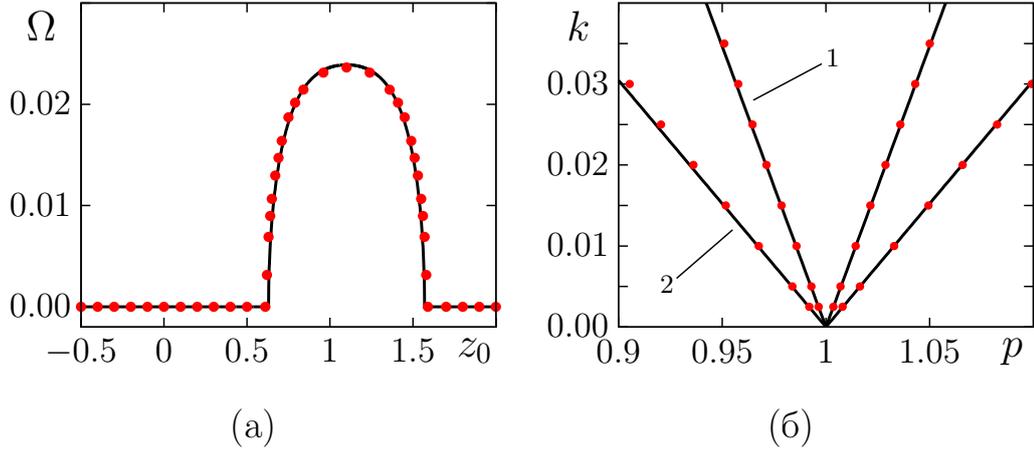


Рисунок 2.15. Численные и теоретические результаты для системы (2.19). (а) Зависимость средней частоты биений  $\Omega$  от начального значения  $z(0) = z_0$  для параметров  $p = 1,05$ ,  $k = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$  и других начальных условий  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.2$ ,  $y_2(0) = -0.6$ . Численные результаты показаны кружками и соответствующей теоретической кривой (2.32) — линией. (б) Границы области синхронизации, полученные численно (кружки) и теоретически (линия). Теоретические кривые рассчитываются по формуле (2.31). Границы 1 соответствуют начальным условиям  $x_1 = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.4$ ,  $z(0) = 0$ . Границы 2 строятся для начальных условий  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.4$ ,  $z(0) = -0.5$ . Параметр возбуждения автоколебаний равен  $\gamma = 0.1$ .

#### 2.4.4 Влияние конечной памяти мемристора на синхронизацию

Существование линии равновесий в фазовом пространстве системы (2.19) является результатом особенностей уравнения состояния мемристора. Существование линии равновесия — это специфический эффект, связанный с идеальным мемристором (3). Согласно (4), модифицируем уравнение состояний мемристора системы (2.19):  $\dot{z} = x_1 - x_2 - \delta z$ , где  $\delta$  — параметр забывания. Рассмотрим влияние более реальной модели мемристора на явление синхронизации. При любом ненулевом значении параметра  $\delta$  приводит к исчезновению

линии равновесия. Устойчивость точки равновесия определяется знаком параметра  $\delta$ . В случае, если  $\delta > 0$  возмущения вдоль оси  $OZ$  затухают и стационарные режимы не зависят от начальных условий. В случае  $\delta < 0$  возмущения вдоль оси  $OZ$  растут во времени и траектории стремятся к  $\pm\infty$  вдоль оси  $OZ$ .

Рассмотрим влияние малого значения параметра  $\delta = 0.01$  на систему (2.19). Рисунок 2.16 иллюстрирует результаты численного моделирования на примере проекций фазовых траекторий, полученных при различных началь-

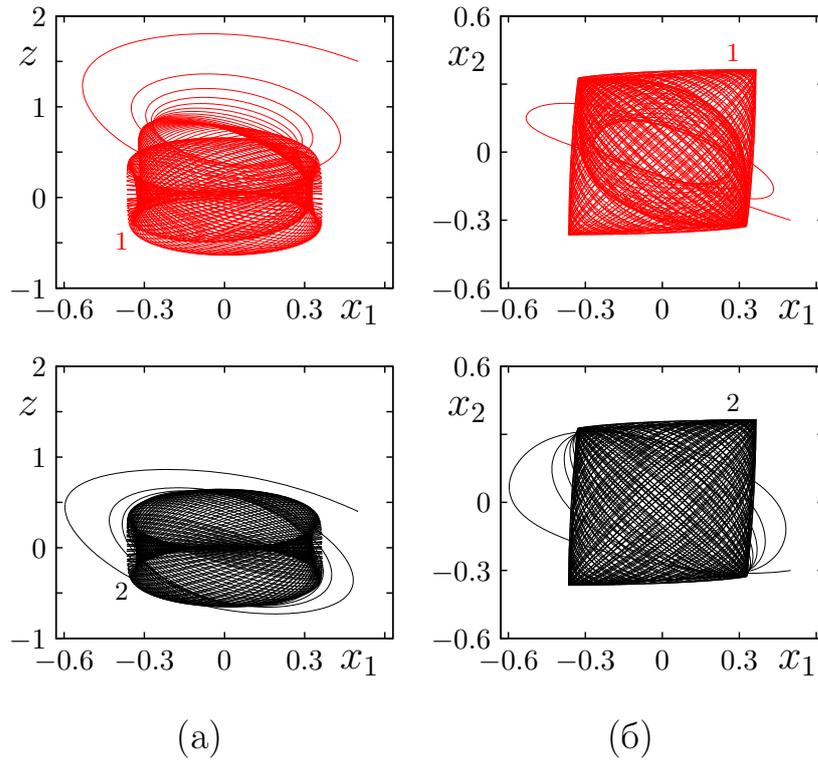


Рисунок 2.16. Фазовые траектории системы (2.19) при  $\delta = 0.01$  в проекциях

$x_1, z$  (а) и  $x_1, x_2$  (б). Начальные условия:  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = -0.1, z(0) = 1.5$  (кривая 1) и  $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = 0.1, z(0) = 0.4$  (кривая 2). Значения параметров:  $p = 1.05, k = 0.1, \gamma = 0.1, a = 0.02, b = 0.8$ .

ных условиях и для фиксированных параметров  $\gamma = 0.1, p = 1.05, k = 0.1$ . Были использованы два набора начальных условий.

Первый ( $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = -0.1, z(0) = 1.5$ ) соответствует режиму синхронизации в системе (2.19) (при  $\delta = 0$ ), в то время

как второй ( $x_1(0) = 0.5, y_1(0) = 0.5, x_2(0) = -0.3, y_2(0) = 0.1, z(0) = 0.4$ ) приводит к квазипериодической динамике. Однако, при  $\delta = 0.001$  для любых начальных условий устанавливается один и тот же колебательный режим. Можно видеть, что траектории 1 и 2 на рисунке 2.16, полученные для двух указанных начальных условий, теперь попадают на один и тот же квазипериодический аттрактор. Однако при чрезвычайно малом значении параметра  $\delta$  можно наблюдать длительный переходный процесс. Характер переходного процесса и его продолжительность зависят от начальных условий.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что добавление члена  $-\delta z$  в уравнение мемристора связи устраняет непрерывную зависимость колебательной динамики от начальных условий. Этот факт подтверждается также зависимостью средней разностной частоты  $\Omega$  от частотной расстройки  $p$  в случае системы (2.19) при  $\delta = 0.01$  (рисунок 2.17). Все наборы начальных условий порождают одну и ту же зависимость  $\Omega(p)$ , что означает, что границы области синхронизации неизменны.

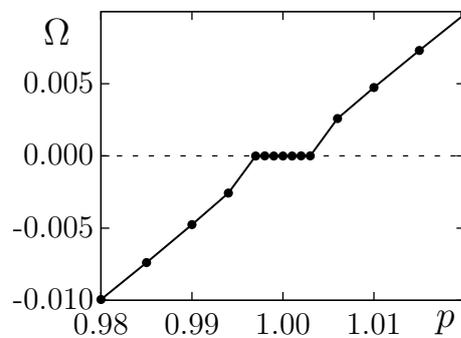


Рисунок 2.17. Зависимость частоты биений  $\Omega$  от частотной расстройки  $p$  в системе (2.19) с  $\delta = 0.01$ . Параметры системы:  $\gamma = 0.1, k = 0.02, a = 0.02, b = 0.8$ .

## 2.4.5 Численное исследование автогенераторов ван дер Поля, связанных через мемристор Чуа

В разделе 2.4.4 рассматривались особенности синхронизации генераторов ван дер Поля, связанных мемристор с гладкой характеристикой (8). Возникает вопрос, как повлияет на явление синхронизации другой вид характеристики мемристора. Для этого рассмотрим полученную в разделе 2.4.4 модель связанных через мемристор осцилляторов ван дер Поля (2.19), заменив характеристику мемристора на кусочно-линейную  $\gamma$ :  $G_M(z) = a$ , если  $|z| < 1$ , иначе  $b$ , при  $|z| \geq 1$ . Различные модели мемристивного генератора, основанные на мемристоре с такой характеристикой, рассматривались в Главе 1.

В результате проведенных численных экспериментов было установлено, что при связи генераторов через мемристивную проводимость с кусочно-линейной характеристикой поведение системы и наблюдаемый эффект частотно-фазовой синхронизации будут аналогичны описанным в предыдущем разделе. На рисунке 2.18 изображены зависимости частоты биений от начального значения переменной состояния мемристора связи  $z_0$  и от частотной расстройки  $p$ , полученные в численном эксперименте при кусочно-линейной характеристике мемристора  $\gamma$ . Данные зависимости аналогичны соответствующим зависимостям, полученным в разделе 2.4.4: наблюдается непрерывная зависимость границы синхронизации от начального значения переменной состояния мемристора  $z_0$ . При изменении начальных условий и фиксированных параметров можно получить области частотно-фазовой синхронизации различной ширины. Более подробно данное исследование описано в работе [67].

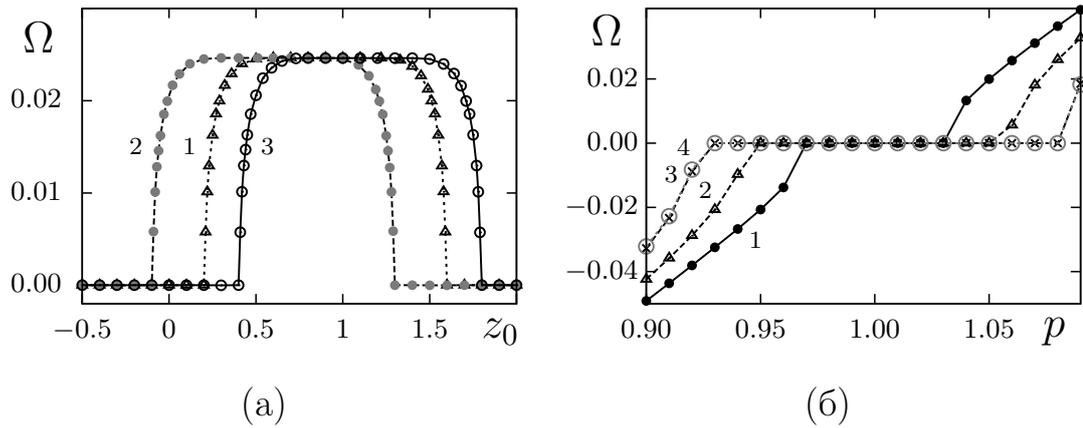


Рисунок 2.18. (а) Зависимости частоты биений от начального значения  $z_0$  при различном выборе начальных значений других динамических переменных: кривая 1 —  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.4$ ; кривая 2 —  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.3$ ,  $y_2(0) = -0.1$ ; кривая 3 —  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.2$ ,  $y_2(0) = -0.6$ . Значения параметров:  $p = 1.05$ ,  $k = 0.1$ . (б) Зависимости частоты биений от частотной расстройки для разных значений  $z_0$ : кривая 1 —  $z_0 = 0$ ; кривая 2 —  $z_0 = -0.25$ ; кривая 3 —  $z_0 = -0.5$ ; кривая 4 —  $z_0 = -0.75$ . Начальные значения других переменных:  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.5$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.4$ . Коэффициент связи  $k = 0.02$

## 2.5 Полная синхронизация хаотических систем с мемристивной связью

### 2.5.1 Синхронизация генераторов хаоса, связанных через мемристор

Целью настоящего раздела является исследование полной синхронизации хаоса в хаотических системах, связанных через мемристор. Это может быть, например, осциллятор Рёсслера или цепь Чуа, в соответствующем режиме. В качестве исследуемых систем были выбраны идентичные хаотические генераторы

Анищенко-Астахова. Генератор Анищенко-Астахова (генератор с инерционной нелинейностью) представляет собой реальное радиотехническое устройство, которое само уже содержит инерционный нелинейный элемент. Наличие такого элемента с определенной характеристикой приводит к формированию в системе хаотической динамики. Описание динамики отдельного генератора Анищенко-Астахова можно найти в монографиях [9, 10]. На рисунке 2.19,а изображена эквивалентная схема двух генераторов Анищенко-Астахова, связанных через мемристор. Парциальный генератор может быть представлен в виде параллель-

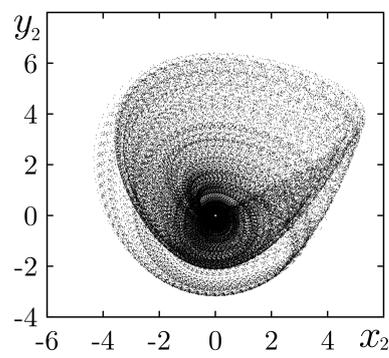
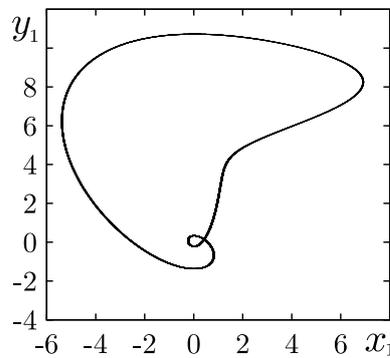
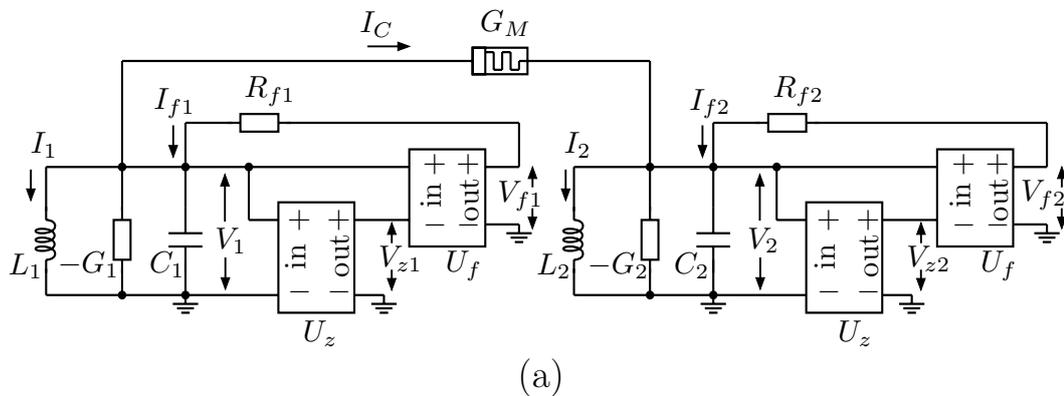


Рисунок 2.19. Эквивалентная схема двух связанных генераторов

Анищенко-Астахова с мемристивной связью (а) и проекции аттракторов в двух идентичных генераторах в отсутствие связи при значениях параметров  $m = 1.5$ ,  $g = 0.2$  и начальных условиях  $x_1(0) = 0.5$ ;  $y_1(0) = 0.1$ ;  $z_1(0) = 0.1$ ;  $x_2(0) = -0.5$ ;  $y_2(0) = -0.1$ ;  $z_2(0) = 0.2$  (б,в)

ного соединения конденсатора, катушки индуктивности и элемента  $N$  с нелинейной проводимостью. Его вольт-амперная характеристика имеет участок с

отрицательной проводимостью и управляется сигналом  $V(t)$ :  $I_N = -\alpha u + \beta V U$ . В свою очередь, переменная  $V$  связана с напряжением  $U$  инерционным образом. Положим  $dV/dt_1 = -\xi V + \xi f(U)$ , где  $f(U)$  — некоторая нелинейная функция,  $t_1$  — физическое время,  $\xi$  — параметр, определяющий постоянную времени цепи. Рассмотрим два генератора с одинаковыми параметрами  $C_1 = C_2 = C$ ,  $L_1 = L_2 = L$ ,  $G_1 = G_2 = G$  и полностью идентичными нелинейными инерционными активными элементами  $N_1$  и  $N_2$ . Будем полагать, что они связаны через проводимость мемристивного типа  $W(\varphi)$ , управляемую переменной  $\varphi$ , динамика которой инерционно зависит от падения напряжения  $U_1 - U_2$ :  $d\varphi/dt_1 = Q(V, U_1 - U_2)$ . Уравнения исследуемой системы в безразмерных переменных имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = mx_1 + y_1 - x_1 z_1 + kG_M(w)(x_2 - x_1), \\ \dot{y}_1 = -x_1, \\ \dot{z}_1 = -gz_1 + gF(x_1), \\ \dot{x}_2 = mx_2 + y_2 - x_2 z_2 + kG_M(w)(x_1 - x_2), \\ \dot{y}_2 = -x_2, \\ \dot{z}_2 = -gz_2 + gF(x_2), \\ \dot{w} = Q(w, x_1 - x_2), \quad F(x) = \frac{1}{2}x(x + |x|). \end{array} \right. \quad (2.34)$$

В (2.34) введены безразмерные переменные  $t = t_1/\sqrt{LC}$ ,  $x_{1,2} \sim U_{1,2}$ ,  $z_{1,2} \sim V_{1,2}$ ,  $w \sim \varphi$  и безразмерные параметры  $m = \sqrt{\frac{L}{C}}(\alpha - G)$  и  $g = LC\xi$ , определяющие режим генерации, функция  $F(x_{1,2}) \sim f(U_{1,2})$  задает характер инерционной нелинейности генераторов. Функции  $G_M(w)$  и  $Q(w, x_1 - x_2)$  описывают мемристивный элемент связи и инерционную нелинейность генератора, соответственно.  $G_M(w)$  — безразмерная проводимость элемента связи:  $kG_M(w) = \sqrt{\frac{L}{C}}W(\varphi)$ . Параметр  $k$  играет роль коэффициента связи. Зададим функции  $G_M(w)$  и  $Q(w, x_1 - x_2)$  в виде

$$G_M(w) = 1 - \mu w^2, \quad Q(w, x_1 - x_2) = -\delta w + x_1 - x_2, \quad (2.35)$$

где  $\mu = b/a$  и  $\delta$  — параметры мемристивной связи.

Зафиксируем параметры генераторов  $m = 1.5$ ,  $g = 0.2$  и параметр инерционной связи  $\mu = 40$ . Выберем следующие начальные состояния двух генераторов  $x_1(0) = 0.5$ ,  $y_1(0) = 0.1$ ,  $z_1(0) = 0.1$ ,  $x_2(0) = -0.5$ ,  $y_2(0) = -0.1$ ,  $z_2(0) = 0.2$ . Генераторы являются идентичными, но, несмотря на это, в отсутствие взаимодействия (при  $k = 0$ ) при выбранных начальных условиях в генераторах наблюдаются различные динамические режимы, что объясняется явлением бистабильности в отдельно взятом генераторе. Проекции соответствующих аттракторов на плоскости переменных  $x_{1,2}, y_{1,2}$  приведены на рисунке 2.19,б,в. Можно видеть, что режим в первом генераторе является периодическим, а во втором представляет собой развитый хаос. Будем исследовать динамические режимы, устанавливающиеся в системе (2.34) при указанных выше зафиксированных начальных состояниях генераторов, меняя коэффициент связи  $k$  и начальное значение управляющей переменной элемента связи  $w(0) = w_0$ , которое будет рассматриваться как управляющий параметр системы. При этом исследуем эффект полной синхронизации генераторов для различных значений параметра  $\delta$ . Параметр  $\delta$  (параметр забывания) характеризует инерционность элемента связи. При  $\delta = 0$  элемент связи представляет собой идеальный мемристор, состояние которого зависит от начального значения  $w_0$ , как это следует из соотношения (4). Как было показано в работах [43, 44, 64–66], динамическим системам, содержащим идеальные мемристивные элементы, свойственна непрерывная зависимость характеристик установившегося режима от начальных условий, в частности от начального значения переменной, задающей состояние мемристора. Поскольку в системе (2.34) при  $\delta = 0$  существует линия равновесий, совпадающая с осью  $OW$ , то, по аналогии с рассмотренными случаями синхронизации периодических колебаний, можно ожидать, что эффект синхронизации хаоса будет зависеть от начальных значений динамических переменных, в частности от начального значения  $w_0 = w(0)$ .

Уравнения (2.34) интегрировались методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным шагом  $\Delta t = 0.01$ . Поскольку взаимодействующие генераторы иден-

тичны, то при введении связи между ними при определенных условиях возможна полная синхронизация колебаний. В режиме полной синхронизации фазовые траектории принадлежат инвариантному многообразию  $S$ :  $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = y_2$ ,  $z_1 = z_2$  и являются устойчивыми к малым возмущениям, трансверсальным к многообразию  $S$ . Расчеты показывают, что в случае инерционной связи генераторов, особенно связи через идеальный мемристор ( $\delta = 0$ ), существование режима полной синхронизации зависит от начального значения управляющей переменной связи  $w(0) = w_0$ . Действительно, линеаризованные уравнения для малых возмущений  $u = x_2 - x_1$ ,  $v = y_2 - y_1$ ,  $\theta = z_2 - z_1$  имеют вид

$$\begin{cases} \dot{u} = (m - z_1 - 2kG_M(w))u + v - x_1\theta, \\ \dot{v} = -u, \\ \dot{\theta} = -g\theta + gF_x(x_1)u, \\ \dot{w} = -\gamma w - u, \end{cases} \quad (2.36)$$

где  $F_x(x_1) = \frac{dF(x)}{dx}|_{x=x_1}$ . Для идеального мемристора при  $\delta = 0$  получаем  $\dot{w} = -\dot{v}$ , т.е.  $w(t) = v(t) - v_0 + w_0$ , где  $w_0 = w(0)$ ,  $v_0 = v(0)$ . Исключая переменную  $u$ , можно представить систему (2.36) в виде следующих уравнений осциллятора

$$\begin{cases} \ddot{v} - [m - z_1 - 2kG_M(v - v_0 + w_0)]\dot{v} + v = x_1\theta, \\ \dot{\theta} = -g\theta - g(x_1 + |x_1|)\dot{v}, \end{cases} \quad (2.37)$$

Коэффициент  $\sigma = -[m - z_1 - 2kG_M(v - v_0 + w_0)]$  характеризует диссипацию осциллятора, а слагаемое  $x_1\theta$  можно понимать как воздействие на осциллятор, которое зависит от переменной возмущения  $v$ . Поведение возмущения во времени определяется диссипацией и воздействием, а они, в свою очередь, зависят от начальных значений переменных  $v_0 = x_2(0) - x_1(0)$  и  $w_0$ . Таким образом, меняя только начальное состояние элемента связи, определяемое значением  $w_0$ , при фиксированных начальных состояниях генераторов и параметров системы, можно наблюдать как синхронные, так и несинхронные режимы колебаний.

Примеры проекций фазовых траекторий системы (2.34) при различных значениях  $w_0$  в случае идеального мемристивного элемента связи приведены

на рисунке 2.20. Фазовые проекции, в зависимости от выбора начального значения  $w_0$  соответствуют отсутствию полной синхронизации (рисунок 2.20,а) или режиму полной синхронизации (рисунок 2.20,б). Можно также отметить, что при обоих значениях  $w_0$  связь приводит к тому, что в парциальных генераторах устанавливаются однотипные хаотические колебания, аналогичные колебаниям во втором генераторе при выбранных начальных условиях в отсутствии связи.

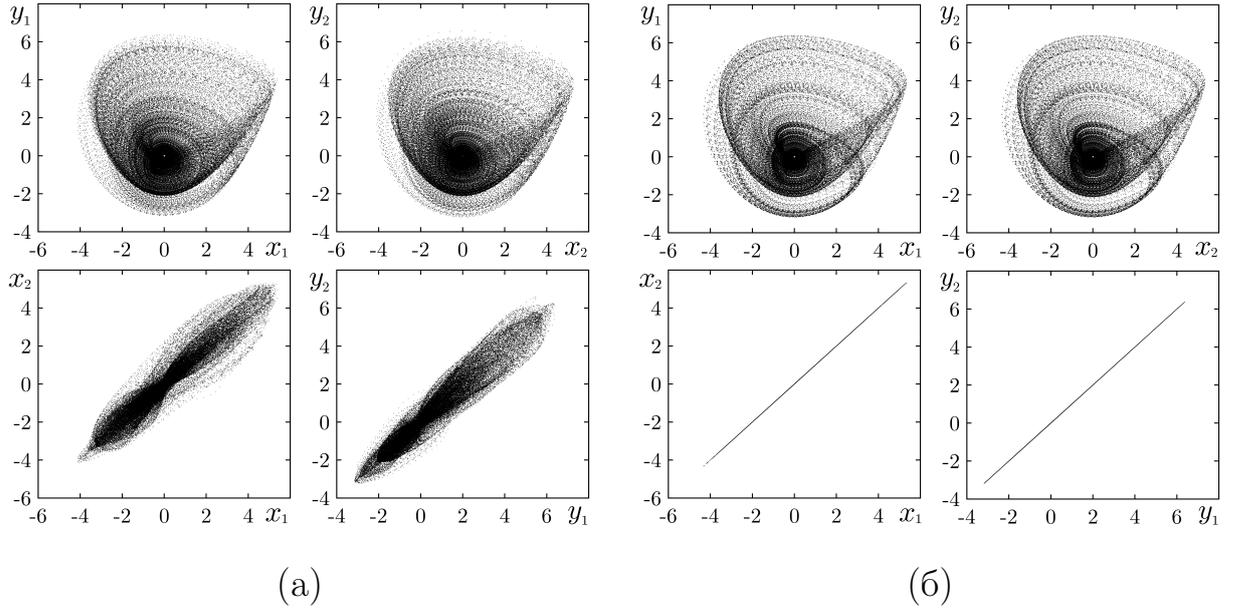


Рисунок 2.20. Проекция фазовых траекторий на плоскости переменных  $x_1$ ,  $y_1$  и  $x_1$ ,  $x_2$  при  $\delta = 0$ ,  $k = 0.01$  и двух значениях  $w_0$ :  $w_0 = 0.0$  (а) и  $w_0 = 0.5$  (б). Другие параметры и начальные условия:  $m = 1.5$ ;  $g = 0.2$ ;  $\mu = 40$ ;  $x_1(0) = 0.5$ ;  $y_1(0) = 0.1$ ;  $z_1(0) = 0.1$ ;  $x_2(0) = -0.5$ ;  $y_2(0) = -0.1$ ;  $z_2(0) = 0.2$

Для диагностики эффекта полной синхронизации рассчитывалась величина

$$D = \langle [x_2(t) - x_1(t)]^2 + [y_2(t) - y_1(t)]^2 + [z_2(t) - z_1(t)]^2 \rangle, \quad (2.38)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  означают усреднение по времени вдоль некоторой реализации. В установившемся режиме величина  $D$  характеризует отклонение взаимодействующих генераторов от полной синхронизации, поэтому будем называть ее погрешностью синхронизации.

При нескольких различных значениях параметра  $\delta$  были построены области синхронного-несинхронного режимов на плоскости параметров  $w_0 - k$ . В качестве критерия полной синхронизации было выбрано условие  $D < 10^{-6}$ . Диаграммы приведены на рисунке 2.21. На графиках область синхронизации выделена серым тоном. В белой области выбранный критерий синхронизации не выполняется. Граница между областями синхронных и несинхронных коле-

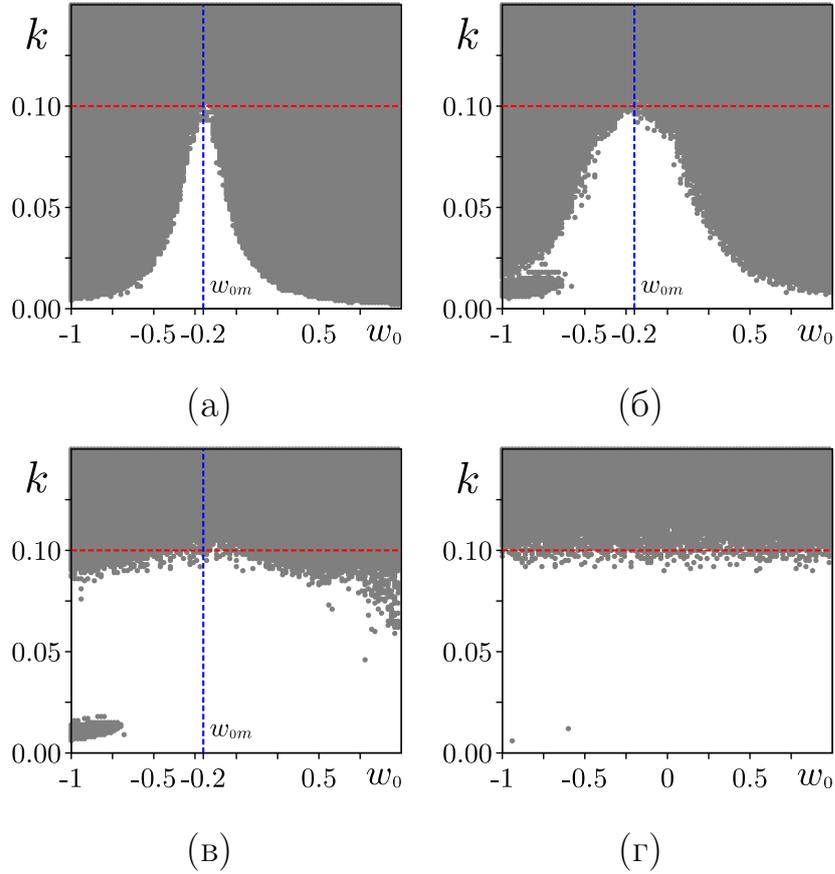


Рисунок 2.21. Области синхронных (серый цвет) колебаний двух генераторов (2.34), полученные при  $\delta = 0$  (а),  $\delta = 0.001$  (б),  $\delta = 0.01$  (в),  $\delta = 0.1$  (г).

Горизонтальная пунктирная линия отмечает границу синхронизации в случае диссипативной связи генераторов (при  $\mu = 0$ ). Другие параметры и начальные

$$\begin{aligned} \text{условия: } m = 1.5; g = 0.2; \mu = 40; x_1(0) = 0.5; y_1(0) = 0.1; z_1(0) = 0.1; \\ x_2(0) = -0.5; y_2(0) = -0.1; z_2(0) = 0.2 \end{aligned}$$

баний не является гладкой линией в следствии мультистабильности режимов. Эта мультистабильность не связана с мемристивным взаимодействием. Она ха-

рактерна как для отдельно взятого генератора (что было отмечено ранее), так, в еще большей степени, для связанных генераторов, даже в случае обычной диссипативной связи. В силу сосуществования нескольких семейств аттракторов с разными границами синхронизации имеется множество пороговых значений коэффициента связи  $k_S$ , принадлежащих некоторому интервалу. Для диссипативной связи, к которой можно перейти, положив параметр  $\mu$  равным нулю, при выбранных начальных состояниях генераторов граница синхронизации соответствует значению  $k_{S0} \approx 0.1$ . На графиках, представленных на рисунке 2.21, значение  $k_{S0}$  отмечено горизонтальной пунктирной линией. В случае инерционной связи при изменении  $w_0$  могут происходить переключения между аттракторами в результате чего граничное значение  $k_S$  претерпевает скачкообразные изменения в пределах некоторого интервала.

В случае идеальной мемристивной связи ( $\delta = 0$ ) граница области синхронизации существенным образом зависит от начального состояния элемента связи (рисунок 2.21,а), т.е. от величины  $w_0$ . Эта зависимость не объясняется отмеченным выше эффектом мультистабильности. Она носит регулярный характер, а изменение значений  $k_S$  при вариации  $w_0$  намного превышает ширину интервала, в котором разбросаны значения  $k_S$  в связи с мультистабильностью. Значение  $k_S$  максимально в окрестности  $w_{0m} \approx 0.2$  и примерно совпадает с границей синхронизации  $k_{S0}$  при диссипативной связи. С ростом отклонения  $|w_0 - w_{0m}|$  граница синхронизации опускается вниз, становясь все меньше по сравнению с  $k_{S0}$ . В пределах рассматриваемого интервала  $w_0 \in [-1; +1]$  отклонение значений  $k_S$  от максимума составляет около 95%. При  $\delta = 0$  граница между областями синхронных и несинхронных режимов близка к гладкой кривой с небольшим разбросом значений  $k_S$  в ее окрестности. Кроме того, области почти симметричны относительно вертикальной линии, соответствующей значению  $w_{0m}$ . Следует отметить, что координата максимума порога синхронизации  $w_{0m}$  определяется начальными состояниями генераторов, т.е. значениями переменных  $x_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$ ,  $z_{1,2}$ . Области синхронных и несинхронных режимов на

плоскости значений  $w_0$  и  $k$ , рассчитанные для других фиксированных начальных состояниях генераторов, выглядят точно также, как на рисунок 2.21,а), но со смещением точки  $w_{0m}$  на некоторое расстояние в ту или иную сторону (в работе не приведены).

Положим показатель забывания отличным от нуля, но малым:  $\delta = 0.001$ . При этом, связь обладает большой инерционностью. Соответствующая область синхронизации приведена на рисунке 2.21,б. Несмотря на то, что элемент связи не является идеальным мемристором, тенденция зависимости границы синхронизации от  $w_0$  сохраняется. Форма границы также в целом сохраняется и отклонение значений  $k_S$  от максимума остается значительным, хотя белая область на графике, соответствующая отсутствию синхронизации, несколько расширяется. Кроме того можно отметить рост разброса граничных значений и отклонение от симметрии. В интервале  $w_0 \in [-1; -0.5]$  появляется дополнительная область синхронизации при небольших значениях связи. При  $\delta = 0.01$  Область несинхронного поведения еще больше расширяется, а граница синхронизации смещается вверх, стремясь к горизонтальной линии  $k = k_{S0}$  (рисунок 2.21,в). Растет асимметрия и разброс точек границы. При  $\delta = 0.1$  зависимость значений  $k_S$  от  $w_0$ , связанная с инерционностью (мемристивностью) взаимодействия, практически пропадает. Некоторое влияние  $w_0$  на значение  $k_S$  в этом случае вызвано переключениями между аттракторами, а точки границы становятся разбросаны вдоль горизонтальной линии (рисунок 2.21,г).

Зависимости величины погрешности синхронизации  $D$  от параметра связи  $k$  при диссипативной связи ( $\mu = 0$ ) и при мемристивной связи с различными значениями параметра  $\delta$  приведены на рисунке 2.22. В случае мемристивной связи для каждого рассмотренного значения  $\delta$  на графиках приведены для сравнения две кривые  $D(k)$ , полученные для двух начальных значений переменной  $w_0$ . Для диссипативной связи генераторов, в силу особенностей их динамики, характерна сильно неравномерная зависимость  $D(k)$ . Вплоть до границы синхронизации при  $k_{S0} \approx 0.1$  наблюдается чередование синхронных и несин-

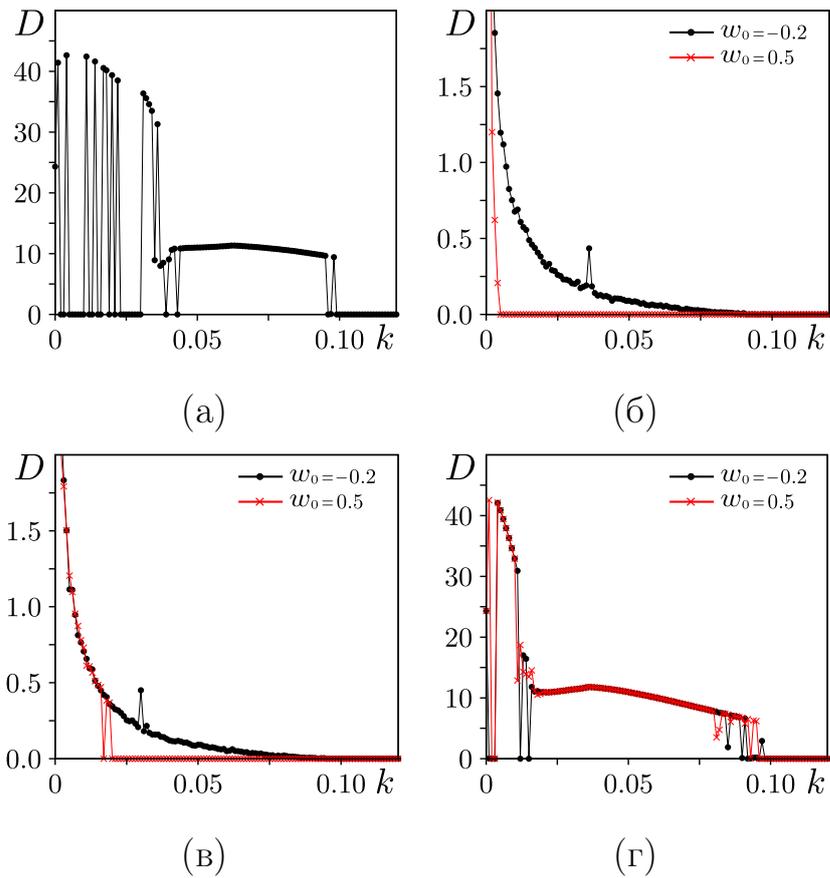


Рисунок 2.22. Зависимости погрешности синхронизации  $D$  от параметра связи  $k$  в системе двух генераторов (2.34) при диссипативной связи (а) и мемристивной связью при двух начальных условиях  $w_0$ , полученные при значениях параметра  $\delta$ :  $\delta = 0$  (б);  $\delta = 0.001$  (в);  $\delta = 20$  (г). Другие параметры и начальные условия:  $m = 1.5$ ;  $g = 0.2$ ;  $\mu = 40$ ;  $x_1(0) = 0.5$ ;  $y_1(0) = 0.1$ ;  $z_1(0) = 0.1$ ;  $x_2(0) = -0.5$ ;  $y_2(0) = -0.1$ ;  $z_2(0) = 0.2$ .

хронных режимов, связанное с переключениями между аттракторами системы (рисунок 2.22,а). Перепады значений  $D$  при этом очень велики. Для идеальной мемристивной связи и мемристивной связи с малым параметром  $\delta$  зависимости  $D(k)$  различаются для разных значений  $w_0$ . Кроме того, они носят иной характер по-сравнению со случаем диссипативной связи. На рисунке 2.22,б,в приведены примеры зависимостей, полученные при  $\delta = 0$  и  $\delta = 0.001$ . Величина  $D$  быстро уменьшается с ростом связи, поэтому для графиков выбран более мелкий масштаб по оси абсцисс и большие значения  $D$  в начале графика не показаны.

ны, чтобы можно было рассмотреть детали при  $k \rightarrow k_S$ . Вблизи точки максимума  $w_0 \approx w_{0m}$  величина  $D$  спадает почти по экспоненте (рисунок 2.22,б,в, черные кривые). Сами зависимости становятся гораздо более гладкими, чем в случае диссипативной связи. Это свидетельствует об ином типе несинхронного хаоса в генераторах, взаимодействующих через мемристор, по сравнению с динамикой хаотических генераторов с диссипативной связью, описанной, например в [10]. Такой же характер зависимости  $D(k)$  наблюдался и при  $\delta = 0.1$  хотя кривые, полученные при разных условиях  $w_0$ , практически совпадают (графики не приведены). При очень больших значениях  $\delta$  кривые, полученные для различных  $w_0$ , почти перестают отличаться, а их характер становится схожим с характером зависимости  $D(k)$  при диссипативной связи. Примеры кривых  $D(k)$  при большом значении параметра забывания  $\delta = 20$  приведены на рисунке 2.22,г.

Таким образом, связь хаотических генераторов через мемристор с эффектом забывания обладает рядом особенностей по сравнению с диссипативной связью. Эти особенности состоят в ином, более плавном, переходе к полной синхронизации, а, главное, наличии у системы мемристивных свойств, проявляющихся в особом рода зависимости границы синхронизации от начального состояния элемента связи, задаваемого переменной  $w$ . При некотором начальном значении  $w$  наблюдается максимум порога синхронизации, совпадающий с порогом при диссипативной связи. С удалением от точки максимума синхронный режим реализуется при всё меньших значениях коэффициента связи. Мемристивность наблюдается не только в случае идеального элемента связи с показателем забывания  $\delta = 0$ , но она также сохраняются при сильной инерционности связи, когда параметр  $\delta$  достаточно мал. С ростом  $\delta$  мемристивные свойства связи исчезают.

## 2.5.2 Моделирование полной синхронизации хаоса в мемристивно связанных системах с помощью логистических отображений

Вторая из исследованных моделей представляет собой два идентичных одномерных отображения с дискретным временем, которые связаны посредством дискретного аналога мемристивного элемента. Данная модель может быть представлена следующим образом:

$$\begin{cases} x(n+1) = f[x(n)] + kG_M[w(n)](f[y(n)] - f[x(n)]), \\ y(n+1) = f[y(n)] + kG_M[w(n)](f[x(n)] - f[y(n)]), \\ w(n+1) = [1 - \delta w(n)] + \varepsilon[x(n) - y(n)], \end{cases} \quad (2.39)$$

где  $x$  и  $y$  — динамические переменные, задающие состояния взаимодействующих осцилляторов,  $w$  — переменная, задающая состояние элемента связи,  $n$  — дискретное время,  $k$  — коэффициент связи,  $G_M(w)$  — характеристика элемента связи (аналог мемристивной характеристики (8)),  $w(n)$  — динамическая переменная, управляющая характеристикой нелинейной инерционной связи,  $\delta$  и  $\varepsilon$  — параметры мемристивной связи. Параметр  $\delta$ , как и в случае генераторов (2.34), характеризует скорость, с которой мемристивный элемент «забывает» свое первоначальное состояние (показатель забывания). Характеристику элемента связи будем задавать, как и раньше, в виде:

$$G_M(w) = 1 - \mu w^2, \quad (2.40)$$

где  $\mu$  — параметр элемента связи. Функция последования  $f(\dots)$  в уравнениях (2.39) определяет динамику отдельного отображения. Будем рассматривать связанные логистические отображения, для которых функция последования имеет вид:

$$f(x) = \alpha x(1 - x), \quad (2.41)$$

где  $\alpha$  — параметр, управляющей режимом отображения. При исследовании системы (2.39) фиксировались значения параметров  $\alpha = 3.8$  (что соответствует хаосу в логистическом отображении),  $\mu = 4$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

При проведении исследований система отображений (2.39) итерировалась на достаточно большом интервале времени (не менее 10000 итераций), затем строились проекции фазовых траекторий на плоскости различных динамических переменных и рассчитывалась величина ошибки синхронизации.

$$D = \langle [y(n) - x(n)]^2 \rangle, \quad (2.42)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$ , как и раньше, означают усреднение по времени вдоль некоторой реализации. В ходе проведения исследований строились зависимости величины  $D$  от коэффициента связи  $k$  при различных фиксированных начальных значениях переменной  $w(0) = w_0$  и области синхронного и несинхронного режимов на плоскости  $w_0, k$  для различных значений показателя забывания  $\delta$ .

Зафиксируем начальные состояния осцилляторов  $x(0) = x_0 = 0.1$ ;  $y(0) = y_0 = 0.2$ , а значение переменной связи  $w(0) = w_0$  будем, как и раньше, рассматривать в качестве управляющего параметра. В зависимости от параметра связи в системе (2.39) может наблюдаться устойчивый режим хаотической синхронизации, соответствующий существованию в фазовом пространстве притягивающего многообразия  $S: x = y$ . Дискретная модель (2.39) отражает основную особенность системы хаотических генераторов с инерционной нелинейной связью (2.34), состоящую в зависимости эффекта полной синхронизации от начальных условий. Эта зависимость проиллюстрирована проекциями фазовых траекторий, представленными на рисунке 2.23.

Области синхронного и несинхронного режимов на плоскости параметров  $w_0 - k$ , полученные для модели (2.39) для нескольких значений  $\delta$ , приведены на рис.2.24. Пунктирная горизонтальная линия отмечает границу синхронизации  $k = k_{S0} \approx 0.169$ , полученную для диссипативно связанных отображений (при  $\mu = 0$ ) с теми же параметрами и начальными состояниями. Области, по-

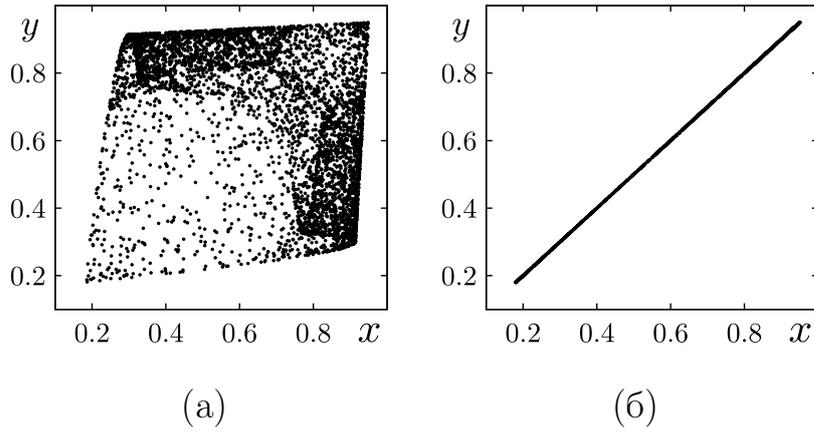


Рисунок 2.23. Проекция фазовых траекторий системы (2.39) на плоскость переменных  $x$ ,  $y$  при  $\delta = 0$ ,  $k = 0.05$  и двух значениях  $w_0$ :  $w_0 = 0$  (а) и  $w_0 = 0.8$  (б). Другие параметры и начальные условия:  $\alpha = 3.8$ ;  $\mu = 4$ ;  $\varepsilon = 0.001$ ;  $x_0 = 0.1$ ;  $y_0 = 0.2$

лученные в случае идеальной мемристивной связи ( $\delta = 0$ ), приведены на рисунку 2.24,а. Граница между областями имеет большое сходство с соответствующей границей в системе (2.34) при  $\delta = 0$ . Так же как и в системе (2.34) граница имеет колоколообразную форму, а максимальное значение порога синхронизации совпадает с порогом при диссипативной связи. Разница состоит в том, что теперь точка максимума соответствует значению  $w_0 = 0$ . С ростом модуля  $w_0$  граница синхронизации опускается. Зависимость границы синхронизации от  $w_0$  в системе (2.39), так же как в системе (2.34), сохраняется при малых значениях  $\delta$  (рисунок 2.24,б,в), но форма областей меняется несколько иначе. Возникает горизонтальный участок границы вблизи значения  $k_{S0}$ , который с ростом  $\delta$  увеличивается. При  $\delta = 0.1$  во всем рассматриваемом интервале  $w_0 \in [-1; +1]$  граничные значения  $k_S$  располагаются вблизи отмеченной горизонтальной линии, что отражает потерю элементом связи мемристивных свойств. Также можно отметить, что разброс граничных значений параметра связи в данной модели существенно меньше, чем в системе генераторов Анищенко-Астахова, что может объясняться меньшим влиянием мультистабильности в выбранном режиме.

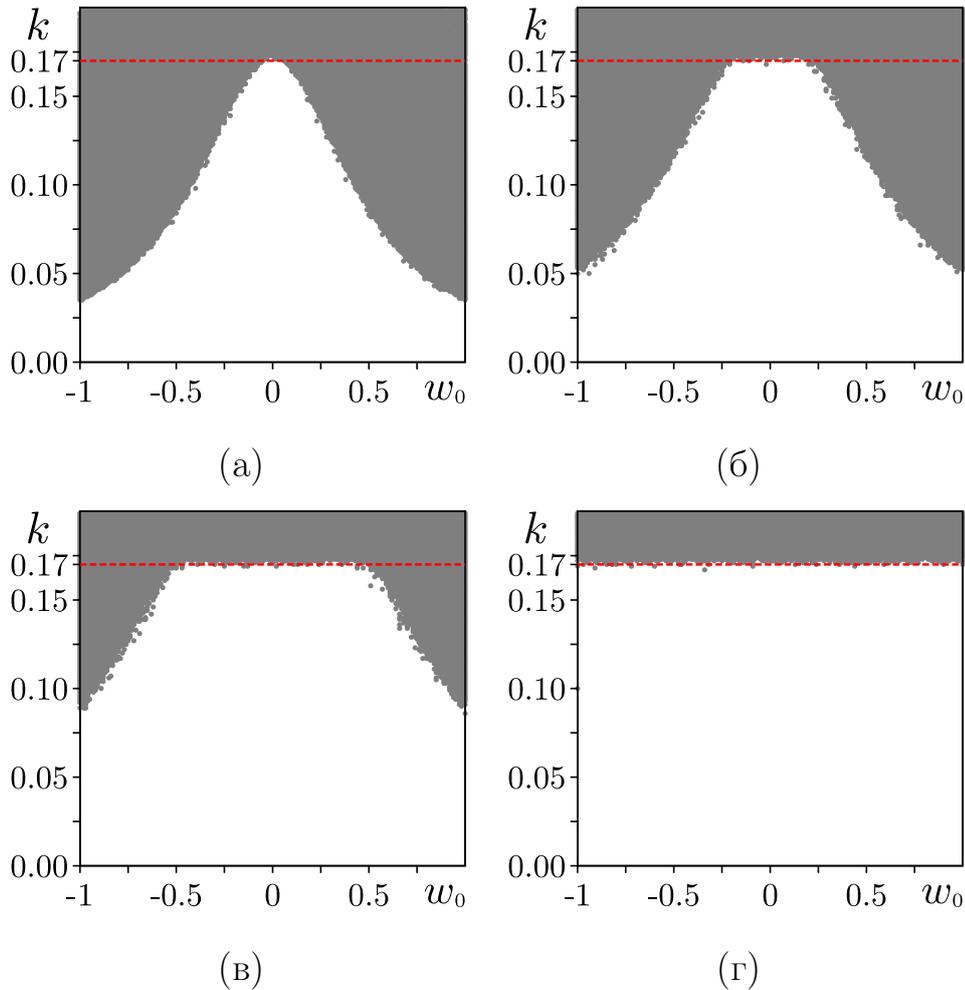


Рисунок 2.24. Области синхронных (серый цвет) и несинхронных (белый цвет) режимов в системе двух логистических отображений на плоскости параметров  $w_0$ ,  $k$ , полученные при  $\delta = 0$  (а),  $\delta = 0.001$  (б),  $\delta = 0.01$  (в) и  $\delta = 0.1$  (г).

Горизонтальная пунктирная линия отмечает границу синхронизации в случае диссипативной связи генераторов (при  $\mu = 0$ ). Другие параметры и начальные условия:  $\alpha = 3.8$ ;  $\mu = 4$ ;  $\varepsilon = 0.001$ ;  $x_0 = 0.1$ ;  $y_0 = 0.2$

условия:  $\alpha = 3.8$ ;  $\mu = 4$ ;  $\varepsilon = 0.001$ ;  $x_0 = 0.1$ ;  $y_0 = 0.2$

На рисунке 2.25, приведены графики зависимости  $D$  от  $k$ , полученные для модели (2.39) в случае диссипативной связи при  $\mu = 0$  (рисунок 2.25,а) и при мемристивной связи с различными значениями  $\delta$ . В случае мемристивной связи сравниваются графики, полученные для двух значений  $w_0$ . При  $\delta = 0$  и  $\delta = 0.001$  хорошо видна зависимость поведения погрешности синхронизации от начального значения переменной связи  $w_0$  и соответствующие различия порога синхронизации (рисунок 2.25,б,в). Однако сам характер зависимости при

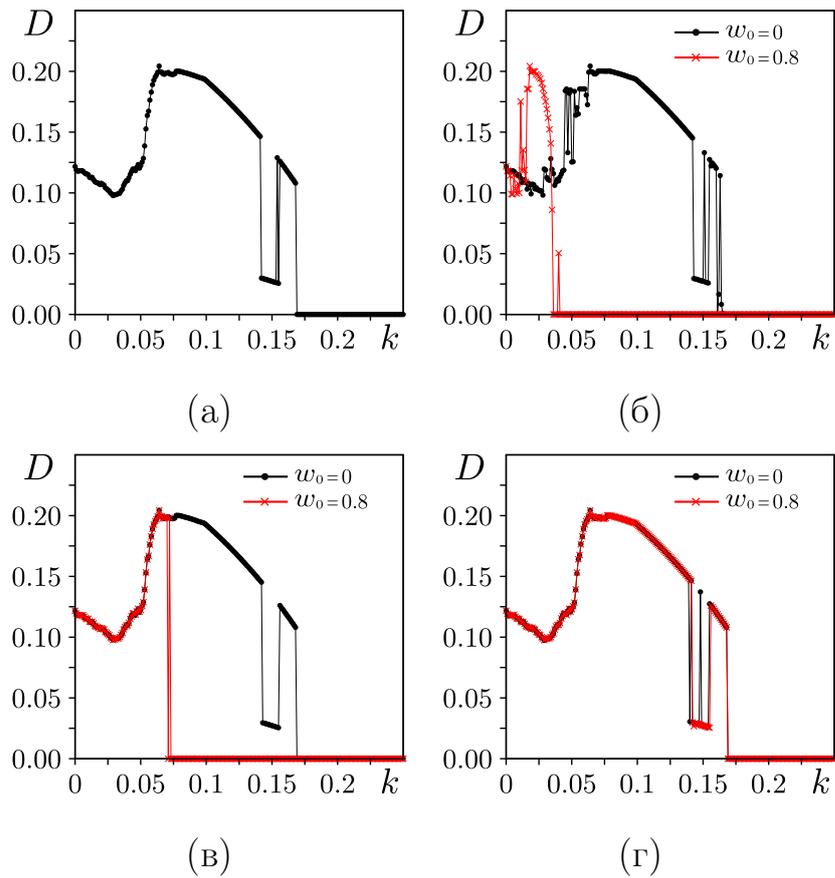


Рисунок 2.25. Зависимости погрешности синхронизации  $D$  от параметра связи  $k$  в системе (2.39) при диссипативной связи (а) и мемристивной связи при двух начальных условиях  $w_0$ , полученных при различных значениях параметра  $\delta$ :  $\delta = 0$  (б);  $\delta = 0.001$  (в);  $\delta = 0.1$  (г). Другие параметры и начальные условия:  $\alpha = 3.8$ ;  $\mu = 4$ ;  $\varepsilon = 0.001$ ;  $x_0 = 0.1$ ;  $y_0 = 0.2$ .

мемристивной связи в модели (2.39) остается сходным со случаем диссипативной связи. Отсутствие экспоненциальных участков на рисунке 2.25 отличает модель (2.39) от (2.39). При  $\delta = 0.1$  начальные значения  $w_0$  уже не влияют на зависимость  $D(k)$ , которая практически повторяет форму зависимости при диссипативной связи (рисунок 2.25,г).

## 2.6 Выводы по второй главе

В рамках данной главы диссертации исследованы эффекты синхронизации, как мемристивных генераторов, так и автоколебательных систем, которые сами по себе не являются мемристивными, но взаимодействуют через мемристор. Во всех рассмотренных случаях наблюдалось общее свойство, состоящее в зависимости эффекта синхронизации от начальных условий, в частности от начальных состояний мемристивных элементов.

Для мемристивных генераторов периодических колебаний было установлено явление как взаимной, так и вынужденной синхронизации фазы и частоты. Эффект фазового захвата является характерным признаком автоколебаний и, поэтому, наличие фазового захвата для мемристивного генератора с внешним гармоническим воздействием или для взаимодействующих мемристивных генераторов с частотной расстройкой свидетельствует об автоколебательном характере системы. Это важный вывод, поскольку периодические колебания в мемристивном генераторе не связаны с предельным циклом и соответствуют непрерывному множеству замкнутых траекторий, не являющихся изолированными. В случае вынужденной синхронизации наличие фазового захвата и зависимость границ области захвата от начального состояния мемристора были установлены не только методами численного моделирования, но и аналитически, с использованием квазигармонического приближения, причем полученные аналитические и численные результаты находятся в хорошем соответствии.

Впервые были показаны особенности синхронизации мемристивных систем, связанные с характером предельных множеств в системах с идеальными мемристорами. Каждой из замкнутых траекторий соответствует своя область синхронизации. Таким образом, имеется непрерывное множество областей синхронизации с различающимися границами. Реализация той или иной замкнутой траектории определяется начальными условиями и, соответственно, эти усло-

вия определяют также границы области синхронизации при наличии частотной расстройки. В работе была рассмотрена зависимость границ синхронизации от начального значения переменной, задающей состояние мемристора и показана непрерывная зависимость границ синхронизации от этой величины. Установившийся режим и границы области синхронизации зависят от начальных значений, не только переменной состояния мемристора, но и от других динамических переменных системы. Следует отметить, также, что в фазовом пространстве существует непрерывное множество замкнутых кривых, соответствующих синхронным колебаниям, а также непрерывное множество квазипериодических траекторий, соответствующих несинхронным режимам. Границы областей синхронизации, соответствующие фазовому захвату, по-видимому связаны с бифуркацией, аналогичной седло-узловой бифуркации циклов на торе. В данном случае рождается пара замкнутых кривых, не являющихся изолированными. Однако детально данная бифуркация в работе не исследовалась.

Была обнаружена еще одна особенность взаимной синхронизации мемристивных генераторов периодических колебаний, которая состоит в наличие порога полной (синфазной) синхронизации даже в случае идентичных генераторов (без расстройки). То есть, для того, чтобы колебания в парциальных системах полностью совпадали, требуется сила связи, превышающая некоторое пороговое значение. В случае «обычных» периодических генераторов для установления синфазного режима достаточно сколь угодно малого значения коэффициента связи. Наличие порога для полной синхронизации мемристивных генераторов объясняется различиями периодов колебаний в идентичных парциальных мемристивных системах с разными начальными условиями. Пороговое значение коэффициента связи при этом зависит от начальных условий.

В «обычных» периодических генераторах, связанных через мемристор, также наблюдалась зависимость эффекта синхронизации от начального состояния системы. Численно и аналитически, с использованием методов квазигармонического анализа, было показано, что границы области синхронизации ге-

нераторов с частотной расстройкой зависят от начального значения переменной состояния мемристора связи, причем эта зависимость является непрерывной.

Была рассмотрена задача о синхронизации хаотических колебаний в системах с мемристивной связью. Хотя факт полной хаотической синхронизации в идентичных системах, связанных через мемристор, был известен ранее, проведенные исследования позволили впервые установить, что и в этом случае имеет место зависимость порога синхронизации от начального состояния. Была построена область синхронизации на плоскости параметров «начальное значение переменной состояния мемристора – коэффициент связи» и показано, что порогом синхронизации можно существенным образом управлять, изменяя начальное состояние мемристивного элемента связи. Тот же эффект был подтвержден на модельной системе двух логистических отображений с мемристивной связью.

Были проведены исследования влияния на эффект синхронизации конечной памяти мемристоров. Если учесть неидеальный характер мемристивных элементов, то указанные выше особенности синхронизации периодических колебаний исчезают, как в случае синхронизации мемристивных генераторов с диссипативной связью, так и в случае синхронизации «обычных» генераторов с мемристивной связью. При малом параметре забывания, когда мемристивный элемент сохраняет память о начальном состоянии в течении длительного времени, в системе можно наблюдать длительные переходные процессы к синхронному состоянию, зависящие от начальных условий. Однако при любых начальных условиях в пределе всё равно установится один и тот же режим (синхронный или не синхронный). Для систем со сложной динамикой, взаимодействующих через мемристивную связь, картина оказалась несколько иной. Было впервые установлено, что зависимость порога синхронизации хаоса от начального значения переменной, определяющей состояние мемристивного элемента связи, наблюдается не только в случае идеального мемристора, но сохраняется и для неидеального мемристора, если параметр забывания достаточно мал. Таким образом, было показано, что взаимодействие систем через реальное

мемристивное устройство с достаточно длительной памятью в определенных случаях может демонстрировать существенную зависимость от начального состояния этого устройства и управляться выбором этого состояния.

## Глава 3. Волновые процессы в ансамбле мемристивно связанных осцилляторов

### 3.1 Введение

В предыдущей главе было показано, что взаимодействие автоколебательных систем через мемристор приводит к особенностям динамики, связанным с зависимостью эффектов как частотно-фазовой синхронизации, так и полной синхронизации (в случае хаотических колебаний), от начальных условий, и, в частности, от начального состояния мемристора связи. Исследование влияния мемристивного характера связей на динамику осцилляторных ансамблей является следующим шагом в изучении особенностей поведения мемристивных систем. Интерес представляют задачи моделирования волновых процессов в мемристивной активной среде или пространственно организованном ансамбле осцилляторов. В частности актуальность таких задач связана с моделированием динамики нейронных систем с мемристивным характером взаимодействия нейронов. На сегодняшний день имеется ряд работ, посвященных эффектам синхронизации пространственно-временной динамики, распространению волн и образованию пространственных структур в нейронных ансамблях и сетях с мемристивными связями (например, [33, 59–62]). Однако особенности поведения распределенных систем с мемристивным характером связей до сих пор не вполне ясны. Нет ответа на вопрос, приводит ли мемристивная связь к качественно новым явлениям коллективной динамики ансамблей и в чем суть этих явлений.

Интересной является также задача синхронизации сложных пространственно-временных режимов в ансамблях или слоях многослой-

ной сети при мемристивном взаимодействии этих ансамблей или слоев. Синхронизация химерных структур в мемристивно-связанных слоях сети из нейронов Хиндмарш-Розе рассматривалась в [33, 58]. Была показана возможность синхронизации химерных структур в двух слоях. При этом состояния мемристоров также демонстрировали соответствующую структуру когерентных и некогерентных кластеров. При определенных параметрах мемристивной связи наблюдалась не только синхронизация слоев, но также полная синхронизация состояний всех нейронов.

В данной главе (в разделах 3.1, 3.2) исследуются особенности волновых процессов в ансамблях автогенераторов и возбудимых осцилляторов, связанных через мемристивные элементы, при периодических граничных условиях. Такие ансамбли можно рассматривать как модели мемристивных активных сред. Мемристивные связи в исследуемых ансамблях являются локальными и ансамбль с периодическими границами представляет собой цепочку, свернутую в кольцо. Как в случае автоколебательного характера элементов, так и в возбужденном режиме осцилляторов по кольцу могут распространяться бегущие волны. В работе проводится исследование влияния начальных состояний мемристоров связи на характеристики волновой моды в случае идеальных мемристоров и мемристоров с конечной памятью. Последний раздел главы посвящен исследованию полной синхронизации пространственно-временной динамики слоев двухслойной мультиплексной сети хаотических отображений с мемристивной связью между слоями. Рассматривается взаимодействие слоев в режиме химерных состояний. В отличие от [63], основное внимание уделено влиянию на эффект синхронизации начальных состояний мемристивных связей в идеальном случае и при конечной памяти элементов связи. Представленные в данной главе результаты были опубликованы в работах [71–73].

## 3.2 Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов

### 3.2.1 Исследуемая система

Исследуемая радиотехническая модель ансамбля показана на рисунке 3.1. Она представляет собой кольцо из  $N$  связанных автогенераторов ван дер Поля, соединенных мемристивными проводимостями (рисунок 3.2). Каждый парци-

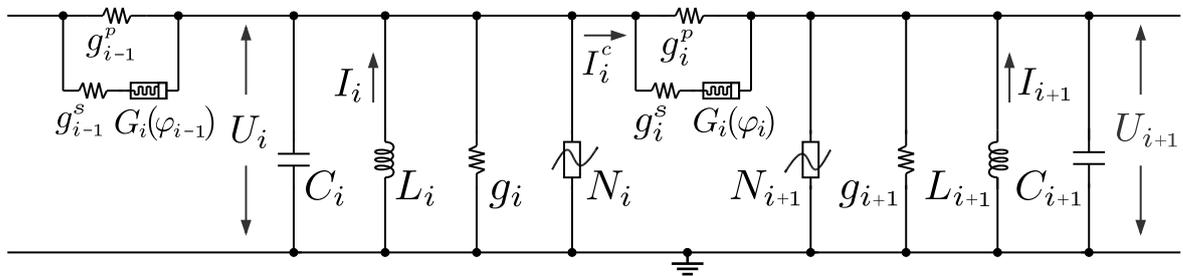


Рисунок 3.1. Эквивалентная схема  $i$ -го и  $(i+1)$ -го автогенераторов.

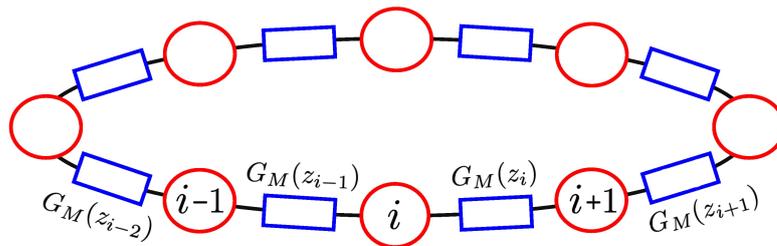


Рисунок 3.2. Схема ансамбля мемристивно связанных осцилляторов.

альный автогенератор состоит из параллельного колебательного контура, включающего ёмкость  $C_i$ , индуктивность  $L_i$ , проводимость  $g_i$  и нелинейный элемент  $S_i$  с вольт-амперной характеристикой:  $I_i(U_i) = -\alpha_i U_i + \beta_i U_i^3$ . Функция  $W(\varphi_i)$  задает мемристивную проводимость, связывающую автогенераторы с номерами  $i$  и  $i+1$ . Дополнительные резисторы с проводимостями  $g_i^p$  и  $g_i^s$  обеспечивают регулировку суммарной проводимости, которая отвечает за силу связи  $k_i W(\varphi_i)$ ,

где  $k_i$  представляет собой коэффициент связи. Мемристоры, обеспечивающие связь автогенераторов, управляются некоторыми переменными  $\varphi_i$ .

Используя правила Кирхгофа, получаем следующую систему уравнений в физических переменных  $U_i, I_i, \varphi_i$ :

$$\begin{cases} \frac{dU_i}{dt_*} + \frac{1}{C_i}I_i + \frac{g_i}{C_i}U_i - \frac{\alpha_i}{C_i}U_i + \frac{\beta_i}{C_i}U_i^3 + \frac{k_i W(\varphi_i)}{C_i}(U_i - U_{i+1}) - \\ - \frac{k_{i-1} W(\varphi_{i-1})}{C_i}(U_{i-1} - U_i) = 0, \\ \frac{1}{C_i} \frac{dI_i}{dt_*} = \frac{1}{C_i L_i} U_i, \\ \frac{d\varphi_i}{dt_*} = F_i(\varphi_i, U_i, U_{i+1}), \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.1)$$

Здесь  $t_*$  — физическое время. Граничные условия имеют вид:  $U_{i\pm N} = U_i, I_{i\pm N} = I_i, \varphi_{i\pm N} = \varphi_i$ . Будем считать все автогенераторы и элементы связи полностью идентичными. В этом случае:  $\alpha_i = \alpha, \beta_i = \beta, g_i = g, C_i = C, L_i = L, k_i = k$ . Обозначим  $\omega^2 = 1/LC$  и введем безразмерные переменные:

$$t = \omega t_*, \quad x_i = \sqrt{\frac{\beta}{C\omega}} U_i, \quad y_i = \frac{1}{C\omega} \sqrt{\frac{\beta}{C\omega}} I_i, \quad z_i = \omega \sqrt{\frac{\beta}{C\omega}} \varphi_i.$$

Согласно (4) функция  $F$  состояния мемристоров в безразмерном виде примет вид:  $-\delta z_i + x_i - x_{i+1} = \sqrt{\frac{C\omega}{\beta}} F(\varphi_i, U_i, U_{i+1})$ . Проводимости мемристоров имеют гладкую характеристику (8) и в данном случае будут записываться как  $G_M(z_i) = \frac{W(\varphi_i)}{C\omega} = a + bz_i^2$ . А величину  $\frac{\alpha-g}{C\omega}$  обозначим как  $\varepsilon$ . В результате система (3.1) в безразмерных переменных будет записана как

$$\begin{cases} \dot{x}_i = (\varepsilon - x_i^2)x_i - y_i + k[G_M(z_i)(x_{i+1} - x_i) + G_M(z_{i-1})(x_{i-1} - x_i)], \\ \dot{y}_i = x_i, \\ \dot{z}_i = -\delta z_i + x_i - x_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.2)$$

где  $x_i, y_i, z_i$  — безразмерные динамические переменные;  $t$  — безразмерное время;  $\varepsilon$  — параметр, управляющий режимом автогенераторов;  $k$  — коэффициент связи;  $a = 0.02$  и  $b = 0.8$  — параметры мемристивной проводимости, одинаковые для всех мемристоров;  $\delta$  — параметр мемристора с конечной памятью. Граничные условия выбираются периодическими  $x_{i\pm N} = x_i$  и  $y_{i\pm N} = y_i$ .

### 3.2.2 Влияние начальных условий на форму бегущей волны

Исследуем ансамбль из  $N = 100$  автогенераторов (3.2), связанных через идеальные мемристивные проводимости ( $\delta = 0$ ). Зафиксируем следующие параметры модели:  $\varepsilon = 0.1$ ,  $k = 0.25$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ . Как было показано в [43, 44, 64–67], особенность систем, содержащих мемристоры с «идеальной памятью», заключается в непрерывной зависимости характеристик установившегося режима от выбора начального состояния, в частности, от начальных значений переменных, управляющих мемристивными элементами. Такая чувствительность к начальному состоянию, особенно к начальному значению переменной, управляющей мемристором, связана с существованием в мемристивных системах многообразий, состоящих из точек равновесия. В системе (3.2) при  $\delta = 0$  и характеристике мемристоров, задаваемой выражением (8), также существует такое инвариантное многообразие: все точки подпространства  $Q$ , для которого  $x_i = 0$ ,  $y_i = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , являются состояниями равновесия.

Рассмотрим влияние на волновой процесс в кольце мемристивно связанных автогенераторов (3.2) начальных распределений  $z_i(0)$ . Будем задавать различные начальные условия для динамических переменных, определяющих состояния автогенераторов ансамбля  $x_i(0)$ ,  $y_i(0)$  и управляющих переменных мемристоров связи  $z_i(0)$ . Выберем начальное распределение  $x_i(0)$ ,  $y_i(0)$  вдоль дискретной пространственной координаты  $i$ , задаваемое гармоническими функциями:  $x_i(0) = A \sin(2\pi i/N)$ ,  $y_i(0) = A \cos(2\pi i/N)$ . Оно изображено на рисунке 3.3,а для  $A = 1$ . Для мемристивных переменных  $z_i$  исследуем три варианта регулярного начального распределения  $z_i(0)$ , показанных на рисунке 3.3б (кривые IC-1, IC-2, IC-3). Кроме того, рассмотрим случайное начальное распределение  $x_i(0)$ ,  $y_i(0)$  в интервале  $[-0.5, 0.5]$ , полученное с помощью генератора

случайных чисел с равномерным распределением (рисунок 3.3, в, г), при тех же начальных распределениях  $z_i(0)$ : IC-1; IC-2; IC-3.

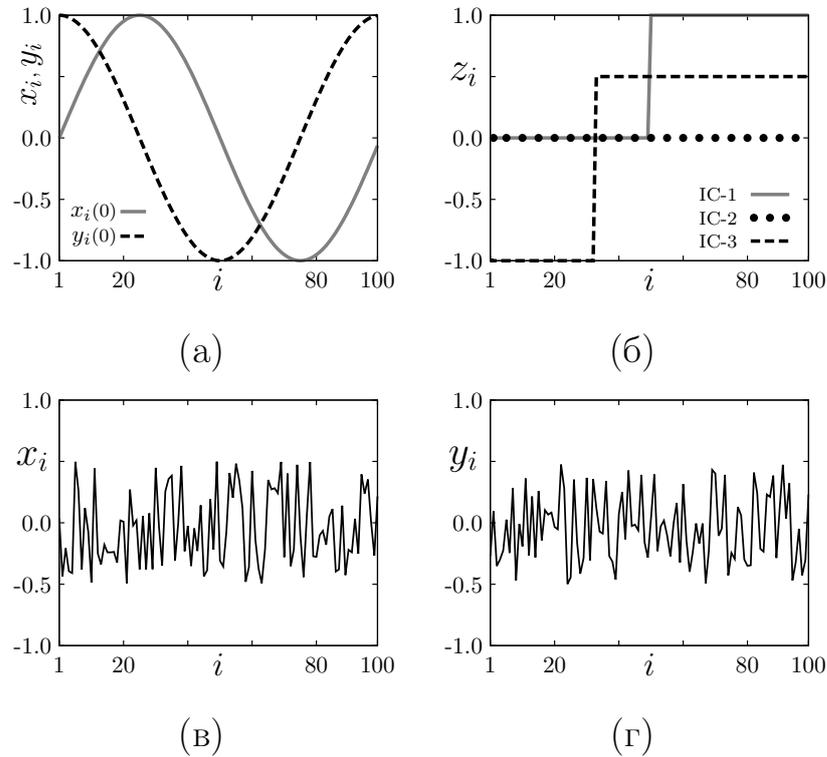


Рисунок 3.3. (а) Начальное распределение  $x_i(0)$  (сплошная линия) и  $y_i(0)$  (пунктирная линия) в виде тригонометрических функций; (б) начальные распределения  $z_i(0)$  (IC-1, IC-2, IC-3); (в) и (г) случайное начальное распределение переменных  $x_i$  и  $y_i$ .

В численных экспериментах уравнения (3.2) интегрировались методом Рунге-Кутты 4-го порядка на времени, достаточном для установления стационарного профиля волны. Проверка того, является ли режим установившимся, производилась с помощью диагностики повторяемости формы мгновенного профиля в моменты времени, в которые для первого элемента ансамбля выполняются условия:  $x_1(t) > 0$ ,  $|y_1(t)| \leq 0.001$ .

Использование мемристивных элементов в качестве элементов связи приводит к длительному переходному процессу в системе. Так, в случае идеальных мемристоров ( $\delta = 0$ ), профиль волны в кольце (3.2) при указанных выше условиях устанавливается на времени  $t = 80000$  безразмерных единиц. На

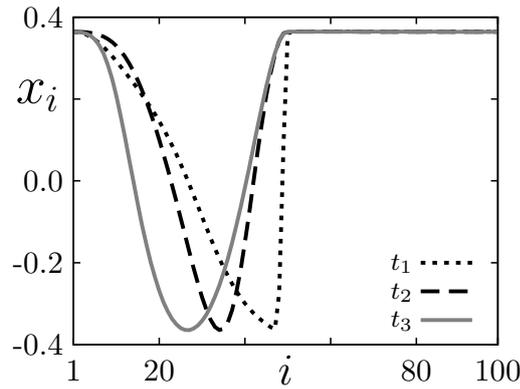


Рисунок 3.4. Установление пространственного профиля в системе (3.2) при начальном распределении IC-1 (рисунок 3.3,б). Мгновенные профили получены в следующие периоды времени:  $t_1 = 500$  (линия из точек);  $t_2 = 20000$  (пунктирная линия);  $t_3 = 80000$  (сплошная линия). Начальное распределение переменных  $x_i(0)$   $y_i(0)$  (рисунок 3.3,а). Параметры системы:

$$\varepsilon = 0.1, k = 0.25, a = 0.02, b = 0.8, \delta = 0.$$

рисунке 3.4 показаны мгновенные профили бегущей волны в различные периоды времени ( $t_1 = 500$ ,  $t_2 = 20000$ ,  $t_3 = 80000$ ). Для времени установления  $t \geq t_3 = 80000$  безразмерных единиц форма профиля остается практически неизменной. Аналогичным образом ведут себя мгновенные профили и при других начальных условиях.

На рисунке 3.5 приведены пространственно-временные диаграммы и соответствующие им мгновенные профили, полученные при начальных распределениях  $x_i(0)$ ,  $y_i(0)$  и  $z_i(0)$  (рисунки 3.3,а,б). На пространственно-временных диаграммах различными тонами показаны мгновенные значения  $x_i$  автогенераторов ансамбля для различных моментов времени. Можно видеть определенные отличия формы бегущих волн, которые лучше различимы на мгновенных профилях волн. Для всех исследованных начальных распределений  $z_i(0)$  в кольце сохраняется одноволновый режим (т.е. на длине системы укладывается одно пространственное колебание), но форма профиля бегущей волны существенно меняется. Угол наклона светлых и темных полос на пространственно-временной диаграмме изменяется в различных интервалах пространственной координа-

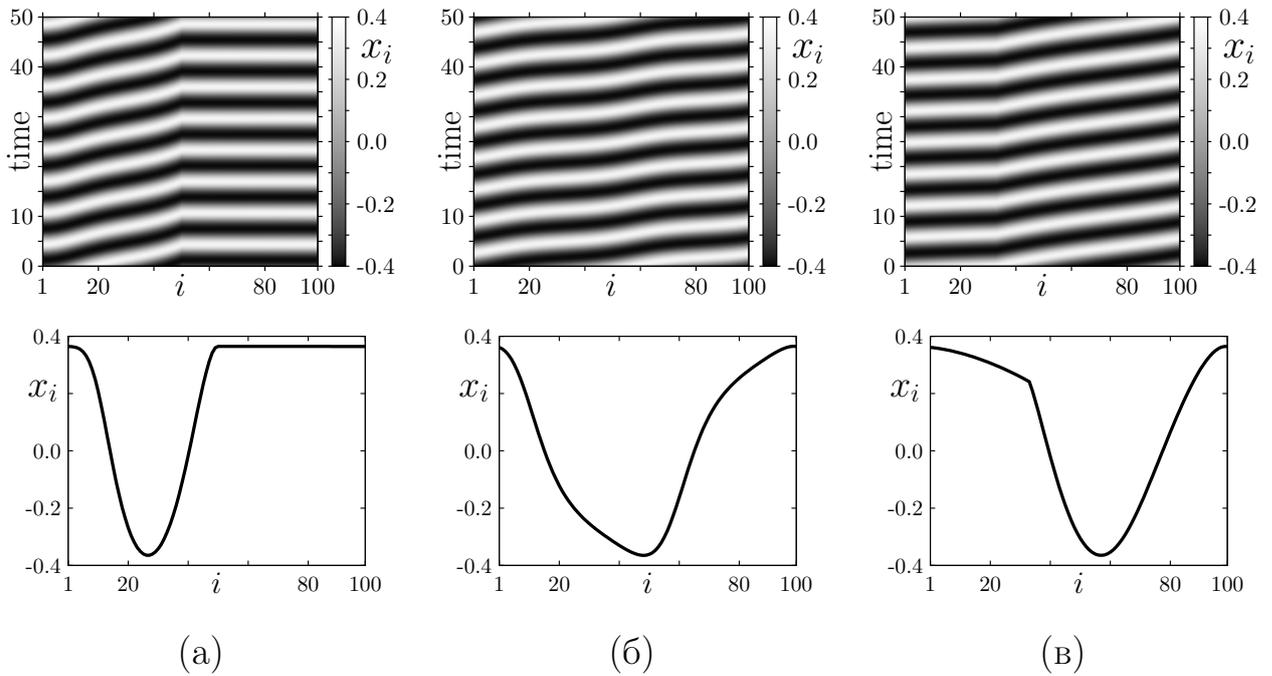


Рисунок 3.5. Бегущие волны в системе (3.2) для случая «идеальной» мемристивной связи: пространственно-временные диаграммы и мгновенные профили при различных начальных распределениях  $z_i(0)$ : (а) IC-1, (б) IC-2, (в) IC-3. Начальное распределение переменных  $x_i(0)$ ,  $y_i(0)$  показано на рисунке 3.3,а. Параметры системы:  $\varepsilon = 0.1$ ,  $k = 0.25$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ ,  $\delta = 0$ .

Время установления  $t = 80000$ .

ты, что свидетельствует о различной скорости распространения волны на этих участках кольца. Причем возможен даже случай, когда часть ансамбля демонстрирует режим бегущих волн, а другая часть — пространственно однородный режим (рисунок 3.3,а). Формирование участков с различными скоростями определяется начальным распределением мемристивных переменных  $z_i$ , что позволяет управлять пространственным режимом системы в достаточно широких пределах.

Рассмотрим влияние случайного начального распределения (рисунок 3.3,в,г) на волновой процесс. Начальные распределения  $z_i(0)$  будем выбирать те же, что и раньше (рисунок 3.3,б). На рисунке 3.6 приведены пространственно-временные диаграммы и мгновенные профили волн в кольце при фиксиро-

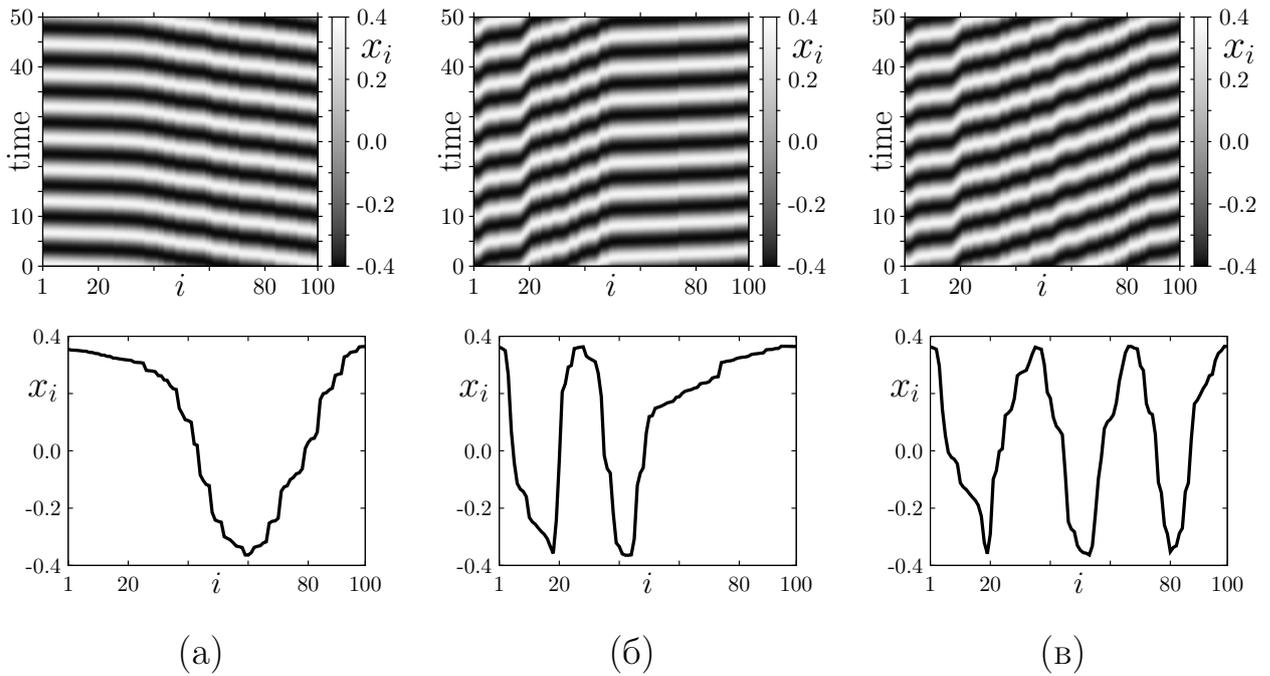


Рисунок 3.6. Бегущие волны в системе (3.2) для «идеальной» мемристивной связи: пространственно-временные диаграммы и мгновенные профили волны при случайном начальном распределении переменных  $x_i(0)$ ,  $y_i(0)$  (рисунок 3.3,б,в,г), и различных начальных распределениях  $z_i(0)$  (рисунок 3.3,б): (а) IC-1, (б) IC-2, (в) IC-3. Параметры системы:  $\varepsilon = 0.1$ ,  $k = 0.25$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ ,  $\delta = 0$ . Время установления  $t = 80000$ .

ванном случайном начальном распределении  $x_i(0)$  и  $y_i(0)$  и трех различных распределениях  $z_i(0)$ . В данном случае, в зависимости от распределения  $z_i(0)$ , в установившемся режиме реализуются разные волновые моды: одноволновая (рисунок 3.6,а), двухволновая (рисунок 3.6,б) и трехволновая (рисунок 3.6,в). Характер волновой моды здесь определяется числом пространственных колебаний, укладывающихся на длине системы. Для гармонической волны — это число длин волн. В рассматриваемом случае форма колебаний является более сложной, не повторяющейся в пространстве, так что о «длине волны» можно говорить лишь условно. Можно также отметить наличие мелкомасштабных искривлений установившегося волнового профиля, что связано с «памятью» системы о начальном случайном распределении переменных  $x_i(0)$ ,  $y_i(0)$ .

### 3.2.3 Влияние «неидеальной» мемристивной связи на волновые процессы

Рассмотрим влияние параметра  $\delta$  на волновые режимы исследуемой системы (3.2). При  $\delta = 0.1$  инвариантное многообразие равновесий  $Q$  перестает существовать, и в системе остается только одна точка равновесия:  $x_i = 0$ ,  $y_i = 0$ ,  $z_i = 0$ .

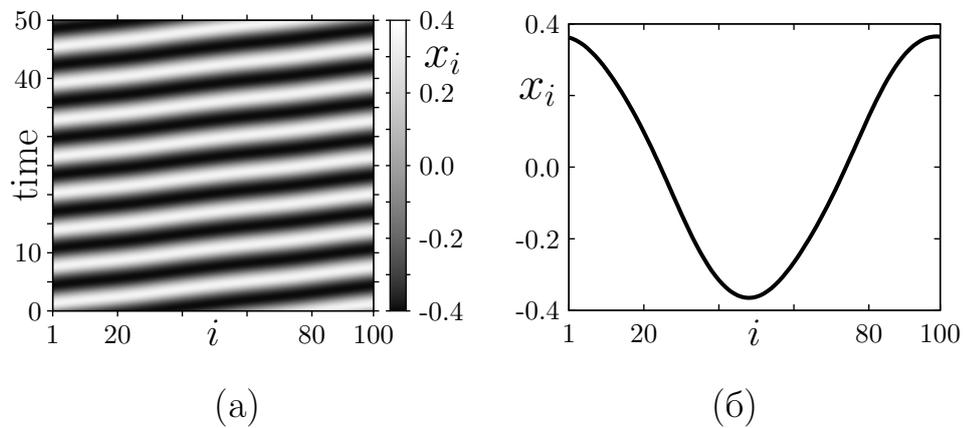


Рисунок 3.7. Бегущие волны в системе (3.2) для «неидеальной» мемристивной связи: (а) пространственно-временная диаграмма и (б) мгновенный профиль при начальном распределении переменных  $x_i(0)$ ,  $y_i(0)$ , показанном на рисунке 3.3,а, для всех начальных распределений  $z_i(0)$  (рисунок 3.3,б). Параметры системы:  $\varepsilon = 0.1$ ,  $k = 0.25$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ ,  $\delta = 0.1$ . Время установления  $t = 10000$

Зададим начальное распределение  $x_i(0)$ ,  $y_i(0)$  гармоническими функциями в соответствии с рисунком 3.3,а и рассмотрим различные начальные распределения  $z_i(0)$ , приведенные на рисунке 3.3,б. Для всех начальных распределений мемристивной переменной в ансамбле устанавливается один и тот же волновой режим, пространственно-временная диаграмма и мгновенный профиль которого приведены на рисунке 3.7. Введение отличного от нуля параметра  $\delta$  уменьшает длительность процессов установления в системе. Так, мгновенный

профиль, представленный на рисунке 3.7,б, для всех рассмотренных распределений  $z_i(0)$  устанавливается уже на времени  $t = 10000$ . При очень малых значениях  $\delta$  в системе наблюдаются длительные переходные процессы. С ростом  $\delta$  установление стационарных режимов происходит значительно быстрее.

Бегущие волны, устанавливающиеся при одинаковом случайном распределении  $x_i(0)$  и  $y_i(0)$  (рисунок 3.3,в,г) и различных  $z_i(0)$  (рисунок 3.3,б), приведены на рисунке 3.8. Начальное распределение  $z_i(0)$ , обозначенное как IC-1,

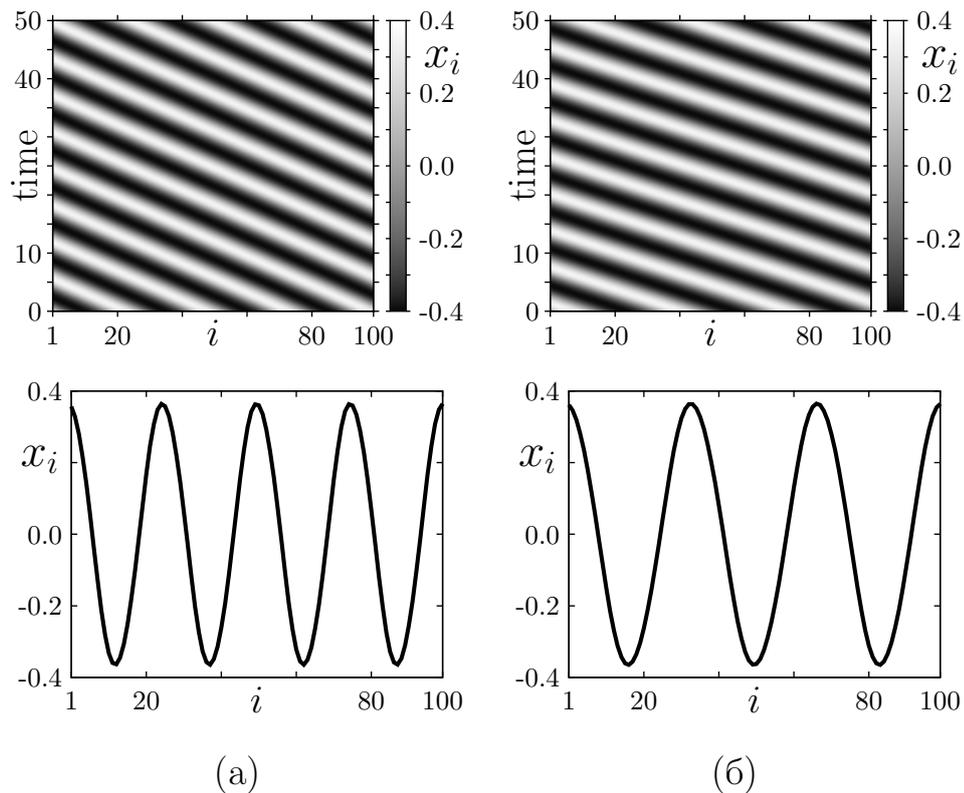


Рисунок 3.8. Бегущие волны в системе (3.2) для «неидеальной» мемристивной связи: пространственно-временные диаграммы и мгновенные профили при различных начальных распределениях  $z_i(0)$ : (а) IC-1; (б) IC-2 и IC-3.

Начальное распределение переменных  $x_i(0)$  и  $y_i(0)$  показаны на рисунке 3.3,в,г. Параметры системы:  $\varepsilon = 0.1$ ,  $k = 0.25$ ,  $a = 0.02$ ,  $b = 0.8$ ,  $\delta = 0.1$ . Время установления  $t = 80000$ .

приводит к установлению четырехволновой моды (рисунок 3.8,а), в то время как распределения IC-2 и IC-3 порождают трехволновую моду (рисунок 3.8,б). Таким образом, определенная зависимость установившегося режима от начальных

состояний мемристивных связей сохраняется, хотя форма волны уже не меняется всякий раз при изменении  $z_i(0)$ . Можно также отметить, что для случайных начальных распределений переменных  $x_i, y_i$  время установления стационарного профиля волны существенно возрастает и при  $\delta = 0.1$  становится таким же длительным, как и в случае  $\delta = 0$ .

### 3.3 Влияние мемристивной связи на бегущие волны в ансамбле осцилляторов ФитцХью—Нагумо

#### 3.3.1 Исследуемая система

Исследуемая система представляет собой кольцо связанных осцилляторов ФитцХью—Нагумо. Парциальные осцилляторы связаны локальными инерционными нелинейными мемристивными связями, аналогично работам [33, 63]. Топология системы проиллюстрирована на рисунке 3.2. Первоначально введенный как упрощенная модель нейрона [92, 93], осциллятор ФитцХью—Нагумо может быть описан уравнениями различной формы, отражающими определенные особенности активности нейрона. Конкретная модель, на рисунке 3.2, в зависимости от значений параметров, может демонстрировать автоколебательную, возбуждимую и бистабильную динамику. Предполагается, что все осцилляторы и элементы связи идентичны. В безразмерном виде уравнения системы имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \frac{1}{\varepsilon}(x_i - y_i - \alpha x_i^3) + \sigma[G_M(z_{i-1})(x_{i-1} - x_i) + G_M(z_i)(x_{i+1} - x_i)], \\ \dot{y}_i = \gamma x_i - y_i + \beta, \\ \dot{z}_i = x_i - x_{i+1} - \delta z_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.3)$$

Здесь  $x_i$  и  $y_i$  — динамические переменные, задающие мгновенное состояние  $i$ -го осциллятора (быстрые и медленные переменные соответственно), где  $i = 1, 2, \dots, N$ . Параметры  $\alpha, \beta, \gamma$  и  $\varepsilon$  определяют характер динамики парциального осциллятора, параметр  $\sigma$  отвечает за интенсивность взаимодействия осциллятора. Параметр  $\varepsilon$  обычно считается малым, что соответствует релаксационному поведению парциального осциллятора. Переменные  $z_i$  определяют мгновенные состояния мемристивных элементов связи, проводимость которых задается выражением (8):  $G_M(z_i) = a + bz_i^2$ .  $\delta$  параметр, характеризующий эффект забывания. Граничные условия выбираются периодическими: что подразумевает выполнение условия  $x_{i\pm N} = x_i$  и  $y_{i\pm N} = y_i$  в любой момент времени.

Бегущие волны можно наблюдать во всех колебательных режимах системы (3.3) (автоколебательном, возбуждимом и бистабильном) [94–97]. Сила связи и, следовательно, начальные значения  $z_i(0)$  оказывают особенно сильное влияние на волны в возбуждимом режиме. Фазовая скорость волны и, соответственно, период колебаний, возбуждаемых в ансамбле парциальных осцилляторов, зависят от силы связи и, как ожидается, будут изменяться при изменении начальных состояний мемристоров связи. Напротив, период колебаний элементов кольца в автоколебательном режиме в основном определяется параметрами парциальных осцилляторов. Несомненно, взаимодействие между осцилляторами может сдвигать эффективные значения параметров осцилляторов и, тем самым, изменять период автоколебаний. Однако это влияние сравнительно слабо.

Для выяснения влияния начального распределения  $z_i(0)$  на период колебаний парциальных осцилляторов и на другие характеристики волновых мод рассматривается ансамбль (3.3), состоящий из  $N = 100$  осцилляторов в автоколебательном и возбуждимом режимах. Параметры всех осцилляторов  $\alpha, \beta$  и  $\varepsilon$  фиксированы ( $\alpha = 1/3, \beta = 0.2, \varepsilon = 0.01$ ), а параметр  $\gamma$  выбирается в соответствии с желаемым режимом отдельного осциллятора ( $\gamma = 0.8$  для возбуждимого режима и  $\gamma = 1$  для автоколебательного). Параметры всех элементов связи также фиксированы:  $a = 1$  и  $b = 40$ . Рассматриваются два значения параметров

забывания мемристоров. Первое из них соответствует идеальным мемристорам связи:  $\delta = 0$ . Второй случай — небольшое, но ненулевое значение параметра  $\delta$ , которое указывает на конечную, но долговременную память элемента связи. Коэффициент связи  $\sigma$  выбирается постоянным ( $\sigma = 0.1$ ). Целью численного моделирования является выявление влияния начальных состояний элемента связи, связанных со значениями  $z_i(0)$ , на динамику ансамбля. Предполагается, что начальное распределение  $z_i(0)$  однородно,  $z_i(0) = z_0$ . Тогда значение  $z_0$  рассматривается как управляющий параметр system (3.3). Начальными условиями для переменных  $x_i$  и  $y_i$  являются:

$$x_i(0) = \sin(2\pi i/N), \quad y_i(0) = \cos(2\pi i/N). \quad (3.4)$$

Если коэффициент связи  $\sigma$  имеет соответствующее значение, то такие начальные условия позволяют индуцировать одноволновую моду, где одна длина волны укладывается вдоль всего кольца. Уравнения (3.3) интегрируются методом Рунге-Кутты 4-го порядка с постоянным временным шагом  $\Delta t = 0.001$ . Достаточно длительное время переходных процессов отбрасывается для наблюдения установившейся динамики, характеризующейся стационарностью профилей возбуждаемых бегущих волн, временными реализациями и колебательными характеристиками, такими как период колебаний. Исследование проводится путем анализа построенных мгновенных профилей и пространственно-временных диаграмм.

### 3.3.2 Автоколебательный режим

При  $\gamma = 1$  и  $\delta = 0$  в системе (3.3) с начальными условиями (3.4) устанавливается режим бегущей волны. Для выбранных значений параметров динамика парциального осциллятора является автоколебательной. В этом случае выбор значения  $z_i(0)$  (начальных состояний элементов связи) оказывает влияние на

режим бегущей волны, проявляющееся в некоторой зависимости мгновенного профиля волны от распределения  $z_i(0)$ . Эта зависимость подтверждает результаты, приведенные в предыдущем разделе, однако, в данном случае, является более слабой.

На рисунке 3.9 показаны результаты, полученные для одноволновой моды в кольце с идеальной мемристорной связью. На рисунках 3.9,а,б проиллю-

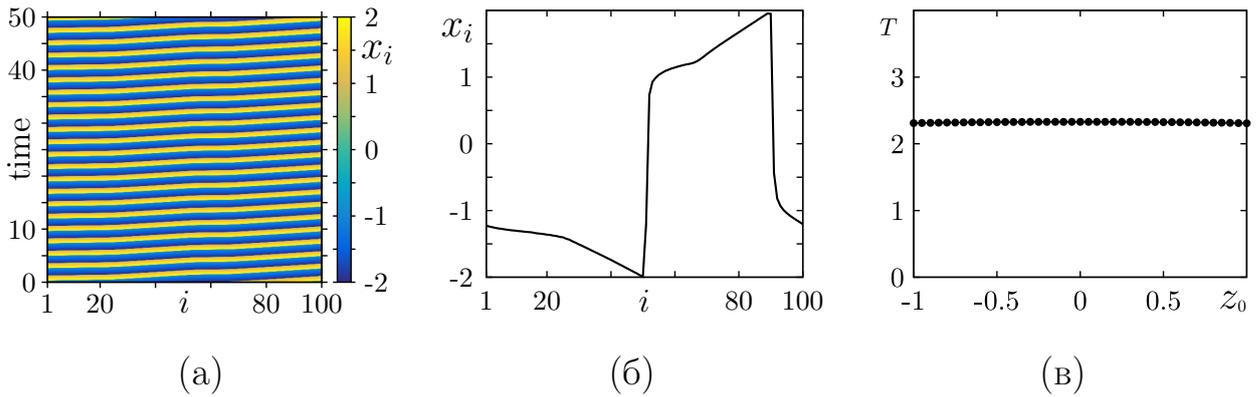


Рисунок 3.9. Бегущая волна в системе (3.3) при  $\delta = 0$  в автоколебательном режиме: (а) Пространственно-временная диаграмма; (б) Мгновенный профиль волны  $x_i$ . Начальные условия:  $x_i(0)$  и  $y_i(0)$  задаются формулами (3.4); (в)

Период колебаний  $T$  волны от начальных распределений  $z_0$ . Параметры:  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\sigma = 0.1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 40$ ,  $\gamma = 1$ . Переходный процесс  $t = 20000$  единиц безразмерного времени.

стрирована пространственно-временная динамика системы (3.3) в выбранном волновом режиме при  $z_i(0) = z_0$ . На рисунке 3.9,в приведена зависимость периода колебаний осцилляторов при изменении  $z_0$ . Можно видеть, что период колебаний не зависит от начального состояния связи. Пространственный профиль волны и форма колебаний также остаются практически неизменными при изменении  $z_0$ . Таким образом, выбор равномерно распределенных начальных значений  $z_i(0)$  не влияет на режим бегущей волны в случае автоколебательного режима в системе (3.3). Однако неравномерное распределение значений  $z_i(0)$

оказывает влияние на форму профиля волны. Это влияние проиллюстрировано на рисунке 3.10.

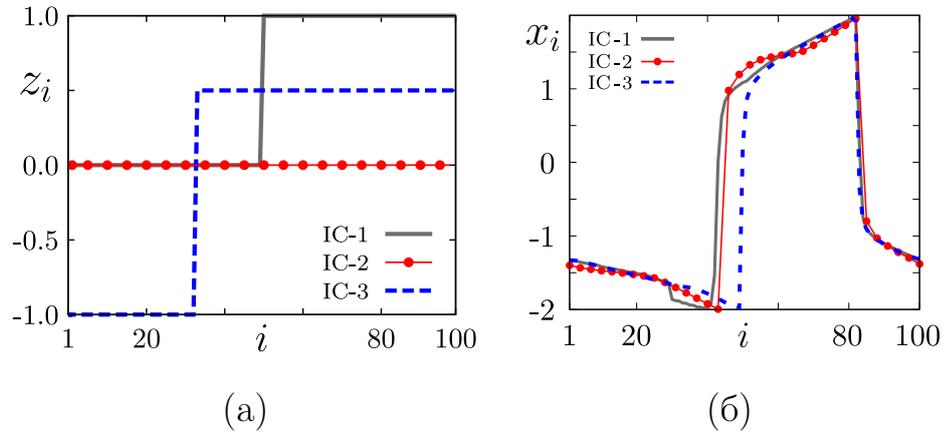


Рисунок 3.10. Различные распределения начальных состояний значений  $z_i$  (IC-1, IC-2, IC-3) (а) и соответствующие пространственные профили стационарной бегущей волны (б). Начальные распределения переменных  $x_i$ ,  $y_i$  и значений параметров те же, что и на рисунке 3.9.

### 3.3.3 Возбудимый режим

Зафиксируем  $\gamma = 0.8$  и сохраним остальные параметры такими же, как и в предыдущем разделе. В этом случае элементы ансамбля демонстрируют возбудимую динамику. При отсутствии связи и внешних сигналов единственный аттрактор отдельно взятого осциллятора представляет собой устойчивую точку равновесия. Введение достаточно сильной связи и использование соответствующих начальных условий приводят к возникновению волн возбуждения в кольце осцилляторов: импульс возбуждения движется вдоль кольца, а скорость его движения зависит от степени связи. Это означает, что период колебаний во времени каждого осциллятора, также зависит от силы связи. Если параметр мемристора  $b$  принимает нулевое значение,  $b = 0$ , то характер связи становится полностью диссипативным. В таком случае в кольце (3.3)

бегущие волны не возникают, так как коэффициент связи  $\sigma = 0.1$  слишком мал для возбуждения волны (распространение импульсов возбуждения требует увеличения значения  $\sigma$  до  $\sigma \approx 45.0$ ). Тем не менее, введение мемристивной нелинейности дает возможность реализовать бегущие волны даже при  $\sigma = 0.1$ . Характеристики бегущей волны, включая период колебаний парциального осциллятора, ожидаемо зависят от начального распределения  $z_i(0)$ . Будем рассматривать равномерное распределение начальных значений управляющих переменных переменных мемристивной связи:  $\forall i z_i(0) = z_0$ . Изменяя значение  $z_0$ , можно наблюдать эволюцию волнового режима. Рисунок 3.10 иллюстрирует пространственно-временные диаграммы, мгновенные профили и реализации колебаний осцилляторов во времени. Все графики были получены в для одно-волновой моды при начальных значениях  $x_i(0)$  и  $y_i(0)$  заданных выражениями (3.4) и при изменении начальных состояний элементов связи (величины  $z_0$ ). Колебания во времени представлены для первого осциллятора ( $i = 1$ ) в фиксированном временном интервале  $t \in [0; 100]$ . Можно отметить, что временные реализации всех остальных осцилляторов точно такие же, но сдвинуты во времени.

Период колебаний в возбуждимом режиме определяется временем возврата импульса, распространяющегося по кольцу и, таким образом, обратно пропорционален скорости движения импульса (фазовой скорости). Скорость распространения импульса возбуждения в ансамбле возбуждимых осцилляторов зависит от силы связи между осцилляторами. Она растет с увеличением силы связи, в то время как период колебаний уменьшается [?], когда сила связи растет. На рисунке 3.11 можно видеть, как изменяется частота колебаний при изменении начальных значений  $z_i(0) = z_0$ . Проведенное моделирование показало, что зависимость периода колебаний от величины  $z_0$  достаточно сложна. Причиной этого является влияние двух переменных  $z_{i-1}$  и  $z_i$  в уравнении для  $\dot{x}_i$  (3.3), которые управляют мемристивными проводимостями и, следовательно, связью  $i$ -го осциллятора с его соседями. Переменные  $z_{i-1}$  и  $z_i$  определяются

начальным значением  $z_0$ , а также мгновенными значениями динамических переменных  $x_i$  и  $x_{i+1}$  в предыдущие моменты времени.

В дополнение к значительному изменению периода колебаний, изменение  $z_0$  приводит к изменениям в динамике бегущей волны: бегущая волна может либо распространяться вдоль кольца с постоянной скоростью (рисунок 3.11,а,в,е), либо изменять скорость в разных частях кольца (рисунок 3.11,г,д). Это хорошо видно по искажениям, возникающим на пространственно-временных диаграммах для переменных  $x_i$  (столбец I на рисунке 3.11). Несмотря на переменную скорость распространения, регистрируемая по реализациям  $x_i(t)$  и  $y_i(t)$  форма импульса остается практически неизменной во времени и пространстве. Переменные  $z_i$ , которые определяют состояния мемристоров, ведут себя более сложно. Изменение частоты возбуждения импульсов сопровождается появлением выбросов на мгновенных пространственных профилях  $z_i$ . Эти одиночные состояния не изменяются во времени и хорошо видны в виде вертикальных полос на пространственно-временных диаграммах для  $z_i(t)$  (столбец II на рисунке 3.11, г, д). Число таких состояний увеличивается с ростом значения  $|z_0|$ . Затем полосы сливаются и образуют устойчивые структуры. Все эти изменения также сопровождаются эволюцией формы импульса, которая видна на мгновенных пространственных профилях волны (столбец III на рисунке 3.11,г,д). Для  $|z_0| < 0,5$  импульсы представляют собой узкие всплески, характерные для возбудимой динамики (рисунок 3.11,б,д). При увеличении значения  $|z_0|$  форма волны приближается к форме, соответствующей автоколебательной динамике (рисунок 3.9,б). Можно предположить, что такие преобразования профиля происходят из-за сильной связи, которая приводит к сдвигу эффективных значений параметров парциальных осцилляторов и переходу в режим автоколебаний. В работе [97] показано, что такие переходы, наблюдаемые при  $\varepsilon \ll 1$ , не могут быть диагностированы по изменению формы профиля волны в пространстве или формы колебаний осцилляторов ансамбля во времени.

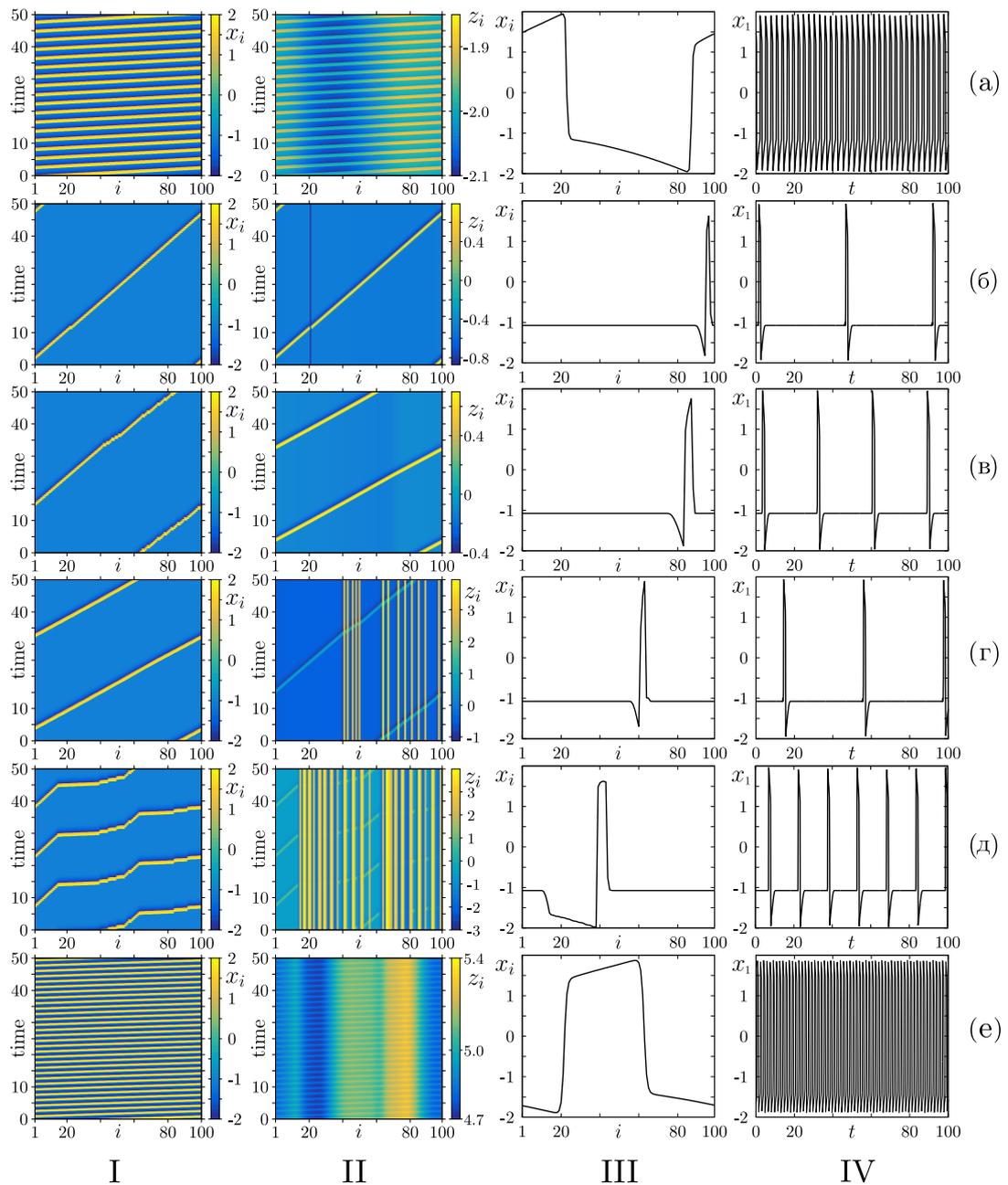


Рисунок 3.11. Характеристики бегущей волны в системе (3.3) с  $\delta = 0$  в возбуждаемом режиме ( $\gamma = 0.8$ ) при однородном распределении начальных состояний  $z_0$ : (а)  $z_0 = -2.0$ ; (б)  $z_0 = -0.5$ ; (в)  $z_0 = -0.1$ ; (г)  $z_0 = 0$ ; (д)  $z_0 = 0.5$ ; (е)  $z_0 = 5.0$ ; В столбц I-IV приведены: пространственно-временные диаграммы для переменных  $x_i(t)$  (столбец I) и  $z_i(t)$  (столбец II); мгновенные пространственные профили  $x_i$  (столбец III) и временную реализацию  $x_1(t)$  (столбец IV). Параметры:  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 0.1$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\sigma = 0.1$ . Время установления:  $t = 20000$ .

Рассмотрим зависимость периода колебаний  $T$  осцилляторов ансамбля во времени, от начального значения переменных связи  $z_0$  для одноволновой моды при фиксированных параметрах. Результаты представлены на рисунке 3.12. На

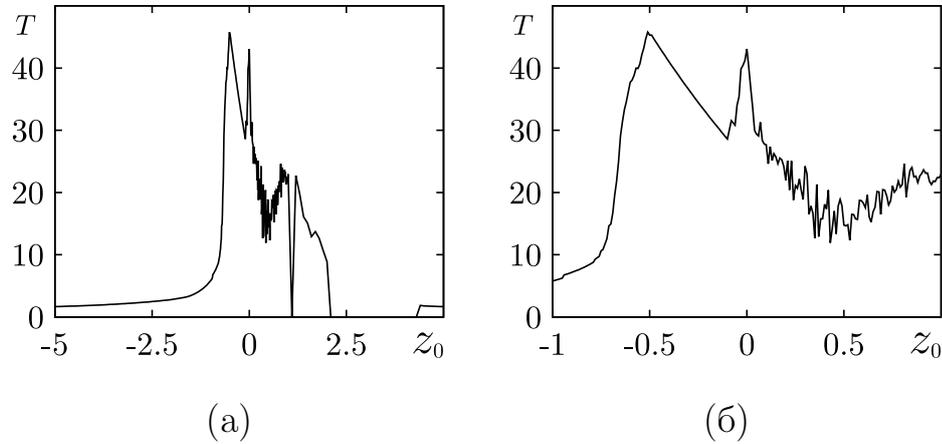


Рисунок 3.12. Период колебаний  $T$  парциальных осцилляторов (3.3) с идеальной мемристивной связью для одноволновой моды в возбуждимом режиме в зависимости от  $z_0$ : график в широком диапазоне изменения  $z_0$  (а) и его увеличенный фрагмент (б). Параметры системы те же, что для волновых мод, представленных на рисунке 3.11. Длительность переходного процесса

$$t = 30000$$

рисунке 3.12,а приведена зависимость  $T(z_0)$  в широком диапазоне значений  $z_0$ , в то время как на рисунке 3.12,б показан увеличенный фрагмент для  $|z_0| \leq 1$ . Как и ожидалось, период колебаний существенно зависит от  $z_0$  и эта зависимость является немонотонной и довольно сложной. На графике можно выделить три максимума: при  $z_0 = \pm 0.5$  и  $z_0 = 0$ . В рассматриваемом интервале  $|z_0| \leq 5$  диапазон изменения периода очень велик: от максимального значения  $T = 46$  при  $z_0 = -0,5$  и до нуля. В интервале  $z_0 \in [2.1; 4.3]$ , а также при  $z_0 = 1.1$  колебания парциальных осцилляторов не наблюдаются и бегущая волна отсутствуют. Выбирая определенные начальные состояния элементов мемристивной связи, можно получить волны возбуждения, распространяющиеся с определенной скоростью, или полное затухание волны. Таким образом, можно сделать вывод, что периодом колебаний или, что равносильно, частотой импульсов возбуждения

можно управлять. Следует подчеркнуть, что в определенном диапазоне значений  $T(z_0)$  имеет негладкий характер в определенном диапазоне значений  $z_0$ . Это особенно хорошо видно на фрагменте, представленном на рисунке 3.12,б. Негладкий характер зависимости можно связать с описанным выше сложным поведением переменных  $z_i$  для положительных начальных значений  $z_0$ .

### 3.3.4 Влияние неидеального характера мемристивной связи

В предыдущих разделах бегущие волны исследовались в системе (3.3) с идеальной мемристивной связью ( $\delta = 0$ ). Рассмотрим волновые процессы в кольце возбудимых осцилляторов (3.3) в случае малых положительных значений  $\delta$ . Исследуем поведение системы (3.3) при тех же значениях параметров и в том же возбудимом режиме, что и в предыдущем разделе, но при нескольких небольших значениях параметра  $\delta$ . Влияние параметра  $\delta$  отражается в зависимости периода колебаний  $T$  от значения начального состояния  $z_0$ . Результаты, полученные для  $\delta = 0.0001$  и  $\delta = 0.001$  приведены на рисунке 3.13. Как видно из графика, приведенного на рисунке 3.13 (черная линия), при  $\delta = 0.001$  период колебаний практически не зависит от  $z_0$  и остается в пределах ошибок расчета. Эти незначительные отклонения от постоянного значения исчезают при  $\delta > 0.001$ . Однако при еще более малых значениях  $\delta$  зависимость  $T$  от  $z_0$  существует и довольно значительная (серая линия на рисунке 3.13, соответствующая значению  $\delta = 0.0001$ ). Увеличение продолжительности отбрасываемых начальных процессов более чем на  $t = 30000$  безразмерных единиц времени не приводит к исчезновению этой зависимости. Таким образом, чувствительность волновой моды к начальным состояниям мемристивного элемента связи сохраняется при очень малых значениях параметра забывания мемристора.

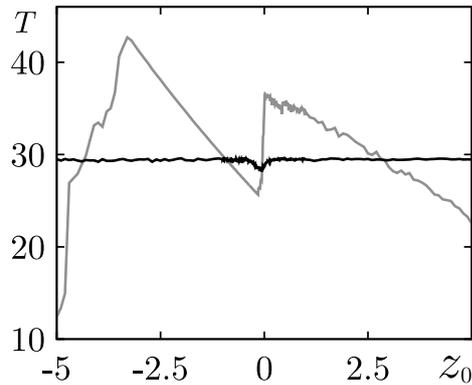


Рисунок 3.13. Период колебаний  $T$  парциальных осцилляторов в системе (3.3) с неидеальной мемристивной связью для одноволновой моды в возбуждимом режиме в зависимости от  $z_0$  при  $\delta = 0.0001$  (серая линия) и  $\delta = 0.001$  (черная линия). Параметры системы те же, что для волновых мод, представленных на рисунке 3.11. Длительность переходного процесса  $t = 30000$  безразмерных единиц.

### 3.4 Синхронизация двухслойной мультиплексной сети хаотических отображений с нелокальной диссипативной внутрислойной связью и мемристивной связью между слоями

В разделе 2.5.2 рассматривалось взаимодействие двух мемристивно-связанных хаотических систем: радиофизических генераторов Анищенко-Астахова и логистических отображений. Была показана зависимость эффекта полной синхронизации хаоса от начального значения управляющей переменной мемристивной связи. Также было установлено, что такая зависимость существует не только в случае идеальной мемристивной связи, но и при конечном, но достаточно длительном времени памяти мемристора. Теперь, обратимся к взаимодействующим хаотическим распределенным системам с мемристивной связью. Рассмотрим двухслойную однородную мультиплексную сеть логистиче-

ских отображений с нелокальными диссипативными внутрислойными связями и мемристивными связями между слоями. Сеть описывается следующей системой уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_j(n+1) = f[x_j(n)] + \frac{\sigma}{2P} \sum_{i=j-P}^{j+P} (f[x_i(n)] - f[x_j(n)]) + \\ + kG_M[w_j(n)] (f[y_j(n)] - f[x_j(n)]), \\ y_j(n+1) = f[y_j(n)] + \frac{\sigma}{2P} \sum_{i=j-P}^{j+P} (f[x_i(n)] - f[x_j(n)]) + \\ + kG_M[w_j(n)] (f[x_j(n)] - f[y_j(n)]), \\ w_j(n+1) = [1 - \delta w_j(n)] + \varepsilon[x_j(n) - y_j(n)], \\ x_{j\pm N}(n) = x_j(n), \quad y_{j\pm N}(n) = y_j(n) \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Здесь  $i$  — номер элемента в слое,  $n$  — дискретное время. Слои полностью идентичны, и каждый из них представляет собой кольцо идентичных отображений с нелокальной связью, которая характеризуется коэффициентом связи  $\sigma$  и количеством соседей с каждой стороны  $P$  для каждого элемента внутри кольца. Элементы двух слоев локально соединены мемристивной связью. Сила взаимодействия слоев определяется коэффициентом  $k$ . Используется гладкая характеристика 8 мемристоров связи  $1 - \mu w^2$ . Динамика отдельного элемента сети описывается одномерным отображением, задаваемом функцией  $f(x) = \alpha x(1 - x)$ .

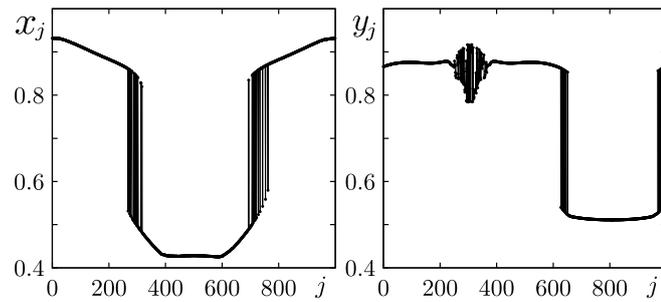
Система (3.5), включающая  $N = 1000$  элементов в каждом из слоев, была изучена при следующих фиксированных параметрах:  $\alpha = 3.8$ ,  $\sigma = 0.32$ ,  $P = 320$ ,  $\mu = 4$ ,  $\varepsilon = 0.001$ . Из множества случайных начальных условий были выбраны и зафиксированы начальные состояния слоев, приводящие к установлению двух различных химерных состояний в двух невзаимодействующих ( $k = 0$ ) слоях. Химерное состояние представляет собой особый режим кластерной синхронизации в ансамблях идентичных осцилляторов, в котором осцилляторы группируются в кластеры с асинхронным поведением (некогерентные кластеры) и с поведением, близким к синхронному (когерентные кластеры). Такие состояния были обнаружены и изучены во многих ансамблях, как с регу-

лярной, так и с хаотической динамикой элементов, и особенно характерны для ансамблей с нелокальной связью [98–106]. Синхронизация химерных состояний в мультиплексных сетях с диссипативной межслойной связью была установлена и изучена в работах [107–110].

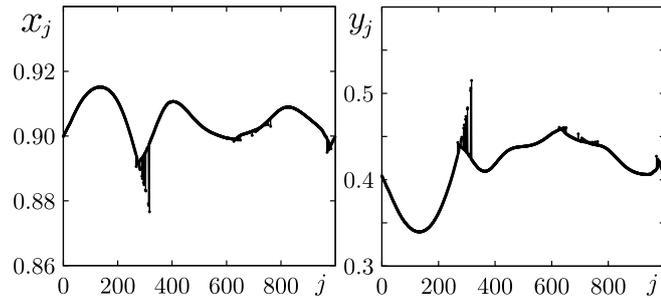
Мгновенные пространственные профили химерных состояний в двух слоях в отсутствие межслойной связи в один и тот же момент времени показаны на рисунке 3.14,а. Поведение осцилляторов в слоях в выбранных режимах является слабо хаотическим. При введении связи между слоями в выбранных химерных состояниях динамика элементов изменяется и, при определенных условиях, может быть установлен режим полной взаимной синхронизации. В обоих слоях колебания элементов с одинаковыми номерами ( $\forall j x_j(n) \equiv y_j(n)$ ) становятся полностью одинаковыми. Сам результирующий режим отличается от начальных химерных состояний в двух взаимодействующих слоях и зависит от параметров межслойной связи. Как показали проведенные расчеты, в случае идеального мемристивного соединения двух слоев наличие режима полной синхронизации зависит от начального распределения значений переменных  $w_j$ , управляющих элементами связи. На рисунке 3.14,б,в показаны мгновенные пространственные профили, наблюдаемые в установившемся режиме в двух слоях при введении мемристивной связи с параметрами  $k = 0,05$  и  $\delta = 0$  для различных однородных начальных распределений  $w_j(0)$ :  $\forall j w_j(0) = 0$  (рисунок 3.14,б) и  $\forall j w_j(0) = 0.8$  (рисунок 3.14,в). В первом случае в слоях устанавливаются аналогичные структуры, но полная синхронизация отсутствует, а во втором случае наблюдаются полностью идентичные кусочно-гладкие мгновенные пространственные профили.

Полная синхронизация режимов в двух слоях по-прежнему диагностировалась по результатам расчета ошибки синхронизации  $D$ , которая для системы (3.5) рассчитывается по формуле:

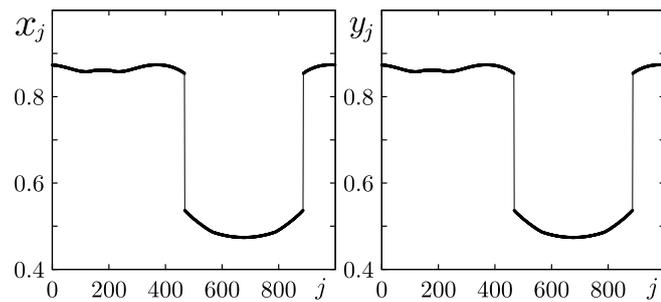
$$D = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} [x_j(n) - y_j(n)]^2 \right\rangle, \quad (3.6)$$



(а)



(б)



(в)

Рисунок 3.14. Мгновенные пространственные профили стационарных состояний двух слоев сети (3.5) при отсутствии связи (а) и в случае мемристивной связи с параметрами  $\delta = 0$ ,  $k = 0.05$  в случае двух начальных распределений переменных  $w_j$ :  $w_j(0) = 0.0, \forall j$  (б) и  $w_j(0) = 0.8, \forall j$  (в). Другие параметры сети:  $N = 1000$ ,  $\alpha = 3.8$ ,  $\sigma = 0.32$ ,  $P = 320$ ,  $\mu = 4$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

где скобки  $\langle \dots \rangle$  усреднение по времени. Как и прежде, численным критерием полной синхронизации является  $D < 10^{-6}$ . Для модели (3.5), как и для моделей рассмотренных в Главе 2, на плоскости параметров  $w_0$ ,  $k$  были построены области синхронного и асинхронного режимов. Эти области для различных значений  $\delta$  показаны на рисунке 3.15. В целом можно наблюдать те

же закономерности, что и для моделей (2.34) и (2.39). Однако область перехода к полной синхронизации, в которой чередуются синхронный и асинхронный режимы, становится значительно шире, что, по-видимому, связано с сильной мультистабильностью, характерной для распределенных систем, демонстрирующих химерные состояния [100, 105]. В случае чисто мемристивной связи двух слоев при  $\delta = 0$  (рисунок 3.15,а) наблюдается существенная зависимость порога синхронизации  $k_S$  от начального значения переменной связи  $w_0$ . Более

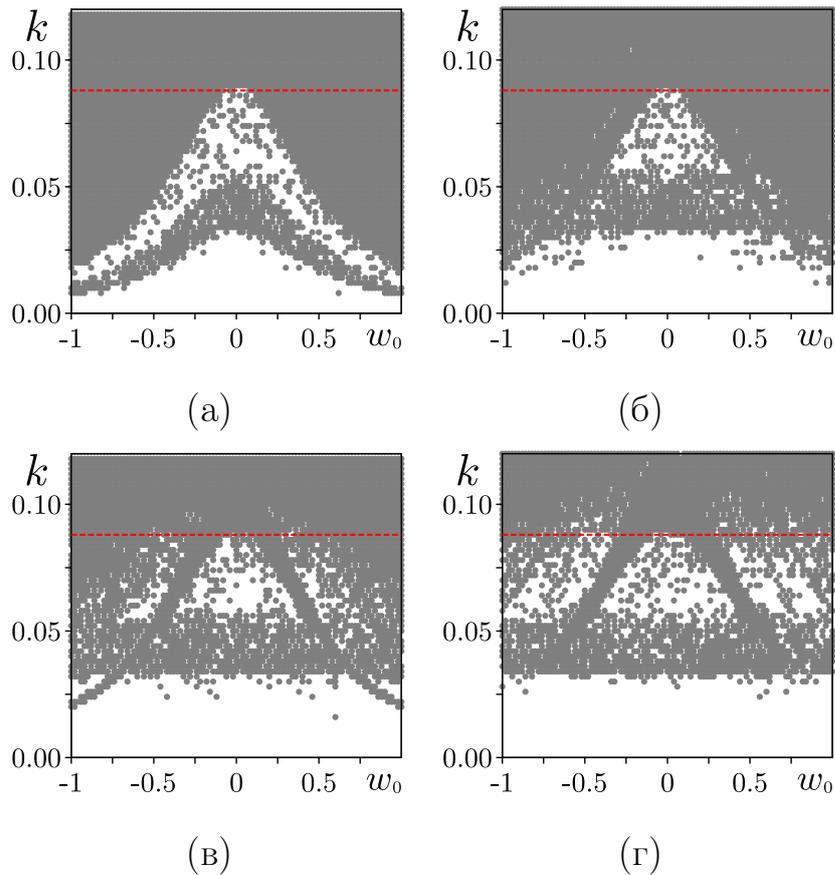


Рисунок 3.15. Области синхронного (серый цвет) и несинхронного (белый цвет) режимов в двух слоях сети (3.5) на плоскости параметров  $w_0, k$ , полученные при  $\delta = 0$  (а),  $\delta = 0.001$  (б),  $\delta = 0.01$  (в) и  $\delta = 0.1$  (г).

Горизонтальная пунктирная линия отмечает границу синхронизации в случае диссипативной межслойной связи (при  $tu = 0$ ). Другие параметры сети:

$$N = 1000, \alpha = 3, 8, \sigma = 0.32, P = 320, \mu = 4, \varepsilon = 0.001.$$

того, он имеет тот же характер, что и в системе двух логистических отобра-

жений (2.39). Существует максимальный порог синхронизации при  $w_0 = 0$ , который совпадает с пороговым значением коэффициента диссипативной связи  $k_{S0} \approx 0.09$  при тех же параметрах и начальных условиях в слоях сети (3.5) (горизонтальная пунктирная линия на графиках). С увеличением модуля  $w_0$  пороговые значения коэффициента связи уменьшаются. Ниже порога синхро-

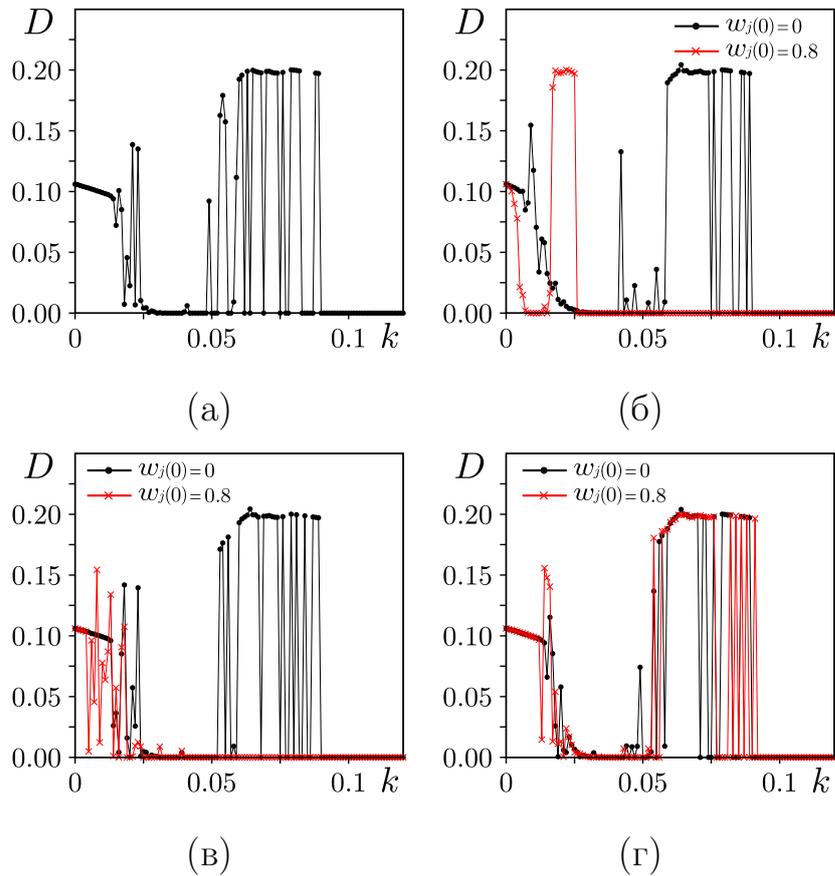


Рисунок 3.16. Зависимости ошибки синхронизации  $D$  от параметра связи  $k$  в системе (3.5) при диссипативной межслойной связью (а) и мемристивной межслойной связью для двух однородных начальных условий  $w_j(0) \equiv 0$  и  $w_j(0) \equiv 0.8$ , полученные при различных значениях  $\delta$ :  $\delta = 0$  (б);  $\delta = 0.001$  (в);  $\delta = 0.001$  (г). Другие параметры:  $N = 1000$ ,  $\alpha = 3.8$ ,  $\sigma = 0.32$ ,  $P = 320$ ,  $\mu = 4$ ,  $\varepsilon = 0.001$ .

низации можно выделить определенную область, где также преобладают синхронные режимы. Границы повторяют колоколообразную форму зависимости  $k_S(w_0)$ . При сильно инерционной связи (малое значение параметра скорости за-

бывания)  $\delta = 0.001$  форма областей синхронного и асинхронного режимов изменяется незначительно и зависимость границы синхронизации от значения  $w_0$  сохраняется, но на плоскости  $w_0, k$  выше уровня  $k_S(w_0)$  (пунктирная линия) появляются точки, соответствующие несинхронным колебаниям (рисунок 3.15, б). По мере роста параметра  $\delta$  таких точек становится все больше, и колоколообразные структуры постепенно разрушаются. По-видимому, когда  $\delta \rightarrow \infty$ , значение  $w_0$  больше не должно влиять на переход к синхронизации. В этом случае все точки граничного слоя на плоскости  $w_0, k$ , соответствующие синхронному и асинхронному режимам, должны выстраиваться вдоль горизонтальных линий. Однако при  $\delta = 0.01$  и  $\delta = 0.1$  некоторые различия в структуре переходного слоя при различных  $w_0$  все еще сохраняются (рисунок 3.15, в, г), что означает, что определенная мемристичность связи также сохраняется.

Зависимости  $D$  от  $k$  для модели (3.5) проиллюстрированы на рисунке 3.16. На рисунке 3.16, а приведена зависимость, полученная для диссипативной связи слоев (при  $\mu = 0$ ). В случае мемристивной связи сравниваются графики, построенные для двух значений  $w_0$ . При  $\delta = 0$  и  $\delta = 0.001$  хорошо видна зависимость поведения ошибки синхронизации от начального значения переменной связи  $w_0$  и соответствующие различия в пороге синхронизации (рисунок 3.16, б, в). При  $\delta = 0.1$  кривые, полученные для начальных значений  $w_0 = 0$  и  $w_0 = 0.8$ , почти совпадают и практически повторяют форму зависимости  $D(k)$  для диссипативной связи (рисунок 3.16, г). Однако, как отмечалось выше, для  $\delta = 0.1$  зависимость границы синхронизации от значения  $w_0$  не исчезает полностью, и для другого выбора  $w_0$  зависимость  $D(k)$  может немного отличаться.

### 3.5 Выводы по третьей главе

В работе были проведены исследования двух моделей ансамбля с локальными мемристивными связями и периодическими граничными условиями. Пер-

вая модель представляет собой кольцо идентичных квазигармонических автогенераторов ван дер Поля, т.е. элемент ансамбля является классическим примером автоколебательной системы. В качестве второй модели выбрано кольцо мемристивно-связанных идентичных нейронов ФитцХью-Нагумо. Отдельный осциллятор ансамбля в этом случае, в зависимости от значений параметров, находился либо в автоколебательном, либо в возбуждимом режиме. Это позволило выявить различие во влиянии мемристивности связей на волновой процесс в цепочке в автоколебательном и возбуждимом режимах.

Проведенные исследования показывают, что распределенная система из активных элементов при мемристивном характере связей, демонстрирует чувствительность к начальному состоянию, главным образом к начальным значениям переменных, управляющих состояниями мемристоров. В случае автоколебательного характера элементов ансамбля эта чувствительность проявляется в том, что форма установившегося профиля бегущих волн в распределенной системе с мемристивными связями меняется при изменении начального распределения мемристивных переменных  $z_i$ . Можно предположить, что это изменение носит непрерывный характер, т.е. малое изменение профиля  $z_i(0)$  сразу же приводит к изменению профиля волны, по аналогии с изменением границы области синхронизации в двух мемристивно-связанных генераторах с частотной расстройкой [67]. Такая чувствительность формы волны к начальным состояниям мемристивных элементов связи наблюдается как в режиме квазигармонических автоколебаний в кольце осцилляторов ван дер Поля, так и в режиме сильно релаксационных автоколебаний, характерном для кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Меняя начальное распределение  $z_i(0)$  можно в достаточно широких пределах изменять форму волнового профиля, оставаясь в режиме заданной моды (т.е. заданного числа пространственных колебаний на длине системы).

Исследование кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо с мемристивными связями показало, что влияние начальных состояний мемристоров особенно

сильно проявляется в режиме возбудимой динамики элементов кольца. Если в автоколебательном режиме выбор начальных состояний влияет только на форму волнового профиля, то в возбудимом режиме наблюдается сильная зависимость как формы волны, так и скорости распространения волны и, соответственно, периода колебаний осцилляторов во времени от начальных состояний элементов связи. Меняя начальное значение переменных, задающих состояния мемристоров, можно в широком диапазоне менять скорость распространения волны и период колебаний, а также полностью исключить распространение возмущения вдоль кольца.

Отмеченные особенности динамики ансамблей с мемристивными связями наблюдаются не только в том случае, когда элементы связи являются идеальными мемристорами, но и при отличном от нуля параметре забывания, характеризующем конечное время памяти мемристивных элементов о своих начальных состояниях. Однако, в этом случае, значение параметра забывания должно быть очень малым, так чтобы характерное время памяти мемристоров было на несколько порядков больше периода колебаний осцилляторов.

Была также исследована распределенная система, представляющая собой двухслойную однородную мультиплексную сеть логистических отображений с мемристивной связью между слоями. Слои связанных логистических отображений, демонстрируют не только хаотическое поведение во времени, но и сложные пространственные структуры (химерные состояния). Были обнаружены эффекты, связанные с влиянием начального состояния мемристивных связей на переход к режиму полной синхронизации пространственно-временной динамики слоев. Для разных значений параметра забывания мемристивной связи были построены области синхронного и несинхронного поведения. Для двухслойной сети логистических отображений показана зависимость порога синхронизации от начального состояния мемристивных связей и установлена та же закономерность эволюция областей синхронного и несинхронного поведения с ростом параметра забывания, что и для двух мемристивно-связанных логистических

отображений, и двух мемристивно-связанных генераторов хаоса, рассмотренных в предыдущей главе. Таким образом, при синхронизации сложных структур в распределенных системах эффекты мемристивной связи сохраняется в случае сильно инерционной т.е. при длительном времени памяти.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе были проведены численные, экспериментальные и теоретические исследования особенностей динамики мемристивных систем. Базовой моделью мемристивной системы служит генератор с колебательным контуром, содержащим мемристивную проводимость и нелинейным активным элементом (мемристивный генератор), демонстрирующий периодические колебания. Были рассмотрены особенности фазового портрета мемристивного генератора, связанные с существованием в фазовом пространстве линии равновесий, исследованы бифуркационные механизмы возникновения колебаний в случае различных характеристик активного элемента и мемристивной проводимости.

Была исследована вынужденная и взаимная синхронизация мемристивных генераторов. Также исследовалась взаимная частотно-фазовая синхронизация «обычных» периодических генераторов (генераторов ван дер Поля), связанных через мемристивную проводимость, полная синхронизация колебаний мемристивно связанных хаотических генераторов (генераторов Анищенко-Астахова). Рассматривалось влияние начальных состояний мемристивных элементов на границу синхронизации в случае мемристоров без забывания и при наличии забывания.

Исследовались мемристивные эффекты в пространственно-распределенных ансамблях автогенераторов и возбудимых осцилляторов, а также в мультиплексной сети хаотических логистических отображений. Изучено влияние мемристивного характера связей элементов осцилляторного ансамбля на формирование бегущих волн, возникающих в следствии периодических граничных условий. Рассмотрены фазовые волны в кольце квазигармонических генераторов ван дер Поля, осцилляторов ФитцХью-Нагумо

в режиме релаксационных автоколебаний, а также волны возбуждения в кольце возбудимых осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Было также проведено исследование синхронизации химерных состояний в слоях двухслойной мультиплексной сети логистических отображений с мемристивной связью между слоями.

На основании проведенных исследований были сформулированы следующие основные результаты диссертационной работы:

1. Численными и аналитическими методами установлено, что для мемристивного генератора с идеальным мемристором Чуа и постоянной отрицательной проводимостью имеет место жесткая бифуркация возникновения колебаний. Если активный элемент описывается полиномом третьей степени, то наблюдается мягкая бифуркация, аналогичная суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Последнее, частично, подтверждается также методами аналогового моделирования.
2. В генераторе с идеальным мемристором, имеющем гладкую характеристику, и активным элементом с постоянной отрицательной проводимостью имеет место мягкая бифуркация рождения колебаний, которая отличается от мягкой бифуркации в генераторе с мемристором Чуа тем, что для различных точек на линии равновесия наблюдается не одновременно, а при изменении значения управляющего параметра.
3. В мемристивном генераторе наблюдается бифуркация при фиксированном значении и изменении начальных условий.
4. Численно и аналитически установлен эффект частотно-фазовой синхронизации периодических колебаний генератора с идеальной мемристивной проводимостью. Вынужденная синхронизация мемристивного генератора и взаимная синхронизация двух мемристивных генераторов с расстройкой собственных частот показывает зависимость границ фазового захвата от

начальных состояний мемристоров. Такая зависимость имеет место в случае идеальных мемристоров и исчезает при учете эффекта забывания.

5. Методом численного моделирования выявлена особенность полной (синфазной) синхронизации периодических колебаний двух диссипативно-связанных идентичных мемристивных генераторов, состоящая в наличии порогового значения коэффициента связи, значение которого зависит от начальных состояний мемристивных элементов. В случае наличия эффекта забывания данная зависимость исчезает.
6. Методами численного моделирования и теоретического анализа в рамках квазигармонического приближения установлен эффект взаимной частотно-фазовой синхронизации генераторов ван дер Поля, взаимодействующих через мемристивную проводимость. Численно и аналитически определена зависимость границ области синхронизации от начального состояния мемристивной связи. Показано, что влияние конечной памяти мемристивной связи приводит к исчезновению указанной зависимости.
7. С помощью численных методов на примере генераторов с инерционной нелинейностью (генераторов Анищенко-Астахова) и одномерных логистических хаотических отображений показано существование эффекта полной синхронизации мемристивно связанных идентичных генераторов хаоса. Установлено влияние начального состояния мемристора связи на порог полной синхронизации хаоса как в случае идеального мемристора, так и для мемристора с конечной, но достаточно длительной памятью.
8. Методами компьютерного моделирования установлено влияние начальных состояний мемристивных связей на форму пространственного профиля бегущих волн в одномерных ансамблях периодических автоколебательных элементов, связанных через идеальные мемристоры при периодических граничных условиях. Эффект такого влияния установлен как для ансамбля

генераторов ван дер Поля в квазигармоническом режиме, так и для ансамбля осцилляторов ФитцХью-Нагумо в режиме сильно-релаксационных колебаний.

9. Методами компьютерного моделирования установлены особенности формирования волн возбуждения в кольцо мемристивно-связанных нейронов ФитцХью-Нагумо в возбуждимом режиме. Показано влияние начальных состояний мемристивных элементов на форму волнового профиля и частоту импульсов возбуждения во времени в случае идеальной мемристивной связи и при конечной памяти мемристивных элементов.
10. Численное исследование однородной мультиплексной двухслойной сети логистических отображений в режиме хаотической динамики с нелокальной диссипативной внутрислойной связью и мемристивным взаимодействием слоев показало возможность полной синхронизации химерных состояний, формирующихся в слоях без связи. Установлено, что пороговое значение коэффициента межслойной связи, обеспечивающее режим полной синхронизации слоев, зависит от начального состояния мемристивных элементов как в случае идеального характера мемристивных связей, так и при наличии достаточно слабого эффекта забывания.

Таким образом, можно сделать вывод, что цель диссертационной работы достигнута и основные задачи решены. В то же время, исследование динамики мемристивных систем далеко до завершения. Имеется много нерешенных проблем, которые нуждаются в дальнейших исследованиях. К таким проблемам можно отнести исследование жесткой бифуркаций в мемристивном генераторе с активной нелинейностью, задаваемой полиномом пятой степени, теоретический анализ фазового захвата и полной синхронизации диссипативно-связанных периодических мемристивных генераторов, исследование влияния мемристивной проводимости на эффект когерентного резонанса в возбуждимом осцилляторе, анализ синхронизации волновых структур в мемристивно-связанных цепочках

и решетках автоколебательных и возбудимых элементов при идеальном характере мемристоров и при наличии забывания и т.д. Важно выявить мемристивные эффекты, которые сохраняются в системах, содержащих мемристоры не являющиеся строго идеальными. Такие эффекты могут быть важны при функционировании реальных мемристивных систем. Данная диссертационная работа может служить отправной точкой для дальнейших исследований.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Chua, L.* Memristor-the missing circuit element / L. Chua // *IEEE Transactions on circuit theory*. — 1971. — Vol. 18, no. 5. — Pp. 507–519.
2. *Chua, L.O.* Memristive Devices and Systems / L.O. Chua, S.M. Kang // *Proceedings of the IEEE*. — 1976. — Vol. 64, no. 2. — Pp. 209–223.
3. *Di Ventra, Massimiliano.* Circuit elements with memory: memristors, memcapacitors, and meminductors / Massimiliano Di Ventra, Yuriy V Pershin, Leon O Chua // *Proceedings of the IEEE*. — 2009. — Vol. 97, no. 10. — Pp. 1717–1724.
4. *Chua, L.* Resistance switching memories are memristors / L. Chua // *Appl. Phys. A*. — 2011. — Vol. 102, no. 4. — Pp. 765–783.
5. *Chua, L.* Memristor, Hodgkin-Huxley, and Edge of Chaos / L. Chua // *Nanotechnology*. — 2013. — Vol. 24, no. 38. — P. 383001.
6. *Gandhi, G.* The First Radios Were Made Using Memristors! / G. Gandhi, V. Aggarwal, L.O. Chua // *IEEE Circuits and Systems Magazine*. — 2013. — Vol. 13, no. 2. — Pp. 8–16.
7. *Теодорчик, К.Ф.* Автоколебательные системы с инерционной нелинейностью / К.Ф. Теодорчик // *ЖТФ*. — 1946. — Т. 16, № 7. — С. 845.
8. *Landa, P.S.* Nonlinear oscillations and waves. — 1997.
9. *Anishchenko, V.S.* Dynamical Chaos: Models and Experiments: Appearance Routes and Structure of Chaos in Simple Dynamical Systems / V.S. Anishchenko. — World Scientific, 1995. — Vol. 8.

10. Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: tutorial and modern developments / V.S. Anishchenko, V.V. Astakhov, A.B. Neiman et al. — Springer Science & Business Media, 2007.
11. The missing memristor found / D.B. Strukov, G.S. Snider, D.R. Stewart, R.S. Williams // *Nature*. — 2008. — Vol. 453, no. 7191. — Pp. 80–83.
12. Optimization of an Organic memristor as an adaptive memory element / T. Berzina, A. Smerieri, M. Bernabò et al. // *J. Appl. Phys.* — 2009. — Vol. 105, no. 12. — P. 124515.
13. Graphene Oxide Thin Films for Flexible Nonvolatile Memory Applications / H.Y. Jeong, J.Y. Kim, J.W. Kim et al. // *Nano Lett.* — 2010. — Vol. 10, no. 11. — Pp. 4381–4386.
14. Synaptic behaviors and modeling of a metal oxide memristive device / T. Chang, S.H. Jo, K.H. Kim et al. // *Applied Physics A*. — 2011. — Vol. 102, no. 4. — Pp. 857–863.
15. *Erokhina, S.* Polyaniline-based organic memristive device fabricated by layered-by-layered deposition technique / S. Erokhina, V. Sorokin, V. Erokhin // *Electronic Materials Letters*. — 2015. — Vol. 11, no. 5. — Pp. 801–805.
16. A synapse memristor model with forgetting effect / L. Chen, C. Li, T. Huang et al. // *Phys. Lett. A*. — 2013. — Vol. 377, no. 45-48. — Pp. 3260–3265.
17. *Zhou, E.* A general method to describe forgetting effect of memristors / E. Zhou, L. Fang, B. Yang // *Phys. Lett. A*. — 2019. — Vol. 383, no. 11. — Pp. 942–948.
18. *Pershin, Y.V.* Practical Approach to Programmable Analog Circuits With Memristors / Y.V. Pershin, M. Di Ventra // *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. — 2010. — Vol. 57, no. 8. — Pp. 1857–1864.

19. *Pershin, Yuriy V.* Memory effects in complex materials and nanoscale systems / Yuriy V Pershin, Massimiliano Di Ventra // *Advances in Physics*. — 2011. — Vol. 60, no. 2. — Pp. 145–227.
20. *Chew, Z.J.* Printed Circuit Board Based Memristor in Adaptive Lowpass Filter / Z.J. Chew, L. Li // *Electronics Letters*. — 2012. — Vol. 48, no. 25. — Pp. 1610–1611.
21. *Di Ventra, M.* The parallel approach / M. Di Ventra, Y.V. Pershin // *Nature Physics*. — 2013. — Vol. 9, no. 4. — Pp. 200–202.
22. *Yang, J.J.* Memristive devices for computing / J.J. Yang, D.B. Strukov, D.R. Stewart // *Nature Nanotechnology*. — 2013. — Vol. 8, no. 1. — Pp. 13–24.
23. *Memristor and Memristive Systems* / Ed. by R. Tetzlaff. — Springer-Verlag New York, 2014.
24. *Vourkas, I.* Memristor-Based Nanoelectronic Computing Circuit and Architectures / I. Vourkas, G. Sirakoulis. — Springer International Publishing, 2016. — Vol. 19 of *Emergence, Complexity and Computation*.
25. *Pershin, Y.V.* Experimental demonstration of associative memory with memristive neural networks / Y.V. Pershin, M. Di Ventra // *Neural Networks*. — 2010. — Vol. 23, no. 7. — Pp. 881–886.
26. *Nanoscale Memristor Device as Synapse in Neuromorphic Systems* / S.H. Jo, T. Chang, I. Ebong et al. // *Nano Lett.* — 2010. — Vol. 10, no. 4. — Pp. 1297–1301.
27. *Wu, Ailong.* Dynamic behaviors of memristor-based recurrent neural networks with time-varying delays / Ailong Wu, Zhigang Zeng // *Neural Networks*. — 2012. — Vol. 36. — Pp. 1–10.

28. Guo, Zhenyuan. Global exponential dissipativity and stabilization of memristor-based recurrent neural networks with time-varying delays / Zhenyuan Guo, Jun Wang, Zheng Yan // *Neural Networks*. — 2013. — Vol. 48. — Pp. 158–172.
29. Guo, Zhenyuan. Attractivity analysis of memristor-based cellular neural networks with time-varying delays / Zhenyuan Guo, Jun Wang, Zheng Yan // *IEEE transactions on neural networks and learning systems*. — 2013. — Vol. 25, no. 4. — Pp. 704–717.
30. Anti-synchronization for stochastic memristor-based neural networks with non-modeled dynamics via adaptive control approach / Hui Zhao, Lixiang Li, Haipeng Peng et al. // *The European Physical Journal B*. — 2015. — Vol. 88, no. 5. — Pp. 1–10.
31. Li, Ruoxia. Passivity analysis of memristive neural networks with probabilistic time-varying delays / Ruoxia Li, Jinde Cao, Zhengwen Tu // *Neurocomputing*. — 2016. — Vol. 191. — Pp. 249–262.
32. Model electrical activity of neuron under electric field / Jun Ma, Ge Zhang, Tasawar Hayat, Guodong Ren // *Nonlinear dynamics*. — 2019. — Vol. 95, no. 2. — Pp. 1585–1598.
33. Synchronous dynamics in neural system coupled with memristive synapse / Fei Xu, Jiqian Zhang, Tingting Fang et al. // *Nonlinear dynamics*. — 2018. — Vol. 92, no. 3. — Pp. 1395–1402.
34. Model of electrical activity in a neuron under magnetic flow effect / Mi Lv, Chunni Wang, Guodong Ren et al. // *Nonlinear Dynamics*. — 2016. — Vol. 85, no. 3. — Pp. 1479–1490.

35. Model of electrical activity in cardiac tissue under electromagnetic induction / Fuqiang Wu, Chunni Wang, Ying Xu, Jun Ma // *Scientific reports*. — 2016. — Vol. 6, no. 1. — Pp. 1–12.
36. A Memristor-Based Hyperchaotic System with Hidden Attractors: Dynamics, Synchronization and Circuital Emulating / V.-T. Pham, Ch.K. Volos, S. Vaidyanathan et al. // *Journal of Engineering Science and Technology Review*. — 2015. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 205–214.
37. Periodicity, chaos, and multiple attractors in a memristor-based Shinriki's circuit / J Kengne, Z Njitacke Tabekoueng, V Kamdoum Tamba, A Nguomkam Negou // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2015. — Vol. 25, no. 10. — P. 103126.
38. Hyperchaos and horseshoe in a 4D memristive system with a line of equilibria and its implementation / Qingdu Li, Shiyi Hu, Song Tang, Guang Zeng // *International Journal of Circuit Theory and Applications*. — 2014. — Vol. 42, no. 11. — Pp. 1172–1188.
39. *Li, Qingdu*. Hyperchaos in a 4D memristive circuit with infinitely many stable equilibria / Qingdu Li, Hongzheng Zeng, Jing Li // *Nonlinear Dynamics*. — 2015. — Vol. 79, no. 4. — Pp. 2295–2308.
40. Hyperchaos in a memristor-based modified canonical Chua's circuit / Andrew L Fitch, Dongsheng Yu, Herbert HC Iu, Victor Sreeram // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2012. — Vol. 22, no. 06. — P. 1250133.
41. *Itoh, M*. Memristor Oscillators / M. Itoh, L.O. Chua // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2008. — Vol. 18, no. 11. — Pp. 3183–3206.
42. *Messias, M*. Hopf Bifurcation from Lines of Equilibria without Parameters in Memristor Oscillators / M. Messias, C. Nespoli, V.A. Botta // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2010. — Vol. 20, no. 2. — Pp. 437–450.

43. *Botta, V.A.* Mathematical Analysis of a Third-order Memristor-based Chua's Oscillator / V.A. Botta, C. Néspoli, M. Messias // *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.* — 2011. — Vol. 12, no. 2. — Pp. 91–99.
44. *Riaza, R.* Manifolds of Equilibria and Bifurcations without Parameters in Memristive Circuits / R. Riaza // *SIAM J. Appl. Math.* — 2012. — Vol. 72, no. 3. — Pp. 877–896.
45. *Fiedler, Bernold.* Generic Hopf bifurcation from lines of equilibria without parameters: I. Theory / Bernold Fiedler, Stefan Liebscher, James C Alexander // *Journal of Differential equations.* — 2000. — Vol. 167, no. 1. — Pp. 16–35.
46. *Fiedler, B.* Hopf Bifurcation from Lines of Equilibria without Parameters: II. Systems of Viscous Hyperbolic Balance Laws / B. Fiedler, S. Liebscher // *SIAM J. Math. Anal.* — 2000. — Vol. 31, no. 6. — Pp. 1396–1404.
47. Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences / Arkady Pikovsky, Jurgen Kurths, Michael Rosenblum, Jürgen Kurths. No. 12. — Cambridge university press, 2003.
48. *Yang, Xinsong.* Exponential synchronization of memristive Cohen–Grossberg neural networks with mixed delays / Xinsong Yang, Jinde Cao, Wenwu Yu // *Cognitive neurodynamics.* — 2014. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 239–249.
49. *Yang, Xinsong.* Synchronization of delayed memristive neural networks: Robust analysis approach / Xinsong Yang, Daniel WC Ho // *IEEE transactions on cybernetics.* — 2015. — Vol. 46, no. 12. — Pp. 3377–3387.
50. *Hu, Xiaofang.* Adaptive synchronization of memristor-based chaotic neural systems / Xiaofang Hu, Shukai Duan // *Journal of Engineering Science and Technology Review.* — 2015. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 17–23.

51. *Zhang, Lingzhong*. Lag synchronization for fractional-order memristive neural networks via period intermittent control / Lingzhong Zhang, Yongqing Yang et al. // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 89, no. 1. — Pp. 367–381.
52. Synchronization control of coupled memristor-based neural networks with mixed delays and stochastic perturbations / Chuan Chen, Lixiang Li, Haipeng Peng et al. // *Neural Processing Letters*. — 2018. — Vol. 47, no. 2. — Pp. 679–696.
53. Имитация синаптической связи нейроноподобных генераторов с помощью мемристивного устройства / С.А. Герасимова, А.Н. Михайлов, А.И. Белов и др. // *Журнал технической физики*. — 2017. — Т. 87, № 8. — С. 1248.
54. Synchronization of Chaotic Nonlinear Circuits via a Memristor. / С.К. Volos, I.M. Kyprianidis, I.N. Stouboulos et al. // *Journal of Engineering Science & Technology Review*. — 2015. — Vol. 8, no. 2. — Pp. 44–51.
55. Advances and Applications in Nonlinear Control Systems / Ch.K. Volos, V.-T. Pham, S. Vaidyanathan et al. — Studies in Computational Intelligence. Springer International Publishing, 2016.
56. Implementation of adaptive coupling through memristor / M. Frasca, L.V. Gambuzza, A. Buscarino, L. Fortuna // *Physica Status Solidi (c)*. — 2014. — Vol. 12, no. 1-2. — Pp. 206–210.
57. Memristor-Based Adaptive Coupling for Consensus and Synchronization / L.V. Gambuzza, A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca // *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. — 2015. — Vol. 62, no. 4. — Pp. 1175–1184.
58. Memristor synapse-coupled memristive neuron network: synchronization transition and occurrence of chimera / Han Bao, Yunzhen Zhang, Wenbo Liu, Bocheng Bao // *Nonlinear Dynamics*. — 2020. — Pp. 1–14.

59. Autowaves in Memristive Cellular Neural Networks / V.-T. Pham, A. Buscarino, L. Fortuna, M. Frasca // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2012. — Vol. 22, no. 8. — P. 1230027.
60. Turing Patterns in Memristive Cellular Nonlinear Networks / A. Buscarino, C. Corradino, L. Fortuna et al. // *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. — 2016. — Vol. PP, no. 99. — Pp. 1–9.
61. Electromagnetic induction and radiation-induced abnormality of wave propagation in excitable media / Jun Ma, Fuqiang Wu, Tasawar Hayat et al. // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2017. — Vol. 486. — Pp. 508–516.
62. Synchronization stability and pattern selection in a memristive neuronal network / Chunni Wang, Mi Lv, Ahmed Alsaedi, Jun Ma // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 11. — P. 113108.
63. Chimera states and synchronization behavior in multilayer memristive neural networks / Fei Xu, Jiqian Zhang, Meng Jin et al. // *Nonlinear dynamics*. — 2018. — Vol. 94, no. 2. — Pp. 775–783.
64. Numerical and experimental studies of attractors in memristor-based Chua’s oscillator with a line of equilibria. Noise-induced effects / V.V. Semenov, I.A. Korneev, P.A. Arinushkin et al. // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2015. — Vol. 224, no. 8. — Pp. 1553–1561.
65. *Korneev, I.A.* Hard and soft excitation of oscillations in memristor-based oscillators with a line of equilibria / I.A. Korneev, T.E. Vadivasova, V.V. Semenov // *Nonlinear Dynamics*. — 2017. — Vol. 89, no. 4. — Pp. 2829–2843.
66. *Korneev, I.A.* Andronov–Hopf bifurcation with and without parameter in a cubic memristor oscillator with a line of equilibria / I.A. Korneev, V.V. Semenov // *Chaos*. — 2017. — Vol. 27, no. 8. — P. 081104.

67. Синхронизация автогенераторов, взаимодействующих через мемристор / И.А. Корнеев, О.Г. Шабалина, В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2018. — Т. 26, № 2. — С. 24–40.
68. Forced synchronization of an oscillator with a line of equilibria / I.A. Korneev, A.V. Slepnev, V.V. Semenov, T.E. Vadivasova // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2020. — Vol. 229, no. 12. — Pp. 2215–2224.
69. *Korneev, I.A.* Synchronization of periodic self-oscillators interacting via memristor-based coupling / I.A. Korneev, V.V. Semenov, T.E. Vadivasova // *International journal of bifurcation and chaos*. — 2020. — Vol. 30, no. 07. — P. 2050096.
70. Взаимная синхронизация диссипативно связанных мемристивных генераторов / И.А. Корнеев, А.В. Слепнев, В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. — 2020. — Т. 20, № 3. — С. 210–221.
71. Волновые процессы в кольце мемристивно связанных автогенераторов / И.А. Корнеев, А.В. Слепнев, В.В. Семенов, Т.Е. Вадивасова // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2020. — Т. 28, № 3. — С. 324–340.
72. Complete synchronization of chaos in systems with nonlinear inertial coupling / I.A. Korneev, V.V. Semenov, A.V. Slepnev, T.E. Vadivasova // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 142. — P. 110459.
73. The impact of memristive coupling initial states on travelling waves in an ensemble of the FitzHugh–Nagumo oscillators / IA Korneev, VV Semenov, AV Slepnev, TE Vadivasova // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 147. — P. 110923.

74. Особенности динамикии вынужденная синхронизация мемристивного осциллятора / И.А. Корнеев, В.В. Семенов, А.В. Слепнёв, Т.Е. Вадивасова // Тезисы докладов XIX научной школы «Нелинейные волны — 2020». — Россия, Нижний Новгород. — С. 140–141.
75. Корнеев И.А., Слепнёв А.В., Вадивасова Т.Е. Программа для численного исследования вынужденной синхронизации мемристивного автогенератора. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021619548. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 11.06.2021.
76. Корнеев И.А., Слепнёв А.В., Вадивасова Т.Е. Программа для численного анализа пространственно-временной динамики ансамбля нейронов ФитцХью – Нагумо с мемристивной связью. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2021619547. Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 11.06.2021.
77. *Yang, Yuchao*. Complementary resistive switching in tantalum oxide-based resistive memory devices / Yuchao Yang, Patrick Sheridan, Wei Lu // *Applied Physics Letters*. — 2012. — Vol. 100, no. 20. — P. 203112.
78. *Zhusubaliyev, Zh.T.* Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems / Zh.T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde. — World Scientific Publishing, 2003. — Vol. 44 of *World Scientific Series on nonlinear Science Series A*.
79. *Leine, R.* Dynamics and Bifurcations of Non-Smooth Mechanical Systems / R. Leine, H. Nijmeijer. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004. — Vol. 18 of *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*.
80. Qualitative simulation of genetic regulatory networks using piecewise-linear models / H. De Jong, J.-L.Gouzé, C. Hernandez et al. // *Bulletin of Mathematical Biology*. — 2004. — Vol. 66, no. 2. — Pp. 301–340.

81. Switchings, Bifurcations, and Chaos in DC/DC Converters / M. Di Bernardo, F. Garofalo, L. Gliemlo, F. Vasca // *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I*. — 1998. — Vol. 45, no. 2. — Pp. 133–141.
82. *Banerjee, S.* Bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps - theory and applications in switch circuits / S. Banerjee, P. Ranjan, C. Grebogi // *IEEE Trans. on Circuits and Systems*. — 2000. — Vol. 47, no. 5. — Pp. 633–643.
83. Nonlinear Phenomena in Power Electronics / Ed. by S. Banerjee, G.C. Verghese. — Wiley-IEEE Press, 2001.
84. *Nusse, H.E.* Border-collision bifurcations including "period two to period three" for piecewise smooth systems / H.E. Nusse, J.A. Yorke // *Physica D*. — 1992. — Vol. 57. — Pp. 39–57.
85. *Jain, P.* Border-collision bifurcations in one-dimensional discontinuous maps / P. Jain, S. Banerjee // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2003. — Vol. 13, no. 11. — Pp. 3341–3351.
86. *Gardini, L.* Border collision bifurcation curves and their classification in a family of 1D discontinuous maps / L. Gardini, F. Tramontana // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 2011. — Vol. 44, no. 4-5. — Pp. 248–259.
87. Local analysis of C-bifurcations in n-dimensional piecewise-smooth dynamical systems / M. Di Bernardo, M.I. Feigin, S.J. Hogan, M.E. Homer // *Chaos, Solitons and Fractals*. — 1999. — Vol. 10, no. 11. — Pp. 1881–1908.
88. Bifurcations in Nonsmooth Dynamical Systems / M. Di Bernardo, C.J. Budd, A.R. Champneys et al. // *SIAM Rev.* — 2008. — Vol. 50, no. 4.
89. *Zhusubaliyev, Zh.T.* Border-collision bifurcations and chaotic oscillations in a piecewise-smooth dynamical system / Zh.T. Zhusubaliyev, E.A. Soukhoterin,

- E. Mosekilde // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2001. — Vol. 11, no. 12. — Pp. 2977–3001.
90. Noise in nonlinear dynamical systems: Vol. 3, Experiments and Simulations / Ed. by F. Moss, P. V. E. McClintock. — Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
91. *Luchinsky, D.* Analogue studies of nonlinear systems / D. Luchinsky, P. V. E. McClintock, M. Dykman // *Rep. Prog. Phys.* — 1998. — Vol. 61, no. 8. — Pp. 889–997.
92. *FitzHugh, Richard.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / Richard FitzHugh // *Biophysical journal*. — 1961. — Vol. 1, no. 6. — Pp. 445–466.
93. *Nagumo, Jinichi.* An active pulse transmission line simulating nerve axon / Jinichi Nagumo, Suguru Arimoto, Shuji Yoshizawa // *Proceedings of the IRE*. — 1962. — Vol. 50, no. 10. — Pp. 2061–2070.
94. *Jones, Christopher K.R.T.* Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system / Christopher K.R.T. Jones // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1984. — Vol. 286, no. 2. — Pp. 431–469.
95. *Alford, John G.* Rotating wave solutions of the FitzHugh–Nagumo equations / John G Alford, Giles Auchmuty // *Journal of mathematical biology*. — 2006. — Vol. 53, no. 5. — Pp. 797–819.
96. *Shepelev, Igor A.* Different synchronization characteristics of distinct types of traveling waves in a model of active medium with periodic boundary conditions / Igor A Shepelev, Andrei V Slepnev, Tatiana E Vadivasova // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2016. — Vol. 38. — Pp. 206–217.

97. Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh–Nagumo neurons with diffusive coupling / IA Shepelev, DV Shamshin, GI Strelkova, TE Vadivasova // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2017. — Vol. 104. — Pp. 153–160.
98. *Kuramoto, Yoshiki*. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators / Yoshiki Kuramoto, Dorjsuren Battogtokh // *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. — 2002. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 380–385.
99. *Abrams, Daniel M*. Chimera states for coupled oscillators / Daniel M Abrams, Steven H Strogatz // *Physical review letters*. — 2004. — Vol. 93, no. 17. — P. 174102.
100. Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states / Iryna Omelchenko, Yuri Maistrenko, Philipp Hövel, Eckehard Schöll // *Physical review letters*. — 2011. — Vol. 106, no. 23. — P. 234102.
101. Experimental observation of chimeras in coupled-map lattices / Aaron M. Hagerstrom, Thomas E. Murphy, Rajarshi Roy et al. // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8, no. 9. — Pp. 658–661.
102. Chimera states in mechanical oscillator networks / E. A. Martens, S. Thutupalli, A. Fourriere, O. Hallatschek // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2013. — Vol. 110, no. 26. — Pp. 10563–10567.
103. *Zakharova, Anna*. Chimera death: Symmetry breaking in dynamical networks / Anna Zakharova, Marie Kapeller, Eckehard Schöll // *Physical review letters*. — 2014. — Vol. 112, no. 15. — P. 154101.
104. *Panaggio, Mark J*. Chimera states: coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators / Mark J Panaggio, Daniel M Abrams // *Nonlinearity*. — 2015. — Vol. 28, no. 3. — Pp. R67–R87.

105. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic systems / Sergey A. Bogomolov, Andrei V. Slepnev, Galina I. Strelkova et al. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2017. — Vol. 43. — Pp. 25–36.
106. *Zakharova, Anna*. Chimera Patterns in Networks: Interplay between Dynamics, Structure, Noise, and Delay, Understanding Complex Systems / Anna Zakharova. — Springer, Cham, 2020.
107. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps / Andrei Bukh, Elena Rybalova, Nadezhda Semenova et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 11. — P. 111102.
108. *Andrzejak, Ralph G*. Generalized synchronization between chimera states / Ralph G. Andrzejak, Giulia Ruzzene, Irene Malvestio // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 5. — P. 053114.
109. *Majhi, Soumen*. Chimera states in uncoupled neurons induced by a multilayer structure / Soumen Majhi, Matjaž Perc, Dibakar Ghosh // *Scientific Reports*. — 2016. — Vol. 6, no. 1.
110. Forced synchronization of a multilayer heterogeneous network of chaotic maps in the chimera state mode / E. V. Rybalova, T. E. Vadivasova, G. I. Strelkova et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2019. — Vol. 29, no. 3. — P. 033134.