

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный  
университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи



ШЕПЕЛЕВ Игорь Александрович

**БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И СЛОЖНЫЕ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТРУКТУРЫ В АКТИВНЫХ  
РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМАХ С  
ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

01.04.03 – «Радиофизика»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук,  
профессор, ВАДИВАСОВА Т.Е.

Саратов – 2018

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ . . . . .</b>	<b>28</b>
1.1 Перестройки пространственных структур в активной среде на основе диффузионно-связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при вариации параметров, управляющих динамикой элементов среды . . . . .	30
1.1.1 Бифуркационный анализ динамических режимов в одиночном осцилляторе ФитцХью-Нагумо (1.1) . . . . .	32
1.1.2 Динамические режимы в модели среды (1.3) при $\varepsilon = 0.2$ . . . . .	35
1.1.3 Динамические режимы в модели среды (1.3) при $\varepsilon = 0.01$ . . . . .	42
1.1.4 Сравнение дисперсионных характеристик бегущих волн в модели среды (1.3) в различных режимах . . . . .	46
1.2 Режим бегущих волн в модели бистабильной среды на основе кольца диффузионно-связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при изменении силы диффузионной связи . . . . .	48
1.3 Синхронизация бегущих волн в модели бистабильной среды (1.3) внешним локальным и распределенным гармоническим воздействием . . . . .	54
1.3.1 Синхронизация бегущих волн в бистабильной среде (1.3) при локальном внешнем гармоническом воздействии . . . . .	55
1.3.2 Синхронизация бегущих волн при распределенном внешнем гармоническом воздействии . . . . .	58
1.4 Выводы по первой главе . . . . .	62

<b>Глава 2. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И ХИМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ В КОЛЬЦЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ЛОКАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ . . . . .</b>	<b>66</b>
2.1 Бегущие волны в кольце осцилляторов Дуффинга с локальной однонаправленной линейной связью . . . . .	68
2.2 Химерные режимы в кольце элементов с локальным однонаправленным нелинейным взаимодействием . . . . .	78
2.2.1 Эволюция режимов с ростом параметра связи и возникновение химероподобной структуры . . . . .	80
2.2.2 Диаграммы режимов на плоскостях управляющих параметров . . . . .	86
2.2.3 Влияние свойств нелинейности связи на химерные структуры	90
2.3 Выводы по второй главе . . . . .	92
<b>Глава 3. ХИМЕРЫ И УЕДИНЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ В АНСАМБЛЯХ БИСТАБИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ . . . . .</b>	<b>95</b>
3.1 Химерные структуры в кольце кубических отображений . . . . .	96
3.1.1 Химеры в ансамбле кубических отображений с регулярной динамикой . . . . .	98
3.1.2 Химеры в ансамбле кубических отображений с хаотической динамикой . . . . .	102
3.2 Химерные структуры в кольце осцилляторов Чуа . . . . .	111
3.3 Химерные структуры в кольце осцилляторов Лоренца . . . . .	121
3.3.1 Основные динамические режимы модели (3.8) . . . . .	123
3.4 Химерные структуры и бегущие волны в кольце бистабильных осцилляторов ФитцХью-Нагумо с нелокальным взаимодействием	135

3.5	Особенности формирования химерных структур при переходе от пространственно-временного хаоса к режиму полной хаотической синхронизации в двумерной решетке нелокально связанных кубических отображений . . . . .	148
3.5.1	Характерные режимы решетки при различных значениях параметра связи $\sigma$ и фиксированном радиусе связи $r = 0.35$	155
3.6	Особенности поведения решетки кубических отображений при стремлении к глобальному взаимодействию. Уединенные состояния	169
3.6.1	Связь, близкая к глобальной . . . . .	169
3.6.2	Переход к глобальной связи . . . . .	174
3.7	Выводы по третьей главе . . . . .	176

## **Глава 4. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ ХИМЕРНЫХ СТРУКТУР**

4.1	Влияние локального внешнего воздействия на ансамбль нелокально связанных хаотических осцилляторов Рёсслера . . . . .	182
4.1.1	Влияние внешней локализованной гармонической силы на ансамбль в режиме химерных состояний . . . . .	184
4.1.2	Влияние внешней локализованной гармонической силы на систему (4.1) в режиме частичной когерентности. Индуцированные химеры . . . . .	187
4.1.3	Эволюция поведения ансамбля (4.1) в режиме частичной когерентности с ростом амплитуды внешнего воздействия . . . . .	192
4.1.4	Управление индуцированной химерой . . . . .	196
4.2	Пространственные структуры при воздействии внешнего гармонического сигнала на все осцилляторы ансамбля . . . . .	199
4.3	Выводы по главе 4 . . . . .	201

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ . . . . . 204**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .	210
-----------------------------	-----

## ВВЕДЕНИЕ

Исследование сложных нелинейных пространственно распределенных систем, к которым можно отнести непрерывные среды и пространственно-организованные ансамбли взаимодействующих нелинейных элементов, является на сегодняшний день одним из актуальных направлений в нелинейной динамике. Наибольший интерес представляют так называемые активные среды и пространственно-организованные ансамбли взаимодействующих активных элементов, в которых наблюдаются автоволновые процессы, т.е. в пространстве могут распространяться незатухающие волны. Для таких систем также типично формирование различных пространственных структур и кластеров. Динамика колебаний отдельных элементов при этом может быть как регулярной, так и хаотической. Изучению пространственно-временной динамики распределенных активных систем и сред различной природы, эффектам синхронизации и образованию структур посвящено большое количество монографий (например, [1–6]) и статей (например, [7–12]). В этих и других работах показывается, что для пространственно-организованных активных систем и сред характерно образование таких структур как кластеры синхронизации, пространственная перемежаемость, неподвижные регулярные и нерегулярные структуры, различные типы волновых процессов.

Во многих случаях непрерывную среду можно представить, как распределенную систему, состоящую из очень большого числа взаимодействующих элементов малого размера. При этом выделяют три типа активных сред: автоколебательные, возбудимые и бистабильные среды. Элементы этих сред, соответственно, являются автогенераторами, возбудимыми системами или бистабильными осцилляторами с двумя устойчивыми состояниями. Модели активных сред и их дискретные аналоги в виде одномерных и двумерных ансамблей

взаимодействующих активных элементов играют важную роль в задачах биофизики и нейродинамики [13–17], химии [1, 18], экологии и эпидемиологии [19] и в других отраслях науки.

Взаимодействие между элементами модели среды может носить как локальный, так и нелокальный характер. Как было установлено ранее при локальном диффузионном взаимодействии все три типа сред демонстрируют автоволновые явления [3, 4, 20]. Однако имеются существенные различия в свойствах этих трех типов сред. Так, элементы автоколебательной среды в соответствующем режиме всегда демонстрируют незатухающие колебания вне зависимости от граничных условий. В возбудимой среде для поддержания таких колебаний требуются определенные условия, обеспечивающие возврат импульса возбуждения к элементу среды спустя некоторое время релаксации. Так, в ансамбле возбудимых элементов с периодическими граничными условиями распространяются незатухающие волны возбуждения [13, 21–25]. В двумерных и трехмерных возбудимых решетках и средах при определенных начальных условиях наблюдаются волновые структуры в виде спиральных волн (см., например, [3, 13, 26–28]).

Бегущие волны переключений в кольце бистабильных осцилляторов также известны, однако исследованы гораздо меньше. Если моделировать бистабильную среду используя в качестве элементов диссипативные осцилляторы Дуффинга, то при диффузионном взаимодействии волновых режимов в кольце не возникает. Однонаправленная (конвективная) связь может привести к появлению бегущих волн [29, 30]. Она обеспечивает дополнительную подкачку энергии в систему, что может привести к возникновению сложных колебаний даже в случае кольца из осцилляторов Дуффинга с одноямным потенциалом [31]. Модель бистабильной среды на основе кольца однонаправленно-связанных диссипативных бистабильных осцилляторов Дуффинга также демонстрирует сложное поведение, которое до конца не исследовано. Однако однонаправленная связь не столь типична для реальных систем, как диффузионное взаимодей-

ствии. Возникает вопрос, могут ли существовать бегущие волны в модели среды с периодическими граничными условиями при диффузионном взаимодействии элементов, если элементы среды обладают бистабильной динамикой, какой может быть эта модель и какими свойствами обладают бегущие волны в бистабильном режиме.

Как известно, одним из фундаментальных свойств автоколебаний является частотная синхронизация, т.е. захват характерных частот при внешнем воздействии или в результате взаимодействия систем [32]. Для возбудимых и бистабильных систем, колебания которых индуцируются шумом, при некоторых условиях (когерентный резонанс, стохастический резонанс) было установлено явление стохастической синхронизации, которому посвящено большое количество публикаций, например [33–35]. В то же время эффекты синхронизации детерминированных бегущих волн в возбудимых и бистабильных пространственно распределенных системах и средах пока являются сравнительно малоизученными. Имеется ряд работ, посвященных управлению периодом колебаний (интерспайковыми интервалами) в нейронных моделях, представляющих собой распределенные возбудимые системы [36–38]. Из приведенных в них результатов видно, что локальное внешнее воздействие изменяет частоту следования импульсов возбуждения, т.е. имеет место явление частотной синхронизации. Более детально синхронизация бегущих волн в модели непрерывной среды в возбудимом режиме была рассмотрена в [39, 40]. В качестве исследуемой модели рассматривалась среда, элементами которой являются осцилляторы ФитцХью-Нагумо. Был установлен эффект синхронизации бегущих волн при локальном внешнем гармоническом воздействии на среду как в автоколебательном, так и в возбудимом режиме элементов среды и проведено сравнение характеристик эффектов синхронизации в этих двух случаях. Однако остался не исследованным вопрос о синхронизации бегущих волн, наблюдающихся в данной модели среды при бистабильном поведении элементов. Кроме того, ни для бистабильного, ни



для возбудимого режимов не была рассмотрена задача синхронизации бегущих волн в случае пространственно-распределенного воздействия.

Образование пространственных структур в активных распределенных системах является следствием синергетических явлений, связанных с эффектами синхронизации определенных групп взаимодействующих парциальных подсистем (элементов). Важную роль в образовании структур играют как свойства парциальных элементов, так и тип взаимодействия между элементами. Недавно внимание исследователей привлек новый тип сложных пространственных структур, характерный для ансамблей активных элементов с нелокальной связью. Это – так называемые химерные структуры (см., например, [41–47]). Химерные структуры характеризуются сосуществованием кластеров с согласованным (когерентным) и несогласованным (некогерентным) поведением. По-видимому, такие состояния представляют собой особый тип кластерной синхронизации. Опишем их более подробно. Химеры возникают в осцилляторных ансамблях с различной динамикой элементов, как регулярной [44, 48–50], так и хаотической [43, 51, 52], и представляют собой чередующиеся в пространстве кластеры с когерентным и некогерентным поведением соседних осцилляторов. Наиболее изученными типами химер являются фазовая и амплитудная химера [45, 47]. В фазовой химере соседние осцилляторы кластера некогерентности могут иметь различные фазовые сдвиги беспорядочно распределенные в пределах кластера. Мгновенные амплитуды колебаний при этом различаются слабо. В кластере некогерентности амплитудной химеры осцилляторы находятся в режиме развитого хаоса и их мгновенные амплитуды могут сильно различаться.

Интерес к химерным состояниям обусловлен их типичным характером для широкого класса ансамблей нелинейных элементов. Такие ансамбли часто служат математическими моделями реальных многокомпонентных систем и процессов в биофизике, нейродинамике, экологии, социологии, компьютерных и энергетических сетях и т. д. Можно отметить интерес к химерным состояниям с точки зрения моделирования работы нейронных тканей и головного

мозга [53–55], электросетей [12], социальных систем [56, 57]. Примечательно, что химерные состояния можно найти не только в числовых моделях, но и в экспериментах, что указывает на возможность этого явления в реальных системах. Эксперименты проводились на системах различной природы: оптических [58, 59], механических [60, 61], электронных [62], химических [63].

Одним из важнейших условий возникновения химер принято считать нелокальный характер взаимодействия элементов: каждый осциллятор непосредственно связан с целой группой соседей. В большинстве работ, посвященных изучению химерных состояний, исследуются модели ансамблей, где учитывается связь каждого элемента с несколькими соседями в определенной окрестности, т.е. нелокальный характер связи. В работе [64] были получены результаты, подтверждающие возможность существования химер в ансамблях с глобальной связью. Вопрос о реализации химерных структур в ансамблях с локальной связью остается недостаточно изученным. В большинстве случаев при уменьшении радиуса взаимодействия химеры исчезают. Однако, по-видимому, химероподобные состояния могут существовать и при локальном взаимодействии, либо в случае особых характеристик такого взаимодействия, либо при особом характере поведения элементов ансамбля. Так, химеры были найдены в ансамбле с локальной инерционной связью в [65], где связь вводилась через специальную переменную, которая описывалась линейным дифференциальным уравнением. Также установлено существование химероподобных состояний в ансамбле с локальной связью вблизи гомоклинической бифуркации в отдельно взятом осцилляторе [66].

Особый случай химер имеет место в системах с запаздывающей обратной связью [67–69]. Они получили название виртуальных химер. Они представляют собой режим перемежаемости во времени, когда на периоде запаздывания укладывается несколько интервалов с регулярным и нерегулярным поведением, причем чередование интервалов происходит упорядоченно, практически повторяясь через период запаздывания. Период запаздывания в таких системах

может рассматриваться как условное пространство [67, 68, 70]. Системы с запаздывающей обратной связью относятся к особому классу распределенных динамических систем. Мгновенное состояние такой системы в момент времени  $t$  определяется как некоторая функция от времени на интервале времени задержки. Модели с запаздывающей обратной связью широко используются в механике [71], в задачах управления [72–75], экологии [76–78], нейродинамике [79–81] и многих других областях. При некоторых условиях такие системы демонстрирует поведение, подобное поведению одномерной пространственно-распределенной системы. В работе [82] было показано, что фрактальная размерность, представляет собой размерностную характеристику, пропорциональную времени запаздывания, которое играет роль близкую к количеству элементов в пространственно-распределенной системе. Одним из главных условий подобия осциллятора с запаздывающей обратной связью и распределенной системы является асимметричный характер связи между элементами [83]. Предельный случай асимметричной связи – это однонаправленная связь. Таким образом предполагается, что осциллятор с запаздывающей обратной связью при определенных условиях должен демонстрировать поведение, схожее с кольцом таких же осцилляторов с локальной однонаправленной связью [84, 85]. Возникает вопрос, можно ли, основываясь на описанной выше аналогии, получить химерные состояния в кольце осцилляторов с однонаправленной локальной связью, каковы будут условия их возникновения и каковы будут свойства химер, реализуемых в подобной системе.

Как уже упоминалось выше, особым типом динамических систем являются бистабильные осцилляторы. Они характеризуются двумя устойчивыми состояниями равновесия (двумя аттракторами). Динамика таких систем может быть как регулярной, так и хаотической. В случае регулярной динамики устойчивыми режимами могут быть либо предельные циклы, либо неподвижные точки – узлы или фокусы, в зависимости от степени диссипации осциллятора. Бистабильные осцилляторы с хаотической динамикой характеризуются

двумя сосуществующими хаотическими аттракторами. Кроме того, для многих подобных систем характерна бифуркация слияния двух аттракторов в один объединенный аттрактор. Известные ранее химерные состояния, такие как амплитудные и фазовые химеры, преимущественно исследовались в ансамблях, парциальные элементы которых характеризовались существованием единственного аттрактора в фазовом пространстве (например, [43, 47, 51, 86–88]). Образование химерных структур в таких системах, по-видимому, связано с мультистабильностью, возникающей из-за взаимодействия элементов ансамбля. Сложные структуры в ансамблях бистабильных осцилляторов с нелокальным взаимодействием практически не исследовались. Можно отметить работы [89, 90], в которых рассмотрены химеры в ансамблях элементов с бистабильной динамикой, однако особенности химерных структур, связанные именно с бистабильностью не были в центре внимания. В большинстве работ, посвященных исследованию химерных структур, рассматривались одномерные ансамбли с периодическими граничными условиями (кольца). Имеются также работы, посвященные исследованию двумерных [51, 58, 64] и трехмерных решеток [46], а также многослойных ансамблей [91–94].

В модели двумерной среды с фазовой динамикой элементов наблюдались химеры в форме спиральных волн [95]. Все рассмотренные в данных работах модели в качестве элемента используют фазовый осциллятор или его аналог с дискретным временем (см. [58]). Остается неизученной проблема образования сложных химерных структур в двумерной решетке, составленной из хаотических, а также бистабильных элементов. Не изучен вопрос, как влияет на динамику ансамбля бистабильных элементов переход к двумерной топологии связи, как наличие бифуркации слияния аттракторов отражается на характере перехода "некогерентный хаос - когерентный хаос".

Влияние внешних сил на возникновение, существование и характеристики химерных структур представляет собой очень малоисследованную проблему. Имеется несколько работ, в которых рассматривалось влияние случайных воз-

действий на химерные состояния. В работе [96] исследовалось влияние внешнего шума на время жизни амплитудных химер в ансамбле нелокально связанных гармонических генераторов. Такие химеры представляют собой метастабильные структуры и случайное воздействие существенно сокращает их время жизни. Существуют исследования, которые подтверждают, что некоторые типы химер устойчивы к шуму. Такими являются, например, фазовые химеры в кольце логистических отображений с нелокальной связью [97]. В этой же системе наблюдаются также метастабильные амплитудные химеры, но, в отличие от амплитудных химер, рассмотренных в [96], их время жизни может быть увеличено с помощью случайных возмущений [97]. Стабилизация химерных состояний внешним шумом описана также в [98]. Более того, в некоторых системах шум может даже являться причиной появления химерных структур. Такие химеры, возникающие в ансамбле возбудимых осцилляторов, описаны в [99]. В целом, в отношении влияния случайных воздействий на химерные состояния различного типа остается еще много неясного. Еще меньше исследован вопрос о влиянии на химеры периодических внешних сигналов. В этой связи можно указать только работу [98], в которой показана синхронизация виртуальной химеры с помощью внешнего периодического воздействия. В то же время, специально подобранные локальные воздействия могут быть использованы, как для формирования определенных химерных структур, так и для управления ими. В связи с этим, изучение эффектов, связанных с внешними периодическими воздействиями на ансамбль нелокально связанных осцилляторов представляется актуальной задачей для исследования.

Помимо химерных состояний в ансамблях с нелокальным взаимодействием элементов было обнаружено новое явление – образование уединенных состояний ("solitary state"). Это недавно обнаруженный и малоисследованный тип структуры, когда почти все элементы ансамбля находятся в близких состояниях и лишь отдельные осцилляторы (иногда только один осциллятор) демонстрируют особое поведение, отличное от остальной системы [54,100,101]. По-видимому,

для их формирования уединенных состояний важен именно нелокальный либо глобальный характер связи. Так в работах [54, 101] уединенные состояния были обнаружены в ансамблях фазовых осцилляторов с глобальным взаимодействием, а в [100] – в ансамбле таких же элементов с нелокальной связью конечного радиуса. Для ансамблей с локальным взаимодействием такие структуры не наблюдались. Уединенные состояния часто соседствуют с химерами. Так в [100] отмечался сценарий формирования химеры через эволюцию режима уединенных состояний. Условия возникновения уединенных состояний и их связь с химерными структурами пока не вполне ясны и требуют более детального изучения.

**Целью данной работы** является решение актуальной радиофизической задачи, состоящей в исследовании условий возникновения и эволюции бегущих волн и сложных химероподобных структур в активных распределенных системах и средах с периодическими граничными условиями, в установлении влияния характера связи между элементами на пространственно-временную динамику, а также в исследовании эффектов воздействия внешней периодической силы на пространственные структуры и динамику элементов распределенной системы. В качестве моделей таких систем и сред будут рассмотрены ансамбли взаимодействующих осцилляторов как с дискретным, так и непрерывным временем, характеризующихся как регулярной, так и хаотической динамикой. Кроме того, будет рассмотрено как меняются характеристики режимов при смене типа динамики парциальных элементов системы. Особое внимание будет уделено волновым процессам и образованию сложных структур в распределенных системах, состоящих из бистабильных элементов, таких как кубическое отображение, диссипативный осциллятор Дуффинга, Осциллятор ФитцХью-Нагумо в бистабильном режиме, цепь Чуа и система Лоренца.

Для достижения поставленной цели в рамках диссертационного исследования с помощью методов компьютерного моделирования необходимо решить следующие **основные задачи**:

1. Исследовать особенности распространения бегущих волн в среде, моделируемой кольцом осцилляторов ФитцХью-Нагумо с диффузионной связью при вариации параметров, меняющих характер динамики парциальных элементов. Построить карту режимов для кольца осцилляторов и сравнить ее с бифуркационной диаграммой одиночного осциллятора. Установить область существования бегущих волн на плоскости управляющих параметров в случае, когда парциальные осцилляторы не демонстрируют автоколебаний. Выяснить возможность существования бегущих волн в режиме бистабильной динамики элементов среды и установить, как меняется поведение среды при переходе из области бистабильности в область возбудимого и автоколебательного поведения.
2. Исследовать синхронизацию бегущих волн в активной среде на основе кольца диффузионно-связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в бистабильном режиме при внешнем локальном гармоническом воздействии и сравнить результаты с ранее исследованными в литературе эффектами синхронизации бегущих волн в той же модели среды, в возбудимом и автоколебательном режиме. Исследовать синхронизацию бегущих волн при распределенном гармоническом воздействии во всех трех динамических режимах среды и провести сопоставление.
3. Рассмотреть возможность возбуждения бегущих волн в модели бистабильной среды на основе кольца локально связанных осцилляторов Дуффинга при однонаправленном характере взаимодействия между элементами и исследовать переход от регулярных волн к хаотическим волновым режимам.
4. Исследовать возможность формирования устойчивых движущихся химерных структур в ансамбле линейных диссипативных осцилляторов с локальной однонаправленной нелинейной связью. Установить область существования таких структур и механизмы их разрушения при вариации пара-

метров системы. Определить тип нелинейности связи, необходимой для возникновения бегущих волн с хаотической динамикой и влияние диссипативной компоненты взаимодействия.

5. Изучить ранее не описанный в литературе тип химерных структур, характерный для ансамблей нелокально связанных бистабильных элементов. Исследовать химероподобные неподвижные пространственные структуры в кольце элементов с двумя устойчивыми точками равновесия, химерные состояния в кольце бистабильных элементов с регулярной и хаотической динамикой. Установить общие черты химерных структур в ансамблях бистабильных элементов различного типа (дискретных отображений, диссипативных нелинейных осцилляторов, различных хаотических автогенераторов, характеризующихся бистабильным поведением в определенной области параметров) и выделить возможные особенности, обусловленные особым характером поведения парциальных систем. Дать качественную и количественную оценку химерным режимам, наблюдающимся в одномерных ансамблях различных бистабильных элементов. Построить диаграммы динамических режимов на плоскости параметров связи (коэффициент связи - радиус связи).
6. Перейти от одномерной цепочки нелокально-связанных бистабильных хаотических отображений к двумерной решетке. Исследовать изменение динамики системы и определить характерные режимы, обусловленные переходом к двумерному случаю.
7. Исследовать режим уединенных состояний в двумерной решетке нелокально связанных кубических отображений. Определить условия наиболее благоприятствующие появлению уединенных состояний в рассматриваемой системе.



8. Исследовать влияние пространственно-локализованного и глобального внешнего гармонического воздействия на ансамбль нелокально-связанных хаотических осцилляторов Рёсслера в режиме амплитудной и фазовой химеры, а также в режиме частичной когерентности всех элементов ансамбля для случаев глобального и локализованного воздействия. Исследовать эффекты подавления химерной структуры при внешнем воздействии, а также возбуждения химероподобного кластера при исходном кусочно-гладком пространственном профиле ансамбля. Рассмотреть возможность управления характером пространственной структуры с помощью выбора соответствующих характеристик воздействия.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы.

**Во введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится краткий обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме проводимого исследования, определяются цели и задачи исследования, формулируются положения и результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе** проводится исследование режима бегущих волн в модели активной диффузионной среды с периодическими граничными условиями. В качестве элементарной ячейки среды используется осциллятор ФитцХью-Нагумо. В первом разделе главы приводится описание модели среды, показывается существование бегущих волн в среде с бистабильным поведением элементов и исследуется их эволюция с ростом силы диффузионной связи. Во втором разделе анализируются изменения пространственно-временной динамики при изменении характера поведения элементов среды. Строится карта режимов среды на плоскости управляющих параметров, которая сравнивается с бифуркационной диаграммой для одиночного осциллятора. Кроме этого, рассчитываются дисперсионные характеристики в автоколебательном, возбужденном и бистабильном режимах среды. В третьем разделе исследуется синхронизация бегущих

волн в бистабильной среде при локальном внешнем гармоническом воздействии, а также синхронизация бегущих волн в различных режимах при распределенном гармоническом внешнем воздействии. Проводится сравнение закономерностей эффекта синхронизации для трех динамических режимов элементов среды.

**Во второй главе** в первом разделе рассматривается возможность реализации режима бегущих волн в модели среды на основе кольца бистабильных диссипативных осцилляторов Дуффинга при однонаправленном взаимодействии между осцилляторами. Приводится описание модели и основных динамических режимов. Строится карта режимов на плоскости управляющих параметров. В деталях исследуется переход от стационарных пространственных структур к регулярным бегущим волнам и последующий переход в режим хаотических колебаний при увеличении силы связи. Во втором разделе главы исследуется кольцо диссипативных линейных осцилляторов с локальным однонаправленным нелинейным взаимодействием. Приводится описание основных динамических режимов, реализуемых в кольце при различных значениях параметров. Показано, что в исследуемой системе с локальной связью элементов в широкой области значений параметров существует стабильный режим движущихся химероподобных структур. Строятся карты режимов на плоскостях различных управляющих параметров. Рассматривается эволюция химерных состояний с ростом коэффициента связи. Исследуется тип нелинейности, необходимый для возникновения химерных состояний.

**В третьей главе** исследуются химеры и уединенные состояния в различных ансамблях нелокально-связанных бистабильных элементов. В первом разделе главы исследуются химерные структуры в кольце кубических отображений, демонстрирующих в определенном интервале значений управляющего параметра различные типы бистабильной динамики. Рассматривается случай двух устойчивых неподвижных точек и периодических колебаний парциальных отображений. Установлен и описан новый тип химер, названных "двухъямны-

ми химерами". Их формирование обусловлено собственной бистабильностью элементов ансамбля. Затем исследуется кольцо отображений в режиме объединенного хаотического аттрактора. Показывается, что взаимодействие элементов в режиме объединенного хаотического аттрактора приводит к сдвигу эффективных параметров элементов ансамбля, в результате чего они переходят в режим бистабильности. Как следствие образуются двухъямные химерные структуры, типичные для ансамблей бистабильных элементов. Кроме них наблюдаются также и другие типы химерных структур, а именно амплитудные и фазовые химеры, обнаруженные ранее в ансамбле логистических отображений. Далее рассматриваются ансамбли бистабильных систем с непрерывным временем. Во втором разделе главы исследуется кольцо нелокально связанных цепей Чуа в режиме объединенного аттрактора типа "двойной спирали". Эффективный сдвиг параметров, также как и в ансамбле хаотических кубических отображений, приводит к переходу элементов в режим бистабильности и образованию двухъямных химер. В третьем разделе исследуется кольцо систем Лоренца в режиме квазигиперболического хаотического аттрактора. В этом случае ансамбль демонстрирует очень сложное поведение. Кроме двухъямных химер, наблюдаются также метастабильные химероподобные состояния и пространственно-временная хаотическая перемежаемость. В четвертом разделе исследуются химерные структуры и бегущие волны в кольце нелокально-связанных бистабильных осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Показано существование особого рода двухъямных химерных структур, отличающихся по своим характеристикам от двухъямных химер, наблюдающихся в других исследованных ансамблях. Для всех исследованных ансамблей строятся карты режимов на плоскости параметров связи и проводится качественный и количественный анализ химерных структур. В пятом разделе исследуются химерные структуры, наблюдающиеся в двумерной решетке нелокально-связанных кубических отображений при переходе от режима пространственно-временного хаоса к режиму полной когерентности. На плоскости параметров "сила связи – радиус

связи" выделены области существования пространственных структур различного типа, в том числе двухъямных и одноямных химер. В шестом разделе главы рассмотрен режим уединенных состояний в двумерной решетке кубических отображений, характерный для глобальной связи или связи, близкой к глобальной. Рассчитывается вероятность реализации различных пространственных структур для двух указанных случаев взаимодействия элементов решетки.

**В четвертой главе** диссертации проводится анализ влияния внешней гармонической силы на ансамбль нелокально-связанных осцилляторов Рёсслера. В первом разделе приводится описание исследуемой модели и рассматриваются случаи пространственно-локализованного и глобального воздействия на ансамбль в различных режимах. Исследуется влияние внешнего воздействия на среду в установившихся режимах амплитудной и фазовой химер, а также в режиме частичной когерентности с кусочно-гладким характером пространственного профиля мгновенных состояний. Показано разрушение химерной структуры в результате внешнего воздействия. В то же время установлено, что в частично когерентном режиме внешнее гармоническое воздействие с одинаковой частотой, амплитудой и фазой, оказываемое на группу осцилляторов, может приводить к формированию кластера некогерентности, подобного амплитудной химере. Во втором разделе рассматривается эволюция пространственных структур с ростом амплитуды внешнего локализованного воздействия на ансамбль осцилляторов в режиме частичной когерентности. Определяется интервал значений амплитуды, соответствующий существованию индуцированной внешним воздействием химероподобной структуры. В третьем разделе исследуется возможность управления параметрами индуцированного химероподобного состояния путем изменения параметров локализации внешнего воздействия. Рассчитываются количественные характеристики исследуемых режимов. В четвертом разделе главы исследуется эволюция состояний системы, находящейся под гло-

бальным гармоническим воздействием, при увеличении амплитуды внешней силы.

**В заключении** сформулированы основные выводы и результаты диссертационной работы.

Материал диссертационной работы изложен на 229 страницах, содержит 91 иллюстраций и список цитируемой литературы из 157 наименований.

**Научная новизна** результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые проведено сопоставление бифуркационной диаграммы, построенной для отдельно взятого осциллятора ФитцХью-Нагумо с картой режимов в модели активной среды, представляющей собой кольцо осцилляторов ФитцХью-Нагумо с диффузионным взаимодействием. Выявлена область, соответствующая существованию бегущих волн в режиме возбудимой и бистабильной динамики элементов среды. Рассмотрено, как меняется поведение среды при изменении характера динамики парциальных осцилляторов. Рассмотрено влияние степени релаксационности осцилляторов на волновые процессы в среде.
2. Исследовано явление вынужденной синхронизации бегущих волн в кольце осцилляторов с бистабильным поведением. Сопоставлены особенности вынужденной синхронизации бегущих волн в модели активной среды в трех различных динамических режимах парциальных осцилляторов: автоколебательном, возбудимом и бистабильном, при распределенном гармоническом внешнем воздействии.
3. Впервые установлено существование химерных состояний в кольце, состоящем из диссипативных линейных осцилляторов, с локальным однонаправленным нелинейным взаимодействием. Показано, что химерные структуры в такой системе представляют собой волновой процесс, соответствующий

перемещению вдоль кольца с постоянной скоростью кластеров с регулярным и хаотическим поведением элементов.

4. Впервые был обнаружен и исследован особый тип химерных состояний, названных двухъямными химерами. Показано, что данный тип химер характерен для широкого класса ансамблей нелокально-связанных бистабильных систем, как с регулярной, так и с хаотической динамикой. При наличии у элементов ансамбля двух устойчивых состояний равновесия нелокальная связь приводит к формированию устойчивых химерных структур, особенностью которых является нерегулярное распределение элементов некогерентных кластеров между двумя состояниями равновесия.
5. Обнаружены химерные состояния в ансамбле связанных гиперболических осцилляторов Лоренца, аналогичные двухъямным химерам в ансамбле бистабильных кубических отображений. Показано, что формирование таких состояний обусловлено сдвигом эффективных значений параметров парциальных систем и переходом в режим бистабильности.
6. Обнаружен режим уединенных состояний в двумерной решетке бистабильных кубических отображений при глобальном и близком к глобальному характере взаимодействия элементов.
7. Исследовано влияние внешнего периодического воздействия на химерные состояния и режим частичной когерентности в ансамбле хаотических осцилляторов. Впервые установлен эффект возникновения индуцированных периодическим воздействием химероподобных структур. Показана возможность управления такими структурами путем изменения параметров внешнего воздействия.

**Достоверность научных результатов и выводов работы** обеспечивается использованием при численном моделировании корректных и многократно проверенных методов вычислений, сходимостью применяемых алгоритмов и

выбором оптимальных параметров численных схем. Разработанное программное обеспечение тестировалось на примерах, известных из научной литературы. Достоверность результатов и научных выводов, сделанных на основании полученных результатов, подтверждается воспроизводимостью всех полученных данных, независимо от конкретных схем численного анализа, и непротиворечивостью выводов существующим на сегодняшний день теоретическим представлениям.

**На защиту выносятся следующие положения:**

1. В бистабильной диффузионной среде, состоящей из элементарных осцилляторов типа осциллятора ФитцХью-Нагумо в бистабильном режиме, при периодических граничных условиях могут распространяться бегущие волны с различной длиной волны, которые синхронизируются внешним периодическим воздействием. Особенности синхронизации бегущих волн в случае бистабильного режима среды аналогичны случаю синхронизации волн возбуждения.
2. Химерные состояния могут быть получены в кольце диссипативных осцилляторов с локальной однонаправленной нелинейной связью при определенной форме нелинейности.
3. В ансамблях нелокально-связанных бистабильных осцилляторов реализуется особый тип химерных структур, для которых характерны кластеры некогерентности с нерегулярным распределением соседних осцилляторов между двумя аттракторами ("потенциальными ямками"). При этом элементы ансамблей могут как совершать колебания (регулярные либо хаотические), так и быть неподвижными.
4. С помощью локализованного внешнего гармонического воздействия на элементы ансамбля нелокально-связанных хаотических осцилляторов, находящегося в режиме частичной синхронизации с гладким профилем про-

странственного распределения, можно возбудить кластер некогерентных состояний, подобный некогерентному кластеру амплитудной химеры. Характеристиками индуцированного некогерентного кластера легко управлять, меняя параметры воздействия.

**Научная и практическая значимость результатов** диссертационной работы обусловлена тем, что они существенно расширяют представления современной теории колебаний и волн о динамике сложных пространственно-распределенных систем и сред и показывают возможности получения новых динамических режимов и пространственных структур при различном характере поведения активных элементов таких систем и различном типе связи между ними. На примере модели активной среды составленной из осцилляторов ФитцХью-Нагумо с диффузионной связью, было показано, что в среде из элементов с бистабильной динамикой при периодических граничных условиях в широкой области значений параметров существует режим бегущих волн. Было установлено, что бегущие волны в бистабильной среде могут быть синхронизованы внешним периодическим сигналом. Впервые установлена возможность реализации химерных состояний в ансамбле диссипативных осцилляторов с локальной однонаправленной связью. Впервые обнаружен и исследован новый тип химерных состояний, характерный для ансамблей бистабильных элементов с нелокальным взаимодействием, причем динамика этих элементов может быть как регулярной, так и хаотической. Установлено, что аналогичные химерные состояния могут реализоваться и в ансамблях хаотических систем с квазигиперболическим аттрактором типа аттрактора Лоренца. Показано, что внешнее периодическое воздействие на ансамбль хаотических осцилляторов может приводить к возникновению химероподобных структур, которыми можно управлять выбирая параметры воздействия. Материалы диссертации частично используются в курсе лекций по избранным вопросам теории колебаний и волн, читаемым для магистров-радиофизиков, а также при постановке курсовых и



дипломных работ студентов. Предполагается дальнейшее внедрение результатов работы в учебный процесс. Проводимые в рамках диссертации численные исследования потребовали разработки специальных программ, которые частично использовались при создании вычислительного комплекса, направленного на исследование совокупности характеристик поведения сложных многокомпонентных систем, на который было получено авторское свидетельство [102]. Данный комплекс нашел широкое применение в научных исследованиях, проводимых на кафедре радиофизики и нелинейной динамики, а также был внедрен в учебный процесс.

**Апробация работы.** Основные результаты научных исследований были представлены на 13 международных конференциях:

1. Международная конференция "Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых Ломоносов-2014", 7–11 апреля 2014, Москва, И.А. Шепелев, "Исследование волновых режимов бистабильной активной среды".
2. Международная конференция "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity", 19–23 мая 2014, Саратов I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova, "Traveling waves, bifurcations and multistability in bistable active medium with periodic boundary conditions".
3. Международная конференция "Saratov Fall Meeting – SFM'14", 23–26 сентября 2014, Саратов, I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, "Traveling waves, breathers and multistability in bistable active medium with periodic boundary conditions".
4. Международная конференция "Saratov Fall Meeting – SFM'14", 23–26 сентября 2014, Саратов, I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova, D.E. Postnov, "Traveling waves, breathers and multistability in bistable active medium with periodic boundary conditions".

5. Международная конференция "Dynamics, Bifurcations and Chaos – 2015", 20–24 июня 2015, Нижний Новгород, Т.Е. Vadivasova, A.V. Slepnev, I.A. Shepelev, "Dynamical chimeras in a ring of oscillators with local coupling".
6. Международная конференция "Dynamics, Bifurcations and Chaos – 2015", 20–24 июня 2015, Нижний Новгород, I.A. Shepelev, V.V. Semenov, Т.Е. Vadivasova, "Synchronization of traveling waves in the active medium with periodic boundary conditions".
7. Международная конференция "Control of self-organizing nonlinear systems: Theoretical methods and concepts of application", 14–16 сентября 2015, Виттенберг, Германия, I.A. Shepelev, Т.Е. Vadivasova, V.V. Semenov, "Dynamical chimeras in a ring of oscillators with local coupling".
8. Международная конференция "Компьютерные науки и информационные технологии", 30 июня – 2 июля 2016, Саратов, Т.Е. Вадивасова, И.А. Шепелев, "Химерные режимы в кольце с однонаправленным нелинейным взаимодействием".
9. Международная конференция "International Conference on Control of Complex Systems and Networks", 04–06 сентября 2016, Heringsdorf, Usedom, Germany, Т. Е. Vadivasova, I.A. Shepelev, A.S. Zakharova, "Chimera states in a ring of linear oscillators with local nonlinear unidirectional interaction".
10. Международная конференция "Saratov Fall Meeting – SFM'16", 27–30 сентября 2016, Саратов, I.A. Shepelev, "Chimera regimes in a two-dimensional network of cubic maps with nonlocal coupling".
11. Международная конференция "Хаос-2016 хаотические колебания и образование структур", 3–10 октября 2016, Саратов, И.А. Шепелев, А.В. Бух, "Режимы химер в двумерном ансамбле кубических отображений с нелокальным взаимодействием".

12. Международная конференция "Хаос-2016 хаотические колебания и образование структур", 3–10 октября 2016, Саратов, Т.Е. Вадивасова, И.А. Шепелев, А. Захарова, "Химерные режимы в кольце локально-связанных осцилляторов".
13. Международная конференция "Нелинейные Волны – 2018", 26 февраля – 4 марта 2018, Бор, И.А. Шепелев, В.С. Анищенко, "Химеры и перемежаемость в ансамбле связанных осцилляторов Лоренца".

Основные результаты исследований также докладывались на Научном семинаре Applications of Complex Networks, Берлинский технический университет (Берлин, 2014, 2017) и на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики.

Работа выполнена в рамках исследования по грантам DFG SFB-911, РФФ №16-12-10175, РФФИ №14-52-12002.

**Личный вклад.** Все результаты, представленные в данной работе, были получены лично автором. Все численные эксперименты проводились при помощи программного обеспечения, разработанного автором или при его участии. Также автор принимал активное участие в постановке задач и интерпретации полученных при численном моделировании данных.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 печатных изданиях (11 статей в журналах, рекомендованных ВАК [103–113] и 9 работ в сборниках тезисов конференций [114–122]). Из них 7 зарубежных статей в журналах, индексируемых в базе Web of Science, 3 в ведущих отечественных журналах, индексируемых в базе Scopus, 1 статья в рецензируемом научном журнале, рекомендованных ВАК. Также получено 1 авторское свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ [102].

# Глава 1. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ В АКТИВНОЙ СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

## Введение

Активные среды и пространственно-распределенные ансамбли из активных элементов с периодическими граничными условиями представляют большой интерес с точки зрения исследования волновых явлений и сложных пространственных структур, возникающих в результате взаимодействия элементов в отсутствие граничных эффектов. Типичным режимом таких систем являются бегущие волны. Причем, поскольку вдоль длины систем может укладываться разное число длин волн, то одновременно может существовать несколько устойчивых волновых режимов (мод) с различной длиной волны, т.е. наблюдается явление мультистабильности.

Колебательные и волновые режимы в замкнутых в кольцо цепочках автогенераторов, служащих моделью автоколебательной среды, а также в непрерывных автоколебательных средах, описываемых уравнениями в частных производных, широко представлены в научной литературе. Так, имеется много работ, посвященных анализу динамики уравнения Гинзбурга-Ландау, описывающего квазигармоническую автоколебательную среду [123–126]. Рассматривались различные модели автоколебательной среды с периодическими граничными условиями, составленные из ангармонических и хаотических автогенераторов [127–130]. Возбудимые среды и их дискретные аналоги в случае периодических граничных условий также могут демонстрировать режим бегу-

щих волн и мультистабильность волновых мод. В качестве базового элемента распределенных возбудимых систем часто выбирается осциллятор ФитцХью-Нагумо (ФХН) [131, 132], являющийся упрощенной двумерной моделью нейрона, полученной на основе упрощения модели Ходжкина-Хаксли [133]. Как одна из простейших возбудимых систем, осциллятор ФХН широко используется для создания моделей динамики ансамблей нейронов и волокон тканей в биофизике [13–16, 25, 134, 135].

Известно, что при определенном выборе формы уравнений, осциллятор ФХН обладает не только возбудимым поведением, но также, в зависимости от выбора параметров, может быть бистабильным осциллятором и автогенератором. Возникает интересная задача – исследовать, как меняется поведение модели среды, составленной из осцилляторов ФХН, при изменении управляющих параметров элементов, приводящих к изменению характера их динамики.

Бегущие волны в бистабильных средах с периодическими граничными условиями практически не рассматривались в литературе. Моделью такой среды может служить кольцо, составленное из достаточно большого числа бистабильных элементов. Если в качестве элементов использовать наиболее популярную модель бистабильной системы – осциллятор Дуффинга, то при диффузионном взаимодействии волновых режимов в кольце не возникает. Однако, можно выбрать такой бистабильный осциллятор, который позволит создать модель бистабильной среды с диффузионным взаимодействием, обладающей при периодических граничных условиях множеством волновых режимов с различной длиной волны. Таким элементом является осциллятор ФитцХью-Нагумо в режиме бистабильной динамики. Таким образом, ансамбль локально взаимодействующих осцилляторов может служить достаточно универсальной моделью активной среды, которая, в зависимости от значений параметров осцилляторов может являться автоколебательной, возбудимой или бистабильной. Следует отметить, что поведению распределенных систем, состоящих из бистабильных осцилляторов ФХН в литературе ранее практически не уделялось внимания.

В первой главе диссертации исследуется поведение модели непрерывной среды, состоящей из идентичных осцилляторов ФХН с локальной симметричной связью диффузионного типа и периодическими граничными условиями. Проводится сравнение режимов среды при различных значениях параметров и устанавливается взаимосвязь пространственно-временных структур с характером динамики элементов среды, которые, в зависимости от значений параметров, могут быть автогенераторами, возбудимыми системами или бистабильными осцилляторами. Исследуется эволюция волновых режимов при вариации различных параметров среды и бифуркационные переходы между режимами. Особое внимание уделено поведению среды в случае бистабильной динамики осцилляторов ФХН. Проводится анализ воздействия, оказываемого на среду внешней периодической силой (локализованной и распределенной) и показывается, что эффект синхронизации бегущих волн наблюдавшийся ранее автоколебательном и возбудимом режимах [39], имеет место также и в случае бистабильной среды. Результаты исследований по данной главе, представлены в следующих публикациях [103–105, 110, 120].

## **1.1 Перестройки пространственных структур в активной среде на основе диффузионно-связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при вариации параметров, управляющих динамикой элементов среды**

В данной части работы представлены результаты исследования модели активной среды, элементами которой служат идентичные осцилляторы ФитцХью-Нагумо, динамика которых в отсутствие взаимодействия задается

следующим уравнением в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - \alpha x^3 - y, \\ \dot{y} &= \gamma x - y + \beta,\end{aligned}\tag{1.1}$$

Здесь  $x$  и  $y$  – безразмерные переменные, время  $t$  также является безразмерным. Модель описывает регенеративное самовозбуждение напряжения на клеточной мембране (безразмерная переменная  $x$ ) в результате нелинейной положительной обратной связи, а также «восстановление» в результате линейной отрицательной обратной связи по току (безразмерная переменная  $y$ ). Безразмерные параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\varepsilon$  управляют динамикой осциллятора, причем параметр  $\varepsilon$  обычно полагается малым. В зависимости от значений параметров осциллятор (1.1) может находиться в трех различных динамических режимах: автоколебательном, возбуждимом и бистабильном. Далее, в рамках проводимого исследования, параметры системы не связываются с параметрами нейронной модели. Предполагается, что они могут принимать любые значения.

В качестве дискретной модели активной среды рассмотрим кольцо из  $N$  осцилляторов (1.1):

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_i &= x_i - \alpha x_i^3 - y_i + k(x_{i-1} + x_{i+1} - 2x_i), \\ \dot{y}_i &= \gamma x_i - y_i + \beta, \\ x_{i+N}(t) &= x_i(t), \quad y_{i+N}(t) = y_i(t) \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь  $N$  – число элементов в кольце,  $k$  – коэффициент связи. От дискретной модели среды 1.2 можно перейти к модели с непрерывной пространственной координатой  $s$ . Пусть длина системы в пространстве есть  $L$ , тогда элементы среды имеют размер  $\Delta s$  (шаг дискретизации пространственной координаты). В непрерывном пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta s \rightarrow 0$  получаем непрерывную среду с коэффициентом диффузии  $\delta = k \cdot (\Delta s)^2$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - \alpha x^3 - y + \delta \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \dot{y} &= \gamma x - y + \beta, \\ x(s \pm L, t) &= x(s, t), \quad y(s \pm L, t) = y(s, t), \quad i = 1, \dots, N.\end{aligned}\tag{1.3}$$

При проведении численных экспериментах были зафиксированы значения параметров, задающих размер системы, шаг дискретизации пространственной координаты и степень связи элементов:  $N = 500$ ,  $L = 100$ ,  $\delta = 0.1$ ,  $\alpha = 1/3$ . Параметры  $\beta$  и  $\gamma$  являются управляющими. С их помощью меняется характер собственной динамики элементов. Параметр  $\varepsilon$  отвечает за степень релаксационности элементарных осцилляторов. При моделировании среды рассматриваются два значения этого параметра:  $\varepsilon = 0.2$  и  $\varepsilon = 0.01$ .

Особенности поведения среды (1.3), находящейся в автоколебательном и возбуждимом динамических режимах, как уже отмечалось, были рассмотрены ранее в работах [39, 136, 137]. В рамках диссертационного исследования был проведен более полный анализ поведения данной модели при разном характере динамики элементов среды, включая бистабильную динамику, установлены границы существования различных пространственно-временных структур при изменении управляющих параметров и бифуркаций, определяющих эти границы. Поведение среды сопоставлялось в деталях с поведением отдельно взятого осциллятора ФХН (1.1) .

### 1.1.1 Бифуркационный анализ динамических режимов в одиночном осцилляторе ФитцХью-Нагумо (1.1)

Прежде, чем обратиться к модели среды (1.3), рассмотрим различные режимы осциллятора (1.1) при фиксированных значениях параметров  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.2$  и изменении  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Был проведен бифуркационный анализ осциллятора (1.1). При этом использовалось численное интегрирование уравнений осциллятора в прямом и обратном времени, частично аналитические результаты (при построении линии касательной бифуркации точек равновесия) и программный комплекс



ХРРАУТО. Построенная бифуркационная диаграмма осциллятора (1.1) на плоскости управляющих параметров  $\beta$ ,  $\gamma$  приведена на рисунке 1.1.

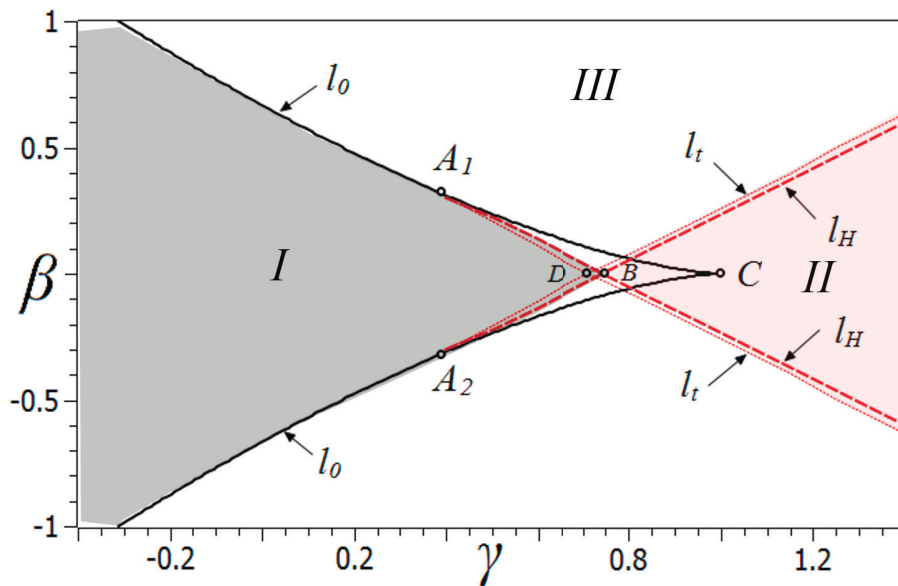


Рис. 1.1. Бифуркационная диаграмма осциллятора (1.1) на плоскости управляющих параметров  $\beta$ ,  $\gamma$  при  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.2$ . На диаграмме обозначены следующие области и бифуркационные линии:  $I$  – область бистабильности с двумя устойчивыми точками равновесия (серая тонировка);  $II$  – область автоколебаний (светло-серая тонировка);  $III$  – область с единственным аттрактором, которым является одна устойчивая точка равновесия.  $l_0$  – линия касательной бифуркации равновесий;  $l_{AH}$  – линия субкритической бифуркации Андронова-Хопфа;  $l_t$  – линия касательной бифуркации циклов;  $l_h$  – линии гомоклинической бифуркации

На диаграмме выделены три области: область бистабильности с двумя устойчивыми точками равновесия (затонированная область  $I$ ); область автоколебаний (затонированная область  $II$ ); область с единственным аттрактором – устойчивой точкой равновесия ( $III$ ). Вблизи порога автоколебаний наблюдается возбудимый режим, для которого характерно возникновение спайков активности при внешнем воздействии на осциллятор, превышающем некоторый порог возбуждения. Свойство возбудимости при воздействии шума сопровождается эффектом когерентного резонанса [138].

В зависимости от значений параметров  $\beta$ ,  $\gamma$  в системе (1.1) имеется одна или три точки равновесия. Сплошные жирные линии на диаграмме соответствуют бифуркации складки (касательной бифуркации точек равновесия). Их легко рассчитать аналитически: в точках складки параметры удовлетворяют соотношению:

$$\beta = \pm \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1-\gamma}{3\alpha}} (1-\gamma). \quad (1.4)$$

Точка является точкой сборки. С учетом значения  $\alpha = 1/3$ , имеем:

$$\beta = \pm \frac{2}{3} \sqrt{(1-\gamma)} (1-\gamma). \quad (1.5)$$

Расположение этих линий не зависит от параметра  $\varepsilon$ .

Одна из точек равновесия, участвующих в бифуркации складки, всегда является седлом, а другая может быть, как устойчивой, так и неустойчивой. Слева от точек  $A_1$ ,  $A_2$  линии складки соответствуют седло-узловой бифуркации, а справа — седло-репеллерной. При малых значениях  $\beta$  осциллятор ФХН является бистабильным и обладает двумя устойчивыми точками равновесия. В некотором интервале значений параметра  $\gamma$  с ростом  $|\beta|$  одна из устойчивых точек теряет устойчивость в результате субкритической бифуркации Андронова-Хопфа на линиях, отмеченных на диаграмме пунктиром. Таким образом, границами области бистабильности I служат участки линий складки (слева от точек  $A_1$ ,  $A_2$ ) и участки линий субкритической бифуркации Андронова-Хопфа от точек  $A_1$ ,  $A_2$  до точки  $B$ .

Бифуркация Андронова-Хопфа в системе (1.1), которой на диаграмме соответствует пунктирная линия, во всей рассматриваемой области параметров носит субкритический характер и соответствует сжатию неустойчивого цикла в точку равновесия. Справа от точки  $D$ , на линиях (точечные линии на диаграмме) возникают пары циклов (устойчивый и неустойчивый). Это — линии касательной бифуркации циклов, которые служат границами области автоколебаний II. Левее точки  $D$ , на линиях (также обозначенных точками) рождается

только неустойчивый цикл, а сами эти линии соответствуют гомоклинической бифуркации. Линии касательной и гомоклинической бифуркации располагаются очень близко к линиям бифуркации Андронова-Хопфа, так что эволюцию циклов оказывается трудно проследить.

На рисунке 1.2 приведены инвариантные множества системы (1.1) вблизи бифуркационных линий  $l_t$  и  $l_h$ . Они иллюстрируют характер бифуркаций на отмеченных линиях.

У порога возникновения генерации (вблизи границ области  $II$ ) осциллятор (1.1) демонстрирует возбудимое поведение. Свойство возбудимости наиболее отчетливо проявляется при сильно релаксационном характере системы, когда параметр  $\varepsilon$  мал ( $\varepsilon \ll 1$ ). Выбранное при построении диаграммы на рисунке 1.1 значение  $\varepsilon = 0.2$  не является существенно малым, однако осциллятор при этом всё же обладает определенными свойствами возбудимости. Причем, следует отметить, что черты возбудимой динамики характерны для системы (1.1), как в области  $III$ , где существует единственная устойчивая точка равновесия, так и в области бистабильности  $I$ .

### 1.1.2 Динамические режимы в модели среды (1.3) при

$$\varepsilon = 0.2$$

При исследовании среды (1.3) число элементов было выбрано  $N = 500$ . Были зафиксированы коэффициент диффузии  $\delta = 0.1$  и значение параметра  $\alpha = 1/3$ . Расчеты были проведены при двух значениях параметра  $\varepsilon$ :  $\varepsilon = 0.2$  и  $\varepsilon = 0.01$ , соответствующих различной степени релаксационности осцилляторов ФХН. Параметры  $\beta$  и  $\gamma$  менялись, что приводило к изменениям характера динамики изолированных парциальных осцилляторов в соответствии с диаграммой,

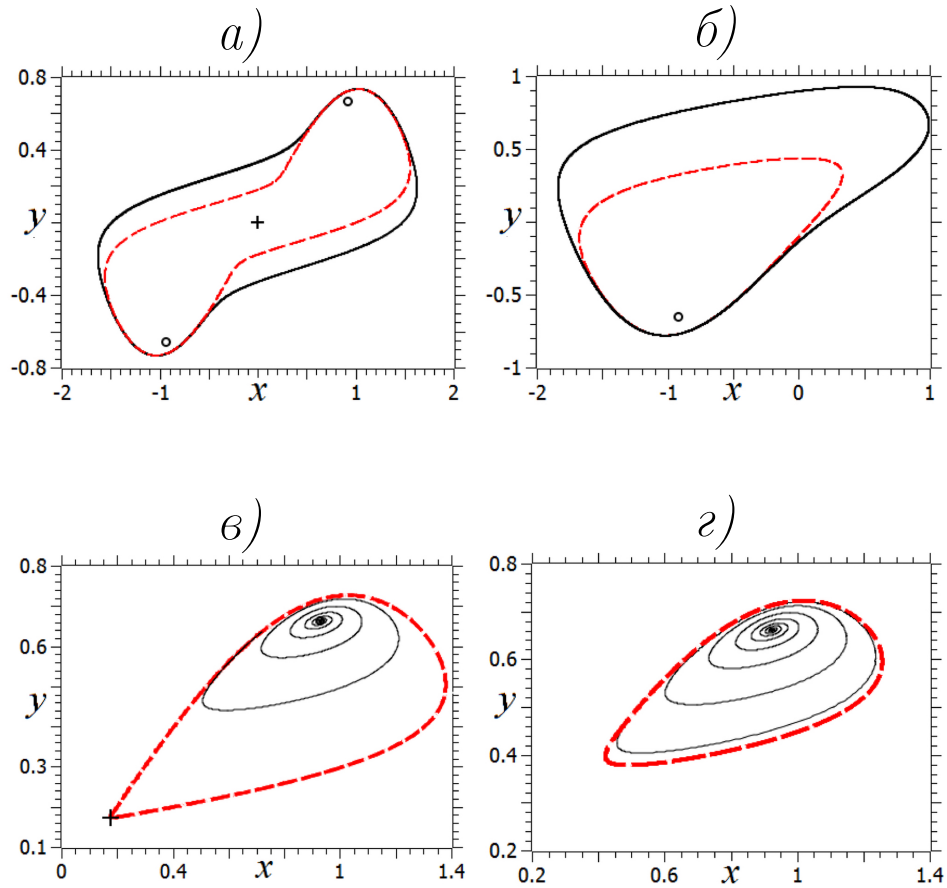


Рис. 1.2. Инвариантные множества системы (1.1) при  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.2$  и различных значениях  $\beta$ ,  $\gamma$ : а – устойчивый и неустойчивый предельные циклы, устойчивые фокусы и седло при  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.7113$ ; б – устойчивый и неустойчивый циклы и устойчивый фокус при  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 1.1578$ ; в – сепаратрисная петля седла и устойчивый фокус при  $\beta = 0.0571$ ,  $\gamma = 0.65$ ; г – неустойчивый цикл, родившийся из петли и устойчивый фокус при  $\beta = 0.0571$ ,  $\gamma = 0.65$ . Устойчивые предельные циклы изображены сплошными жирными линиями, неустойчивые циклы и сепаратрисная петля – пунктиром, фокусы обозначены кружками, седло – крестиком. На фрагментах (в) и (г) тонкой сплошной линией показана траектория, стремящаяся к устойчивому фокусу приведенной на рисунок 1.1. При этом в кольце также можно было наблюдать различные режимы пространственно-временного поведения.

Как отмечалось выше, для исследуемой системы свойственна мультистабильность – в системе сосуществуют различные устойчивые волновые струк-

туры, устанавливающиеся с разных начальных условий. Эти структуры характеризуются различным числом волн, укладываемыхся на длине системы. В рамках данных исследований рассматривались только две из возможных волновых мод: одноволновая, соответствующая одной длине волны, укладываемойся вдоль кольца, и двухволновая, когда вдоль кольца укладываются две длины волны. Эти моды можно было получить, задавая начальные условия в виде периодических в пространстве функций с соответствующим пространственным периодом. При построении карты режимов в кольце каждая исследуемая пространственно-временная структура отслеживалась следующим образом. Выбирался определенный установившийся режим, затем производился небольшой сдвиг по одному из параметров и производился расчет нового установившегося режима с начальных условий, соответствующих установившемуся режиму, при предыдущем значении параметра и т.д..

Для начала рассмотрим модель активной среды (1.3) при  $\varepsilon = 0.2$ . В этом случае релаксационность элементов среды не слишком велика и свойство возбудимости проявляется значительно слабее, чем при  $\varepsilon = 0.01$ .

Полученная в результате численного моделирования карта режимов на плоскости управляющих параметров  $\beta$ ,  $\gamma$  приведена на рисунок 1.3.

На карте приведены области  $I$  и  $II$ , соответствующие областям бистабильности и автоколебаний отдельно взятого осциллятора (см. рисунок 1.1). Везде, за исключением области  $II$ , в системе (1.3) существуют устойчивые равновесные пространственно-однородные решения, соответствующие пребыванию всех элементов кольца в одном из устойчивых состояний равновесия. В области бистабильности  $I$ , имеется два устойчивых равновесных однородных режима, поскольку парциальные осцилляторы характеризуются двумя устойчивыми точками равновесия. Вне областей  $I$  и  $II$  (белая область на карте) имеется только одно такое решение. В области  $II$  устойчивых равновесных состояний не существует. Здесь возможны только колебательные режимы: пространственно-однородные (идентичные) колебания всех элементов и режимы бегущих волн

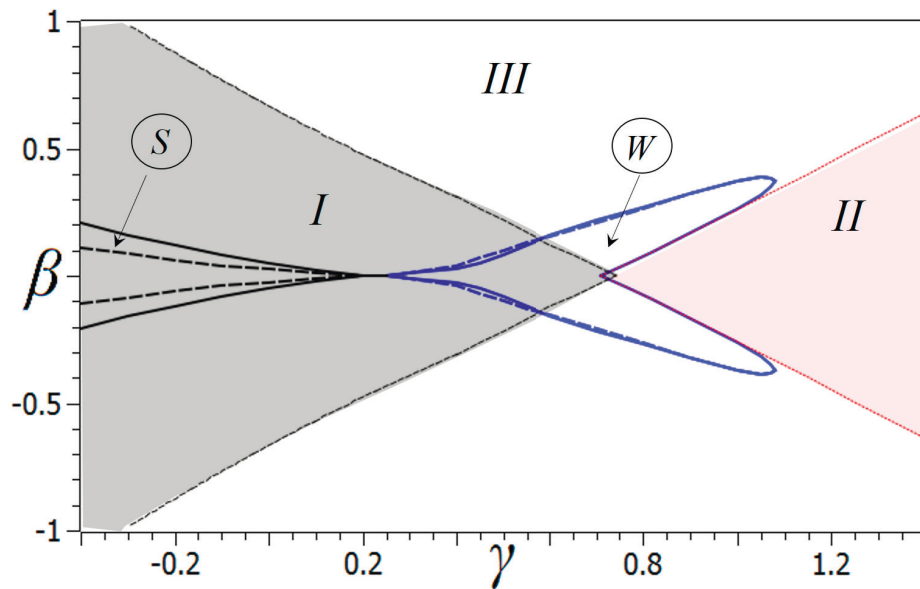


Рис. 1.3. Карта режимов среды (1.3) при фиксированных параметрах  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\delta = 0.1$  и изменении параметров  $\beta$  и  $\gamma$ . Затонированные области  $I$  и  $II$  соответствуют области бистабильности и области автоколебаний отдельно взятого элемента. В белой области  $III$  отдельный осциллятор имеет единственный аттрактор – устойчивую точку равновесия. На диаграмме отмечена область  $W$ , где наблюдаются бегущие волны в отсутствие автоколебаний в отдельно взятом осцилляторе. Область  $S$  соответствует существованию статических пространственных структур. Сплошные жирные линии соответствуют границам одноволновых мод.

Жирным пунктиром обозначены границы двухволновых мод

с различной длиной волны. При соответствующем выборе начальных условий устойчивые режимы бегущих волн наблюдаются также в области  $W$ , расположенной вблизи порога автоколебаний. Границы этой области для одноволновой моды отмечены сплошной жирной линией. Жирный пунктир соответствует границам существования двухволновой моды. Важно отметить, что область  $W$  перекрывается с областями  $I$  и  $III$ , т.е. бегущие волны наблюдаются как при бистабильном характере динамики элементов кольца (см. рисунок 1.4), так и в области возбудимости при наличии одного устойчивого равновесия (см. рису-

нок 1.5). В обоих случаях форма колебаний во времени в точности повторяет форму пространственного профиля.

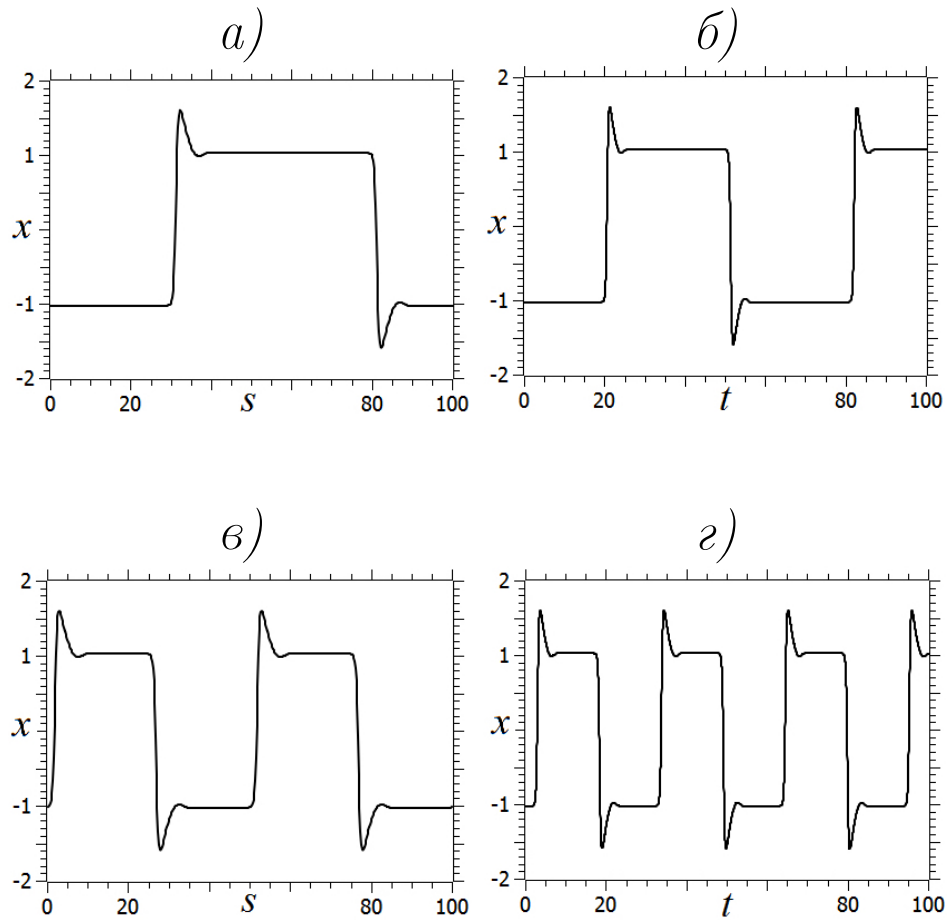


Рис. 1.4. Бегущие волны в модели среды (1.3) в бистабильном режиме при  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.65$ ,  $\delta = 0.1$ : а – мгновенный пространственный профиль  $x(s, t)$  при  $t = 150$ ; б – форма колебаний во времени при  $s = 0$  для одноволновой моды; в и г – соответствующие графики для двухволновой моды

В режиме бистабильности элементов кольца вдали от порога генерации (при малых и отрицательных значениях параметра  $\gamma$ ) можно выделить область существования стационарных пространственных структур. На рисунке 1.3 она обозначена буквой  $S$ . Такие структуры характерны для широкого класса распределенных систем, состоящих из бистабильных элементов (см, например, [4]). Различные элементы ансамбля неподвижно располагаются в окрестностях двух равновесий. Такие структуры могут быть как периодическими, так и нерегуляр-

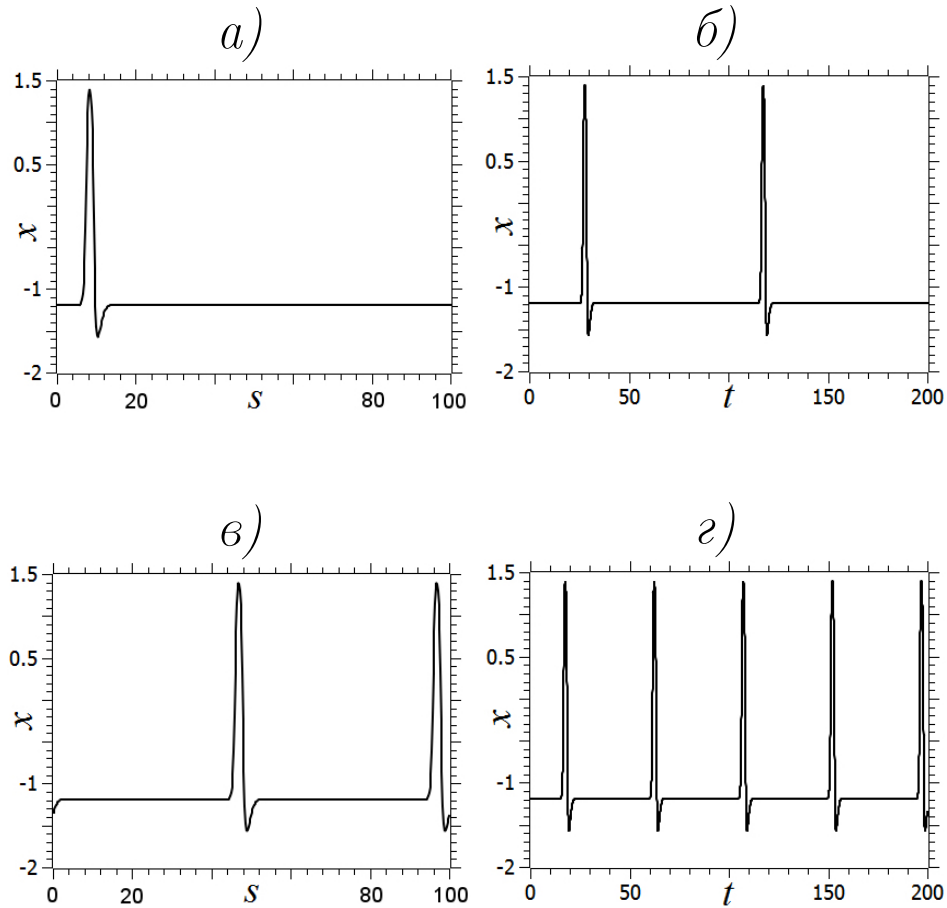


Рис. 1.5. Бегущие волны в модели среды (1.3) в возбуждимом режиме при  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\beta = 0.15$ ,  $\gamma = 0.65$ ,  $\delta = 0.1$ : а – мгновенный пространственный профиль  $x(s, t)$  при  $t = 150$ ; б – форма колебаний во времени при  $s = 0$  для одноволновой моды; в и г – соответствующие графики для двухволновой моды

ными. Их конкретный вид определяется выбором начальных состояний бистабильных осцилляторов. На рисунке 1.3 отмечены границы существования двух регулярных неподвижных структур: одноволновой (сплошные жирные линии) и двухволновой (жирный пунктир). Примеры сосуществующих стационарных пространственных структур проиллюстрированы на рисунок 1.6.

Рассмотрим эволюцию одноволнового режима в области  $W$ . Зафиксируем значение  $\gamma = 0.65$  и будем увеличивать параметр  $\beta > 0$ . В этом случае при  $\beta \approx 0.08$  имеет место переход из области бистабильности  $II$  в область  $III$ , где



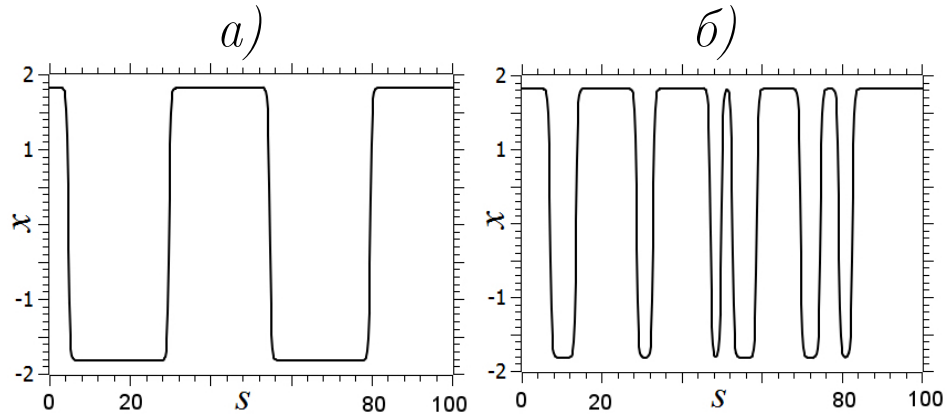


Рис. 1.6. Примеры сосуществующих стационарных пространственных структур при  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\beta = 0.15$ ,  $\gamma = -0.1$ ,  $\delta = 0.1$ : мгновенные пространственные профили  $x(s, t)$  для случаев (а) периодических начальных условий и (б) случайно-распределенных начальных условий

изолированные осцилляторы находятся в возбуждимом режиме с одним устойчивым равновесием (см. рисунок 1.1). Как можно видеть из графиков, приведенных на рисунок 1.7, пересечение границы этих областей не сопровождается бифуркацией бегущих волн. Профиль бегущей волны меняется эволюционным образом от биполярных импульсов одинаковой длительности при  $\beta = 0$ , до узких спайков при  $\beta = 0.1$ . При дальнейшем увеличении параметра  $\beta$  в точке  $\beta \approx 0.19$  режим бегущей волны теряет устойчивость. Для двухволновой моды эволюция волны происходит аналогичным образом. Таким образом, бегущие волны в области  $W$  являются одним и тем же динамическим режимом волн возбуждения, как в области бистабильности, так и вне ее.

Теперь рассмотрим переход из области  $W$  в область автогенерации  $II$ . Зафиксируем значение  $\beta = 0.2$  и будем увеличивать параметр  $\gamma$ . Вид мгновенного профиля бегущей волны при различных  $\gamma$  приведен на рисунок 1.8. При переходе из области  $W$  в область  $I$  происходит резкая смена формы профиля, что видно из сравнения графиков на рисунке 1.8,а и рисунке 1.8,б. Если для области возбуждимой динамики характерен профиль в форме спайка, то для области автогенерации его форма существенно иная. То же справедливо и для

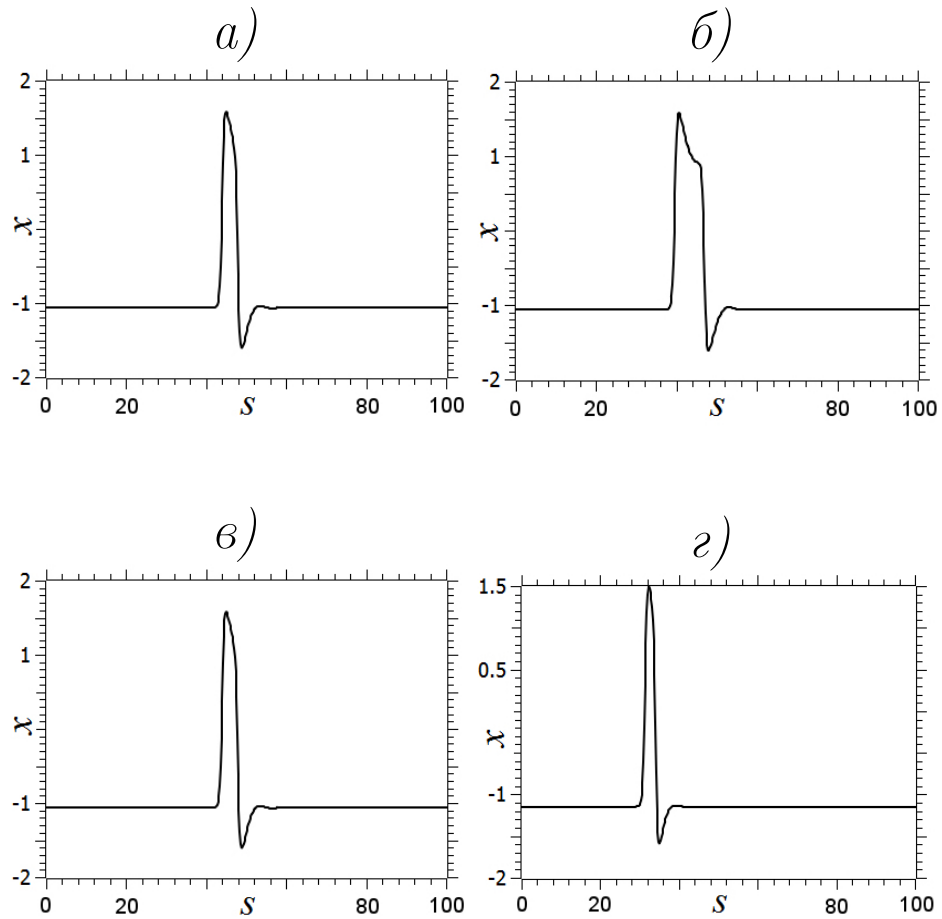


Рис. 1.7. Эволюция профиля бегущей волны (для одноволновой моды) в модели среды (1.3) при  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.65$ ,  $\delta = 0.1$  с ростом параметра  $\beta$ : а –  $\beta = 0.01$ ; б –  $\beta = 0.025$ ; в –  $\beta = 0.03$ ; г –  $\beta = 0.1$

формы колебаний во времени. Таким образом, бегущие волны в областях  $W$  и  $I$  являются двумя различными динамическими режимами и переход через границу областей связан с бифуркациями этих режимов.

### 1.1.3 Динамические режимы в модели среды (1.3) при

$$\varepsilon = 0.01$$

При  $\varepsilon = 0.01$  качественный вид бифуркационной диаграммы отдельно взятого осциллятора ФХН останется тем же, что и при  $\varepsilon = 0.2$  (см. рисунок 1.1).

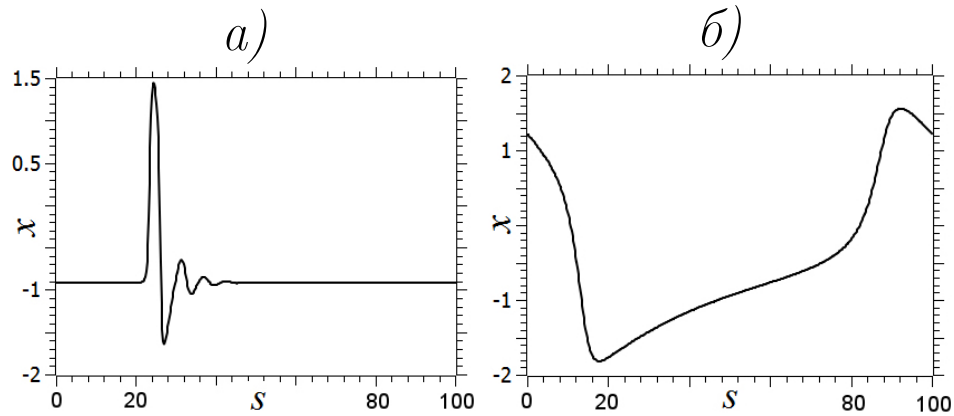


Рис. 1.8. Профили бегущей волны в модели среды (1.3) при  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\delta = 0.1$  и различных значениях  $\gamma$ : а  $-\gamma = 0.93$ ; б —  $\gamma = 0.935$

Линии касательной бифуркации равновесий сохраняют свое положение, линии бифуркаций Андронова-Хопфа и касательных бифуркаций циклов несколько изменяют углы наклона. Главное отличие состоит в том, что при малом  $\varepsilon$  осциллятор становится сильно релаксационным и проявляет свойство возбудимости в более широком диапазоне значений параметров  $\beta$  и  $\gamma$ .

Диаграмма режимов в модели среды (1.3) на плоскости управляющих параметров  $\beta$ ,  $\gamma$  при  $\varepsilon = 0.01$  приведена на рисунке 1.9. Здесь использованы те же обозначения, что и на рисунке 1.3. При сравнении с аналогичной диаграммой, полученной для  $\varepsilon = 0.2$  (см. рисунок 1.3) можно отметить, что область  $W$ , соответствующая режиму бегущих волн, теперь становится гораздо больше, имеет другую форму и не ограничена с ростом параметра  $\beta$  по абсолютной величине. Мы, как и ранее, будем относить к области  $W$  только те режимы бегущих волн, которые реализуются при возбудимой и бистабильной (но не автоколебательной) динамике элементов среды. Таким образом, граница области  $II$  также служит границей области  $W$ . Однако, в отличие от случая  $\varepsilon = 0.2$ , при переходе из области  $W$  в область автоколебаний  $II$  не наблюдается каких либо внешних изменений в характере волнового режима.

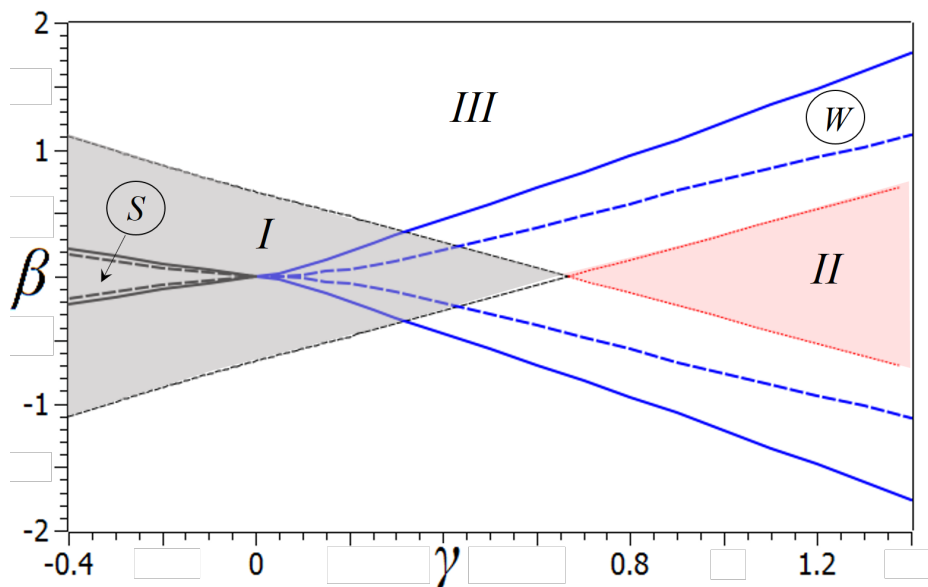


Рис. 1.9. Диаграмма режимов среды (1.3) при фиксированных параметрах  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.1$  и изменении  $\beta$  и  $\gamma$ . Затонированные области  $I$  и  $II$  соответствуют области бистабильности и области автоколебаний отдельно взятого элемента. В области  $III$  (белый цвет) единственным аттрактором отдельного осциллятора является устойчивая точка равновесия. В области, помеченной буквой  $W$  наблюдаются бегущие волны в отсутствие автоколебаний в отдельно взятом осцилляторе. Область  $S$  соответствует существованию статических пространственных структур. Сплошными жирными линиями показаны границам областей одноволновых мод. Жирным пунктиром обозначены границы двухволновых мод

На рисунке 1.10 приведены иллюстрации формы пространственного профиля в области  $W$  при отсутствии колебаний в отдельном осцилляторе (рисунок 1.10,а) и в области автоколебаний (рисунок 1.10,б, затонированная область  $II$  на диаграмме режимов). Можно отметить, что ширина положительных импульсов в случае  $\varepsilon = 0.01$  существенно больше, чем для  $\varepsilon = 0.2$  при том же значении  $\beta$  (см. рисунки 1.8,а,б). Импульсы положительной полярности становятся уже и постепенно превращаются в узкие спайки по мере увеличения параметра  $\beta$ . Кроме того, вблизи границы перехода из области  $W$  в область  $II$  на мгновенных профилях волны отсутствуют осцилляции, характерные для

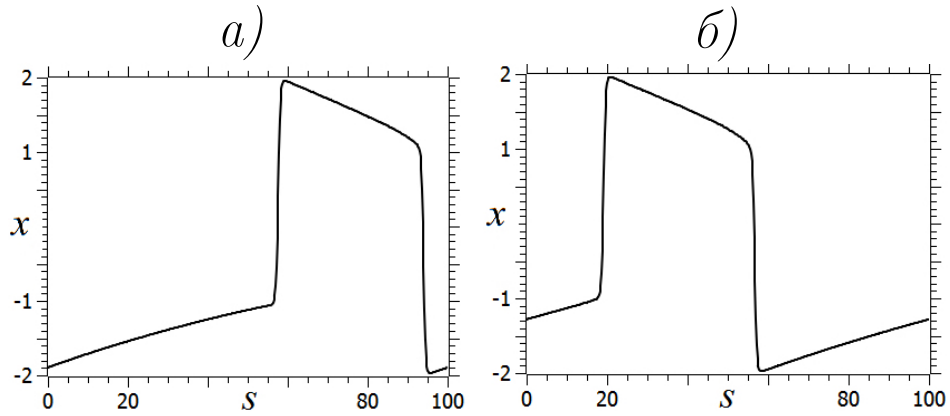


Рис. 1.10. Профили бегущей волны в модели среды (1.3) при  $\alpha = 1/3$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\beta = 0.01$ ,  $\delta = 0.1$  и различных значениях  $\gamma$ : а –  $\gamma = 0.86$ ; б –  $\gamma = 0.90$

$\varepsilon = 0.2$ . Последнее обстоятельство связано с сильной релаксационностью осцилляторов ФХН при малом значении параметра  $\varepsilon$ . По этой причине фазовая траектория в проекции  $x_j, y_j$  не успевает совершить движения по спирали в окрестности устойчивого равновесия. Таким образом, Форма профиля бегущей волны остается практически неизменной при переходе в область автоколебаний. По этой причине на диаграмме, приведенной на рисунке 1.9, не отмечена правая граница области  $W$ . В данном случае нет оснований говорить о наличии какой-то бифуркации режима бегущих волн при переходе от возбудимой динамики среды к автоколебательной. Для диагностики изменения свойств среды в этом случае требуются более сложные методы, такие как построение дисперсионных характеристик или анализ влияния внешнего воздействия, которые будут рассматриваться в дальнейшей части работы.

Неподвижные пространственные структуры в области сильной диссипации (малые значения параметра  $\gamma$ ) при изменении значения  $\varepsilon$  меняются слабо. Границы области их существования при  $\varepsilon = 0.01$  также остаются почти теми же, что и при  $\varepsilon = 0.2$ . Различие состоит в том, что с уменьшением параметра  $\varepsilon$  неподвижные структуры перестают наблюдаться при малых, но положительных значениях  $\gamma$ , в то время как порог возбуждения бегущих волн смещается

и практически совпадает с  $\gamma = 0$ , что можно видеть на диаграмме режимов (рисунок 1.9).

### 1.1.4 Сравнение дисперсионных характеристик бегущих волн в модели среды (1.3) в различных режимах

Во всех исследованных режимах бегущих волн в среде (1.3) колебания во времени являются периодическими и представляют собой последовательность импульсов одинаковой формы. В этом случае период  $T_0$  определяется интервалом времени между последовательными пересечениями одной из динамических переменных заданного уровня в одном направлении. При расчетах обычно рассматривались пересечения переменной  $x$  нуля. Собственная частота колебаний определяется как  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ . Ей соответствует основной максимум в спектре колебаний.

Для выяснения различий режимов, реализуемых в активной среде при изменении параметров, были численно построены дисперсионные кривые, т.е. зависимости собственной частоты  $\omega_0$  от волнового числа  $\kappa = 2\pi/\lambda$ , где  $\lambda = L/n$  – длина волны. Кривые, полученные в различных режимах для трех значений коэффициента диффузии  $\delta$  приведены на рисунке 1.11. Поскольку вдоль длины системы должно укладываться целое число длин волн, то  $\kappa$  принимает дискретное множество значений, которым соответствуют значки на графиках. Кривые, соответствующие автоколебательному режиму (рисунок 1.11,а), представляют собой вогнутые функции, т.е. с ростом  $k$  растет не только сама функция  $\omega_0(k)$ , но и ее производная. При этом для длинноволновых мод частота растет медленно с ростом  $k$  и разница значений частоты для мод  $n = 1, 2, 3$  невелика. Кривые, полученные в других режимах, хотя и зависят от выбора параметров, но принадлежат к одному типу и представляют собой выпуклые функции. В на-

чале частота быстро растет с ростом номера моды, а затем (для коротковолновых мод) этот рост замедляется. Как в возбуждимом (см. рисунок 1.11,б), так и в бистабильном (см. рисунок 1.11,в,г) режимах, можно предположить существование верхней границы частоты, что соответствует имеющимся в литературе данным [6]. Таким образом, по виду дисперсионных кривых легко диагностировать автоколебательный характер среды, однако различить бистабильный и возбуждимый режимы не представляется возможным.

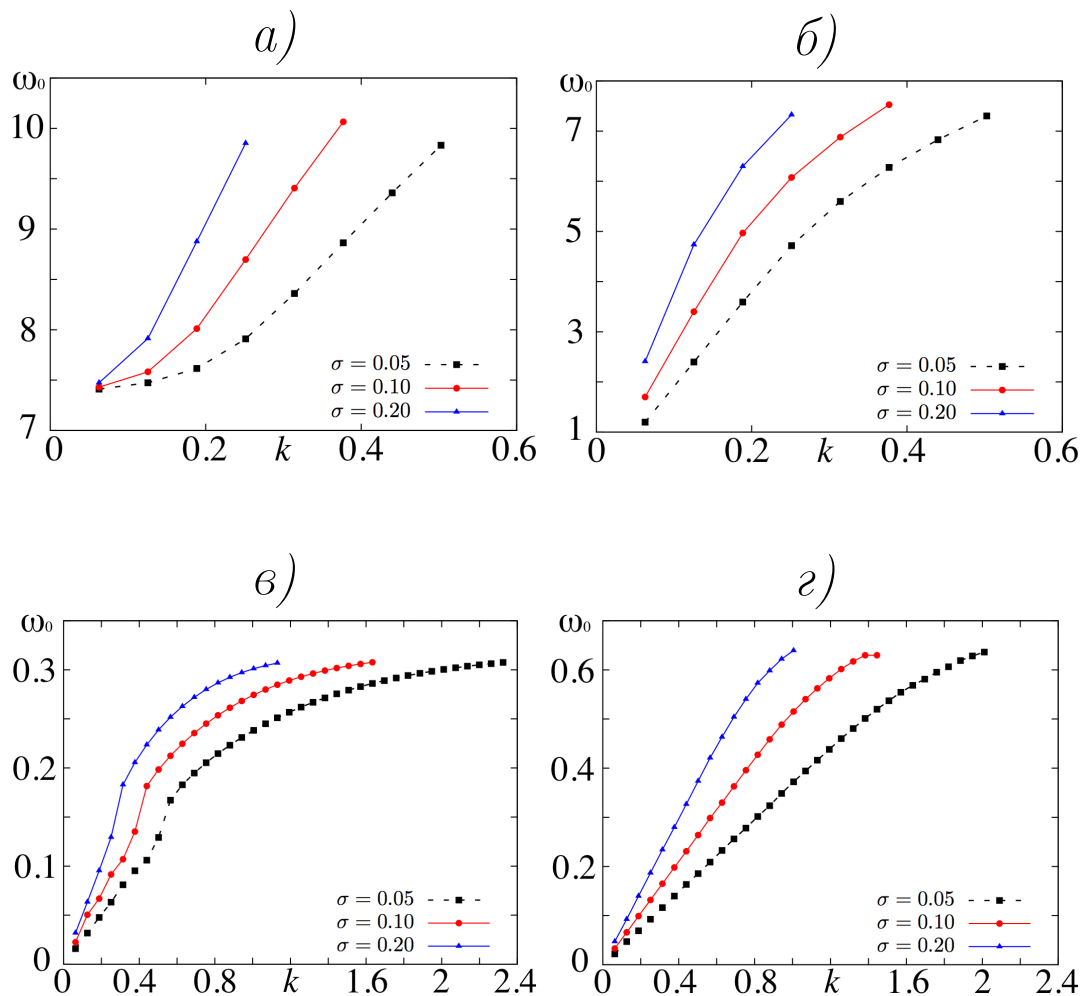


Рис. 1.11. Дисперсионные характеристики среды (1.3) в различных режимах: а – автоколебательный режим ( $\alpha = 0.2, \beta = 2, \gamma = 3, \varepsilon = 0.01$ ); б – возбуждимый режим ( $\alpha = 0.2, \beta = 4, \gamma = 3, \varepsilon = 0.01$ ); в и г – бистабильный режим при  $\alpha = 1/3, \beta = 0, \varepsilon = 0.2$  в случае, когда равновесия являются узлами ( $\gamma = 0.3$ ) и фокусами ( $\gamma = 0.7$ ), соответственно

Таким образом, анализ модели среды на основе кольца диффузионно-связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо показывает, что бегущие волны ха-

рактарны не только для возбудимых распределенных систем и сред при периодических граничных условиях, но также могут возникать и в бистабильных диффузионных средах. Динамика среды во многом определяется характером поведения элементов среды в отсутствие взаимодействия. Осциллятор ФитцХью-Нагумо, используемый в проведенных исследованиях в качестве элемента среды, вблизи порога генерации проявляет свойства возбудимой системы не зависимо от того, имеется ли на фазовой плоскости одна устойчивая точка равновесия или две. Существование бегущих волн в области бистабильности и отсутствие качественной разницы между режимом бегущих волн при бистабильной и возбудимой динамике осцилляторов связано именно с этим. В то же время динамические режимы, существующие в среде, не полностью определяются поведением невзаимодействующих элементов. Бифуркации в отдельно взятом осцилляторе ФХН не всегда определяют бифуркации режимов в модели среды. Так было показано, что характер эволюции бегущих волн в среде сильно зависит от степени релаксационности осцилляторов. Важную роль помимо параметров элементов среды должна играть также степень связи между ними, влияние которой рассматривается в следующем разделе.

## **1.2 Режим бегущих волн в модели бистабильной среды на основе кольца диффузионно-связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при изменении силы диффузионной СВЯЗИ**

В данном разделе работы приводятся результаты исследования модели бистабильной среды с диффузионным взаимодействием при вариации параметра диффузии. Модель представляет собой кольцо из  $N = 1000$  бистабильных осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Ансамбль осцилляторов описывается следующи-



ми уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= x_j - \alpha x_j^3 - y_j + k(x_{j-1} + x_{j+1} - 2x_j), \\ \dot{y}_j &= \varepsilon(\gamma x_j - y_j + \beta), \quad j = 1, \dots, N, \\ x_{j+N}(t) &= x_j(t), \quad y_{j+N}(t) = y_j(t),\end{aligned}\tag{1.6}$$

где  $j \in [1; N]$  – номер элемента (дискретная пространственная координата),  $k$  – коэффициент связи. Данные уравнения несколько отличаются от рассмотренной в предыдущем разделе модели (1.2). Однако эти отличия не являются принципиальными, так как система (1.6) может быть сведена к виду (1.2) путем замены масштаба времени.

В непрерывном пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $s \rightarrow 0$  получается непрерывная модель среды, задаваемая уравнениями в частных производных:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= x - y - \alpha x^3 + \delta \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \varepsilon(\gamma x - y + \beta), \\ x(s + L, t) &= x(s, t), \quad y(s + L, t) = y(s, t),\end{aligned}\tag{1.7}$$

где  $s \in [0, L]$  – безразмерная пространственная координата,  $\delta = k(\Delta_s)^2$  – коэффициент диффузии. При проведении численных экспериментов были зафиксированы значения следующих параметров модели:  $N = 1000$ ,  $L = 100$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha = 1/3$ ;  $\varepsilon = 0.2$ . При выбранных значениях  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma = 0.7$  и  $\varepsilon$  на фазовой плоскости отдельно взятого осциллятора существуют 2 точки равновесия типа "устойчивый фокус". Кроме того, следует отметить, что при  $\beta = 0$  фазовый портрет осциллятора ФХН обладает симметрией относительно замены  $x \rightarrow -x$ ,  $y \rightarrow -y$ .

В предыдущем разделе уже было показано существование бегущих волн в бистабильной среде из осцилляторов ФХН с диффузионным взаимодействием при периодических граничных условиях. Теперь задача состоит в определении области значений коэффициента диффузии, в которой возможно наблюдать бегущие волны, исследовании эффекта мультистабильности различных волновых

мод, реализуемых с разных начальных условий, и анализе эволюции волновых режимов при вариации коэффициента диффузии. Коэффициент диффузии  $\delta$  в данном исследовании служит управляющим параметром. При заданном коэффициенте диффузии  $\delta$  в среде (1.7) соответствующее значение коэффициента связи между соседними элементами  $k$  в дискретной модели (1.6) должно расти пропорционально  $N^2$ .

Проведенные численные эксперименты показали, что при малом значении коэффициента диффузии ( $\delta < 0.0001$ ) модель (1.7) демонстрирует стационарные во времени пространственные структуры, форма которых определяется исключительно начальными условиями (этот режим соответствует области  $S$  на карте режимов 1.3). При дальнейшем увеличении коэффициента  $\delta$  в среде рождаются бегущие волны с ненулевой амплитудой и очень малой фазовой скоростью, которая увеличивается с ростом коэффициента диффузии. При этом имеет место явление мультистабильности, т.е. выбором начальных условий при одних и тех же значениях параметров и коэффициента диффузии можно получить множество бегущих волн, которые отличаются друг от друга длинами волн и направлением их распространения. Для обозначения различных волновых мод вводится номер  $n$ , равный количеству длин волн, укладываемых на длину системы. Численно строились пространственно-временные диаграммы режимов, на которых градации серого цвета (от черного до белого) соответствуют различным уровням сигнала  $x(s, t)$ . Примеры пространственно-временных диаграмм приведены на рисунке 1.12. Из рисунка видно, что структура бегущей волны может быть как простой (темные и светлые полосы одинаковой ширины на рисунок 1.12,а, так и достаточно сложной, что проявляется в чередовании полос различной ширины (рисунок 1.12,б).

Расчеты показали, что с ростом коэффициента диффузии  $\delta$  пространственные профили волн претерпевают качественные изменения. Рассмотрим интервалы между последовательными переключениями элементов среды в одном направлении, определяя момент переключения условием  $x(s, t) = 0$ . При

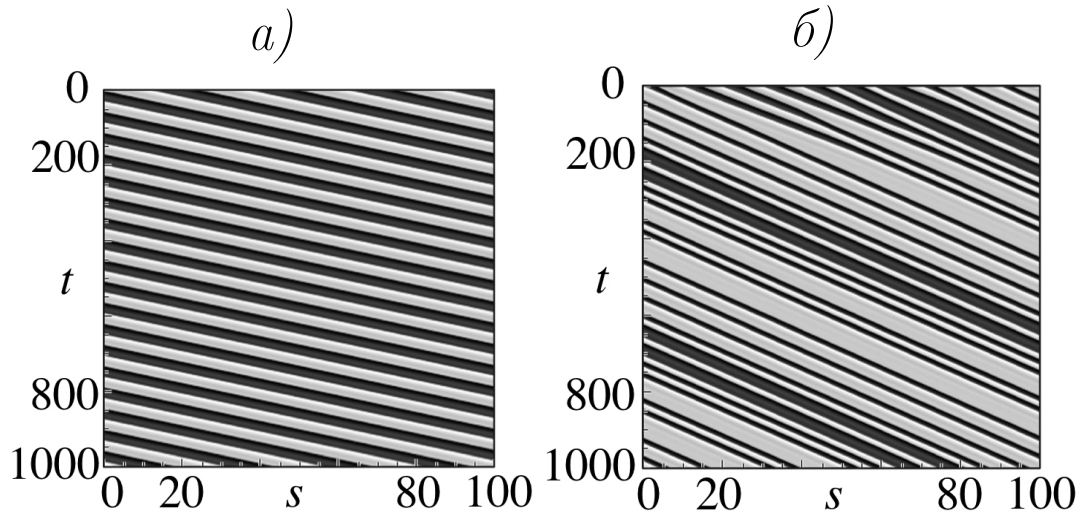


Рис. 1.12. Примеры пространственно-временных диаграмм волновых структур в бистабильной среде (1.3): а – волновая мода  $n = 4$  при значении коэффициента диффузии  $\delta = 0.175$ ; б – волновая мода  $n = 10$  при  $\delta = 0.036$ . На диаграммах по оси абсцисс отложена пространственная координата  $s$ , а по оси ординат – время  $t$ . Градации серого цвета соответствуют различным уровням сигнала  $x(s, t)$ : черный цвет – минимальному значению переменной, а белый – максимальному

малых значениях  $\delta$  переключения в среде происходят через один и тот же интервал. С ростом  $\delta$  возникают несколько таких интервалов, что соответствует чередованию полос разной ширины на пространственно-временной диаграмме (рисунок 1.12,б). Причина этого явления становится понятной, если рассмотреть проекции фазовой траектории на плоскость переменных  $x, y$  в какой-либо фиксированной точке пространства. Примеры таких проекций для трех значений  $\delta$  представлены на рисунке 1.13. На плоскости  $x, y$  отмечены характерные точки  $F1$  и  $F2$ , соответствующие устойчивым фокусам в отдельном элементе среды. Траектория переходит из окрестности одной точки в окрестность другой, образуя замкнутый контур, соответствующий колебаниям во времени. При низком уровне диффузии траектория, обходя замкнутый контур, каждый раз делает по одному витку вокруг точек  $F1, F2$  (рисунок 1.13,а). В этом случае

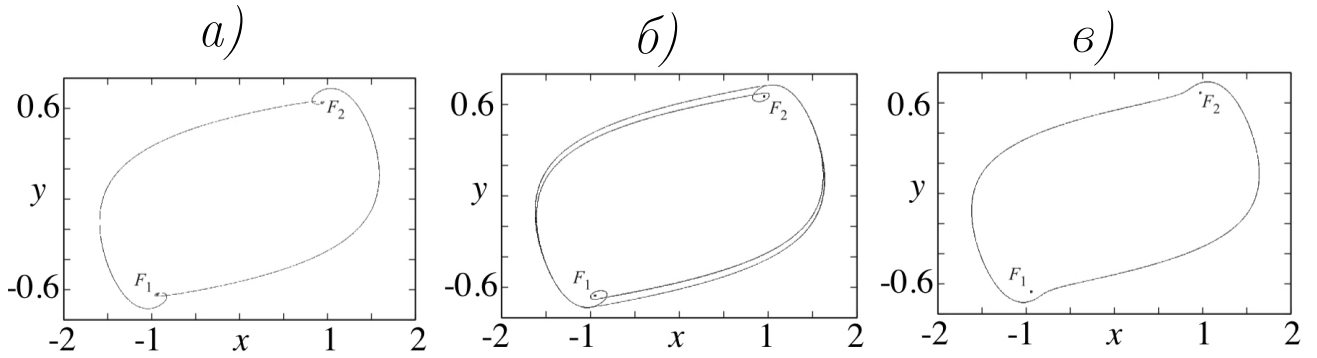


Рис. 1.13. Проекция фазовых траекторий на плоскость  $x, y$  в фиксированной точке пространства для волновой моды  $n = 10$  при различных значениях коэффициента диффузии: а –  $\delta = 0.028$ ; б –  $\delta = 0.035$ ; в –  $\delta = 0.041$ . Точки  $F_1, F_2$  соответствуют точкам равновесия отдельного элемента

существует только один интервал переключения. Далее, начиная с некоторого значения  $\delta$ , траектория ведет себя более сложным образом, совершая витки вокруг точек  $F_1, F_2$  или обходя контур без них (рисунок 1.13,б). Таким образом, могут возникать различные последовательности длин интервалов переключений. При этом колебания во времени и пространстве будут иметь достаточно сложную форму. С увеличением значения коэффициента диффузии выше определенного предела вращения траектории вокруг точек  $F_1, F_2$  исчезают (рисунок 1.13,в). Снова существует только один интервал переключения, но колебания имеют уже другую форму.

На рисунке 1.14 представлена зависимость интервалов переключений от коэффициента диффузии, полученная для моды  $n = 10$ . Можно видеть область значений коэффициента диффузии, в пределах которой данная волновая мода имеет более сложную форму. При этом внутри области наблюдаются перестройки, проявляющиеся в изменении числа интервалов переключений и скачкообразном изменении длин этих интервалов.

Таким образом, на примере исследуемой модели бистабильной среды на основе кольца диффузионно-связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо в бистабильном режиме были выявлены закономерности эволюции волновых мод

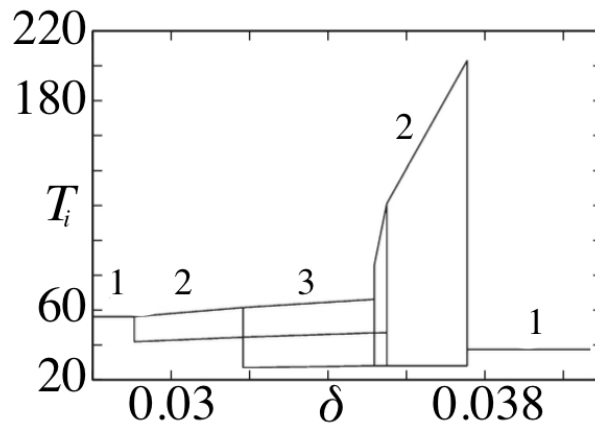


Рис. 1.14. Длины интервалов переключения элементов среды в зависимости от коэффициента диффузии для волновой моды  $n = 10$ . Числами указано количество различных интервалов  $T_i$

при изменении коэффициента диффузии. Описанное поведение среды характерно именно для бистабильного режима и не наблюдается в случае, если среда является возбуждаемой. Было установлено существование областей сложного поведения для всех исследованных волновых мод модели (1.7). Границы этих областей и последовательность перестроек внутри них для различных мод могут сильно различаться. Общая тенденция состоит в смещении границ областей в сторону меньших значений коэффициента диффузии с ростом номера моды  $n$  (т.е. с уменьшением длины волны). Расчеты показали, что при вариации параметров элементарных осцилляторов в достаточно широких пределах волновые режимы в среде (1.7) существуют и эволюционируют описанным выше образом с ростом коэффициента диффузии. Асимметрия, возникающая в элементе среды при  $\beta \neq 0$ , не приводит к разрушению указанного типа поведения.

### 1.3 Синхронизация бегущих волн в модели бистабильной среды (1.3) внешним локальным и распределенным гармоническим воздействием

В предыдущих разделах данной главы было показано, что в активной среде с периодическими граничными условиями, моделируемой кольцом осцилляторов ФитцХью-Нагумо, при любом характере динамики элементов в определенной области значений параметров могут наблюдаться бегущие волны. Возникает вопрос, можно ли считать повторяющийся колебательный процесс в элементах возбудимых и бистабильных систем автоколебаниями? Для положительного ответа на этот вопрос достаточно показать, что характерные частоты колебаний осцилляторов в соответствующих режимах могут быть захвачены внешним периодическим воздействием. Действительно, возможность синхронизации колебаний в смысле Гюйгенса (захват частот и фаз) является фундаментальным свойством и отличительным признаком автоколебаний [32].

В настоящем разделе приведены результаты численного моделирования динамики одномерной среды (1.3) при внешнем периодическом воздействии. Исследование вынужденной синхронизации бегущих волн в возбудимом и автоколебательном режиме уже были опубликованы ранее в [39]. В рамках настоящей работы исследовались эффекты синхронизации среды только для случая бистабильной динамики элементов. Как и ранее для двух других режимов был рассмотрен случай как локального, так и распределенного воздействия на среду. Цель исследования состояла в выявлении возможности синхронизации бегущих волн в бистабильной среде и выяснение вопроса, существуют ли качественные отличия синхронизации в бистабильном режиме от ранее рассмотренных автоколебательного и возбудимого случаев.

### 1.3.1 Синхронизация бегущих волн в бистабильной среде (1.3) при локальном внешнем гармоническом воздействии

Исследуем воздействие на среду внешней гармонической силы, приложенной к одному элементу среды (т.е. в одной точке пространства). С учетом внешнего воздействия уравнения среды (1.3) принимают вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} &= x - \alpha x^3 - y + \delta \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \gamma x - y + \beta + F(s, t), \\ F(s, t) &= A\delta(s - s_0) \cos(\omega_{ext}t).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Здесь  $A$  и  $\omega_{ex}$ , соответственно, амплитуда и частота гармонической силы, приложенной в точке  $s_0$  к элементу среды, размер которого определяется шагом дискретизации пространственной координаты  $\Delta_s$ . Были зафиксированы следующие значения параметров среды:  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\delta = 0.1$ , что соответствует режиму бегущих волн при бистабильном характере динамики элементов среды.

В проведенных исследованиях был интересен эффект синхронизации именно бегущих волн, т.е. амплитуда воздействия должна быть такой, чтобы режим бегущей волны в целом сохранялся. В то же время, в случае локального воздействия заметный эффект синхронизации наблюдается только при сравнительно больших значениях амплитуды воздействия. Это связано с тем обстоятельством, что воздействие, приложенное к одному элементу должно повлиять на большое количество связанных элементов. При небольших значениях амплитуды не удается диагностировать интервал значений частоты воздействия, соответствующий частотному захвату. Однако на основании численных экспериментов сложно сделать уверенное заключение о существовании амплитудного порога синхронизации.

Синхронизация диагностировалась по отношению возмущенной частоты колебаний к частоте воздействия

$$\theta = \frac{\tilde{\omega}_0}{\omega_{ext}}, \quad (1.9)$$

где  $\tilde{\omega}_0$  – возмущенная частота колебаний среды. В результате действия внешней силы форма колебаний во времени могла существенно меняться. Даже в случае синхронного воздействия могли возникать колебания, представляющие собой последовательности импульсов различной длительности. Для бистабильного режима в некоторых случаях наблюдались сложные колебания, похожие на хаотические. Однако вопрос о существовании в системе (1.8) динамического хаоса в рамках данного исследования не рассматривался. С учетом особенностей возмущенных колебаний частота  $\tilde{\omega}_0$  рассчитывалась как  $\tilde{\omega}_0 = \frac{2\pi}{\tilde{T}_0}$ , где  $\tilde{T}_0$  – среднее время между последовательными пересечениями переменной  $x$  нуля в одном направлении:

$$\tilde{T}_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (t_{i+1} - t_i) \quad (1.10)$$

$N$  – число пересечений нуля в одном направлении за достаточно большое время наблюдения. В силу симметрии системы результаты расчета отношения частот  $\theta$  не зависят от выбора точки  $s_0$ . В проведенных расчетах полагалось  $s_0 = 50$ . Измерения средней частоты колебаний проводились в точке  $s = 0$ , что также не является принципиальным.

Для трех первых мод  $n = 1, 2, 3$ , наблюдающихся в бистабильной среде при выбранных значениях параметров, были построены зависимости отношения частоты  $\theta$  от частоты воздействия  $\omega_{ext}$  при фиксированной амплитуде  $A$ . Они представлены на рисунке 1.15,а-в. Хотя выбранные параметры среды в этом случае сильно отличаются от параметров возбудимого режима (см. [39, 104]), но характер зависимостей  $\theta$  от  $\omega_{ext}$  оказывается во много сходным. Ширина областей синхронизации увеличивается с ростом номером  $n$  (для коротковолновых мод). Наиболее широкая область синхронизации для трех исследованных мод,



также как в возбуждимом режиме, соответствует моде  $n = 3$ . Следует отметить, что бистабильный режим при выбранных значениях параметров оказался более

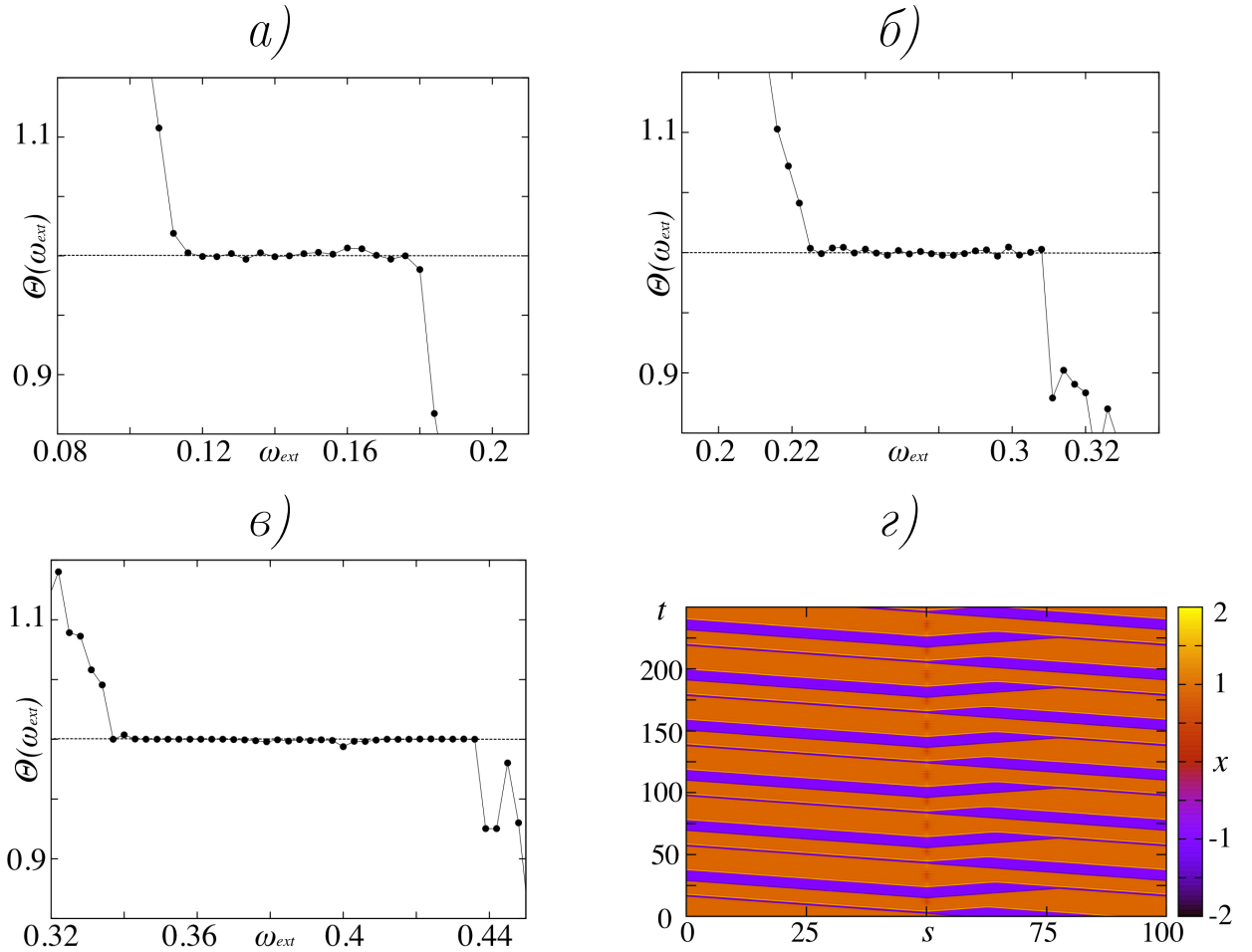


Рис. 1.15. Синхронизация бегущих волн в среде (1.8) в бистабильном режиме при локальном внешнем воздействии: а–в – зависимости отношения частот  $\omega_{av}/\omega_{ext}$  от частоты воздействия  $\omega_{ext}$  при амплитуде воздействия  $A = 1.5$ ; г – пространственно-временная диаграмма бегущей волны  $n = 1$  в области синхронизации ( $A = 1.5$ ,  $\omega_{ext} = 0.12$ ). Параметры среды:  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\delta = 0.1$

чувствительным к внешнему воздействию и заметный эффект синхронизации можно было зафиксировать при значительно меньшей амплитуде воздействия, чем в ранее исследованных случаях автоколебательного и возбуждимого режимов. Пространственно-временная диаграмма, приведенная (рисунок 1.15,г) показывает искажения волновой структуры. Возникают импульсы переключений

разной длительности и полярности, однако в целом режим бегущей волны переключений сохраняется.

### 1.3.2 Синхронизация бегущих волн при распределенном внешнем гармоническом воздействии

Рассмотрим теперь воздействие на среду (1.3) внешнего поля в форме бегущей волны. При этом, на каждый элемент среды действует гармоническая сила в различной фазе. Уравнения среды (1.3) в этом случае имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} &= x - y - \alpha x^3 + d \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \gamma x - y + \beta + A \cos(\omega_{ext} - \kappa s), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где  $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n}{L}$  – волновое число,  $A$  и  $\omega_{ex}$ , соответственно, амплитуда и частота гармонической силы, приложенной в точке  $s$ .

При распределенном воздействии амплитуда внешней силы, соответствующая заметному эффекту захвата частоты, может быть сравнительно небольшой, однако исследуемый режим разрушается уже при сравнительно небольшой амплитуде распределенного воздействия. Кроме того при таком воздействии сложно диагностировать разрушение исследуемого режима бегущей волны, поскольку пространственно-временные диаграммы возмущенной системы в любом случае будут соответствовать бегущей волне в силу волнового характера возмущения. Во избежание этого амплитуда распределенного воздействия выбиралась таким образом, чтобы при воздействии на изолированный элемент внешняя сила не приводила бы к возбуждению импульсов или переключениям осциллятора.

Так как ранее, в работе [39], исследовались эффекты синхронизации автоколебательной и возбудимой среды 1.3 только при локальном внешнем воздействии, при изучении распределенного внешнего воздействия на среду в рамках

диссертационной работы были рассмотрены все три характерных режима динамики среды, а эффекты синхронизации сопоставлены.

На рисунках 1.16–1.18 приведены зависимости отношения частот  $\theta$  от частоты воздействия  $\omega_{ext}$ , полученные для трех первых мод в автоколебательном, возбуждимом и бистабильном режимах, соответственно. Закономерности соотношения ширины области синхронизации и номера волновой моды, обнаруженные при локальном воздействии, в целом сохраняются и в случае распределенного воздействия.

Для автоколебательного режима ширина области синхронизации имеет тенденцию убывать с уменьшением длины волны (ростом  $n$ ) ([39]). Однако, как можно видеть из графиков, приведенных на рисунках 1.16,а-в, при распределенном воздействии ширина области синхронизации для первой и второй моды практически одинакова, а для  $n = 3$  уменьшается не так сильно, как в случае локального воздействия. Характер бегущей волны в области синхронизации (рисунок 1.16,г) является строго регулярным и практически не отличается от невозмущенного режима. Подстройка собственной частоты проявляется в равномерном по всей длине кольца и незначительном по величине изменении фазовой скорости, которое на пространственно-временных диаграммах визуально практически не заметно. Области синхронизации в возбуждимом и бистабильном режимах с ростом номера моды  $n$  ведут себя одинаково: ширина области синхронизации увеличивается для коротковолновых мод (рисунки 1.17,а-в, 1.18,а-в), как это было и при локальном воздействии. Пространственно-временная диаграмма в области синхронизации для возбуждимого режима имеет простую структуру, соответствующую невозмущенной волне. Волны переключений в бистабильном режиме проявляют, как уже отмечалась, наибольшую чувствительность к внешнему воздействию. Их структура сильно деформируется, что можно видеть и на рисунке 1.18,г.

Таким образом, активная среда, замкнутая в кольцо является распределенным автогенератором не зависимо от того, находятся ли элементы среды в

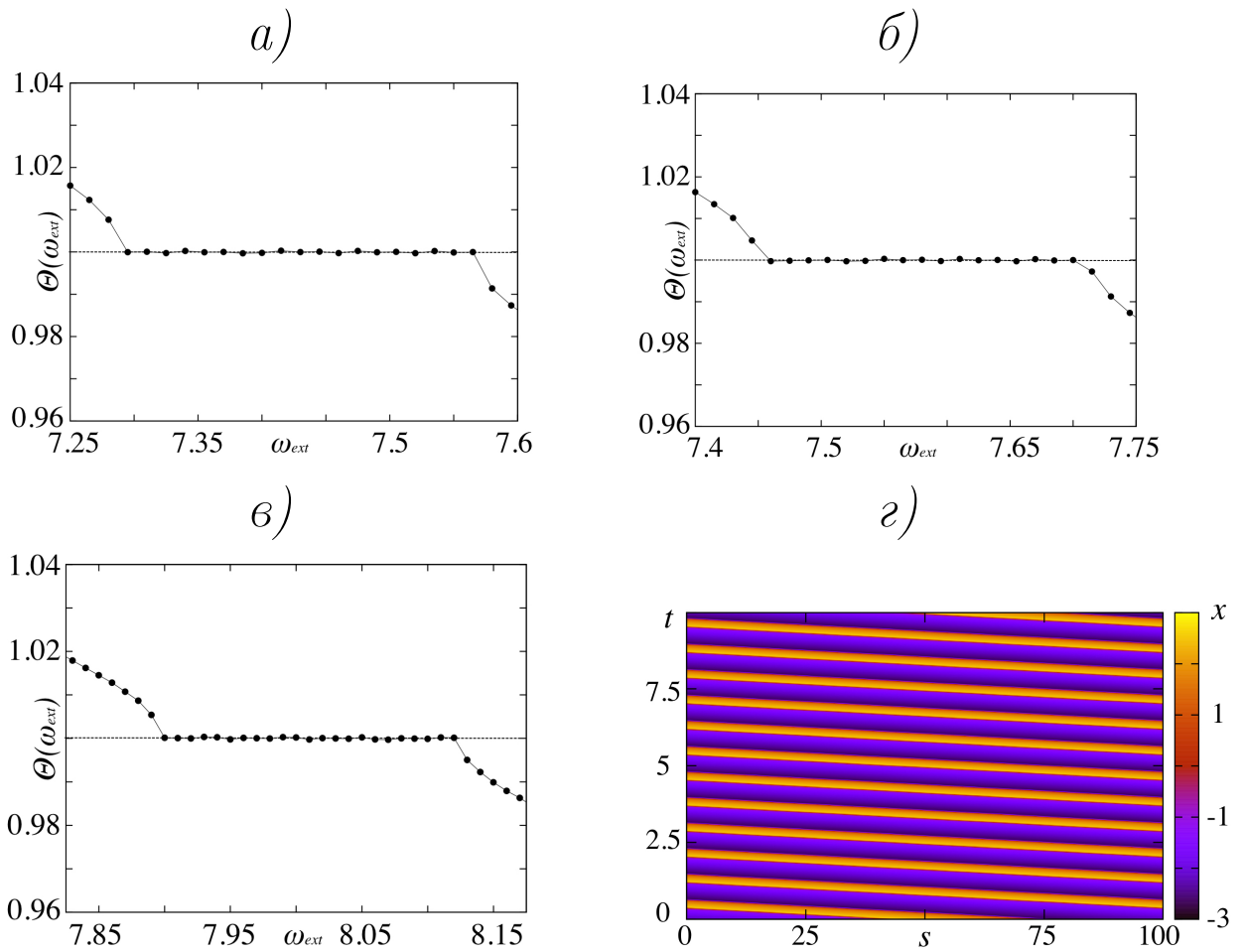


Рис. 1.16. Синхронизация бегущих волн в среде (1.11) в автоколебательном режиме при распределенном внешнем воздействии: а–в – зависимости отношения частот  $\omega_{av}/\omega_{ext}$  от частоты воздействия  $\omega_{ext}$  при амплитуде воздействия  $A = 0.15$ ; г – пространственно-временная диаграмма бегущей волны  $n = 1$  в области синхронизации ( $A = 0.15$ ,  $\omega_{ext} = 7.5$ ). Параметры среды:  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 3$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.1$

автоколебательном режиме, являются возбудимыми осцилляторами или демонстрируют бистабильный режим с двумя устойчивыми состояниями равновесия. Существуют определенные различия в поведении волновых мод в различных режимах. Как было показано в разделе , дисперсионные характеристики, рассчитанные в бистабильном и возбудимом режимах качественно аналогичны, а в автоколебательном режиме они носят другой характер. Со сходством дисперсионных характеристик, по-видимому, связано сходное поведение волновых мод

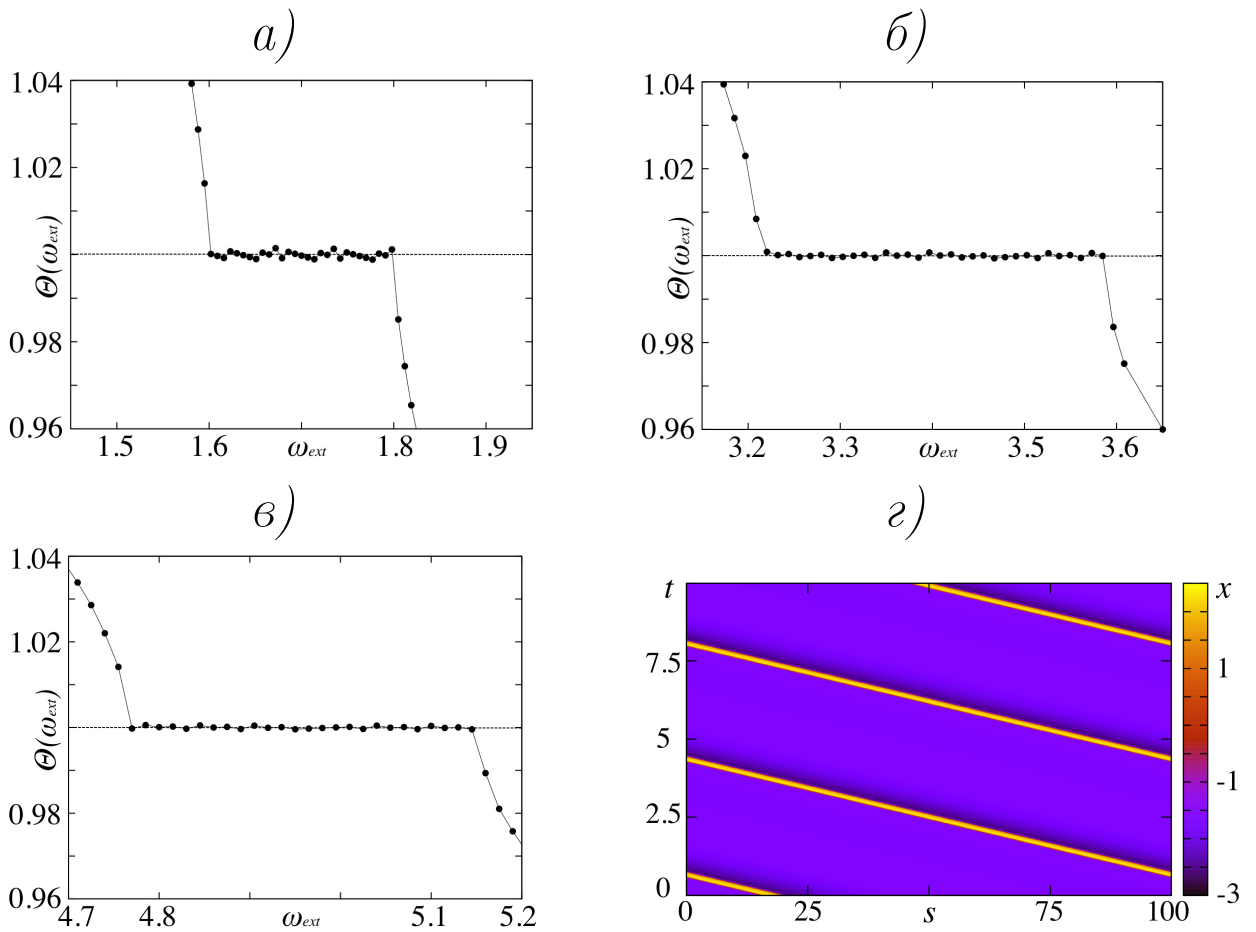


Рис. 1.17. Синхронизация бегущих волн в среде (1.11) в возбуждимом режиме при распределенном внешнем воздействии: а–в – зависимости отношения частот  $\omega_{av}/\omega_{ext}$  от частоты воздействия  $\omega_{ext}$  при амплитуде воздействия  $A = 0.15$ ; г – пространственно-временная диаграмма бегущей волны  $n = 1$  в области синхронизации ( $A = 0.15$ ,  $\omega_{ext} = 1.69$ ). Параметры среды:  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 3$ ,  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.1$

при вынужденной синхронизации бегущих волн в бистабильном и возбуждимом режимах: наблюдается расширение области синхронизации для более коротковолновых мод. Для автоколебательного режима, напротив, ширина области синхронизации уменьшается с ростом длины волны. Такая закономерность проявляется как при локальном воздействии, так и при распределенном.

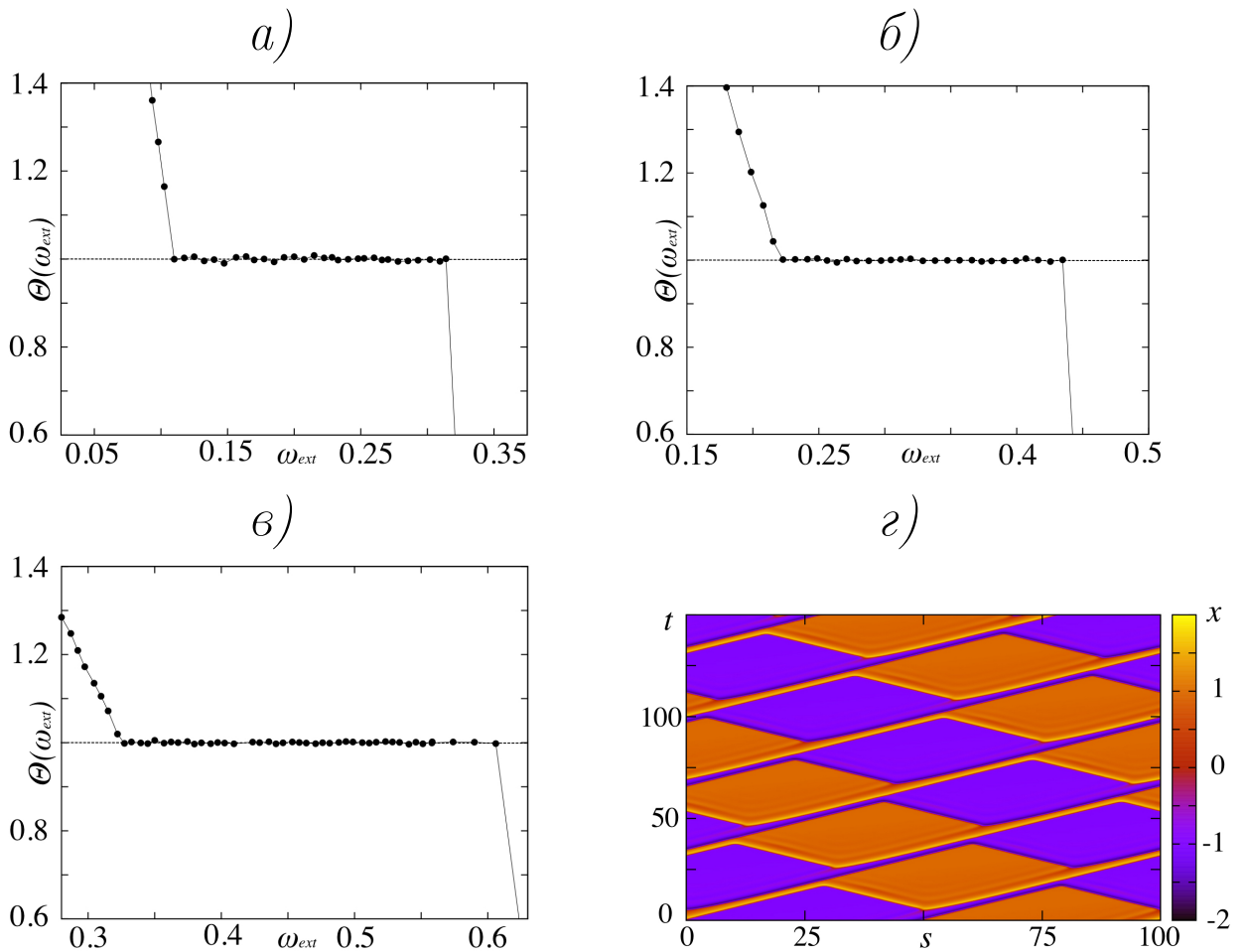


Рис. 1.18. Синхронизация бегущих волн в среде 1.11 в бистабильном режиме при распределенном внешнем воздействии: а–в – зависимости отношения частот  $\omega_{av}/\omega_{ext}$  от частоты воздействия  $\omega_{ext}$  при амплитуде воздействия  $A = 1.5$ ; г – пространственно-временная диаграмма бегущей волны  $n = 1$  в области синхронизации ( $A = 0.015, \omega_{ext} = 0.12$ ). Параметры среды:  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 0, \gamma = 0.7, \varepsilon = 0.2, \delta = 0.1$

## 1.4 Выводы по первой главе

В первой главе работы была исследована модель активной среды, представляющая собой кольцо из большого числа активных элементов с диффузионной связью. В качестве парциального элемента среды был выбран осциллятор ФитцХью-Нагумо. В зависимости от параметров, парциальный осцилля-

тор может демонстрировать различные динамические режимы: автоколебания, возбудимое поведение и бистабильность с двумя состояниями равновесия. В результате проведенных исследований динамики предложенной модели активной среды, были получены следующие основные результаты:

1. Показано, что в активной среде, состоящей из диффузионно-связанных осцилляторов ФХН в бистабильном режиме, возможно образование бегущих волн, подобных волнам возбуждения при возбудимой динамике элементов среды. При этом имеет место явление мультистабильности, связанное с сосуществованием устойчивых волновых мод с различной длиной волны. Конфигурация пространственного профиля волны имеет сильную зависимость от начальных условий. Фазовая скорость волны растет с увеличением силы связи.
2. Была уточнена бифуркационная диаграмма осциллятора ФитцХью-Нагумо в форме (1.1) и исследована динамика кольца (1.2), составленного из  $N = 500$  осцилляторов (1.1) с диффузионной связью, моделирующего непрерывную активную среду (1.3). Построена карта режимов модели среды на плоскости управляющих параметров  $\beta$  и  $\gamma$  для двух значений параметра релаксационности элементов среды  $\varepsilon$  и фиксированных параметрах  $\delta$ ,  $\alpha$ . Выделены области существования бегущих волн, и неподвижных пространственных структур. Эти области сопоставлены с бифуркационной диаграммой отдельно взятого осциллятора, полученной при вариации тех же параметров.
3. Показано, что переход от режима бистабильности в область с одним устойчивым равновесием не сопровождается бифуркацией бегущей волны, которая плавно изменяет свой профиль при изменении параметров.
4. Показано, что переход из режима возбудимой среды в область автоколебаний носит различный характер в зависимости от значения параметра

- $\varepsilon$ . При  $\varepsilon = 0.2$  (случай слабой релаксации) переход к автоколебательной динамике элементов среды сопровождается резким изменением профиля бегущей волны, что свидетельствует о бифуркации. При  $\varepsilon = 0.01$  (случай сильной релаксации) переход в область автоколебаний не сопровождается заметными изменениями формы профиля бегущей волны без бифуркаций.
5. Построены дисперсионные характеристики для автоколебательного, возбуждаемого и бистабильного режимов динамики элементов среды. Показано, что они носят один и тот же характер для возбуждаемой и бистабильной среды и качественно отличаются в случае автоколебательной среды.
  6. Для исследуемой модели среды в бистабильном режиме были выявлены закономерности эволюции волновых мод при изменении коэффициента диффузии. Было установлено существование областей сложной пространственно-временной динамики для всех исследованных волновых режимов. Границы этих областей и последовательность перестроек внутри них для различных мод могут сильно различаться, но наблюдается общая тенденция смещения границ этих областей в сторону меньших значений коэффициента диффузии с уменьшением длины волны.
  7. Был установлен эффект синхронизации бегущих волн в модели бистабильной среды при локальном воздействии гармонической внешней силы, дополнительно к эффектам синхронизации бегущих волн в той же модели среды в возбуждаемом и автоколебательном режимах, описанным ранее. Эффект синхронизации состоял в захвате собственной частоты колебаний элементов бистабильной среды на частоте воздействия при сохранении режима бегущей волны. Сопоставление ширины области синхронизации для различных волновых мод показало качественное сходство закономерностей синхронизации в бистабильном режиме с синхронизацией в возбуждаемом режиме: в обоих случаях наблюдается расширение области синхронизации



для более коротковолновых мод. Как известно, в автоколебательном режиме ширина области синхронизации уменьшается с ростом длины волны.

8. Для всех трех режимов среды был установлен эффект вынужденной синхронизации бегущих волн в ранее не рассмотренном случае распределенного воздействия. Для ширины областей захвата была показана та же тенденция, что и при локальном воздействии.

# Глава 2. БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И ХИМЕРНЫЕ СТРУКТУРЫ В КОЛЬЦЕ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С ОДНОНАПРАВЛЕННОЙ ЛОКАЛЬНОЙ СВЯЗЬЮ

## Введение

Однонаправленный характер локального взаимодействия элементов диссипативной пространственно-распределенной системы в определенных случаях может играть решающую роль как для возникновения колебательных и волновых режимов, так и для формирования особого типа устойчивых структур, таких как химерные состояния. Как отмечалось в Главе 1 сам факт возникновения волн переключений в системах бистабильных элементов с периодическими граничными условиями без внешних регулярных или шумовых воздействий является нетривиальным и малоизученным. Как правило, бистабильные осцилляторы, классическим примером которых может служить осциллятор Дуффинга [139–141], рассматривались под воздействием внешней силы. Существование волн переключений в кольце, состоящем из классических осцилляторов Дуффинга не было детально изучено. В отличие от осциллятора ФитцХью-Нагумо, осциллятор Дуффинга не проявляет свойств возбудимости. По этой причине колебания в кольце диффузионно-связанных осцилляторов Дуффинга быстро затухают. Анализ научных публикаций и предварительные компьютерные эксперименты показали, что повторяющиеся переключения в бистабильной среде из осцилляторов Дуффинга, реализуются только при однонаправленном взаимодействии элементов. Таковую связь принято называть связью по потоку. Од-

нонаправленная связь обеспечивает необходимую подкачку энергии в систему, чтобы компенсировать диссипативные потери, что может привести к возникновению бегущих волн. Такое предположение подкрепляется результатами, приведенными в [31], где исследуется кольцо передемпфированных бистабильных осцилляторов с одноямным потенциалом. В отдельном элементе системы, в этом случае, реализуется единственное всегда устойчивое состояние равновесия. Однако кольцо с однонаправленным взаимодействием демонстрирует сложную, в том числе хаотическую динамику.

Развивая тему влияния однонаправленной связи на динамику систем, составленных из диссипативных элементов, была изучена возможность возникновения химерных состояний в ансамбле диссипативных осцилляторов с локальным однонаправленным взаимодействием.

Существование так называемых виртуальных химер в осцилляторах с запаздывающей обратной связью [67, 68] позволяет предположить, что химеры могут возникать в кольце локально связанных осцилляторов, по крайней мере в случае однонаправленной связи. В основе данного предположения лежит определенная аналогия между отдельно взятым осциллятором с цепочкой запаздывающей обратной связи и кольцом таких же однонаправленно-связанных осцилляторов. В диссертации показывается, что это предположение верно и определенный класс химерных структур может быть реализован в ансамблях с локальным однонаправленным взаимодействием элементов.

В данной главе диссертации исследуются две пространственно-распределенные системы с локальным однонаправленным взаимодействием элементов и периодическими граничными условиями. Первая из них представляет собой модель бистабильной среды на основе идентичных диссипативных бистабильных осцилляторов Дуффинга, объединенных в кольцо с помощью локальной линейной однонаправленной связи. В качестве второй исследуемой системы выступает кольцо линейных диссипативных осцилляторов с локальным нелинейным однонаправленным взаимодействием. Представ-

ленные во второй главе диссертации результаты отражены в следующих публикациях [106, 108, 116, 118, 119, 121, 122]

## 2.1 Бегущие волны в кольце осцилляторов Дуффинга с локальной однонаправленной линейной связью

Модель бистабильной активной среды основана на элементарной ячейке, представляющей собой бистабильный осциллятор Дуффинга, являющийся одной из базовых моделей в нелинейной динамике и теории колебаний [139–141]. Отдельно взятый осциллятор Дуффинга – это пассивный элемент, характеризуется внутренней диссипацией. Без внешнего воздействия любое возмущение быстро затухает и осциллятор будет находиться в одном из двух устойчивых состояний сколь угодно долго. Он описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= -\gamma y - \alpha x - \beta x^3\end{aligned}\tag{2.1}$$

Здесь  $x$  и  $y$  – безразмерные переменные, время  $t$  также является безразмерным. Безразмерные параметры  $\alpha$ ,  $\beta$  управляют формой потенциала, который, в зависимости от знаков  $\alpha$  и  $\beta$ , может быть двухъямным или одноямным. Параметр  $\gamma > 0$  характеризует диссипацию. Осциллятор Дуффинга (2.1) в отличие от осциллятора ФитцХью-Нагумо не проявляет свойств возбудимости.

В данной работе рассматривается ансамбль, состоящий из однонаправленно-связанных бистабильных осцилляторов (2.1). Он описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x}_j &= x_j, \\ \dot{y}_j &= -\gamma y_j - \alpha x_j - \beta x_j^3 + k(x_j - x_{j+1}), \quad j = 1, \dots, N, \\ x_{j+N}(t) &= x_j(t), \quad y_{j+N}(t) = y_j(t),\end{aligned}\tag{2.2}$$

где  $j \in [1; N]$  – номер элемента (дискретная пространственная координата),  $N$  – число элементов в кольце,  $k$  – коэффициент однонаправленной связи. Пусть длина системы в пространстве есть  $L$ , тогда элементы среды имеют размер  $\Delta_s = \frac{L}{N}$  (шаг дискретизации пространственной координаты). В непрерывном пределе  $N \rightarrow \infty$ ,  $s \rightarrow 0$  получаем непрерывную модель среды, задаваемую уравнениями в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= x, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -\gamma y - \alpha x - \beta x^3 + \delta \frac{\partial x}{\partial s}, \\ x(s + L, t) &= x(s, t), \quad y(s + L, t) = y(s, t), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $s \in [0, L]$  – безразмерная пространственная координата,  $\delta = k(\Delta_s)^2$  – коэффициент однонаправленной связи. В проводимых исследованиях фиксировались следующие значения параметров:  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0,3$ ,  $L = 100$ . Параметры  $\alpha$ ,  $\delta$  служили управляющими параметрами среды. При диффузионной связи между элементами среды (2.3) какие-либо колебания невозможны. Однако, если связать осцилляторы однонаправленно, то в среде при определенных условиях появляются незатухающие бегущие волны. Это объясняется с тем, что однонаправленная связь является активной, то есть обеспечивает подкачку энергии в систему.

Одним из свойств среды с периодическими граничными условиями является мультистабильность. Так, в кольце могут сосуществовать различные виды волн, пространственно-временной профиль которых определяется начальными условиями. По аналогии со средой (1.3) будем называть их модами. Номер моды означает количество колебаний, укладывающихся на длине системы. Следует отметить, что количество этих мод может быть очень велико. Характерно, что для всех мод в модели (2.3) проекции фазовых траекторий на плоскости одних и тех же динамических переменных остаются совершенно одинаковыми, т.е. форма колебаний элементов среды для всех мод будет одинаковой, изменяется толь-

ко фазовая скорость волны. На рисунках 2.1,а-в представлены пространственно-временные диаграммы волновых режимов различных мод, полученных для разных начальных условий. По оси абсцисс отложена пространственная координата, по оси ординат – временная, темным цветом обозначен минимальный уровень сигнала, светлым – максимальный. На рисунке 2.1,г показана проекция фазового портрета системы для случаев а-в. Фазовая траектория регулярно переключается между окрестностями двух равновесий фокусного типа, причем по виду она близка к двойко-асимптотической траектории.

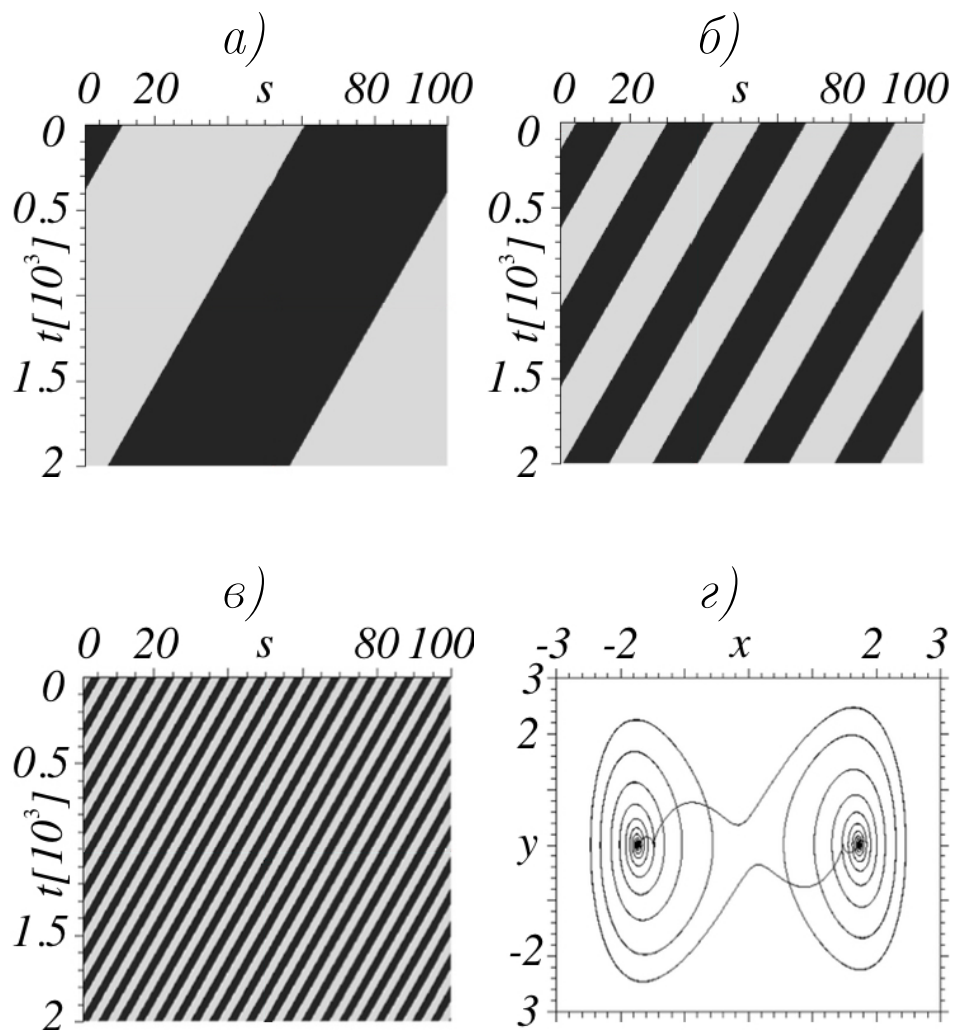


Рис. 2.1. Пространственно-временные диаграммы в активной среде (2.3) для различных мод: (а) —  $n = 1$ , (б) —  $n = 4$ , (в) —  $n = 20$ , (д) — типичный вид проекции фазового портрет системы. Параметры системы:  $\alpha = 3$  и  $\delta = 0.077$

На рисунке 2.2 представлена диаграмма динамических режимов системы (2.3) на плоскости управляющих параметров  $(\delta, \alpha)$ .

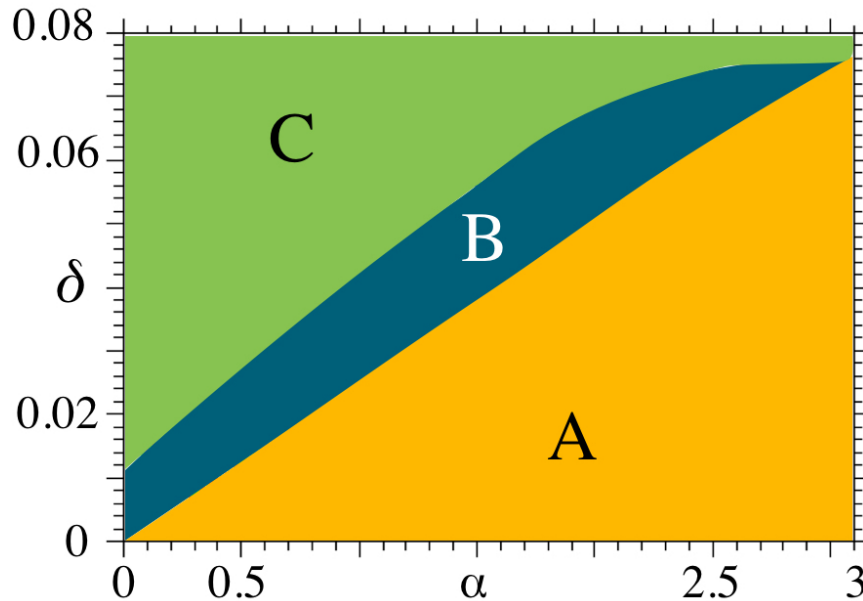


Рис. 2.2. Диаграмма режимов системы (2.3) на плоскости управляющих параметров  $(\delta, \alpha)$ . На диаграмме обозначены три области:  $A$  – режим стационарных пространственных структур;  $B$  – режим бегущих волн;  $C$  – режим хаотических колебаний

На диаграмме хорошо видно, что для исследуемой среды характерны три режима: область внизу диаграммы ( $A$ ) соответствует стационарным пространственным структурам, средняя область ( $B$ ) соответствует режиму медленных регулярных бегущих волн, а сверху располагается область хаотической динамики ( $C$ ). Далее рассмотрим переходы от одного режима к другому по отдельности.

В режиме стационарных пространственных структур колебания во времени в системе отсутствуют, а пространственное распределение определяется заданными начальными состояниями элементов среды. Сила связи в данном режиме настолько мала, что элементы почти не оказывают друг на друга влияния. При увеличении силы связи, при определенном пороговом уровне, энергии взаимодействия уже хватает, чтобы вызвать несколько спонтанных переключе-

ний в системе. Таким образом, рождается бегущая волна переключений. При дальнейшем увеличении коэффициента связи переключения происходят чаще. При определенном уровне связи бегущая волна переключений становится периодической. Соответствующая эволюция пространственно-временных диаграмм представлена на рисунке 2.3. Данный сценарий перехода характерен для всех

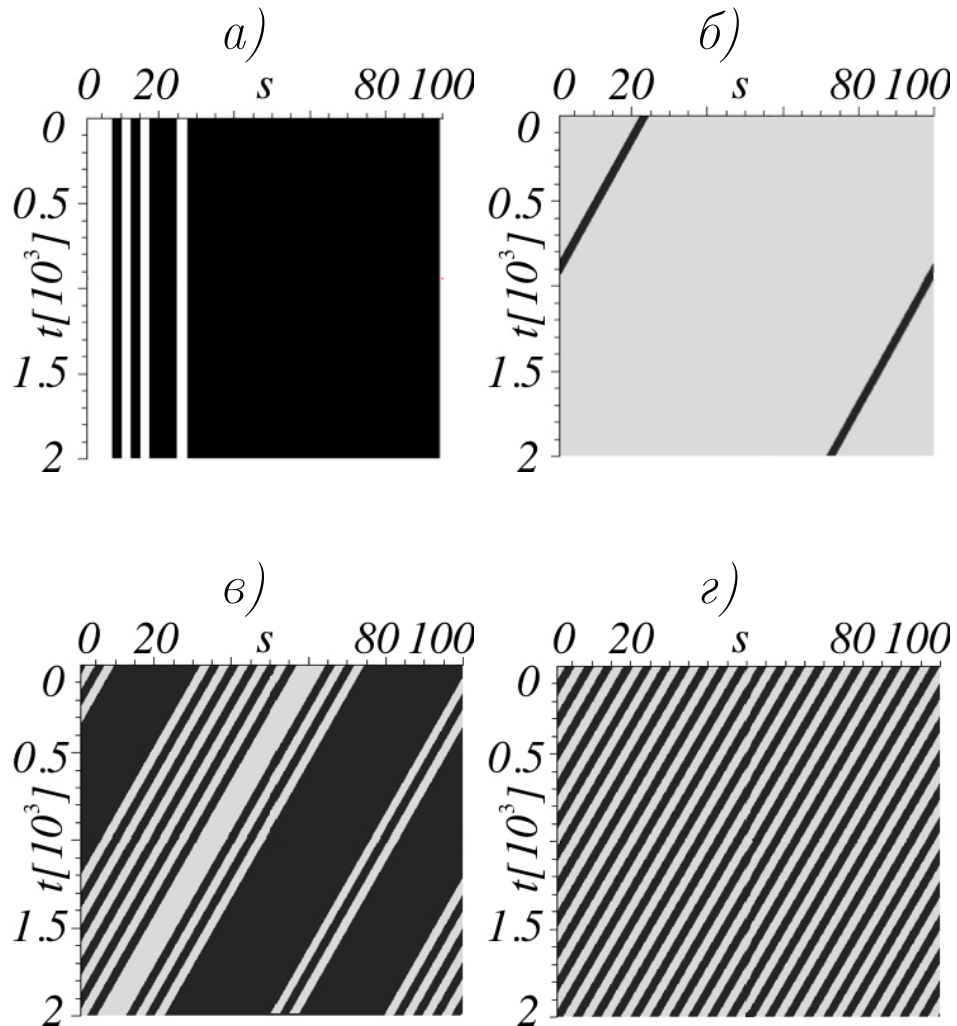


Рис. 2.3. Пространственно-временные диаграммы, характеризующие переход от стационарного режима к режиму бегущих волн для моды  $n = 20$ , параметр

$\alpha = 3$ : а –  $\delta = 0.0713$  (стационарный режим); б –  $\delta = 0.0716$  (рождение бегущей волны); в) –  $\delta = 0.073$  (переходный процесс); г –  $\delta = 0.075$  (установление периодической бегущей волны)

мод, причем пороговые значения для различных мод отличаются незначительно. Важно отметить, что бегущая волна сразу рождается с определенной фа-



зовой скоростью, которая при увеличении коэффициента связи не изменяется. Для различных мод она также совершенно одинакова. Это хорошо видно по наклону полос, соответствующих переключениям, на пространственно-временной диаграмме. Как отмечалось ранее, подкачка энергии осуществляется посредством однонаправленной связи, т.к. при диффузионной связи наблюдался только режим стационарных пространственных структур.

При установлении режима регулярных бегущих волн по кольцу (2.3) начинает бежать волна переключений с очень большим периодом. Колебания при этом не являются строго прямоугольными импульсами, они имеют достаточно сложный временной профиль. На проекции фазовом портрета на рисунке 2.1,г видно что на плоскости динамических переменных отдельно взятого осциллятора траектория совершает быстрые колебания вокруг седлофокусов. При приближении к точке седлофокуса скорость движения резко уменьшается, затем, вблизи седлофокуса, происходит переключение и траектория попадает в окрестность другого седлофокуса.

Существует интервал значений коэффициента связи, в пределах которого характеристики бегущей волны практически не изменяются. Старший показатель Ляпунова при этом остается нулевым, т.е. волна является периодической. При превышении некоторого критического значения коэффициента связи старший показатель Ляпунова становится положительным, что характеризует переход к хаотической динамике. Хаос рождается в форме нерегулярных внутримных колебаний. При своем возникновении они имеют очень малую амплитуду, которая с увеличением силы связи постепенно растет. Характерно, что переключения между окрестностями равновесий на данном этапе происходят с постоянным периодом. С увеличением амплитуды внутримных колебаний сначала пропадает периодичность переключений, а затем, при превышении некоторого порогового уровня коэффициента связи, энергии этих колебаний начинает хватать для преодоления потенциального барьера, и, как следствие, начинают происходить спонтанные переключения. С дальнейшим увеличением коэффи-

циента связи частота спонтанных переключений увеличивается и при большой силе связи имеют место в основном хаотические переключения, на фоне которых внутриямная динамика уже не заметна. Можно отметить, что ширина области перехода от регулярных колебаний к развитому хаосу на плоскости параметров  $\alpha$ ,  $k$  существенно зависит от значения  $\alpha$ , которое отвечает за высоту потенциального барьера.

Рассмотрим переход из области регулярных волн в область хаоса более подробно. Рисунок 2.4 иллюстрирует эволюцию колебаний во времени для моды  $n = 20$  в фиксированной точке пространства при  $\alpha = 3$ . Переход от медленных

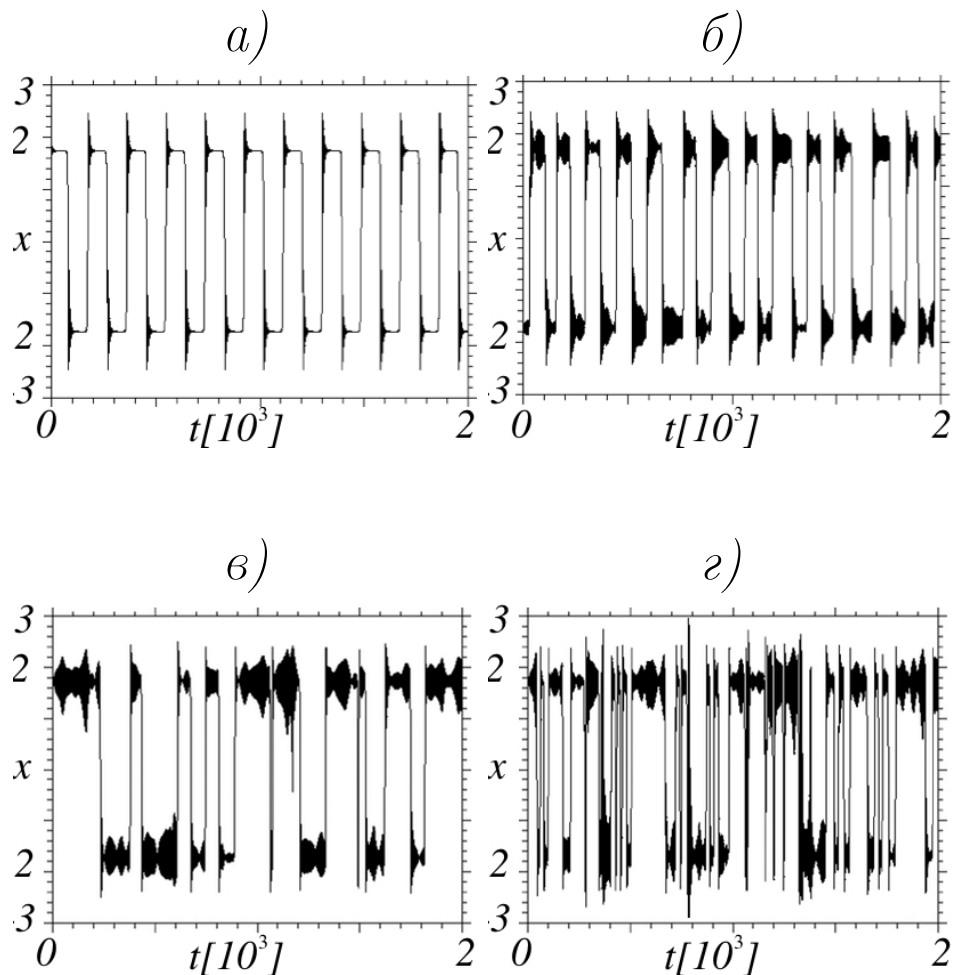


Рис. 2.4. Форма колебаний во времени для 1-го элемента среды (2.3) для бегущей волны  $n = 20$  при  $\alpha = 3$  и различных значениях связи: а —  $\delta = 0.075$ ; б —  $\delta = 0.082$ ; в —  $\delta = 0.088$ ; г —  $\delta = 0.094$

регулярных колебаний к развитому хаосу происходит в малом интервале из-

менения коэффициента связи. Характер перехода к хаосу для различных мод практически одинаков.

Эволюция проекции фазовой траектории на плоскость динамических переменных с ростом коэффициента связи  $\delta$  представлена на рисунке 2.5. Фазовая

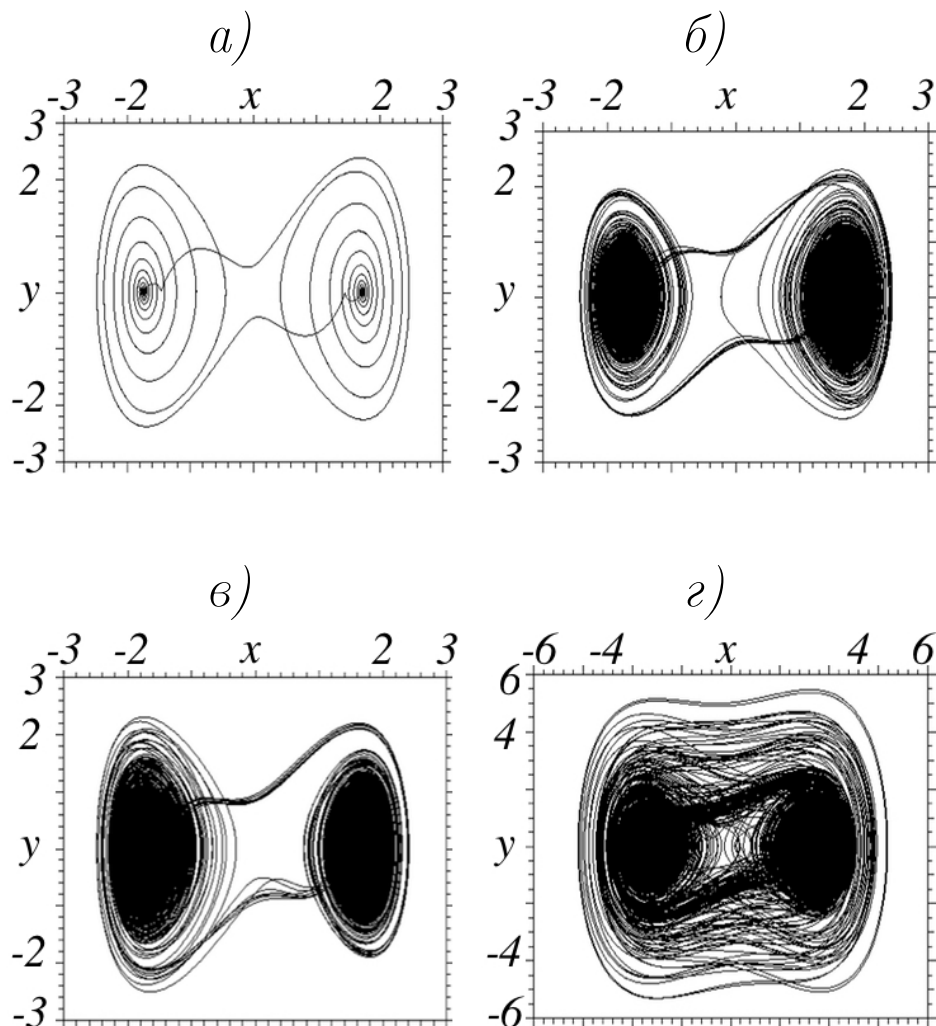


Рис. 2.5. Проекция фазовой траектории для 1го элемента среды (2.3) в режиме бегущей волны  $n = 20$  при  $\alpha = 3$  и различных значениях связи: а —  $\delta = 0.077$ ; б —  $\delta = 0.08$ ; в —  $\delta = 0.082$ ; г —  $\delta = 0.084$

траектория в регулярном режиме представляет собой замкнутую кривую с характерными вращениями вокруг двух седлофокусов. Переключения происходят при приближении к центру седлофокусов. При переходе к режиму хаотической динамики ситуация изменяется. Так траектория перестает быть замкнутой и начинает совершать быстрые движения, охватывающие сразу оба седлофокуса.

С ростом коэффициента связи амплитуда этих движений увеличивается, а переключения начинают происходить чаще. При развитом хаосе можно наблюдать траектории с очень большой скоростью, огибающие обе точки равновесия. Таким образом, переключения перестают происходить только при приближении к центрам седлофокусов, теперь их можно наблюдать и в отдалении от них.

Для диагностики перехода к режиму хаотической динамики рассчитывался старший характеристический показатель Ляпунова (ЛХП)  $\Lambda$ . При регулярном режиме старший ЛХП равен нулю, а при переходе к хаосу он становится положительным. Рассмотрим зависимость  $\Lambda$  от коэффициента связи. На рисунке 2.6 приведены результаты, полученные для двух мод:  $n = 1$  и  $n = 20$ . Для

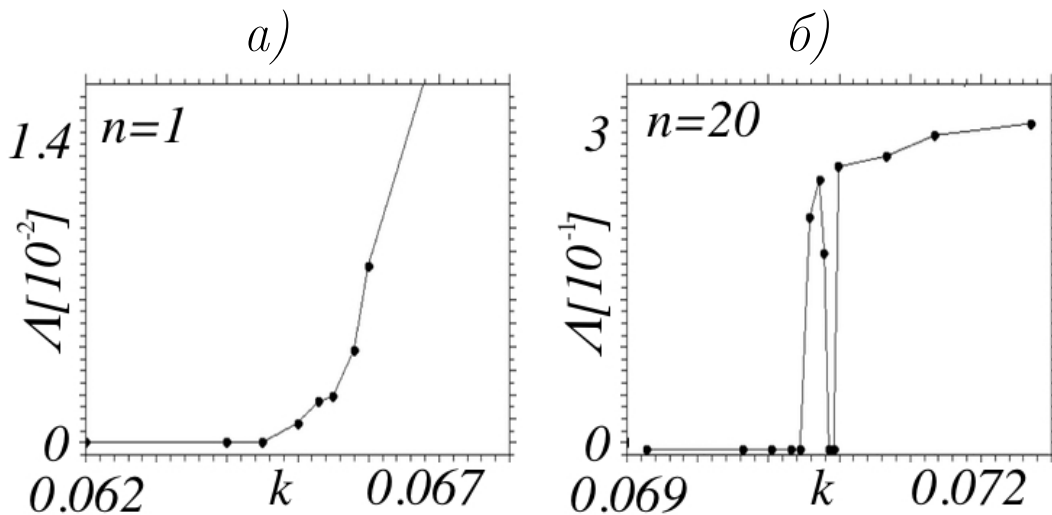


Рис. 2.6. Зависимость старшего показателя Ляпунова от коэффициента связи  $\alpha = 2$ : (а) —  $n = 1$ ; (б) —  $n = 20$

обеих мод зависимость  $\Lambda$  от  $\delta$  демонстрируют резкий скачок в область положительных значений при переходе значения коэффициента связи через некоторое критическое значение. Причем этот скачок точно совпадает с появлением внутрямной динамики у отдельных осцилляторов. Таким образом, можно точно сказать, что хаос рождается именно в форме нерегулярных внутрямных колебаний.

Описанное выше поведение показателя Ляпунова наблюдалось для всех волновых мод, которые были исследованы. Однако конкретный вид зависимости  $\Lambda$  от коэффициента связи для разных мод всё-же несколько отличается, что можно видеть на графиках, приведенных на рисунке 2.6. Так для первой моды скачок показателя выражен слабо. Изменение показателя с ростом параметра связи не так велико и происходит не слишком быстро. Для моды  $n = 20$  скачок старшего ЛХП значительно превышает скачок, наблюдающийся для первой моде.

В области хаоса можно отметить наличие окон периодичности. Как можно увидеть из рисунка 2.7 волна, действительно, является периодической во времени, хотя и имеет сложный пространственно-временной профиль.

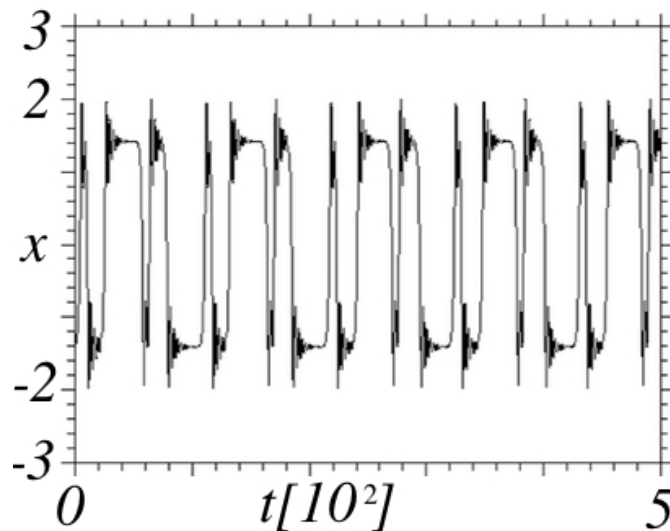


Рис. 2.7. Форма колебаний во времени в режиме бегущей волны в окне периодичности при  $\alpha = 2$ ,  $n = 20$ ,  $\delta = 0,070945$

## 2.2 Химерные режимы в кольце элементов с локальным однонаправленным нелинейным взаимодействием

Однонаправленное взаимодействие осцилляторов в кольце может не только привести к возникновению регулярных и хаотических бегущих волн, но и, в определенных случаях, привести к формированию химероподобных структур. В данном разделе рассматривается возможность получения химерных состояний в ансамбле осцилляторов с локальным взаимодействием. При построении модели такого ансамбля используется аналогия между осциллятором с цепочкой запаздывающей обратной связи (ЗОС) и кольцом осцилляторов с однонаправленным взаимодействием. Известно, что в осцилляторе с цепочкой ЗОС в определенных случаях можно наблюдать режим виртуальной химеры. Виртуальная химера, численно исследованная в [67] и реализованная экспериментально в устройстве с оптоволоконной запаздывающей обратной связью [68], возникает в простой системе, математическая модель которой представляет собой модифицированный осциллятор Икеды с цепочкой запаздывающей обратной связи:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{dx}{dt} &= -\delta_0 y - x + k f[x(\tau - T_d)], \\ \frac{dy}{dt} &= x. \end{aligned} \tag{2.4}$$

где  $\tau$  – время в исходных единицах,  $T_d$  – время запаздывания,  $\varepsilon_0$  и  $\delta_0$  параметры осциллятора,  $k$  – коэффициент обратной связи,  $f(x)$  – нелинейная функция, характеризующая преобразование в цепи запаздывающей обратной связью. Сам осциллятор по сути является линейным диссипативным осциллятором, а нелинейность системы связана с нелинейностью в цепи запаздывающей обратной связи. Если нормировать время на период запаздывания  $t = \frac{\tau}{T_d}$ , то можно переписать уравнения системы в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \frac{dx}{dt} &= -\delta_0 y - x + kf[x(t-1)], \\ \frac{dy}{dt} &= x.\end{aligned}\tag{2.5}$$

где  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{T_d}$ ,  $\delta = T_d \varepsilon_0$ ,  $y = \frac{U}{T_d}$ . Функция  $f(x)$  задается следующим образом:

$$f(x) = \frac{\beta}{1 + m \sin^2(x + \Phi_0)},\tag{2.6}$$

где  $\beta$ ,  $m$ ,  $\Phi_0$  – параметры нелинейной обратной связи.

Модель ансамбля, исследуемая в настоящей работе, получается путем замены цепочки запаздывающей обратной связи на цепочку идентичных осцилляторов, замкнутую в кольцо. При этом связь элементов является локальной и однонаправленной. Она, как и в случае осциллятора с запаздывающей обратной связью, является нелинейной и определяется функцией (2.6). Уравнения системы при этом описываются следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dx_j}{dt} &= -\delta y_j - x_j + k(f(x_{j-1})), \\ \frac{dy_j}{dt} &= x_j, \\ f(x_{j-1}) &= \frac{\beta}{1 + m \sin^2(x_{j-1} + \Phi_0)}.\end{aligned}\tag{2.7}$$

здесь  $j = 1, \dots, N$  – номер осциллятора (дискретная пространственная координата),  $N$  – число осцилляторов в кольце. В проведенных исследованиях рассматривался ансамбль из  $N = 300$  элементов. Параметры связи фиксировались:  $\beta = 4$ ,  $m = 4.7$ ,  $\Phi_0 = 0.4$ . Одиночный осциллятор представляет собой обычный линейный диссипативный осциллятор, в котором без внешней подкачки энергии какие-либо незатухающие колебания невозможны. Как и в предыдущем случае, роль внешнего источника энергии выполняет однонаправленная связь.

Модель (2.7) может быть физически реализована, например, в виде кольца связанных оптоволоконными линиями полупроводниковых лазеров, которых

проходит через интерферометры Фабри-Перо, характеризующийся нелинейностью вида (2.6). Длина этих линий предполагается достаточно малой, чтобы запаздыванием сигнала в линии можно было пренебречь.

Система (2.7) численно интегрировалась методом Гюна [142]. Шаг интегрирования фиксировался равным  $h = 0.0004$ . По полученным массивам данных строились пространственно-временные графики режимов, на которых разные тона соответствуют различным уровням значений переменной  $x$ . Кроме того для диагностики режимов анализировались колебания во времени в фиксированной точке пространства и мгновенные пространственные профили. Начальные условия выбирались случайным образом или задавались периодическими с добавлением случайной компоненты. Реализация какого-либо режима со случайных начальных условий позволят сделать вывод о его устойчивом характере. При построении диаграмм режимов на плоскости управляющих параметров отдельно отслеживался каждый устойчивый режим. Важно отметить, что для исследуемой системы характерен очень длительный процесс установления ( $>10000$  единиц времени). Соответственно, при построении пространственно-временных графиков использовались данные, полученные после длительного времени установления.

### 2.2.1 Эволюция режимов с ростом параметра связи и возникновение химероподобной структуры

При вариации параметров  $\varepsilon$ ,  $\delta$  и  $k$  в кольце (2.7) наблюдаются различные пространственно-временные структуры. Зафиксируем значения  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$  и рассмотрим, как меняются динамические режимы в кольце (2.7) с ростом связи  $k$ .



При очень слабой связи в системе отсутствуют какие-либо колебания и она находится в устойчивом однородном равновесном состоянии  $x = 0, y = 0$ . С ростом  $k$  появляется колебательный режим, представляющий собой перемежаемость во времени хаотического поведения и режима, близкого к однородному равновесию (рисунок 2.8). При режиме близком к однородному равновесию, некоторые пространственные колебания имеют место, но их амплитуда очень мала (рисунок 2.8,б). В области хаотической динамики напротив в пространстве наблюдаются хаотические колебания с достаточно большой амплитудой (рисунок 2.8,в). Аналогичное поведение имело место в системе (2.5) и было названо бризером [67]. Колебания во времени в указанном режиме представляют собой периодические переключения между двумя метастабильными состояниями, в одном из которых наблюдается временной хаос (рисунок 2.8,г).

При достижении коэффициентом связи некоторого значения в системе (2.7) происходит резкий переход к режиму устойчивой бегущей волны (рисунок 2.9). Особенность режима бегущей волны, представленного на рисунке 2.9, состоит в том, что часть элементов кольца находится в одном и том же метастабильном состоянии покоя (темные области на пространственно-временном графике), а другая - в состоянии пространственно-временного хаоса (светлые полосы). Данный режим близок к режиму в виртуальной химере, наблюдающейся в системе с запаздыванием (2.5) [67, 68]. Применительно к пространственно распределенной системе (2.7) данный режим может быть назван "вращающейся химерой".

Границы областей когерентного и некогерентного поведения вращаются по кольцу с некоторой постоянной скоростью. Стационарную картину областей можно получить, перейдя в движущуюся систему координат. На рисунках 2.9,а,б, приведены пространственно временные графики в режиме вращающейся химеры для неподвижных и движущихся координат. Из-за конечного числа элементов кольца не удается точно задать скорость вращения химеры и полностью избавиться от дрейфа границ областей. Так границы областей на ри-

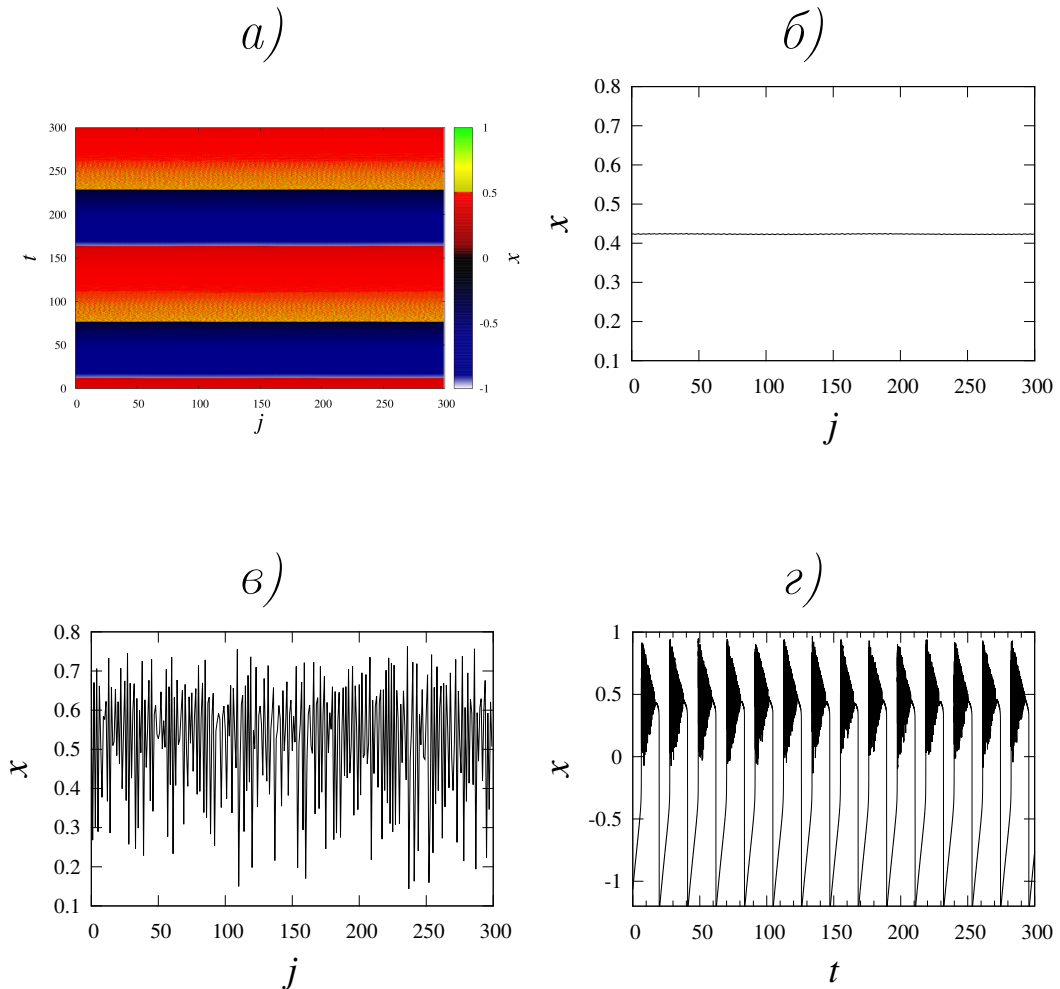


Рис. 2.8. Режим перемежаемости во времени: а – пространственно-временной график колебаний; б – пространственный профиль в режиме, близком к однородному равновесию; в – пространственный профиль в хаотической фазе временной перемежаемости; г – реализация колебаний во времени

сунке 2.9 не являются строго вертикальными. Однако примененная процедура позволяет наблюдать химерную структуру на пространственно-временном графике для достаточно большого интервала времени. Как видно из рисунка 2.9,б, пространственная структура почти не меняется во времени, т.е. можно говорить о стабильном во времени химерном состоянии. Форма соответствующих колебаний в пространстве и во времени приведена на рисунках 2.9,в,г.

Важной чертой отмеченного режима, указывающей на то, что этот режим действительно можно называть химерой, является независимость от началь-

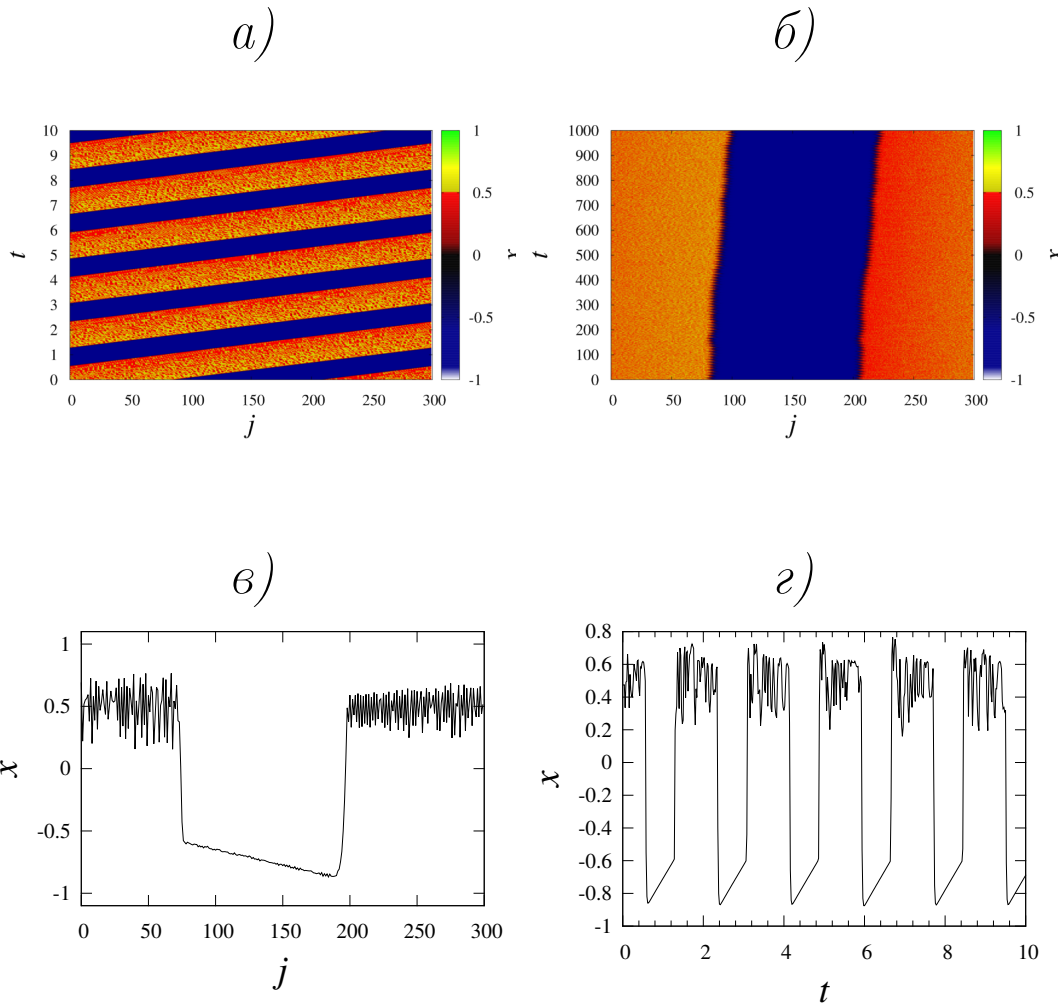


Рис. 2.9. Режим "вращающейся химеры" в исследуемой системе при  $\varepsilon=0.01$ ,  $\delta = 0.41$ ,  $k = 0.456$ : а – пространственно-временной график в неподвижной системе координат; б – пространственно-временной график в движущейся системе координат; в – мгновенный пространственный профиль; г – форма колебаний во времени в фиксированной точке пространства. Время установления  $t_{trans}=40000$ , начальные условия – случайное распределение от 0 до 1

ных условий. На рисунке 2.10 приведены два различных начальных распределения переменных  $x_j$  и соответствующие им установившиеся пространственно-временные структуры. Можно видеть, что с разных начальных условий система выходит на один и тот же установившийся режим "вращающейся химеры". Можно отметить, что для разных начальных распределений время установле-

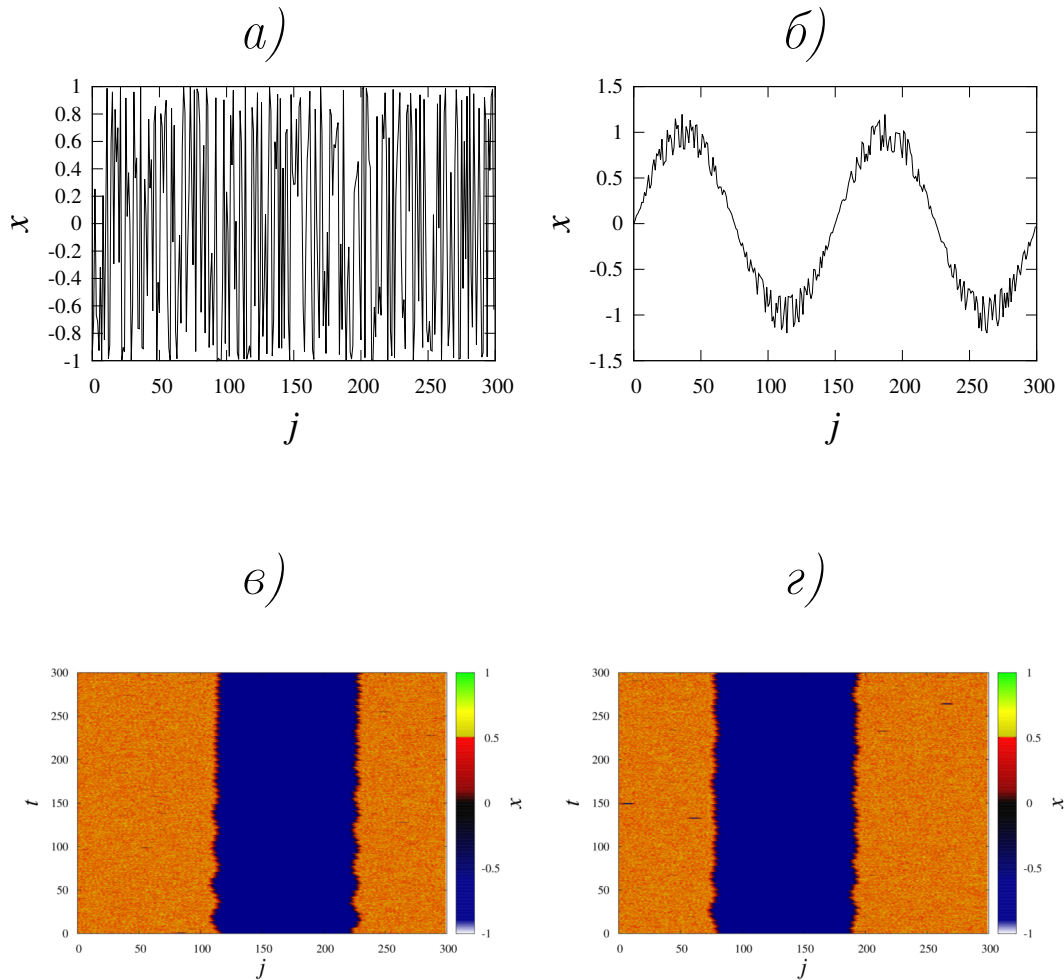


Рис. 2.10. Химерные состояния для разных начальных условий при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$ ,  $k = 0.51$ : начальные распределения  $x_j$  (а), (б) и соответствующие им пространственно-временные графики установившегося режима "вращающейся химеры" (в), (г)

ния различается: так при периодическом распределении оно составляет примерно 6000-8000 единиц, а для случайного начального профиля – уже порядка 30000.

Химероподобные структуры существуют в некоторой конечной области значений параметра связи. При дальнейшем увеличении связи между элементами химеры разрушаются (рисунок 2.11). Разрушение химер происходит постепенно. В области некогерентности возникают кластеры с когерентным поведением, которые существуют на конечных интервалах времени (рисунки 2.11,а,б).

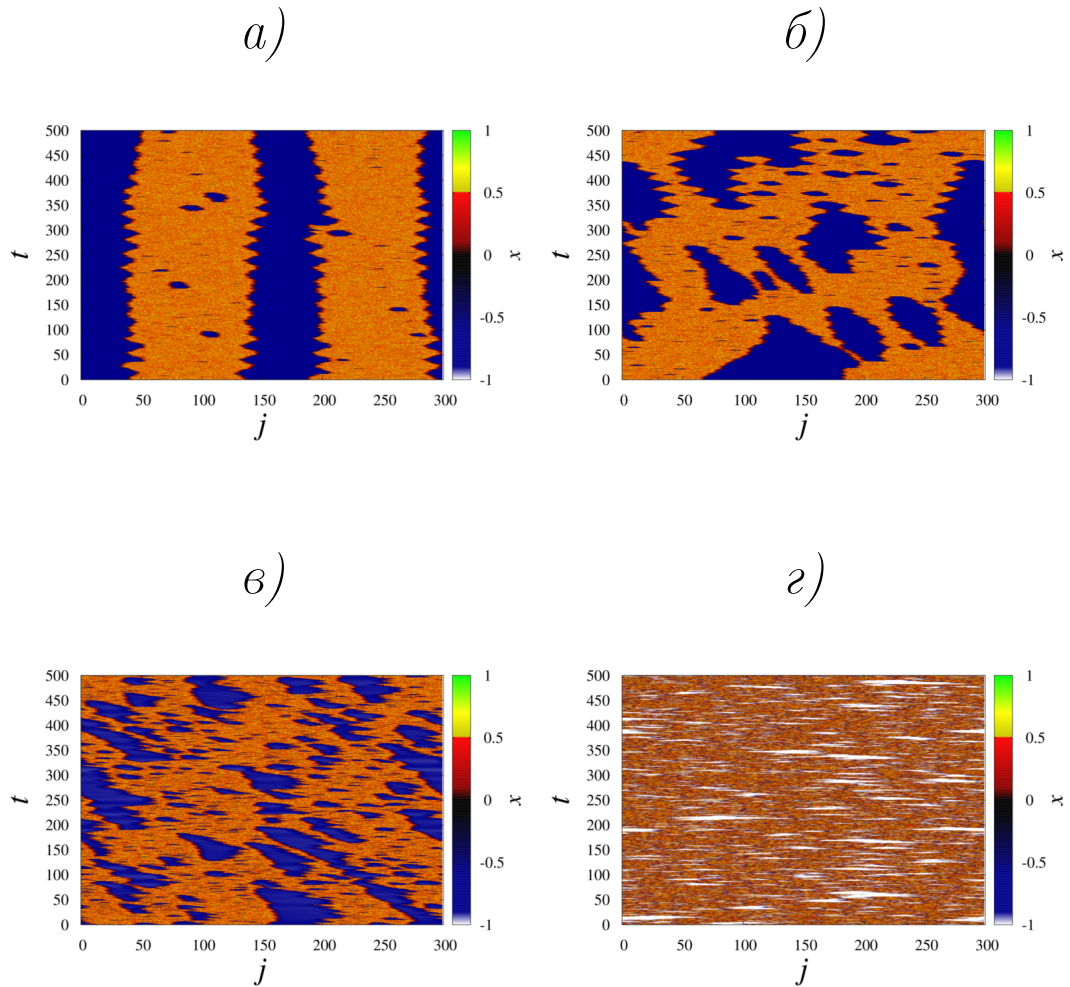


Рис. 2.11. Разрушение химеры при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.01$  с ростом связи: а –  $k = 0.519$ ; б –  $k = 0.5258$ ; в –  $k = 0.56$ ; г –  $k = 0.8$

С ростом  $k$  таких кластеров появляется все больше, а время их жизни уменьшается (2.11,в). При некотором, достаточно большом значении  $k$  в системе вновь устанавливается пространственно-временной хаос (2.11,г). Следует отметить, что механизм разрушения виртуальной химеры в осцилляторе с запаздывающей обратной связью при увеличении коэффициента обратной связи является совершенно аналогичным [67]. Он также наблюдается в экспериментах с лазером и электронной запаздывающей обратной связью [68].

Независимость режима вращающейся химеры от начальных условий, проиллюстрированная на рисунке 2.10, не является абсолютной. Во многих случаях один и тот же режим наблюдается при изменении начальных условий только

в определенных пределах. В то же время существует множество начальных условий, которые приводят к установлению другого режима, например химеры с другим числом "голов"(кластеров некогерентности) на длине системы. Т.е. имеет место явление мультистабильности. Пример двух химерных структур, сосуществующих при одних и тех же значениях параметров приведен на рисунке 2.12.

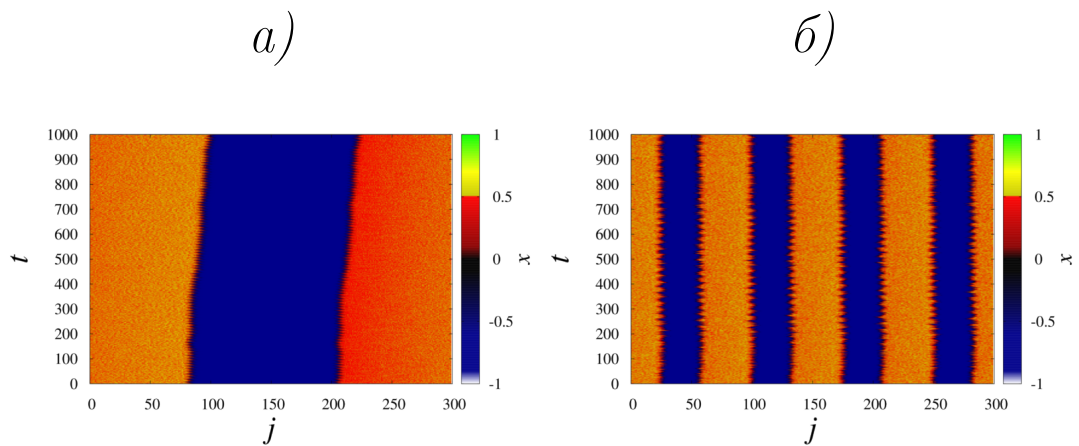


Рис. 2.12. Два режима химер, наблюдающиеся при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\delta = 0.41$   $k = 0.456$  в зависимости от начальных условий

## 2.2.2 Диаграммы режимов на плоскостях управляющих параметров

Были исследованы области существования различных пространственно-временных структур при изменении параметров системы (2.7) и построены диаграммы режимов на плоскостях различных управляющих параметров. Они приведены на рисунках 2.13-2.15. Различным тонам на диаграммах соответствуют различные режимы. Там же приведены пространственно-временные графики, иллюстрирующие характер режима, наблюдающегося в той или иной области. Границы областей определены достаточно приближенно, так как их детальное

построение в силу длительности процессов установления, мультистабильности и сложности режимов представляется затруднительным. Тем не менее, приведенные диаграммы дают адекватное представление об эволюции режимов при изменении того или иного параметра.

На рисунке 2.13 приведены области различных динамических режимов на плоскости параметров  $(k, \varepsilon)$   $\delta = 0.01$ . В светлой области (область 1) наблюдается колебательный режим, представляющий собой перемежаемость во времени между хаотическим режимом и режимом, близким к однородному равновесию (см. рисунок 2.8). Две области более темных тонов (синяя и голубая *online*) соответствуют существованию химеры с одним кластером некогерентности. Меньшая по размеру и более светлая область 2.2 соответствует случаю максимально устойчивой химеры, когда она реализуется при случайных начальных условиях. В более широкой темной области 2.1 для получения того же режима химеры требуются особые начальные условия. При переходе в светлую область справа (область 3) химера разрушается. Граница между областями является достаточно условной, поскольку разрушение химеры с ростом параметра  $k$  происходит постепенно (см. рисунок 2.11).

Для значения  $\delta = 0.01$  явление мультистабильности не наблюдается. Однако оно возникает с ростом  $\delta$ , что можно видеть на диаграмме режимов, приведенной на рисунке 2.14. Управляющими параметрами теперь являются  $k$  и  $\delta$ , а значение  $\varepsilon$  постоянно:  $\varepsilon = 0.01$ . Здесь в областях 2.1 – 2.4, обозначенных градациями тона (от светлого до темного синего тона *online*) существуют режимы химер, причем с переходом в более темные области (слева направо 2.1  $\rightarrow$  2.4) возникают новые химеры с большим числом некогерентных кластеров и сохраняются уже существующие химеры.

Таким образом, в системе развивается мультистабильность: в самой темной из отмеченных областей 2.4 сосуществуют химеры с числом кластеров некогерентности от одного до четырех. Далее, с переходом в светлую область 3 происходит разрушение химер. Разрушение химерных структур сопровождается

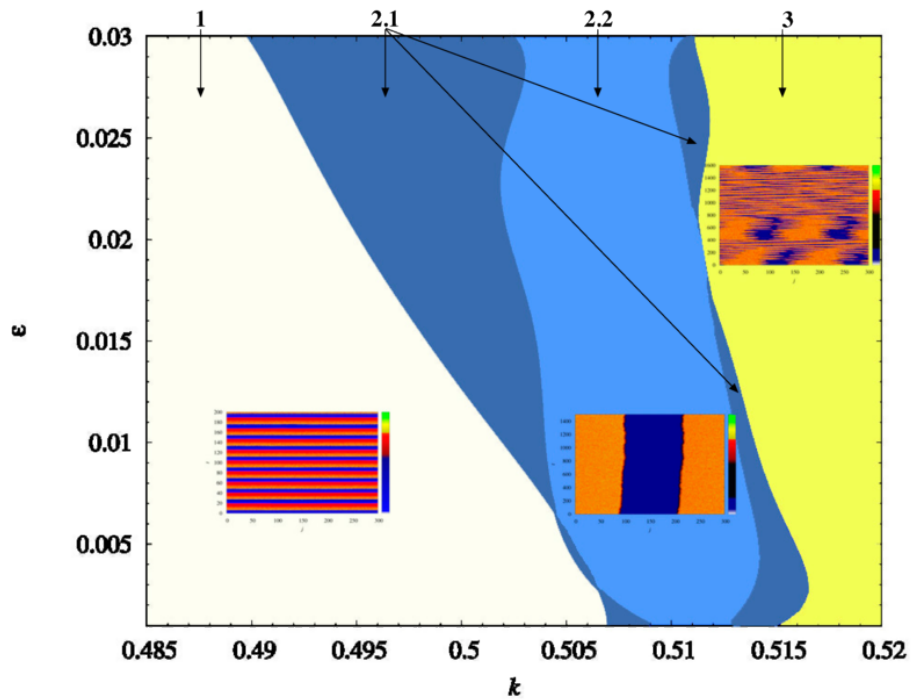


Рис. 2.13. Диаграмма режимов в системе (2.7) на плоскости управляющих параметров  $(k, \varepsilon)$  при  $\delta = 0.01$ . Тонем выделены области разных динамических режимов. Характер режимов проиллюстрирован вставками, представляющими пространственно-временные диаграммы для переменной  $x(t)$

длительными переходными процессами, причем длительность этих процессов различна для химер с различным числом кластеров.

Меняя параметры  $\varepsilon$  и  $\delta$  при постоянном коэффициенте связи (было выбрано значение  $k = 0.505$ ) также можно наблюдать возникновение вращающихся химер и развитие мультистабильности (рисунок 2.15). Если при малых значениях  $\varepsilon$  и  $\delta$  (область 1) имеет место колебательный режим, представляющий собой перемежаемость во времени между хаотическим и близким к однородному режимам (см. рисунок 2.8), то при увеличении сразу обоих параметров происходит возникновение всё новых химер (перекрывающиеся области 2.1 - 2.5).

Сравнивая диаграмму режимов на рисунке 2.15 с аналогичной диаграммой, полученной экспериментально для лазера с запаздывающей обратной связью,



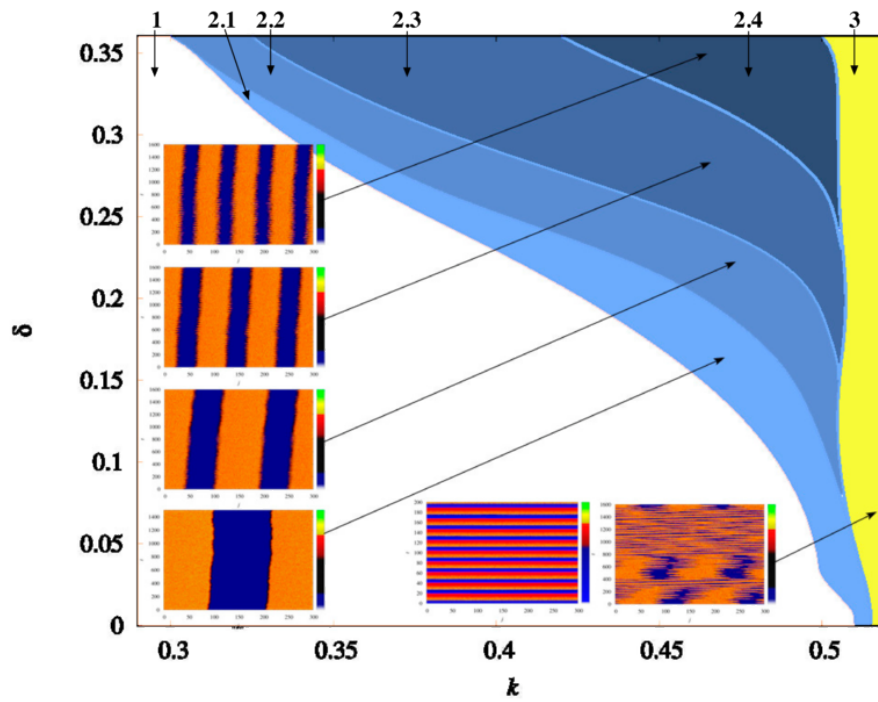


Рис. 2.14. Диаграмма режимов в системе (2.7) на плоскости управляющих параметров  $(k, \delta)$  при  $\varepsilon = 0.01$

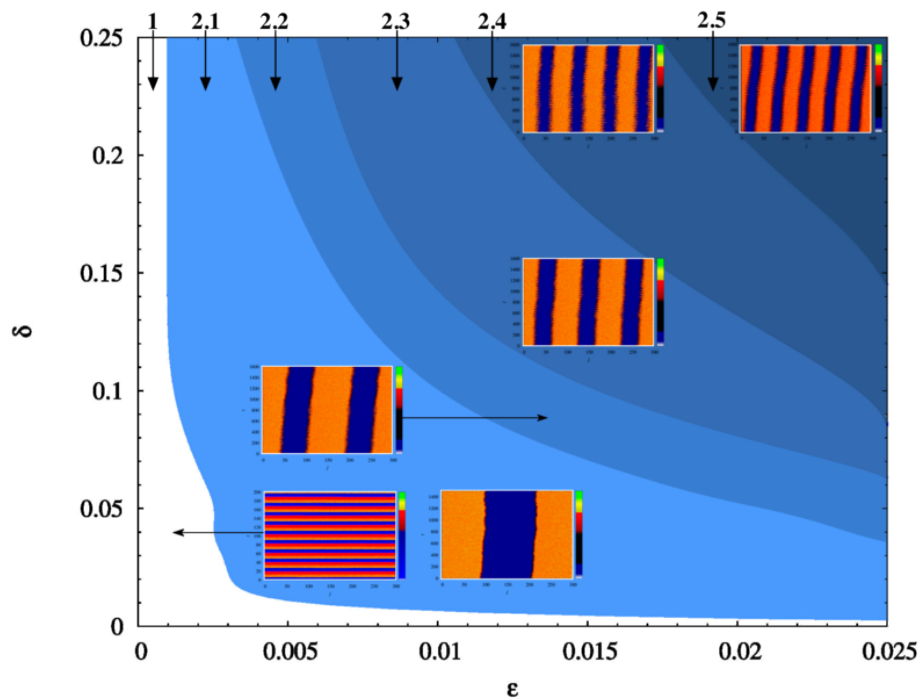


Рис. 2.15. Диаграмма режимов в системе (2.7) на плоскости управляющих параметров  $(\varepsilon, \delta)$  при  $k = 0.505$

зью [68], можно увидеть их несоответствие: имеет место как бы зеркальное отражение диаграмм. В модели (2.7) области мультистабильности химерных

режимов наблюдается при больших значениях  $\varepsilon$ , а на диаграмме из [68], напротив, при малых значениях  $\varepsilon$ . Это несоответствие легко объяснить. Параметры рассматриваемых систем неидентичны и могут быть связаны с нелинейным преобразованием. Так в модели (2.7) аналогом времени запаздывания  $T_d$  является период  $T_r$  вращения волны вокруг кольца осцилляторов. Он зависит от параметров системы. Расчеты показали, что с ростом  $\varepsilon$  период  $T_d$  в системе (2.7) увеличивается, причем нелинейно. Таким образом, большим значениям  $\varepsilon$  в системе (2.7) соответствуют малые значения параметра  $\varepsilon$  в системе с запаздывающей обратной связью (2.5).

### 2.2.3 Влияние свойств нелинейности связи на химерные структуры

Нелинейное однонаправленное взаимодействие является основным фактором, обуславливающим появление химерных структур в ансамбле (2.7), состоящем из простейших осцилляторов. В то же время, особый тип нелинейности, описываемый функцией (2.6), не играет определяющей роли в устойчивости химерного состояния. Эта функция должна иметь как минимум один максимум. Численные вычисления показали, что существование других максимумов в нелинейности не требуется. При этом необходимым условием является сдвиг максимума относительно нуля. Был исследован другой тип нелинейности, отличного от (2.6), описываемого следующим уравнением:

$$f(x) = A + B \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma}\right\}, \quad (2.8)$$

Форма нелинейности при этом представляет собой сдвинутую кривую Гаусса. Были выбраны следующие параметры нелинейности:  $A = 0.5$ ,  $B = 3.5$ ,  $\mu = 0.35$ ,  $\sigma = 0.15$ . Пример химерного состояния с таким типом нелинейности представлен на рисунке 2.16

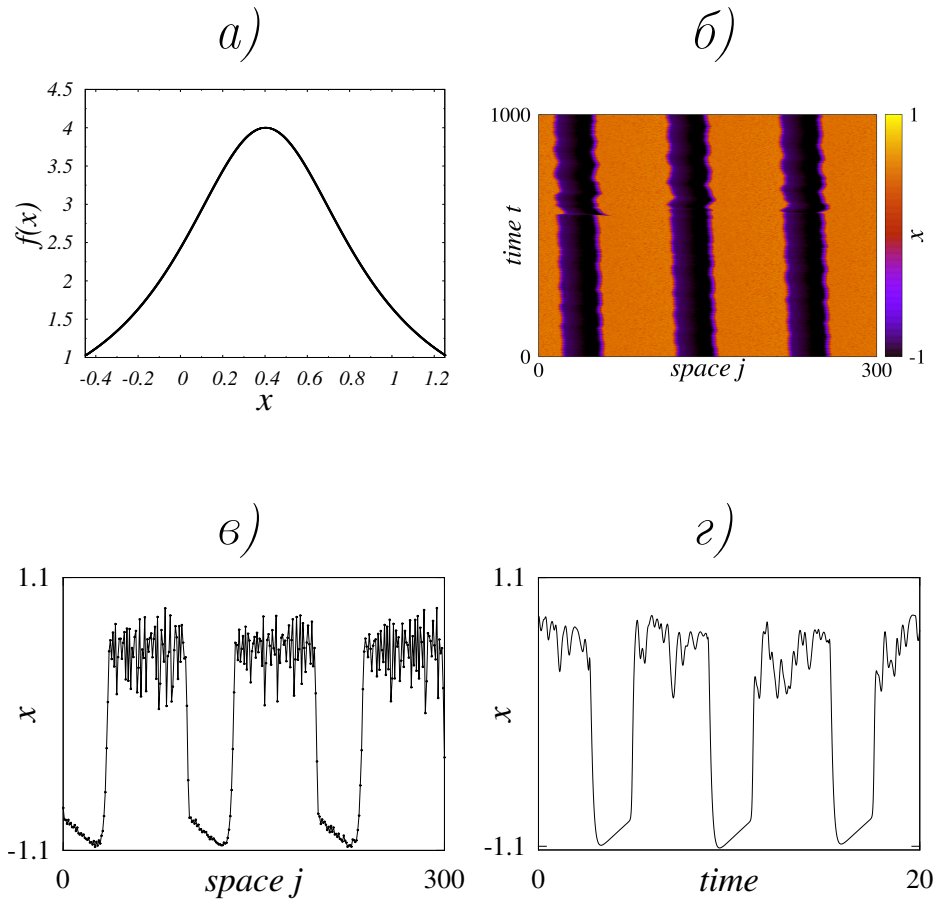


Рис. 2.16. Режим бегущей химеры в системе (2.7) с нелинейной функцией связи (2.8) при  $\varepsilon = 0.01$  и  $k = 0.506$ : а – график нелинейной функции (2.8); б – пространственно-временная диаграмма в движущейся системе координат; в – пространственный профиль системы; г – временная реализация для 150-го элемента системы. Начальные условия - случайные

Во втором случае нелинейность функции задавалась в соответствии со сдвинутым лоренцианом и описывается следующей функцией:

$$f(x) = \frac{1}{\beta^2 + (x - A)^2}, \quad (2.9)$$

где  $\beta = 0.5$  и  $A = 0.4$  – параметры нелинейной функции (2.9). Исследуемая система с таким типом нелинейности в связи демонстрирует те же самые состояния, что и в предыдущем случае.

В обоих случаях, динамика исследуемой системы подобна случаю нелинейности связи (2.6). Таким образом был определен тип нелинейной функции

однонаправленной связи, при котором наблюдаются устойчивые химерные состояния. Можно утверждать, что все свойства химер, присущие при нелинейности связи типа (2.6), сохраняются и при замене нелинейности на (2.8) и (2.9).

## 2.3 Выводы по второй главе

В результате проведенных исследований модели бистабильной среды на основе кольца диссипативных осцилляторов Дуффинга с локальной линейной однонаправленной связью (2.3) получены следующие результаты:

1. Показано, что в модели бистабильной среды при однонаправленном взаимодействии элементов без внешних воздействий реализуются незатухающие колебания, которые могут иметь как регулярный, так и хаотический характер.
2. Основными динамическими режимами в модели бистабильной среды (2.3) являются стационарные пространственные структуры, регулярные бегущие волны и хаотические бегущие волны. В режиме стационарных пространственных структур колебания в системе отсутствуют. Пространственный профиль может иметь как регулярный, так и нерегулярный характер, который определяется типом заданных начальных условий. Режим регулярных бегущих волн существует в небольшом интервале управляющих параметров. Для исследуемой модели среды типично явление мультистабильности. Число устойчивых мод, характеризующихся различной длиной волны, в исследуемой модели бистабильной среды практически неограниченно. В режиме хаотической динамики нерегулярный характер носят как внутриямные колебания, так и переключения между двумя состояниями равновесия.

3. В модели бистабильной среды (2.3) установлены и исследованы переходы от режима стационарных структур к режиму регулярных бегущих волн и от режима регулярных бегущих волн к хаотическим волнам. Построена диаграмма режимов на плоскости управляющих параметров, отвечающих за связь между элементами среды и высоту потенциального барьера в отдельном осцилляторе. Исследовано поведение старшего показателя Ляпунова при переходе от одного режима к другому. Так, при переходе к режиму регулярных бегущих волн происходит скачок от отрицательного значения старшего ЛХП к нулевому. При переходе к хаотической динамике наблюдается скачок старшего ЛХП в область положительных значений. Причем размер этого скачка увеличивался с ростом номера моды.

В результате исследования динамики кольца линейных диссипативных осцилляторов с локальным нелинейным однонаправленным взаимодействием (2.7) получены следующие результаты:

4. Установлены химероподобные режимы, представляющие собой чередование пространственных кластеров, соответствующих почти равновесному состоянию элементов, с кластерами пространственной некогерентности, в которых элементы совершают несинхронные хаотические колебания. Данный тип поведения подобен виртуальной химере, обнаруженной в осцилляторе с запаздывающей обратной связью. В отличие от большинства химер в ансамблях с нелокальной связью, обнаруженный тип химеры не является стационарным, т.е. границы кластеров вращаются вдоль кольца, так, что их ширина остается практически постоянной.
5. Исследована эволюция режимов в кольце осцилляторов с локальной однонаправленной связью (2.7) и построены диаграммы режимов на плоскости различных управляющих параметров. Показано, что химерные состояния существуют в широкой области значений коэффициента однонаправленной связи и параметра диссипации осцилляторов, и они становятся невозмож-

ными при слишком малой диссипации или слишком большом коэффициенте диффузионной связи.

6. Определен общий тип нелинейной функции однонаправленной связи, который приводит к рождению вращающихся химерных состояний в ансамбле. Показано, что при смене типа нелинейности связи на другой, обладающий соответствующими характеристиками, не приводит к заметным изменениям в свойствах установившегося режима.

# Глава 3. ХИМЕРЫ И УЕДИНЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ В АНСАМБЛЯХ БИСТАБИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

## Введение

Данная глава диссертации посвящена малоизученной ранее проблеме образования сложных пространственных структур, таких как химерные состояния и уединенные состояния, в ансамблях идентичных бистабильных элементов с нелокальными связями. Рассматривается как случай хаотической динамики парциальных систем, так и режим двух устойчивых точек равновесия. В качестве простейшего бистабильного элемента с дискретным временем исследуется кубическое отображение, которое может характеризоваться как двумя устойчивыми точками, так и двумя хаотическими аттракторами, претерпевающими бифуркацию слияния. В качестве моделей бистабильной системы с непрерывным временем выбраны цепь Чуа, система Лоренца и осциллятор ФитцХью-Нагумо. Цепь Чуа [143] является аналогом кубического отображения с хаотической динамикой для систем с непрерывным временем. Эта система, в зависимости от значений параметров, также характеризуется двумя сосуществующими регулярными или хаотическими аттракторами. Хаотические аттракторы при определенных значениях параметров сливаются в объединенный аттрактор, известный как "double scroll". Осциллятор Лоренца является базовой моделью нелинейной динамики, обладающей в определенной области значений параметров сингулярно-гиперболическим (квазигиперболическим) хаотическим ат-

трактором (аттрактор Лоренца) [144, 145]. Однако при других значениях параметров осциллятор Лоренца может находиться в состоянии бистабильности с двумя устойчивыми точками равновесия типа фокус. Осциллятор ФитцХью-Нагумо [131, 132], как отмечалось в Главе I, может демонстрировать не только возбудимый и автоколебательный режим, но также может представлять собой бистабильный осциллятор с двумя устойчивыми точками равновесия.

Проведенные исследования выявляют ряд общих свойств ансамблей, связанные с бистабильной динамикой элементов, в частности особый вид химерных структур, названный двухъямными химерными структурами.

Отдельным пунктом в данной главе рассматривается возможность реализации в ансамбле бистабильных элементов нового, сравнительно малоизученного, типа структуры, названного уединенным состоянием [54, 100, 101]. В отличие от химер, для уединенных состояний нельзя выделить целого кластера элементов, отличающихся по своему поведению от остальных. Имеются только отдельно взятые осцилляторы, находящиеся в особом, отличном от всех остальных состояниях.

Представленные в третьей главе диссертации результаты отражены в следующих публикациях: [107, 109, 111, 112, 114, 115, 117].

### **3.1 Химерные структуры в кольце кубических отображений**

Известно, что одна и та же система, в зависимости от параметров, может демонстрировать как регулярную, так и хаотическую бистабильную динамику, а кроме того, может переходить и в режим объединенного хаотического аттрактора. Всеми этими свойствами обладает простейшая динамическая си-



стема с бистабильной динамикой – кубическое отображение последования (см., например, [146]). Будем задавать кубическое отображение в виде:

$$x(n+1) = (\alpha x - x^3) \exp\left[-\frac{x^2}{\beta}\right], \quad (3.1)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  – управляющие параметры отображения.

Кубическое отображение (3.1) может демонстрировать как регулярное, так и хаотическое поведение в зависимости от параметра  $\alpha$ . Для демонстрации эволюции отдельно взятого кубического отображения с ростом параметра  $\alpha$  была построена фазо-параметрическая диаграмма, приведенная на рисунке 3.1.

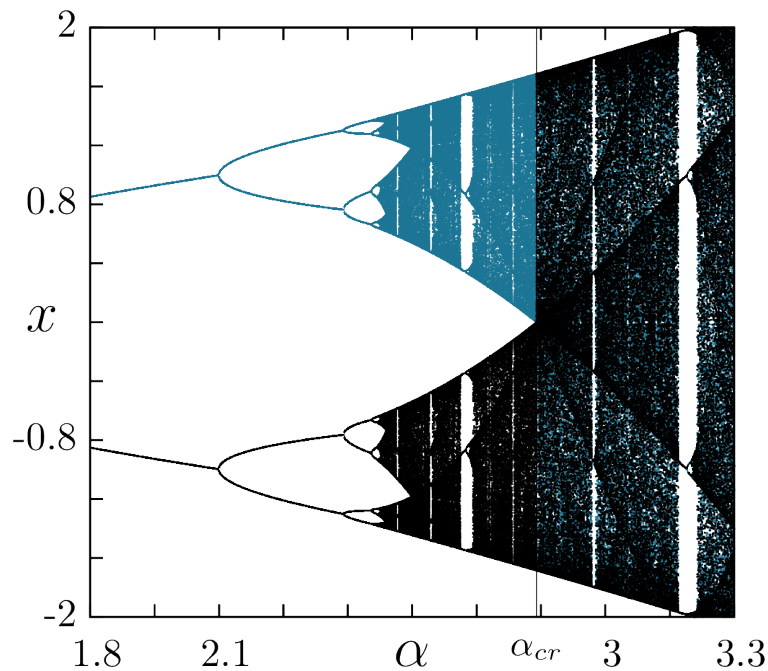


Рис. 3.1. Фазопараметрическая диаграмма для изолированного кубического отображения при вариации параметра  $\alpha$  и фиксированного  $\beta = 10$

Как видно из диаграммы, кубическое отображение демонстрирует регулярную динамику при малом значении параметра  $\alpha$ . С ростом этого параметра происходит переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода. Отображение (3.1) при  $\alpha < \alpha_{cr}$  характеризуется двумя сосуществующими аттракторами (регулярными либо хаотическими). При  $\alpha = \alpha_{cr} = 2.84$  происходит

бифуркация слияния хаотических аттракторов. Поэтому при  $\alpha > \alpha_{cr}$  система обладает только одним объединенным аттрактором.

Рассмотрим ансамбль, с парциальной ячейкой в виде такого отображения. Эта модель описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} x_i(n+1) &= f_i(n) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (f_k(n) - f_i(n)), \\ f_i(x) &= (\alpha x_i - x_i^3) \exp\left[-\frac{x_i^2}{\beta}\right], \quad i = 1, \dots, N, \\ x_{i+N}(n) &= x_i(n), \quad x_{i+N}(n) = x_i(n), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где индекс  $i$  – номер элемента в цепочке (дискретная пространственная координата),  $n$  – номер итерации (дискретное время),  $\sigma$  – сила связи,  $P$  – число соседей, связанных с элементом с индексом  $i$  с каждой стороны. Для характеристики нелокальности взаимодействия ведем радиус связи  $r = \frac{P}{N}$ . При исследовании динамики ансамбля (3.2) число элементов было выбрано  $N = 300$ . Параметр  $\beta$  зафиксирован и равен 10. Для характеристики нелокальности взаимодействия ведем радиус связи  $r = \frac{P}{N}$ .

### 3.1.1 Химеры в ансамбле кубических отображений с регулярной динамикой

Рассмотрим ансамбль (3.2) в случае регулярного поведения взаимодействующих элементов. Для этого зафиксируем  $\alpha = 2$ , что соответствует двум устойчивым неподвижным точкам в отдельно взятом отображении.

Для удобства изложения введем термин "потенциальная ямка" по аналогии с бистабильным осциллятором с непрерывным временем, типа осциллятора Дуффинга [147]. Будем считать, что устойчивая неподвижная точка в положительной области значений  $x_i$  соответствует положительной ямке, а в отрицательной области – отрицательной. Наличие собственной бистабильности (двух

"потенциальных ямок") у элементов ансамбля приводит к образованию двух типов пространственных структур: структур, соответствующих единовременному нахождению всех элементов в одной и той же ямке и структур, образованных элементами, распределенными между разными ямками. Назовем первый тип одноямными структурами, а второй - двухъямными. Кроме того, элементы ансамбля могут совершать колебания во времени, оставаясь в одной и той же ямке или переключаться между двумя ямками.

Для описания поведения системы (3.2) была построена диаграмма режимов на плоскости параметров  $(\sigma, r)$ , представленная на рисунке 3.2. Режимы рассматривались для серии случайных реализаций начальных условий с равномерным распределением значений в интервале  $[-1;1]$  (т.е. начальные состояния распределены примерно поровну между двумя ямками). При выборе начальных состояний только в одной ямке в случае отсутствия колебаний элементов в ансамбле наблюдается только пространственно-однородный режим при любых  $r$  и  $\sigma$ . Точное определение границ режимов для системы 3.2 не представляется возможным из-за явления мультистабильности. При одних и тех же значениях параметров в ансамбле может реализоваться несколько режимов с различными пространственными профилями. По этой причине на диаграмме одна и та же область может быть отмечена как сплошным тоном, так и штриховкой. Сплошная область свидетельствует о том, что режим наблюдался для всех рассмотренных начальных условий. Штрихованная область означает, что в данной области сосуществуют режимы, соответствующие как основному тону области, так и второму тону штриховки.

Для выбранных параметров отображений при любых значениях  $r$  и  $\sigma$  в ансамбле (3.2) наблюдаются только неподвижные пространственные структуры. При больших значениях силы связи  $\sigma$  имеет место частичная или полная пространственная когерентность (область  $A$  на диаграмме 3.2). Данный режим характеризуется гладким пространственным профилем, так что соседние элементы имеют в один момент времени близкие состояния. При этом простран-

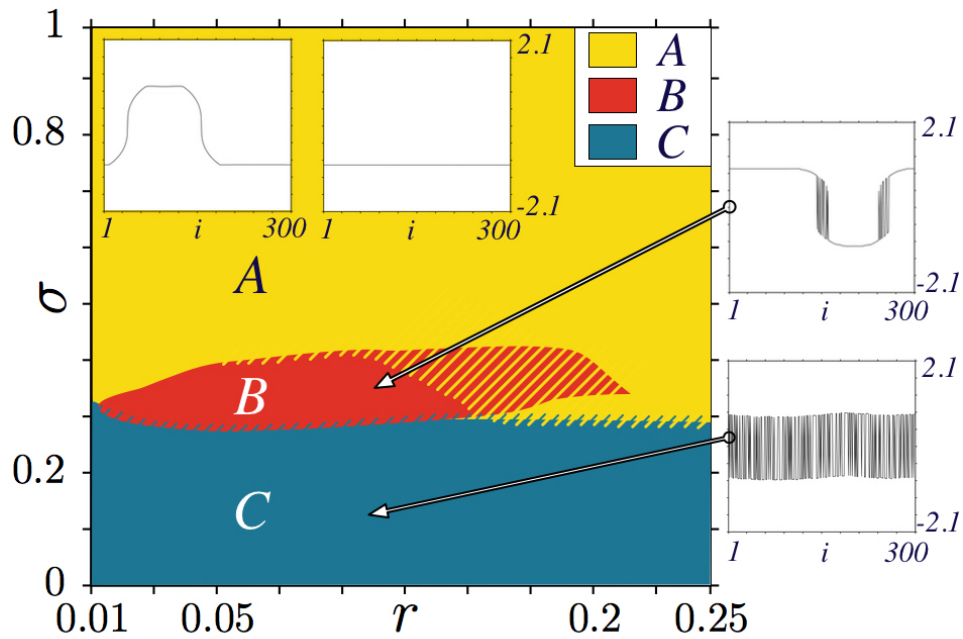


Рис. 3.2. Диаграмма режимов для системы (3.2) на плоскости параметров  $(\sigma, r)$ . A: пространственная когерентность, B: chimera death, C: пространственно-некогерентные стационарные структуры. Параметры:  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $N = 300$

ственная структура может быть как одноямной, так и двухъямной. В случае одноямной пространственной структуры все элементы принимают одинаковые значения, соответствующие одному устойчивому равновесию. При двухъямном пространственном распределении элементы распределены между двумя устойчивыми равновесиями, а состояния элементов вблизи границ ямок отличны от координат точек равновесия.

При уменьшении радиуса связи возможны два сценария эволюции пространственной структуры. Первый – переход из области A в область B, в которой наблюдаются неподвижные пространственные структуры типа химер. Элементы ансамбля, оставаясь неподвижными, группируются в кластеры. Можно выделить кластеры пространственной когерентности и некогерентности (см. вставку на рисунке 3.2). Элементы когерентных кластеров распределены в одной ямке, в то время как в некогерентном кластере наблюдается нерегулярное распределение между ямками. Конкретный вид структуры, разумеется, зави-

сит от начальных условий, но характер структуры в целом сохраняется при случайном выборе начального распределения. Неподвижные двухъямные химеры наблюдаются только для относительно малых значений радиуса связи  $r$ , не превышающих значение 0.01. Для больших значений  $r$  этот режим реализуется только для специальных начальных условий (заштрихованная часть области  $B$ ) и при дальнейшем росте радиуса связи пропадает совсем. Можно отметить сходство неподвижных химерных структур в ансамбле (3.2) с неподвижными структурами, обнаруженными в ансамбле гармонических автогенераторов в режиме химерной смерти [44].

С уменьшением силы связи происходит переход в область  $C$ , соответствующую нерегулярным стационарным пространственным структурам, хорошо известным для ансамблей бистабильных систем с локальной связью (см., например, [4, 7, 148]). Вблизи границы с областью  $B$  пространственные структуры упрощаются, большинство элементов группируется в одной и той же ямке. При уменьшении силы связи структура усложняется. Данное поведение наблюдается при любом радиусе связи, практически не изменяясь количественно на всем интервале значений  $r$ .

Рассмотрим подробнее область  $B$ , в которой существуют неподвижные химеры. Формирование такой структуры является прямым следствием бистабильности элемента системы (3.2), а также нелокального характера связи. Типичная структура, наблюдаемая в области  $B$  представлена на рисунке 3.3. Изменяя начальные условия, можно получить структуры с двумя, четырьмя и даже шестью некогерентными кластерами. С ростом  $r$  мультистабильность пропадает и в системе устанавливаются структуры только с двумя некогерентными кластерами (см. рисунок 3.3,а).

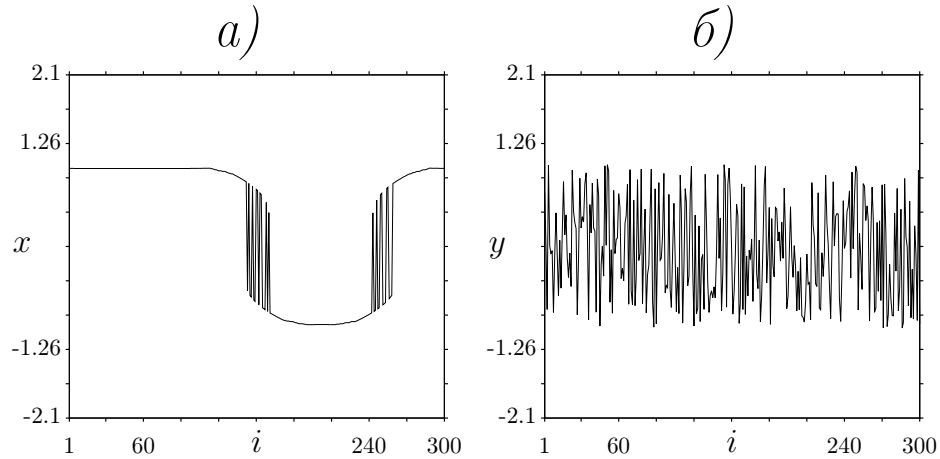


Рис. 3.3. Неподвижная химерная структура, наблюдаемая в системе (3.2) при  $\sigma = 0.31$  и  $r = 0.097$ : а – мгновенный пространственный профиль; б – начальные условия, представляющие собой случайное распределение между ямками. Параметры:  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 10$ ,  $N = 300$

### 3.1.2 Химеры в ансамбле кубических отображений с хаотической динамикой

Теперь значение параметра  $\alpha$  положим равным  $\alpha = 3$ . Остальные параметры остаются такими же как и в предыдущем случае. Выбранное значение параметра  $\alpha$  соответствует объединенному хаотическому аттрактору (моностабильности) в отдельно взятом кубическом отображении. В результате взаимодействия элементов ансамбля эффективное значение параметра  $\alpha$  уменьшается с ростом силы связи (см. [47]).

Действительно, уравнения (3.2) можно переписать в виде:

$$x_i(n+1) = (1 - \sigma)f_i(n) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (f_k(n)), \quad (3.3)$$

$$f_i(x) = (\alpha x_i - x_i^3) \exp \left[ -\frac{x_i^2}{\beta} \right],$$

В этом случае видно, что перед управляющим параметром  $\alpha$  появляется множитель  $1 - \sigma$ , убывающий с ростом силы связи  $\sigma$ . Таким образом, динамика

решетки будет зависеть от эффективного значения параметра  $\alpha_{eff} = \alpha_{eff}(\sigma)$ . В предельном случае отсутствия связи  $\alpha_{eff} = \alpha$ . При сильной связи  $\sigma = 1$  уравнения принимают следующий вид:

$$x_i(n+1) = \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (f_k(n)), \quad (3.4)$$

Т.е. член, отвечающий за собственную динамику отдельного элемента исчезает и все элементы совершают вынужденные колебания под действием сил со стороны соседних элементов. В результате, если выбрать значение  $\alpha$  соответствующим объединенному хаотическому аттрактору (в данной части работы  $\alpha = 3$ ), то должна наблюдаться следующая картина: при малых значениях силы связи система будет демонстрировать во времени режим объединенных хаотических колебаний, затем, с ростом силы связи  $\sigma$ , эффективный параметр  $\alpha_{eff}$  будет уменьшаться, в результате система перейдет в бистабильный режим. При дальнейшем увеличении  $\sigma$  внешнее воздействие со стороны соседей будет преобладать над собственной динамикой элемента ансамбля. В этом случае, снова будет наблюдаться режим объединенного хаоса.

Пространственные структуры в ансамбле в случае хаотической динамики перестают быть неподвижными. Как было сказано выше, при изменении значения силы связи можно наблюдать режимы колебаний элементов, соответствующие объединенному хаосу, либо элементы будут демонстрировать бистабильную динамику. Соответственно, в системе можно наблюдать большое разнообразие одноямных и двухъямных пространственных структур, сопровождающихся различным характером колебаний элементов ансамбля во времени. Тип пространственного распределения (одноямный или двухъямный) не связан однозначно с поведением во времени. Так, в случае одноямной структуры, все элементы могут совершать переходы из ямки в ямку одновременно, в случае двухъямной структуры каждый элемент может оставаться в пределах одной ямки.

На рисунке 3.4 приведена диаграмма режимов системы (3.2) на плоскости параметров связи  $(r, \sigma)$  при фиксированных значениях параметров  $\alpha = 3$  и  $\beta = 10$ .

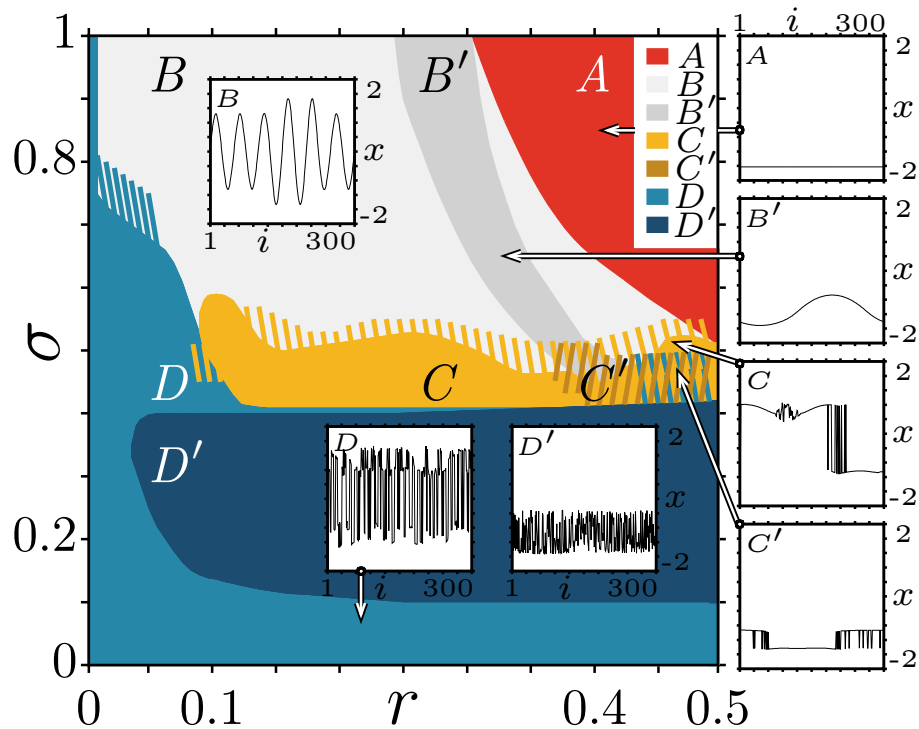


Рис. 3.4. Диаграмма режимов для системы (3.2) на плоскости параметров  $(\sigma, r)$ : Область А соответствует полной хаотической синхронизации; В – область частичной когерентности с преобладанием двухъямных структур; В' – область частичной когерентности с преобладанием одноямных структур; С – область двухъямных химерных структур; С' – область одноямных химерных структур; D – полностью некогерентная двухъямная структура; D' – полностью некогерентная одноямная структура. Параметры:  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 10$ ,  $N = 300$

Диаграмма режимов отражает основные типы пространственно-временной динамики, наблюдающейся в ансамбле (3.2) при изменении параметров  $\sigma, r$ . Из-за высокой мультистабильности многие режимы в системе (3.2) перекрываются. Такие области обозначены чередующимися полосами с цветами, в соответствии с цветовой схемой режимов. Также области с одним и тем же характером колебаний могут наблюдаться для одноямной или двухъямной структуры. На диаграмме двухъямная область выделяется более



светлым тоном, а однопериодная – более темным тоном, а к букве, обозначающей режим добавляется штрих. Основные области на диаграмме на рисунке 3.4 проиллюстрированы соответствующими мгновенными пространственными профилями.

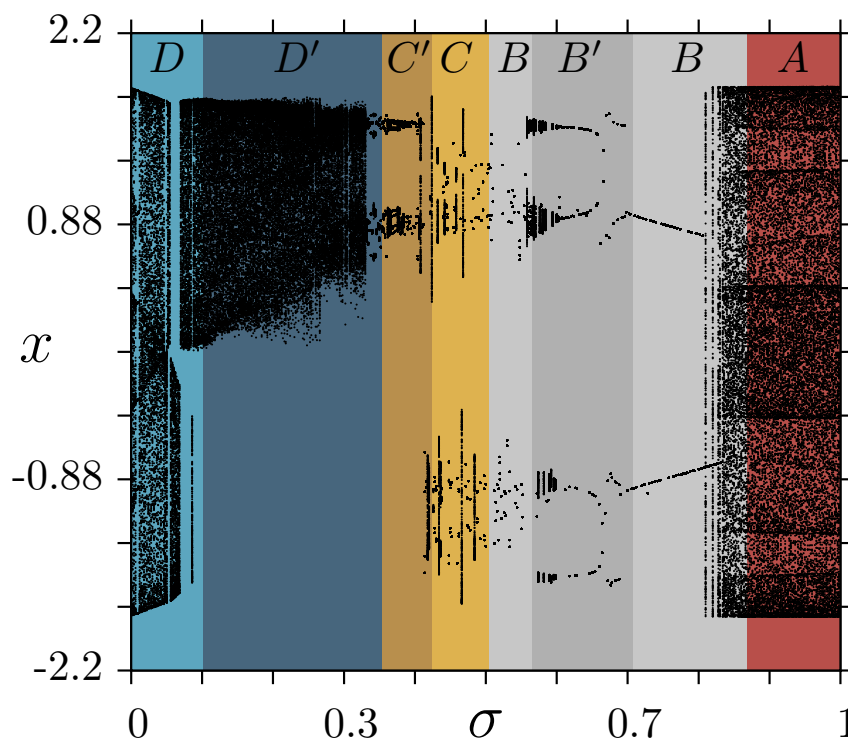


Рис. 3.5. Фазо-параметрическая диаграмма колебаний элемента ансамбля с номером  $i = 50$  при изменении силы связи  $\sigma$  и фиксированном радиусе  $r = 0.37$ . Области обозначены римскими цифрами (сверху) и выделены тоном в соответствии с режимами на рисунке 3.4. Параметры:  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 10$ ,  $N = 300$

Рассмотрим основные типы пространственно-временной динамики, отмеченные на диаграмме режимов и фазо-параметрической диаграмме для выбранного элемента ансамбля ( $i = 50$ ). Области на фазо-параметрической диаграмме выделены тонами и помечены буквами в соответствии с диаграммой режимов на рисунке 3.4.

Область  $A$  (красного цвета) соответствует полной хаотической синхронизации элементов. В данной области все элементы ансамбля ведут себя как единое целое. Колебания являются хаотическими и соответствуют объединенному

аттрактору. В области  $B$  и  $B'$  (серого цвета) наблюдается режим частичной когерентности, т.е. имеет место гладкий пространственный профиль. Соответствующие пространственные структуры могут быть как одноямыми (в области  $B'$ ), так и двухъямными (область  $B$ ). При этом, хотя в области  $B$  наблюдаются двухъямные структуры, каждый элемент демонстрирует одноямную хаотическую динамику. Вблизи границы области  $A$  режим по своим характеристикам близок к полной синхронизации. Значение  $\sigma \approx 0.81$  соответствует объединению двух областей хаотических колебаний. При  $\sigma < 0.81$  каждый отдельный осциллятор становится бистабильным и колеблется только в пределах одной ямки. С уменьшением силы связи динамика элементов становится периодической и остается такой вплоть до  $\sigma \approx 0.7$ . Области  $C$  и  $C'$  соответствуют химерным структурам, которые также могут быть двухъямными (область  $C$ ) и одноямыми (область  $C'$ ). Эти структуры будут более подробно рассмотрены ниже. В областях  $D$  и  $D'$  осцилляторы полностью некогерентны образуют нерегулярные пространственные структуры. В области  $D$  (светло-синий цвет) эти структуры являются двухъямными. В то же время при  $\sigma > 0.05$  каждый элемент совершает хаотические колебания только в пределах своей ямки. В большой области значений  $r$  и  $\sigma$  все элементы системы колеблются в одной и той же ямке и реализуются одноямные пространственные структуры, чему соответствует область  $D'$ . При  $\sigma < 0.05$  для любых значений радиуса связи элементы начинают вести себя как несвязанные.

Теперь рассмотрим химерные структуры, которые наблюдаются в областях  $C$  и  $C'$ . Для области  $C'$  характерна одноямная динамика как в пространстве, так и во времени. Пример подобной структуры приведен на рисунке 3.6.

На рисунке 3.6,а приведен мгновенный пространственный профиль  $x_i(i)$ . На нем видно, что в ансамбле формируются кластеры с различной динамикой: в когерентном кластере элементы ведут себя синхронно, а в некогерентном кластере соседние элементы колеблются со сдвигом на одну итерацию, что соответствует сдвигу на половину периода для систем с непрерывным временем.

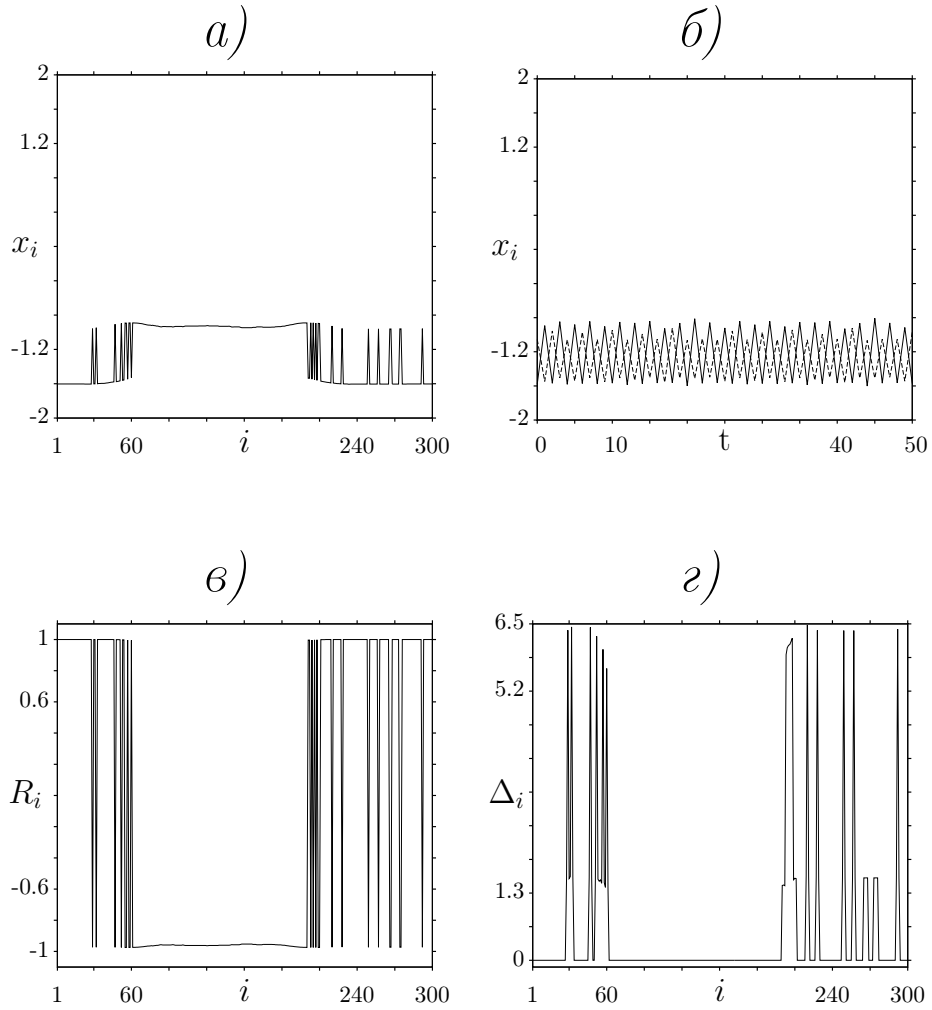


Рис. 3.6. Одноямная химерная структура при  $\sigma = 0.43$  и  $r = 0.42$  (область  $C'$  на диаграмме режимов на рисунке 3.4). а – мгновенный пространственный профиль, б – реализации колебаний во времени  $x_i(n)$  для 55го и 56го элементов из некогерентного кластера, в – взаимная корреляция 1го элемента со всеми остальными с элементами системы (3.2), г – средний квадрат девиации состояний соседних элементов. Число шагов установления:  $10^5$ , число шагов при расчете характеристик режима:  $10^4$ . Параметры:  $\alpha = 3$ ,  
 $\beta = 10$ ,  $N = 300$

Данное поведение характерно для фазовых химер, наблюдающихся в ансамблях осцилляторов с удвоениями периода (см. [47, 87, 88]).

Для количественного анализа данного химерного состояния была рассчитана взаимная корреляция  $R_1(i)$  1го элемента с остальными элементами

( $i = 2, 3, \dots$ ):

$$R_n(i) = \frac{\langle \tilde{x}_i(t) \tilde{x}_1(t) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{x}_n^2(t) \rangle \langle \tilde{x}_i^2(t) \rangle}}, \quad (3.5)$$

$$\tilde{x}_i(t) = x_i - \langle x_i(t) \rangle.$$

График пространственного распределения взаимной корреляции представлен на рисунке 3.6,в.

Кроме взаимной корреляции был рассчитан средний квадрат девиации элементов  $\Delta_i(i)$ , определяемый как:

$$\Delta_i = \langle (2x_i(t) - x_{i+1}(t) - x_{i-1}(t))^2 \rangle. \quad (3.6)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени. Эта характеристика пространственного распределения дает усредненную оценку разнице мгновенных состояний соседних элементов. Средний квадрат девиации состояний соседних элементов  $\Delta_i$  показана на рисунке 3.6,г.

Как можно увидеть из графика на рисунке 3.6,в в некогерентном кластере значения взаимной корреляции  $R_1(i)$  чередуются между значениями близкими к  $\pm 1$ . Это означает, что одни элементы кластера колеблются в фазе с первым элементом ансамбля, а другие - противофазно. В когерентных кластерах величина  $R_1(i)$  принимает одни и те же значения для всех элементов (либо  $+1$ , либо  $-1$ , в зависимости от расположения кластера). Средний квадрат девиации  $\Delta_i$  также отражает значительные различия в поведении элементов в когерентных и некогерентных кластерах. В когерентных кластерах  $\Delta_i \approx 0$ , т.е. поведение элементов практически синхронно, а в некогерентных кластерах значения  $\Delta_i$  достигают существенных величин. Приведенные характеристики позволяют определить границы когерентных и некогерентных кластеров, а также дают основания относить рассматриваемый режим к типу фазовых химер.

Особый интерес представляют двухъямные химерные структуры, которые в рассматриваемом режиме уже не являются неподвижными. Данный режим превалирует в области  $C$  на диаграмме режимов, приведенной на рисун-

ке 3.4. Элементы, принадлежащие когерентным кластерам двухъямной химеры в один момент времени всегда оказываются в одной и той же ямке, в то время как элементы в некогерентном кластере нерегулярно разбросаны между ямками. Такие структуры могут возникать только в ансамблях бистабильных элементов и не реализуются для элементов с другим типом хаотического поведения, например для логистических отображений или осцилляторов Рёсслера. Пример двухъямной химеры представлен на рисунке 3.7.

Мгновенный пространственный профиль  $x_i(i)$  двухъямной химерной структуры представлен на рисунке 3.7,а. На нем видно сразу два типа некогерентных кластеров, соответствующих амплитудной химере и двухъямной химере. Для демонстрации пространственно-временной динамики данного режима на рисунке 3.7,г приведен набор из 30 мгновенных пространственных профилей. Видно, что все элементы ансамбля (3.2) колеблются в пределах своей ямки, не переключаясь в другую. Элементы из "головы" амплитудной химеры совершают колебания с достаточно большой амплитудой в пределах положительной ямки, причем фазы колебаний разных элементов совпадают, однако мгновенные значения амплитуд существенно различны. Реализации колебаний во времени для двух соседних элементов с номерами  $i = 88$  и  $i = 89$  приведены на рисунке 3.7,б. Виден хаотический характер колебаний. Реализации для двух соседних элементов некогерентного кластера, соответствующего двухъямной химере, расположенных в разных ямках, представлены на рисунке 3.7,д. Из графика видно, что элементы совершают нерегулярные колебания малой амплитуды каждый в пределах своей ямки. Для количественного анализа поведения системы были вычислены взаимные корреляции  $R_1(i)$  и средний квадрат девиации элементов системы  $\Delta_i$ . Соответствующие графики изображены на рисунке 3.7,в и 3.7,е, соответственно. Для определения характера некогерентных кластеров в данном случае необходимы обе эти характеристики. Так взаимная корреляция хорошо показывает область существования амплитудной химеры, которой соответствуют значения  $|R_1(i)|$  заметно меньшие единицы. Простран-

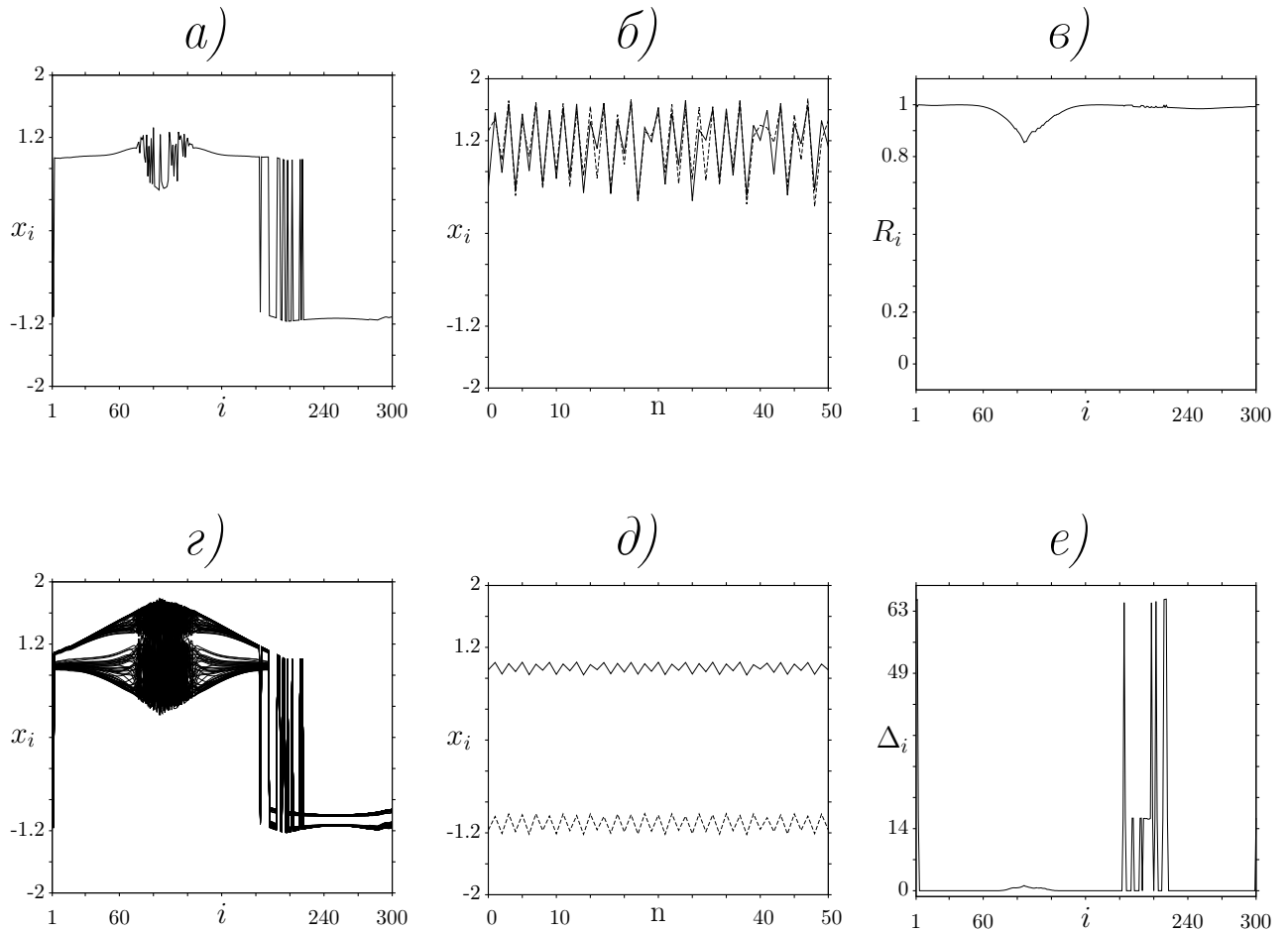


Рис. 3.7. Двухъямная химерная структура при  $\sigma = 0.43$  и  $r = 0.42$  (область  $C'$  на диаграмме режимов на рисунке 3.4): а – мгновенный пространственный профиль; б – реализации колебаний  $x_i(n)$  для 88-го (сплошная линия) и 89-го (пунктирная линия) элементов из некогерентного кластера; в – взаимная корреляция 1-го элемента с остальными элементами ансамбля (3.2); г – набор из 30 мгновенных пространственных профилей в разные моменты времени; д – реализации колебаний  $x_i(n)$  для 208-го (верхняя сплошная линия) и 209-го (нижняя пунктирная линия) элементов из некогерентного кластера; е – средний квадрат девиации состояний соседних элементов. Число шагов установления:  $10^5$ , число шагов основного цикла интегрирования:  $10^4$ .

Параметры:  $\alpha = 3$ ,  $\beta = 10$ ,  $N = 300$

ственное распределение среднего квадрата девиации  $\Delta_i$  четко диагностирует существенную разницу значений этой характеристики в когерентных кластерах

и в области головы двухъямной химеры. При этом для амплитудной химеры значения  $\Delta_i$  малы по сравнению со значениями для двухъямной химеры, так что на графике  $\Delta_i$  амплитудная химера малозаметна. Таким образом, в случае двухъямных структур для количественного анализа химерных состояний следует использовать обе рассмотренные характеристики.

В итоге, можно сказать, что ансамбль нелокально связанных хаотических кубических отображений демонстрирует как уже известные химерные состояния, которые наблюдаются в отображениях с фейгенбаумовским сценарием развития хаоса (логистическое отображение, отображение Эно и др.), так и химерные состояния, появление которых непосредственно связано с бистабильностью элементов, составляющих ансамбль. Возникает вопрос, возможно ли подобное поведение в ансамблях, состоящих из бистабильных систем с непрерывным временем. Для ответа на него были проведены исследования ансамбля нелокально связанных осцилляторов Чуа.

### 3.2 Химерные структуры в кольце осцилляторов Чуа

Аналогом кубического отображения с хаотической динамикой для систем с непрерывным временем может служить радиоэлектронная цепь Чуа (осциллятор Чуа). Данная система является радиофизическим устройством, свойства которого хорошо изучены как методами компьютерного моделирования, так и экспериментально. В данном разделе будет рассмотрено поведение ансамбля с нелокальными связями, составленного из осцилляторов Чуа. Ансамбль описы-

вадается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= \alpha(y_i - x_i - H(x_i)) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (x_k - x_i), \\
 \dot{y}_i &= x_i - y_i - z_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (y_k - y_i), \\
 \dot{z}_i &= -\beta y_i, \\
 H(x) &= Bx + \frac{1}{2}(A - B)(|x + 1| - |x - 1|), \\
 x_{i+N}(t) &= x_i(t), \quad y_{i+N}(t) = y_i(t), \\
 z_{i+N}(t) &= z_i(t), \quad i = 1, \dots, N.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Здесь индекс  $i$  определяет положение элемента в цепочке,  $t$  – момент времени,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $A$ ,  $B$  – управляющие параметры цепи Чуа,  $\sigma$  – коэффициент связи,  $P$  – число связей с каждой стороны. При проведении исследований размер исследуемого ансамбля полагался равным  $N = 300$  и были зафиксированы следующие параметры:  $\alpha = 9.4$ ,  $\beta = 14.28$ ,  $A = -1.143$ ,  $B = -0.714$ . При таких значениях параметров изолированный осциллятор Чуа находится в режиме объединенного хаотического аттрактора, известного как "double-scroll". Динамика ансамбля вычислялась с помощью модифицированного метода Эйлера с шагом  $h = 0.001$ . Время установления для всех измерений равнялось 10000, а время счета – 3000.

Как и для ансамбля (3.2) нелокальное взаимодействие за счет связи приводит к сдвигу эффективного значения параметра  $\alpha$ . При этом, с ростом силы связи наблюдается поведение, во многом подобное поведению ансамбля кубических отображений. Как и в предыдущем случае будем использовать понятие положительной и отрицательной потенциальной ямки для значений переменной  $x$  в положительной или отрицательной областях значений. Соответственно, будем использовать понятия одноямной и двухъямной пространственных структур.

Рассмотрим диаграмму режимов на плоскости управляющих параметров  $r$  и  $\sigma$ , представленную на рисунке 3.8. Границы режимов получены путем усред-



нения с использованием случайных начальных распределений. Диаграмма режимов демонстрирует основные типы пространственно-временной динамики, наблюдаемые в ансамбле (3.7) при изменении параметров  $\sigma$  и  $r$ . Из-за сильной мультистабильности многие режимы в системе (3.2) перекрываются. Такие области, как и раньше, обозначены чередующимися полосами с цветами соответствующими сосуществующим режимам. Режимы со схожим поведением могут наблюдаться как для одноямной, так и для двухъямной пространственной структуры. Области существования двухъямных структур обозначены буквой без штриха и выделены более светлым тоном, а одноямных – такой же буквой со штрихом и более темным тоном. Некоторые типичные структуры, соответствующие разным областям на диаграмме на рисунке 3.8 проиллюстрированы мгновенными пространственными профилями.

Опишем более детально основные виды пространственно-временной динамики, отраженные на диаграмме на рисунке 3.8. Для выбранного элемента с номером  $i = 1$  была построена фазо-параметрическая диаграмма при изменении силы связи  $\sigma$  и фиксированном радиусе связи  $r = 0.37$  (рисунок 3.9). Области с различными режимами на диаграмме выделены тоном и помечены буквами в соответствии с диаграммой режимов на рисунке 3.8.

Режим, отмеченный буквой  $A$ , представляет собой полную хаотическую синхронизацию осцилляторов, которая реализуется только для больших радиусов связи. С уменьшением силы связи наблюдается появление двухъямных структур с гладким профилем, то есть имеет место частичная когерентность (область  $B$  на диаграмме режимов на рисунке 3.8). На границе с областью полной синхронизации динамика элементов во времени является хаотической, как и в области полной синхронизации, и переменные принимают как положительные, так и отрицательные значения. С уменьшением  $\sigma$  динамика элементов становится периодической и каждый элемент колеблется только в пределах собственной ямки. Однако пространственное распределение остается двухъямным. Отметим, что при большом радиусе связи ( $r > 0.45$ ) данный режим всегда

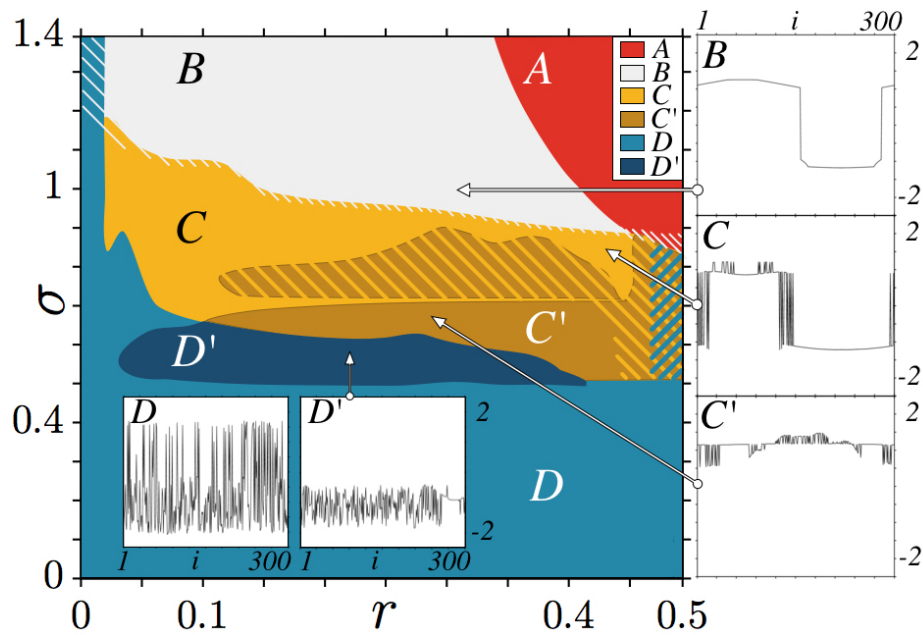


Рис. 3.8. Диаграмма режимов системы (3.7) на плоскости параметров  $(\sigma, r)$ : область  $A$  соответствует полной хаотической синхронизации;  $B$  – область частичной когерентности;  $C$  – химерные состояния в двухъямных структурах;  $C'$  – химерные состояния в одноямных структурах;  $D$  – полная некогерентность в двухъямных структурах;  $D'$  – полная некогерентность в одноямных структурах. Параметры:  $\alpha = 9.4$ ,  $\beta = 14.28$ ,  $A = -1.143$ ,  $B = -0.714$  и  $N = 300$

сосуществует в одной области с режимом полной хаотической синхронизации и режимом химер. При дальнейшем уменьшении силы связи в ансамбле появляются химеры (области  $C$  и  $C'$  желтого цвета на диаграмме режимов на рисунке 3.8). Могут наблюдаться как одноямные (область  $C'$ ), так и двухъямные (область  $C$ ) химерные структуры. В области двухъямных химер динамика осцилляторов преимущественно регулярная или слабо хаотическая, в то время как для большей части одноямных структур наблюдается развитый хаос, хотя вблизи границы  $C$  и  $C'$  динамика также может быть регулярной (см. рисунок 3.9). В большой области параметров  $r, \sigma$  одноямные и двухъямные химеры сосуществуют (чередующиеся полосы светло-желтого и темно-желтого цвета в областях  $C - C'$ ). В областях  $D$  и  $D'$  реализуется режим некогерентности или

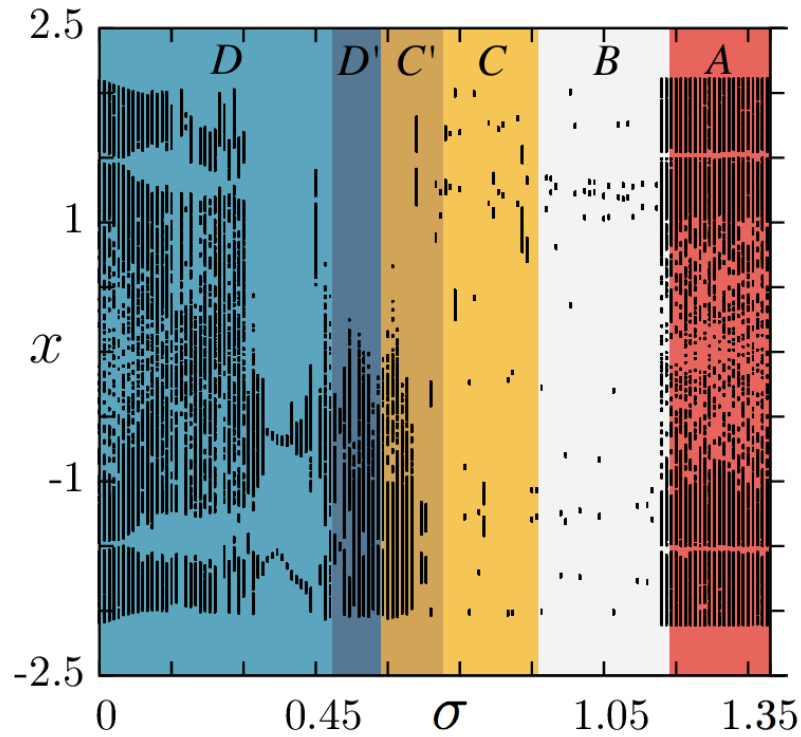


Рис. 3.9. Фазо-параметрическая диаграмма для элемента ансамбля (3.7) с номером  $i = 1$  при изменяющейся силы связи  $\sigma$  и фиксированном радиусе связи  $r = 0.37$ . Области, соответствующие различным режимам на диаграмме режимов на рисунке 3.8 выделены теми же тонами и помечены такими же буквами. Параметры:  $\alpha = 9.4$ ,  $\beta = 14.28$ ,  $A = -1.143$ ,  $B = -0.714$  и  $N = 300$  десинхронизации. Данный режим наблюдается при малых значениях силы связи. При этом в пространстве образуются нерегулярные структуры. Они могут быть одноямными (область  $D'$ ) и двухъямными (область  $D$ ). Динамика элементов во времени с уменьшением силы связи также претерпевает значительные изменения. Так, в области одноямных структур все элементы ансамбля хаотически колеблются в одной и той же ямке, никогда не переключаясь между ямками. С уменьшением  $\sigma$  структуры становятся двухъямными, однако осцилляторы продолжают колебаться в пределах одной ямки. Причем существует определенный интервал значений  $\sigma$ , где колебания являются периодическими. При значении силы связи  $\sigma < 0.29$  колебания элементов во времени сопровождаются переключениями из ямки в ямку (режим "double scroll").

Особо стоит отметить поведение ансамбля при очень большом ( $\sigma > 0.45$ ) и очень малом ( $\sigma < 0.03$ ) радиусах связи. Когда взаимодействие между элементами близко к глобальному, становится невозможным выделить область существования химер в силу мультистабильности: в ансамбле сосуществуют как различные химерные состояния, так и полностью нерегулярные структуры. Эта область показана чередующимися полосами разных тонов (синий и желтый цвета). При связи близкой к локальной в системе наблюдаются только двухъямные нерегулярные структуры, которые при большой силе связи начинают сосуществовать с частично когерентными структурами, имеющими сложный, но все же гладкий пространственный профиль. Таким образом, можно сделать вывод, что ансамбль осцилляторов Чуа (3.7) в целом демонстрирует поведение, сходное с поведением ансамбля кубических отображений (3.2).

Рассмотрим химерные состояния, наблюдающиеся в ансамбле хаотических осцилляторов Чуа. Они могут соответствовать как одноямным, так и двухъямным пространственным структурам. Для начала рассмотрим химеры, наблюдающиеся в области  $C'$  на диаграмме режимов на рисунке 3.8. Типичный пример такой структуры представлен на рисунке 3.10,а.

На мгновенном пространственном профиле видно, что в кольце (3.7) сосуществуют кластеры с регулярным и нерегулярным пространственным распределением. В когерентном кластере осцилляторы колеблются синхронно, с одной и той же фазой. По внешним признакам данная структура соответствует фазовой химере. Рассмотрим реализации колебаний для двух соседних элементов из "головы" химеры с индексами  $i = 275$  и  $i = 276$ . Они показаны на рисунке 3.10,б. На графике видно, что колебания в системе носят периодический характер, при этом колебания рассматриваемых осцилляторов сдвинуты относительно друг друга на четверть периода. В некогерентном кластере наблюдается нерегулярное распределение фазовых сдвигов соседних осцилляторов: либо 0, либо  $\pi/2$ . Однако данная фазовая химера несколько отличается от фазовой химеры в ан-

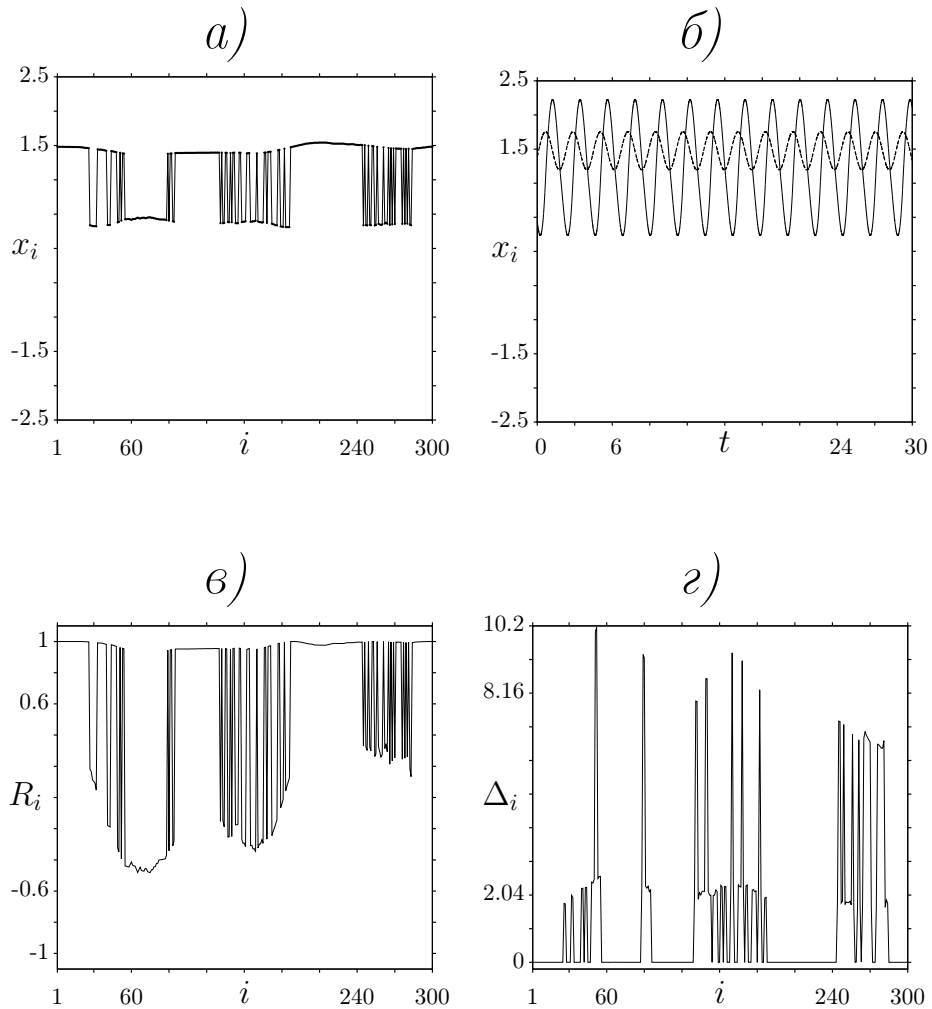


Рис. 3.10. Одноямная химерная структура при  $\sigma = 0.75$  и  $r = 0.37$  (область  $C'$  на диаграмме режимов на рисунке 3.8): а – мгновенный пространственный профиль; б – реализация колебаний во времени  $x_i(t)$  для 275-го и 276-го элементов из некогерентного кластера; в – взаимная корреляция 1-го элемента с элементами системы (3.7); г – средний квадрат девиации элементов.

Параметры:  $\alpha = 9.4$ ,  $\beta = 14.28$ ,  $A = -1.143$ ,  $B = -0.714$  и  $N = 300$

самбле кубических отображений, для которой был характерен фазовый сдвиг на  $\pi$ .

Для количественной оценки химерного состояния были вычислены взаимная корреляция и средний квадрат девиации состояний соседних элементов. Полученные результаты представлены на рисунке 3.10,в и рисунке 3.10,г, соответственно. На графике рисунке 3.10,в видно, что в когерентных кластерах с

одной и той же фазой с большой точностью выполняется равенство  $R_1(i) = 1$ . В другом когерентном кластере со сдвинутой фазой колебаний значение  $R_i(i)$  отрицательно, однако не равно -1. Отрицательное значение взаимной корреляции свидетельствует о фазовом сдвиге первого осциллятора и рассматриваемого осциллятора. То, что значение не равняется строго -1 является результатом различия амплитуд колебаний осцилляторов. В области некогерентных кластеров наблюдается нерегулярное чередование значений  $R_1(i)$ , являющееся следствием нерегулярного чередования сдвигов фаз. Среднеквадратичная девиация элементов также демонстрирует принципиально разное поведение в когерентных и некогерентных кластерах.

На диаграмме режимов на рисунке 3.8, можно видеть, что в ансамбле осцилляторов Чуа существуют также двухъямные химерные состояния. Пример двухъямной химерной структуры в области  $C$  приведен на рисунке 3.11,а.

В одной пространственной структуре можно выделить кластеры, соответствующие двум типам химер: фазовой химере и двухъямной химере. Первая локализована только в одной из ямок. Двухъямная химера характеризуется нерегулярным распределением осцилляторов между ямками на границах двух когерентных кластеров, находящихся в противоположных ямках. Оба этих типа химеры, сосуществующие в одной пространственной структуре, уже наблюдались в ансамбле кубических отображений, рассмотренном в предыдущем разделе. Переключения осцилляторов между ямками отсутствует и структура пространственного профиля сохраняются качественно одинаковой в любой момент времени. Для установления характера колебаний осцилляторов в некогерентных кластерах были построены реализации колебаний во времени для двух соседних элементов из некогерентных кластеров фазовой и двухъямной химер. Они представлены на рисунке 3.11,б и рисунке 3.11,д, соответственно. Сначала рассмотрим колебания осцилляторов из "головы" фазовой химеры. Оба осциллятора колеблются в одной и той же ямке. Колебания носят слабохаотический характер, причем фазы колебаний для двух соседних элементов сдвинуты

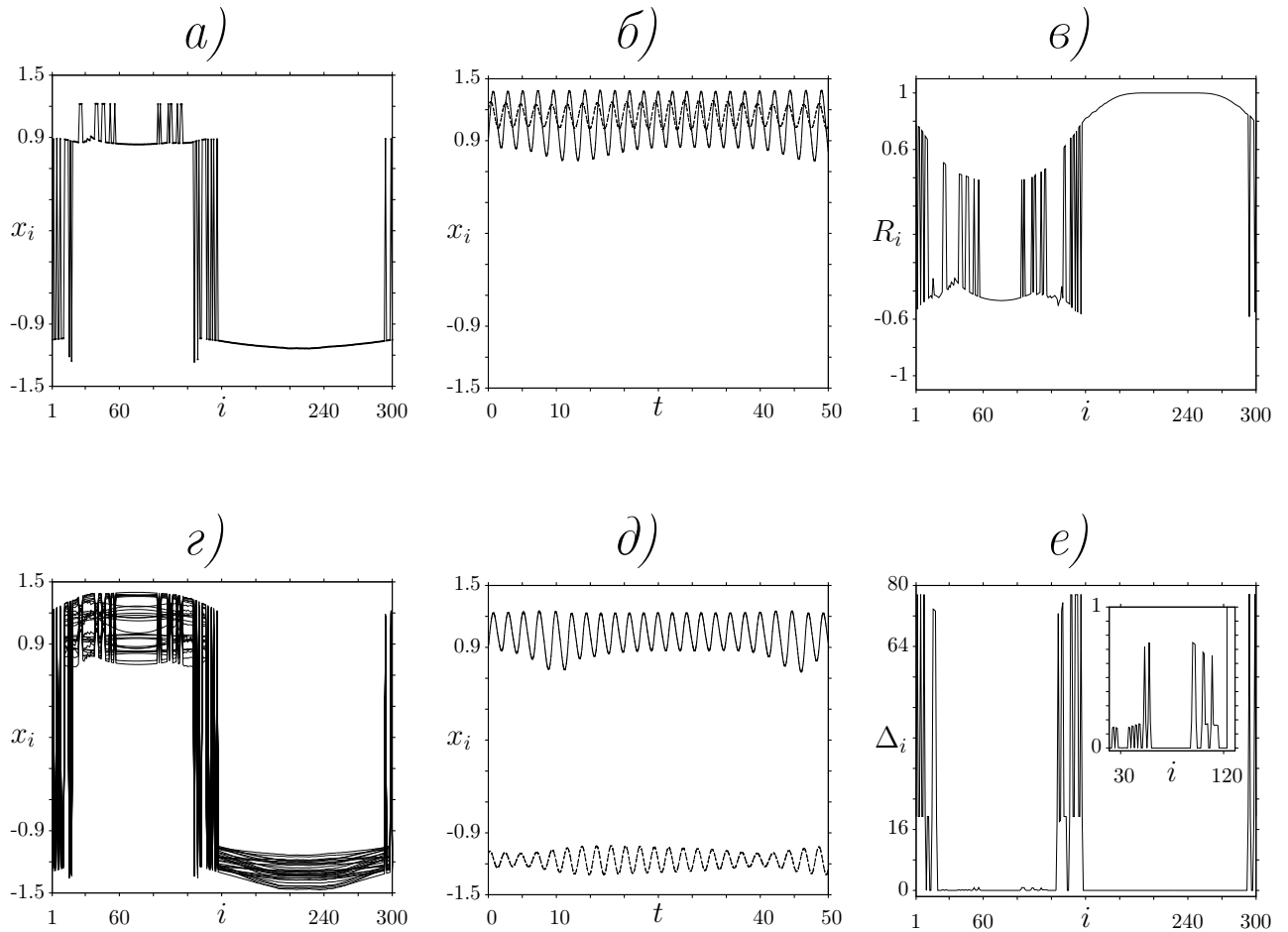


Рис. 3.11. Двухъямная химерная структура при  $\sigma = 0.89$  и  $r = 0.37$  (область  $C$  на диаграмме режимов на рисунке 3.8): а – мгновенный пространственный профиль; б – реализации колебаний  $x_i(n)$  для 109-го (сплошная линия) и 110-го (пунктирная линия) элементов из некогерентного кластера фазовой химеры; в – взаимная корреляция 210-го элемента с остальными элементами системы (3.7); г – набор из 30 мгновенных пространственных профилей в разные моменты времени; д – реализации колебаний  $x_i(n)$  для 1-го (верхняя сплошная линия) и 2-го (нижняя пунктирная линия) элементов из некогерентного кластера двухъямной химеры; е – средний квадрат девиации состояний соседних элементов. Параметры:  $\alpha = 9.4$ ,  $\beta = 14.28$ ,  $A = -1.143$ ,  $B = -0.714$  и  $N = 300$

на  $\pi/2$ . В некогерентном кластере двухъямной химеры колебания отличаются. Амплитуды колебаний в разных ямках различны. Особенностью данной двухъ-

ямной химеры является сдвиг фаз колебаний осцилляторов в различных ямках на  $\pi/2$ , как и в фазовой химере. Это является отличием двухъямной химеры в кольце осцилляторов Чуа (3.7) от подобных химер, наблюдающихся в кольце связанных кубических отображений Eq. (3.2), где элементы двухъямной химеры колебались синфазно.

Результаты расчета взаимной корреляции  $R_n(i)$  для элемента  $n = 210$ , принадлежащего когерентному кластеру, и среднего квадрата девиации  $\Delta_i$  представлены на рисунке 3.11,в и рисунке 3.11,е. Зависимость  $R_n(i)$  показывает сразу два вида химер. Наблюдается чередование положительных и отрицательных значений  $R_n(i)$  для некогерентных кластеров как для фазовой химеры, так и для двухъямной. Для двухъямной химеры чередование знака  $R_n(i)$  возникает из-за сдвига фаз колебаний в противоположных ямках. Как и в случае одноямной структуры значение взаимной корреляции по абсолютной величине не равно  $\pm 1$  из-за различия значений амплитуд в осцилляторах из разных ямок. Разница значений взаимной корреляции для элементов некогерентного кластера больше, чем для фазовой химеры. Средний квадрат девиации  $\Delta_i$  также позволяет определить области некогерентных кластеров двухъямной химеры. Что касается фазовой химеры, то значения  $\Delta_i$  для соответствующих некогерентных кластеров на два порядка меньше и их изменения практически не видны в масштабе рисунка.

Проведенные исследования показали, что кольцо из нелокально-связанных осцилляторов Чуа (3.7) демонстрирует качественно эквивалентное поведение с ансамблем связанных кубических отображений (3.2). Если сравнить диаграммы режимов для обеих систем (рисунок 3.8 и рисунок 3.4), то можно заметить, что основные динамические режимы являются одинаковыми. В обеих системах наблюдаются однотипные химерные структуры, в том числе двухъямные химеры.



### 3.3 Химерные структуры в кольце осцилляторов Лоренца

В настоящем разделе главы 3 исследуется динамика ансамбля осцилляторов Лоренца с нелокальной связью. Ансамбль нелокально-связанных осцилляторов Лоренца рассматривался ранее в работах [86, 149], причем параметры осцилляторов в отсутствии взаимодействия соответствовали режиму аттрактора Лоренца. В рамках диссертационной работы исследовалась та же модель ансамбля в том же режиме парциальных осцилляторов, однако параметры связи при этом были выбраны существенно иными. Как показали проведенные исследования, влияние связи на динамику осцилляторов, так же как и в ранее рассмотренных моделях, приводит к возникновению бистабильности и образованию двухъямных структур. В данном разделе рассмотрен переход от таких структур к полной десинхронизации, который не был описан в [86, 149].

Исследуемый ансамбль осцилляторов Лоренца описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \xi(y_i - x_i) + \frac{\sigma_x}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (x_k - x_i), \\ \dot{y}_i &= x_i(\rho - z_i) - y_i + \frac{\sigma_y}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (y_k - y_i), \\ \dot{z}_i &= x_i y_i - \beta z_i, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$x_{i+N}(t) = x_i(t), \quad y_{i+N}(t) = y_i(t),$$

$$z_{i+N}(t) = z_i(t),$$

где  $x_i$ ,  $y_i$  и  $z_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) – вещественные динамические переменные, индекс  $i$  – номер элемента в ансамбле,  $\xi$ ,  $\rho$  и  $\beta$  – параметры, управляющие динамикой отдельного осциллятора. Взаимодействие между элементами носит нелокальный характер, причем связь введена по двум переменным. Параметры  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  характеризуют соответствующую силу связи.  $P$  – число соседей, связанных с  $i$ -м элементом с каждой стороны. В работе исследовался ансамбль из  $N = 300$  элементов, предполагается, что  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ , а управляющие параметры пар-

циальной системы выбраны как  $\xi = 10$ ,  $\rho = 28$  и  $\beta = 8/3$ , что соответствует сингулярно-гиперболическому хаотическому аттрактору Лоренца в изолированном осцилляторе.

Система уравнений (3.8) численно интегрировалась методом Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом  $h = 0.001$ . На основании результатов интегрирования уравнений (3.8) была построена диаграмма режимов на плоскости параметров связи  $(r, \sigma)$ , представленная на рисунке 3.12. Диаграмма строилась с учетом режимов, реализуемых для нескольких начальных условий, соответствующих случайному распределению динамических переменных в начальный момент времени.

В работе [149] диаграмма режимов строилась для широкого диапазона значений силы связи  $\sigma \in [0 : 50]$ . При этом поведение ансамбля при сравнительно небольших значениях силы связи не было достаточно изучено. В настоящей работе рассматривается переход системы (3.8) от частично-когерентного хаоса к режиму полной десинхронизации в интервале значений силы связи  $\sigma \in [0 : 1.2]$ . Этот переход сопровождается сменой режимов с различной пространственно-временной динамикой, области существования которых на диаграмме режимов выделены различными цветами и обозначены буквами на (см. рисунок 3.12):  $A$  – режим стабильных (на всем времени наблюдения) двухъямных химер и уединенных состояний,  $B$ ,  $B'$ ,  $B''$  – режим перемежаемости во времени и пространстве между пространственно-когерентным и пространственно-некогерентным ( $B'$ ) или частично-некогерентным ( $B$  и  $B''$ ) поведением;  $C$  – режим метастабильных двухъямных химер;  $D$  – пространственно-временная некогерентность. Чередование линий различных цветов на диаграмме режимов означает, что для разных начальных условий реализуются различные типы поведения, соответствующие цветам линий в штриховке, либо что режим неустойчив, т.е. при небольшом сдвиге по параметру связи  $\sigma$  может реализоваться другой режим. Рассмотрим каждый режим более подробно.

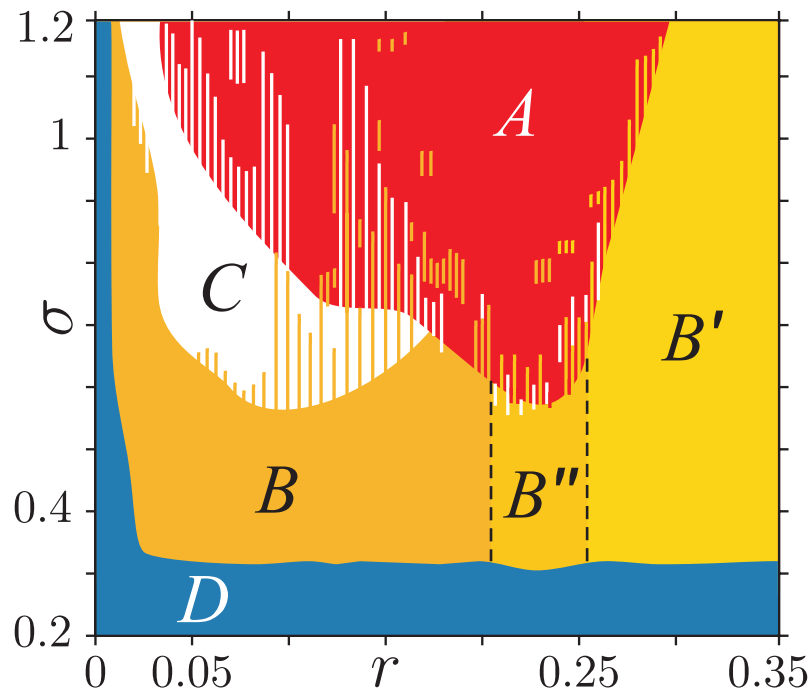


Рис. 3.12. Диаграмма режимов системы (3.8) на плоскости управляющих параметров  $(r, \sigma)$ :  $A$  – область устойчивых двухъямных химер и уединенных состояний;  $B, B', B''$  – режимы перемежаемости во времени и пространстве между пространственно-когерентным и пространственно-некогерентным ( $B'$ ) или частично-некогерентным ( $B$  и  $B''$ ) поведением;  $C$  – режим метастабильных двухъямных химер;  $D$  – область пространственно-некогерентного хаоса. Параметры:  $\xi = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$  и  $N = 300$

### 3.3.1 Основные динамические режимы модели (3.8)

Ранее считалось, что в ансамблях, состоящих из осцилляторов с гиперболическим хаотическим аттрактором, появление химерных состояний невозможно. Это было подтверждено на примере ансамбля нелокально связанных отображений Лози [86, 150, 151]. Было показано, что типичным режимом для связанных систем с гиперболическим аттрактором являются уединенные состояния, когда большинство осцилляторов ведут себя когерентно, и лишь некоторые осцилляторы демонстрируют динамику, отличную от поведения всех остальных.

В силу того, что отображение Лози есть дискретный аналог системы Лоренца (оно подобно отображению, возникающему в сечении Пуанкаре аттрактора Лоренца), можно предположить, что ансамбль связанных осцилляторов Лоренца (3.8) будет демонстрировать аналогичную динамику, что и ансамбль связанных отображений Лози. Действительно, один из режимов системы (3.8) представляет собой режим уединенных состояний, в котором могут находиться как 1-2 элемента ансамбля (3.8) (рисунок 3.13,а), так и его большая часть (рисунок 3.13,б).

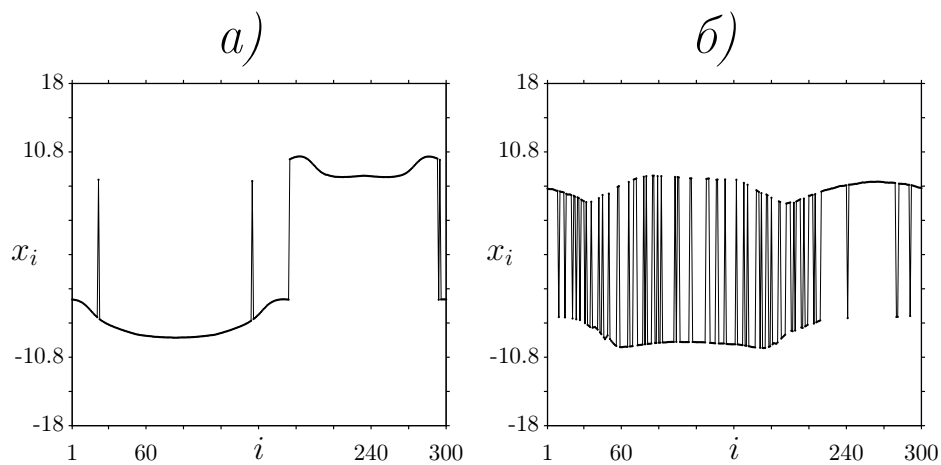


Рис. 3.13. Уединенные состояния в системе (3.8). Мгновенные пространственные профили для  $\sigma = 1.9$ ,  $r = 0.197$  (а) и  $\sigma = 1.5$ ,  $r = 0.223$  (б).

Параметры:  $\xi = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$  и  $N = 300$

Режим уединенных состояний наблюдается при достаточно больших (в рамках исследуемого диапазона) значений силы связи и представляет собой переходный режим между частичной когерентностью и режимом двухъямных химер. Переход между режимами происходит достаточно плавно и поэтому выделить отдельную область существования только уединенных состояний практически невозможно.

Как уже отмечалось, сила связи вызывает сдвиг эффективных значений управляющих параметров парциального элемента ансамбля. По этой причине при достаточно сильной связи могут происходить изменения характера дина-

мики парциального осциллятора Лоренца в ансамбле (3.8). Эти изменения выглядят следующим образом. Поведение осцилляторов Лоренца в ансамбле перестает соответствовать режиму сингулярно-гиперболического хаоса и приобретает характерные черты бистабильности, а именно: реализуются два сосуществующих хаотических режима, соответствующие областям положительных и отрицательных значений переменных  $x$  и  $y$ . Проекции фазовых траекторий, типичные для этого случая, представлены на рисунке 3.14,а. Как и в рассмотренных ранее системах, можно ввести понятие потенциальных ямок: левой (в отрицательной области значений координат) и правой (в положительной области). Таким образом, часть элементов ансамбля (3.8) будут колебаться только в пределах левой ("отрицательной") ямки, а другая часть – правой ("положительной"). Подобная динамика парциального элемента рассматриваемого ансамбля осцилляторов Лоренца наблюдается в области, отмеченной на диаграмме режимов буквой  $A$  (рисунок 3.12). В остальных областях на плоскости управляющих параметров парциальные системы демонстрируют характерный для системы Лоренца хаотический режим, для которого типичным являются переключения между двумя областями аттрактора в фазовом пространстве.

Область  $A$  на диаграмме режимов на рисунке 3.12) характеризуется сосуществованием у пространственных структур кластеров когерентности и некогерентности. Пример такой пространственной структуры показан на рисунке 3.14,б. В ансамбле (3.8) при выбранных значениях параметров для различных начальных условий всегда образуется два когерентных кластера: в первом из них осцилляторы колеблются только в пределах левой ямки, а во второй – только в правой. Динамика ансамбля (3.8) во времени представлена с помощью набора 30 мгновенных пространственных профилей, построенных через каждые 10 единиц времени (рисунок 3.14,в). Между когерентными кластерами располагаются кластеры с некогерентным поведением соседних элементов, находящихся в разных ямках. Важно отметить, что границы всех наблюдаемых кластеров не изменяются во времени. Осцилляторы некогерентных кластеров

совершают колебания только в “своей” ямке, не переключаясь в другую. Это хорошо видно из проекций фазовых траекторий на рисунке 3.14,а для двух элементов из некогерентного кластера, колеблющихся в разных ямках. Колебания во времени всех элементов ансамбля являются слабо хаотическими (старший показатель Ляпунова положителен  $\Lambda = 0.015249$ ).

Двухямные химеры в ансамбле (3.8) несколько отличаются от рассмотренных ранее. Кластеры некогерентности у них формируются из скопления множества уединенных состояний.

Для количественной оценки динамики модели (3.8) была вычислена взаимная корреляция элемента из когерентного кластера с другими элементами системы по формуле (3.5). Численные расчеты для данной характеристики представлены на рисунке 3.14,г. Из графика видно, что в кластерах когерентности полная когерентность имеет место только в середине этих кластеров. С удалением от центров кластеров, значения взаимной корреляции падает, осцилляторы перестают быть полностью когерентными друг с другом. При этом, значения  $R_n(i)$  значительно выше, чем в области некогерентных кластеров, где взаимная корреляция близка к нулю. Это отражает почти полное отсутствие корреляции между элементами когерентных и некогерентных кластеров.

Теперь рассмотрим режим, наблюдающийся в области  $B'$  на диаграмме режимов на рисунке 3.12. Он является основным для исследуемой системы при больших значений радиуса связи  $r > 0.3$  и  $\sigma \gtrsim 0.3$ . При малых значениях силы связи наблюдается перемежаемость во времени между режимами полной некогерентности и частичной когерентности. Пример мгновенного пространственного профиля системы в режиме частичной когерентности представлен на рисунке 3.15,а, а режим полной некогерентности (десинхронизации) проиллюстрирован на рисунке 3.15,б. Динамика во времени парциального элемента ансамбля представлена на рисунке 3.15,в. В режиме десинхронизации парциальный осциллятор совершает частые высокоамплитудные колебания переключательного типа. При этом каждый элемент может также совершать колебания вокруг

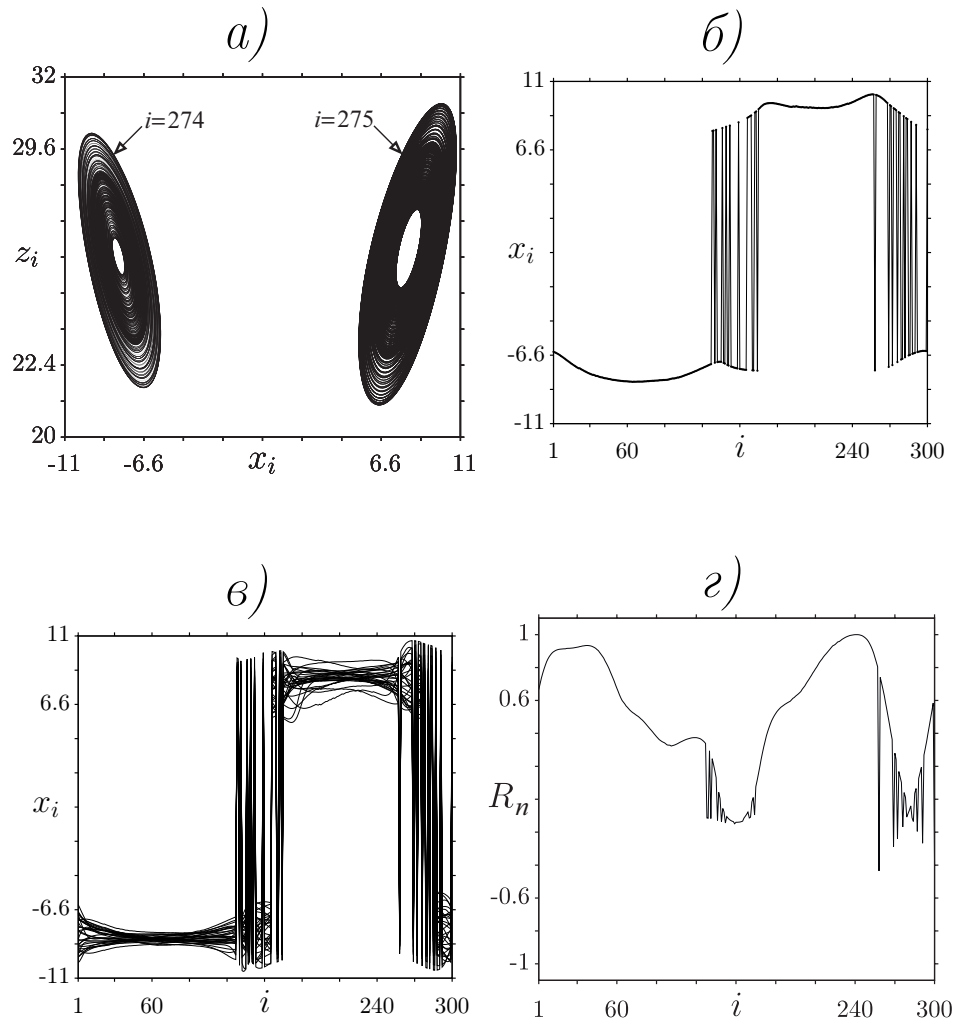


Рис. 3.14. Двухъямная химера в системе (3.8) (область  $A$  на диаграмме режимов на рисунке 3.12) при  $r = 0.21$  и  $\sigma = 0.72$ : а – проекции фазового портрета для 274-го и 275-го осцилляторов из некогерентного кластера; б – мгновенный пространственный профиль; в – набор из 30 мгновенных пространственных профилей, построенных через каждые 10 единиц времени; г – взаимная корреляция 240-го осциллятора с остальными элементами ансамбля. Старший показатель Ляпунова равен  $\Lambda = 0.015249$ . Параметры:

$$\xi = 10, \rho = 28, \beta = 8/3 \text{ и } N = 300$$

состояний равновесия. У разных осцилляторов эти колебания происходят несогласованно. В состоянии частичной когерентности колебания всех элементов происходят в окрестности одного и того же состояния равновесия без переключений. На интервале времени, соответствующем фазе частичной когерентности

амплитуда колебаний уменьшается во времени, приближаясь к значению соответствующей координаты состояния равновесия. После этого амплитуда начинает снова расти и происходит переход к режиму некогерентности. Отметим, что переход от состояния полной десинхронизации к частичной когерентности происходит не мгновенно для всех элементов ансамбля, а с некоторой расстройкой, в то время как переход к некогерентности происходит почти одновременно для всех элементов. Время между переключениями из одного режима в другой достаточно велико, при этом происходят они нерегулярно. Стоит также отметить, что осцилляторы в режиме частичной когерентности могут колебаться в окрестности обоих состояний равновесия (как положительных, так и отрицательных областях значений переменных  $x$  и  $y$ ). Степень хаотичности колебаний элементов ансамбля в области  $B'$  значительно выше, чем в области двухъямных химер – старший показатель Ляпунова равен  $\Lambda = 0.93865$  ( $\Lambda > 50$  раз больше предыдущего случая).

С ростом силы связи возможны два варианта эволюции данного режима. При большом значении радиуса связи  $r > 0.26$  перемежаемость во времени сохраняется, однако время между переключениями с одного режима на другой становится заметно меньше. Кроме того, время пребывания системы (3.8) в режиме частичной когерентности увеличивается.

При радиусе связи меньше  $r < 0.26$  в области  $B$  диаграммы режимов (рисунок 3.12) имеет место другой сценарий режима перемежаемости, пример которого приведен на пространственно-временной диаграмме на рисунок 3.16,а и мгновенном пространственном профиле на рисунке 3.16,б.

Режимы частичной когерентности сменяются режимом, когда часть элементов ансамбля образует кластер с синхронным поведением, а другая часть – некогерентные кластеры с хаотичным пространственным распределением. Другими словами, образуется неустойчивое химероподобное состояние с конечным временем жизни. Особенностью данного динамического состояния ансамбля является то, что в когерентном режиме колебания всех элементов происходят



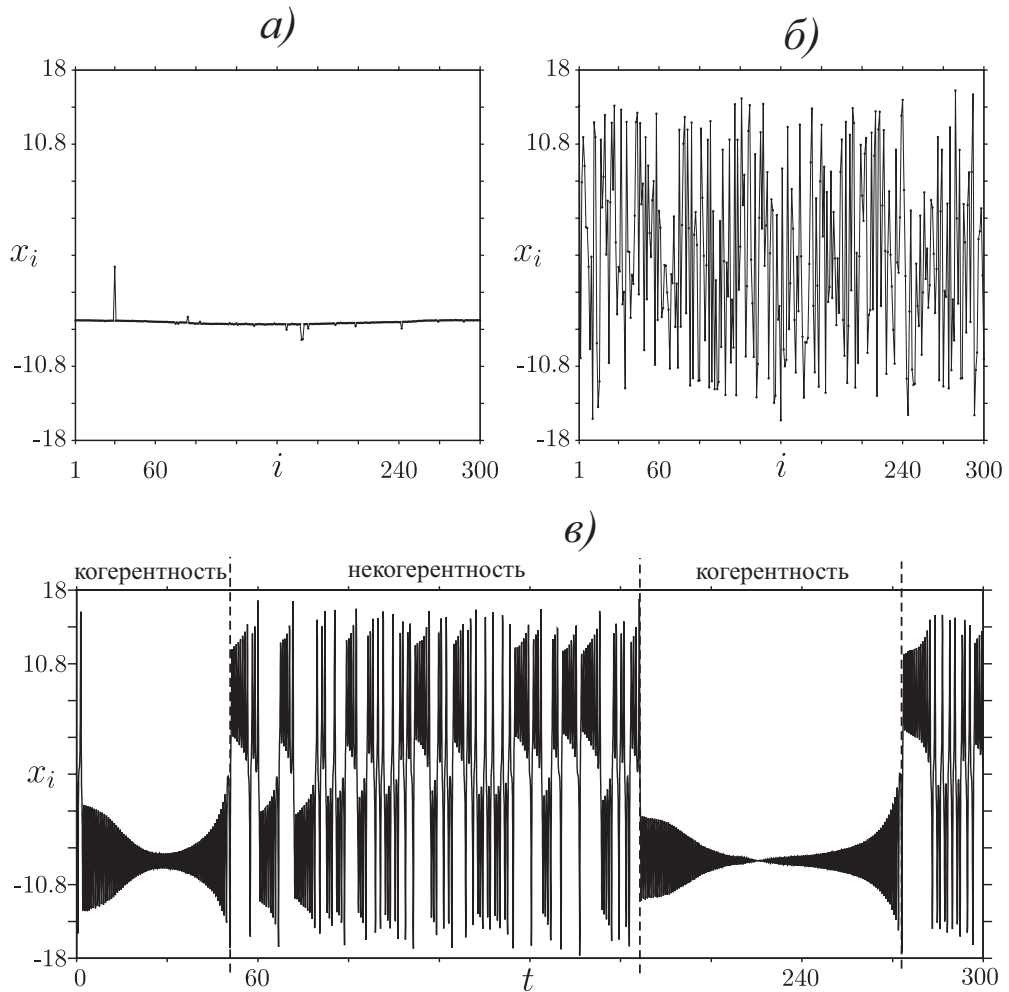


Рис. 3.15. Переменяемость во времени между полной десинхронизацией и режимом частичной когерентности (область  $B'$  на диаграмме режимов на рисунке 3.12) при малой силе связи  $\sigma = 0.4$  и  $r = 0.28$ : а – мгновенный пространственный профиль в режиме частичной когерентности; б – мгновенный пространственный профиль в режиме полной десинхронизации; в – колебания во времени для 260-го осциллятора. Старший показатель Ляпунова равен 0.93865. Параметры:  $\xi = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$  и  $N = 300$

вокруг одного и того же состояния равновесия, а переключения в другую ямку могут не наблюдаться в течение длительного время ( $> 10000$  ед. времени). Для определения типа химероподобного состояния рассмотрим реализации колебаний во времени для двух соседних элементов из некогерентного кластера. Они представлены на рисунке 3.16,в. Видно, что колебания обоих элементов носят хаотический переключательный характер. Мгновенные амплитуды и фазы

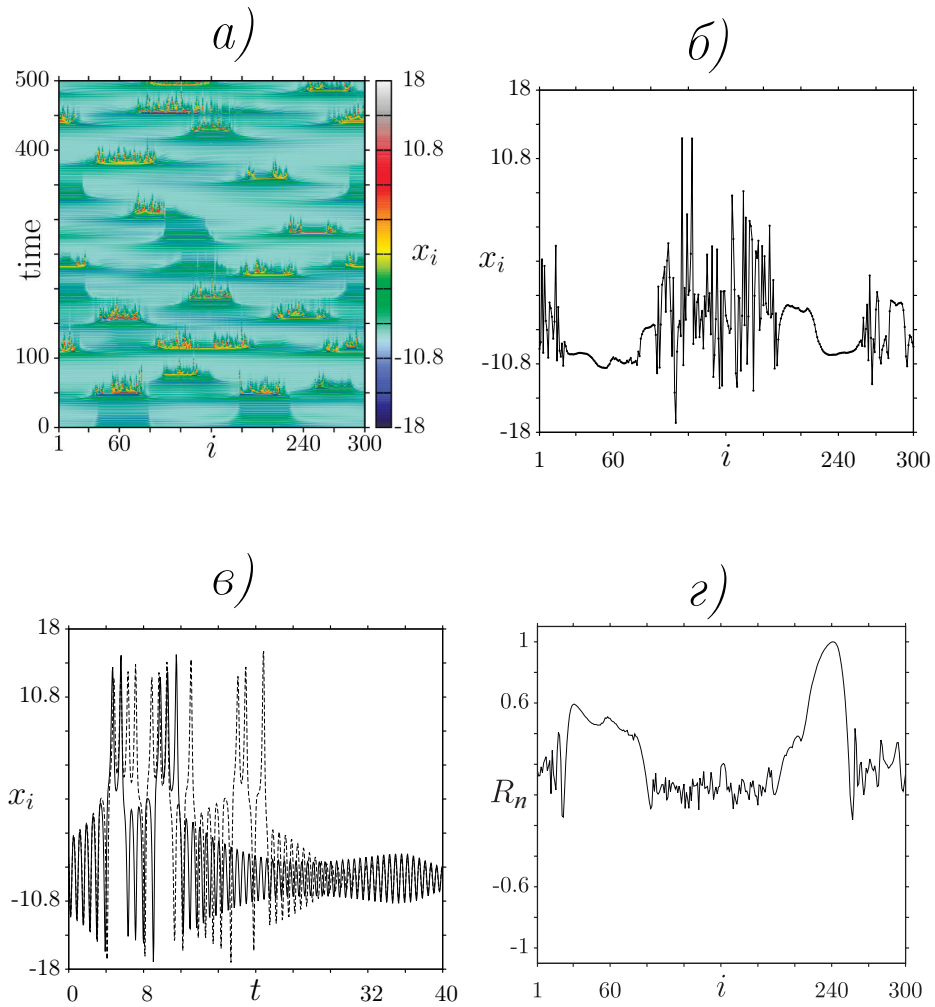


Рис. 3.16. Пространственно-временная перемежаемость между состоянием когерентности и метастабильными химероподобными состояниями (область  $B$  на диаграмме режимов на рисунке 3.12) при  $\sigma = 0.56$  и  $r = 0.19$ : а – пространственно-временная диаграмма; б – мгновенный пространственный профиль для  $t = 120$ ; в – колебания во времени для 120-го и 121-го осцилляторов из некогерентного кластера; г – взаимная корреляция для 240го элемента с другими. Старший показатель Ляпунова равен 0.5145. Параметры:

$$\xi = 10, \rho = 28, \beta = 8/3 \text{ и } N = 300$$

этих колебаний различны. В режиме когерентности все осцилляторы колеблются только в одной ямке. При переходе в когерентный режим колебания соседних осцилляторов становятся одинаковыми по фазе и близкими по мгновенным амплитудам.

Результаты расчетов взаимной корреляции элемента из некогерентного кластера со всеми другими элементами ансамбля представлены на рисунке 3.16,г. Отметим, что время жизни химероподобного состояния достаточно мало ( $\approx 20$  единиц). По этой причине значения взаимной корреляции могут быть вычислены только приближенно. При этом они дают достаточное представление о поведении системы. Из графика зависимости видно, что в области некогерентных кластеров значения  $R_n(i)$  практически равны нулю, что говорит о полном отсутствии корреляции между колебаниями элемента из когерентного кластера и элементов некогерентного кластеров. Колебания элементов когерентных кластеров также не являются полностью когерентными друг с другом ( $R_n(i) < 1$ ), однако значения взаимной корреляции для них значительно больше, чем для элементов некогерентного кластера. Динамика соседних элементов во времени и распределение взаимной корреляции характерна для амплитудных химер, наблюдаемых в ансамблях хаотических осцилляторов. Это позволяет говорить о том, что исследуемое химероподобное состояние является близким по свойствам к амплитудной химере.

Важная особенность данного режима состоит в том, что некогерентные кластеры снова возникают не на одном и том же месте, а в произвольной области пространства. Одновременно может наблюдаться сразу несколько некогерентных кластеров. Время жизни таких состояний также различно. Таким образом, в данной области параметров  $(\sigma, r)$  имеет место пространственно-временная перемежаемость между некогерентным (химероподобным состоянием) и синхронным поведением.

При радиусах связи  $0.2 < r < 0.26$  (область  $B''$  на диаграмме режимов на рисунке 3.12) могут наблюдаться смешанные режимы. Для данной области характерно чередование когерентного (синхронного) режима либо с режимом полной десинхронизации, либо с режимом химероподобных состояний. Переход от режима метастабильных химер к полной десинхронизации и наоборот всегда сопровождается появлением когерентной динамики, пусть даже на достаточно

коротком времени. Кроме того, в данной области значений коэффициента связи и радиуса связи переключения из одной ямки в другую в когерентном режиме происходят значительно чаще (с интервалом в несколько сотен ед. времени), чем для режима в области  $B$ .

В области  $C$  на диаграмме на рисунке 3.12 наблюдается поведение ансамбля, сочетающее свойства динамики как в области  $A$ , так и в области  $B$ . Характерный для области  $C$  режим представлен на пространственно-временной диаграмме на рисунке 3.17,а и на мгновенном пространственном профиле на рисунке 3.17,б. Он характеризуется наличием двухъямной структуры с некогерентными кластерами, в которых осцилляторы нерегулярно распределены между ямками, а также наличием пространственно-временной перемежаемости, при которой в различные моменты времени рождаются и исчезают короткоживущие химероподобные состояния, по своим характеристикам аналогичные режиму в области  $B$ .

Границы некогерентных кластеров двухъямной химеры неустойчивы и меняют свое положение в определенной области пространства через нерегулярные промежутки времени. Поведение во времени соседних осцилляторов из некогерентного кластера двухъямной химеры представлено на рисунке 3.17,в. В тот момент времени, когда границы кластеров не меняются, колебания происходят в окрестности одного состояния равновесия. При изменении границ возникают нерегулярные переключения. Колебания парциальных осцилляторов носят переключательный характер, что видно из проекции фазовых траекторий для осциллятора из некогерентного кластера на рисунке 3.17,г. Кластерная структура с характерным двухъямным распределением сохраняется в течение всего времени наблюдения. Осцилляторы, расположенные в когерентных кластерах в фазе состояния когерентности колеблются вокруг одного из состояний равновесия, в зависимости от их пространственного расположения. Степень хаотичности колебательного элементов ансамбля значительно выше,

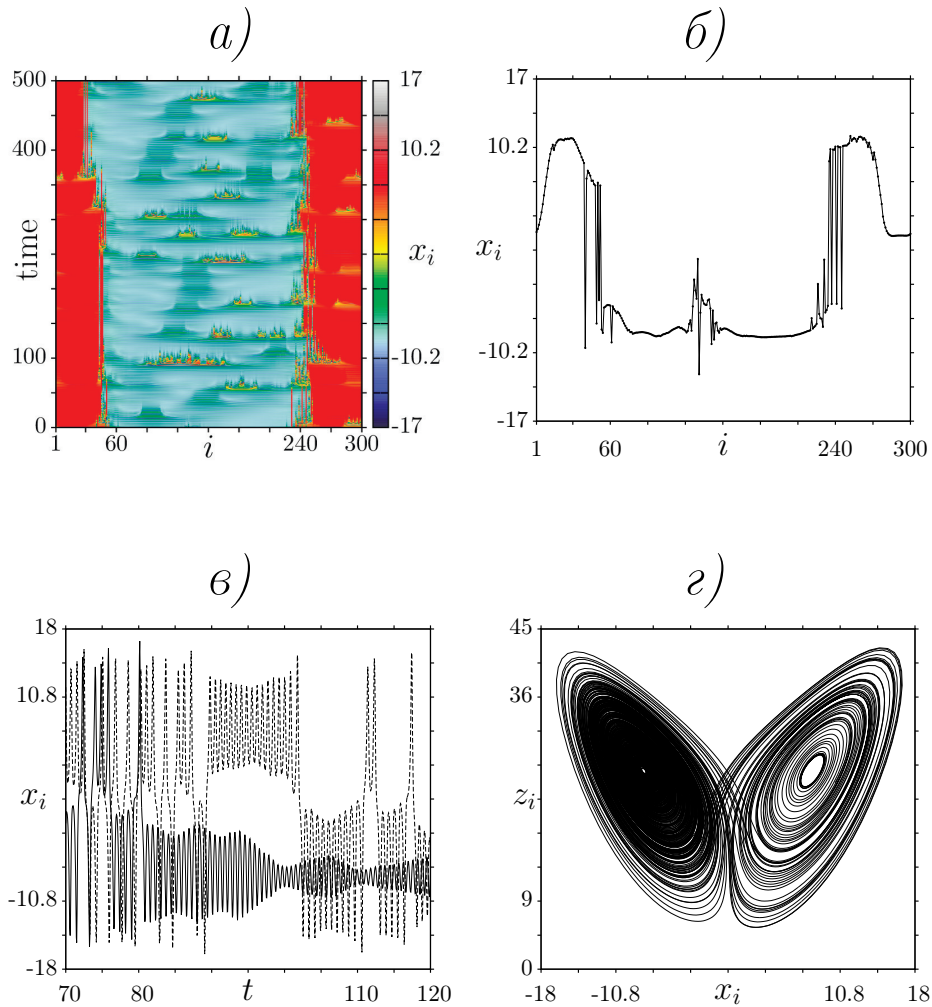


Рис. 3.17. Динамика режима в области  $C$  на диаграмме режимов на рисунке 3.12 для  $\sigma = 0.7$  и  $r = 0.083$ : а – пространственно-временная диаграмма; б – мгновенный пространственный профиль; в – колебания во времени для 242го и 243го осцилляторов; г – проекция фазовых траекторий для 243го осциллятора. Старший показатель Ляпунова равен 0.713674. Параметры:

$$\xi = 10, \rho = 28, \beta = 8/3 \text{ и } N = 300$$

чем в случае устойчивой химеры в области  $B$ , старший показатель Ляпунова равен  $\Lambda = 0.713674$  (в  $\gtrsim 50$  раз больше, чем для области  $B$ ).

Наконец, рассмотрим область  $D$  на диаграмме режимов. Она соответствует режиму полной некогерентности, то есть все элементы ансамбля (3.8) полностью рассинхронизованы. Этот режим наблюдается при локальной и близкой к локальной связи для всех значений  $\sigma \in [0 : 1.2]$ , а также для любого радиуса

связи при  $\sigma \lesssim 0.3$ . Примеры состояния полной десинхронизации приведены на рисунке 3.18.

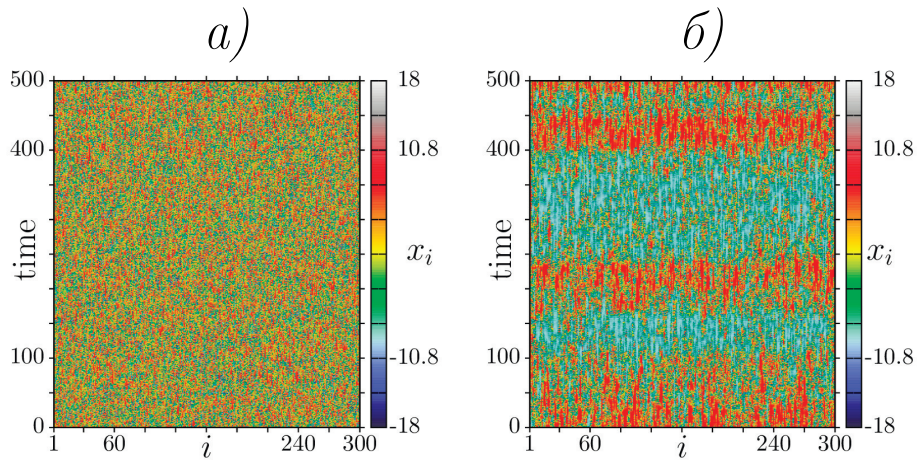


Рис. 3.18. Пространственно-временной хаос (полная некогерентность) в системе (3.8). Пространственно временные диаграммы для  $r = 0.063$ ,  $\sigma = 0.28$  (а) и  $r = 0.0033$  (локальная связь),  $\sigma = 0.49$  (б). Параметры:  $\xi = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$  и  $N = 300$

Отметим, что для случая локальной связи ( $r = 0.003$ ) и при большой силе связи  $\sigma$  наблюдается режим, подобный динамике ансамбля в области  $B$ . Другими словами, большая часть элементов ансамбля (3.8) совершает колебания в окрестности только одного состояния равновесия в течение длительного времени. Однако при этом пространственное распределение некогерентно и говорить даже о частично когерентном режиме нельзя. Характер колебаний во времени каждого элемента сильно хаотический.

### 3.4 Химерные структуры и бегущие волны в кольце бистабильных осцилляторов ФитцХью-Нагумо с нелокальным взаимодействием

В данном разделе исследуется влияние нелокального характера взаимодействия на пространственно-временную динамику кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо, которые, в отсутствие связи, представляют собой бистабильные осцилляторы и не совершают колебаний. Необходимо отметить, что бистабильный осциллятор ФитцХью-Нагумо отличается от бистабильных систем, рассмотренных в предыдущих разделах данной главы. Как было отмечено в первой главе, в бистабильном режиме вблизи порога автоколебаний осциллятор ФитцХью-Нагумо обладает свойством возбудимой системы, также как и в случае существования единственной устойчивой точки равновесия. Свойство возбудимости приводит к существенным отличиям динамики ансамбля из бистабильных осцилляторов ФитцХью-Нагумо от динамики ансамблей бистабильных элементов, рассмотренных в предыдущих разделах.

Исследуемая модель представляет собой кольцо осцилляторов ФитцХью-Нагумо, которое описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \varepsilon \dot{x}_i &= x_i - \frac{x_i^3}{3} - y_i + \varepsilon \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (x_k - x_i), \\ \dot{y}_i &= \gamma x_i - y_i - \beta, \\ x_{i+N}(t) &= x_i(t), \quad y_{i+N}(t) = y_i(t) \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь  $x_i$ ,  $y_i$  – динамические переменные, задающие состояние  $i$ -го осциллятора,  $i$  – номер осциллятора в кольце,  $N$  – размер ансамбля,  $t$  – момент времени,  $\varepsilon$ ,  $\gamma$  и  $\beta$  – управляющие параметры парциальных осцилляторов. В работе исследуется ансамбль размером  $N = 300$  элементов. Взаимодействие элементов носит нелокальный характер. Каждый элемент ансамбля связан с

$P$  соседями с каждой стороны. Сила связи контролируется параметром  $\sigma$ . Отношение  $r = P/N$  (радиус связи) характеризует степень нелокальности взаимодействия. Система интегрировалась с помощью модифицированного метода Эйлера с шагом  $h = 0.001$ . Время установления равнялось 30000 единиц для всех численных расчетов.

Фазовый портрет бистабильного осциллятора ФитцХью-Нагумо приведен на рисунке 3.19. На фазовой плоскости показаны характерные траектории и нульклины, пересекающиеся в трех точках равновесия (два устойчивых фокуса и седло). Двумя тонами и буквами  $A$  и  $B$  отмечены бассейны притяжения двух устойчивых равновесий.

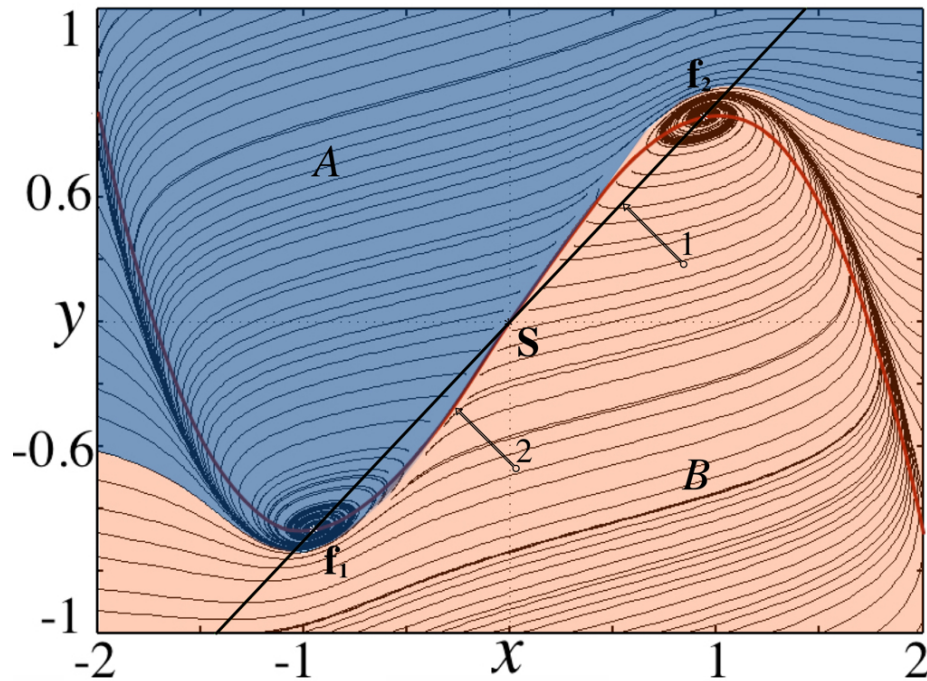


Рис. 3.19. Характерные траектории, нульклины и бассейны притяжения двух устойчивых точек равновесия в отдельно взятом осцилляторе ФитцХью-Нагумо (1.1) при  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.7$  и  $\beta = 0.001$ . Цифрой 1 обозначена нульклина  $\dot{x} = 0$ , цифрой 2 –  $\dot{y} = 0$ . Бассейны притяжения двух фокусов обозначены буквами  $A$  и  $B$  и выделены двумя тонами

Отметим, что исследуемая в данной работе модель (3.9) отличается кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо, в котором ранее были обнаружены химеры



ные режимы. В отличие от кольца, рассмотренного в [52, 99, 152], где применялась связь специального вида, обеспечивающая сдвиг фаз, близкий к  $\pi/2$ , между взаимодействующими осцилляторами, в модели (3.9) используется обычная диссипативная связь по одной переменной, входящая только в первое уравнение осцилляторов. также здесь отсутствуют источники шума. Принципиальным является также тот факт, что осцилляторы в исследуемом ансамбле находятся в режиме бистабильности, в то время как в предыдущих работах осцилляторы были либо автоколебательными [52, 152], либо возбудимыми [99].

Для более полного представления о влиянии характеристик связи на поведение ансамбля (3.9) с бистабильной динамикой элементов была рассчитана диаграмма режимов на плоскости параметров связи  $\sigma$  и  $r$  при фиксированных  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.7$  и  $\beta = 0.001$ . Она представлена на рисунке 3.20. В качестве начальных условий при построении диаграммы использовалась серия реализаций последовательности случайных величин, создаваемая с помощью генератора случайных чисел с равномерным распределением в единичном интервале:  $x_i(t_0) \in [-1; 1]; y_i(t_0) \in [-1; 1]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Таким образом, осцилляторы в начальный момент  $t_0$  распределены в двух потенциальных ямках (левой и правой), соответствующих бассейнам притяжения двух фокусов парциальной системы (см. рисунок 3.19). В случае выбора начальных состояний всех осцилляторов в пределах только одной потенциальной ямки при любых значениях параметров  $\sigma$  и  $r$  с течением времени в кольце устанавливается пространственно-однородный равновесный режим, когда все осцилляторы покоятся в одной точке равновесия. На рисунке 3.20 выделены области, соответствующие четырем основным состояниям, характерным для системы (3.9) при бистабильной динамике элементов. Эти области обозначены буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Для сравнительно малых значений коэффициента связи  $\sigma$  вне зависимости от радиуса связи  $r$  характерен режим нерегулярных стационарных структур (область  $A$ ). Интервал значений  $\sigma$ , в котором наблюдаются такие структуры остается практически неизменным для любого радиуса связи  $r$ . Данный режим проиллюстрирован на

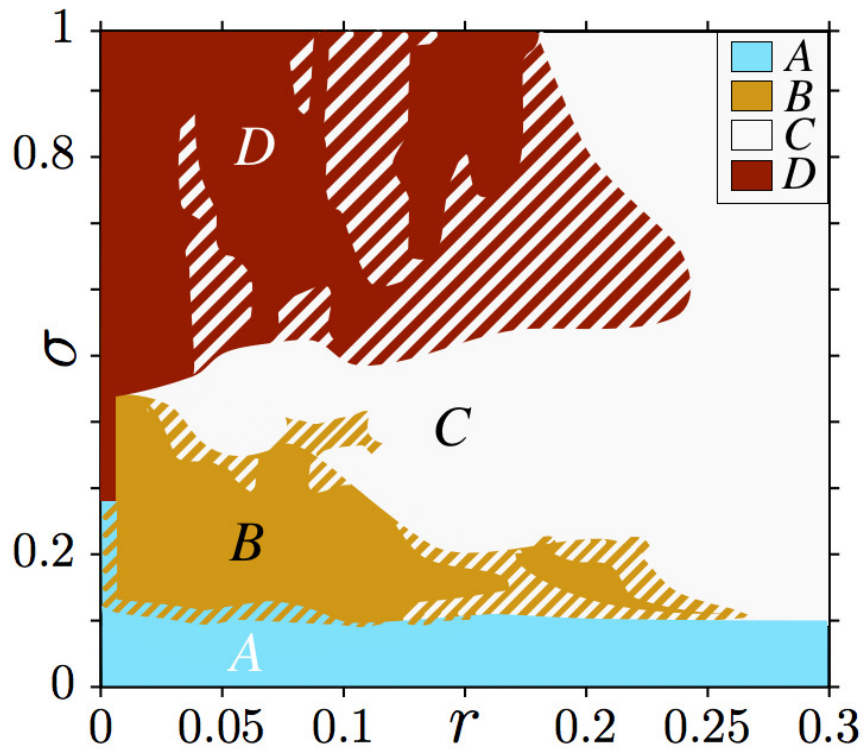


Рис. 3.20. Диаграмма режимов системы (3.9) на плоскости параметров  $r$  и  $\sigma$  при  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.7$  и  $\beta = 0.001$ :  $A$  – нерегулярные стационарные структуры;  $B$  – режим химер;  $C$  – пространственно-однородный равновесный режим;  $D$  – бегущие волны

рисунке 3.21,а. Тот же самый режим наблюдается и при локальной связи между элементами. Он уже был описан в главе 1. Конкретный вид пространственной структуры определяется начальным распределением осцилляторов по потенциальным ямкам, а также величиной силы связи. С ростом связи наблюдается рост кластеров, соответствующих попаданию соседних осцилляторов в одну ямку и структура упрощается. Подобный тип стационарных пространственных структур хорошо известен для цепочек и решеток из бистабильных элементов с локальной диссипативной связью (см., например, [4]) и их существование при слабом нелокальном взаимодействии является вполне ожидаемым.

С ростом связи возможны два сценария: переход к пространственно-однородному стационарному режиму (область  $C$  на диаграмме режимов), когда все осцилляторы покоятся в одном равновесном состоянии (отрицательном или

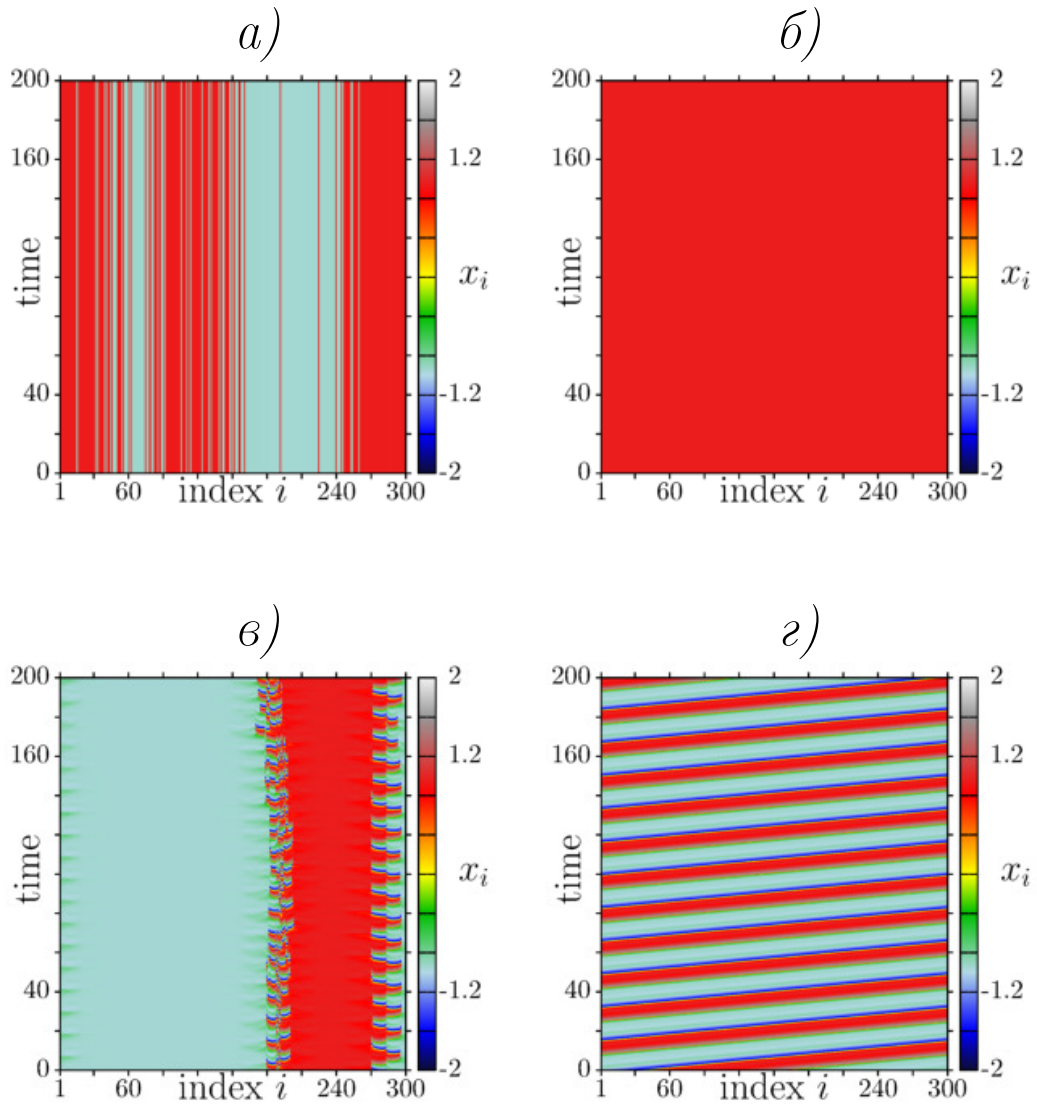


Рис. 3.21. Характерные режимы в кольце (3.9) при различных значениях силы связи  $\sigma$ : а – нерегулярные пространственные структуры при  $\sigma = 0.08$ ; б – пространственно-однородное равновесие при  $\sigma = 0.53$ ; в – химерные состояния при  $\sigma = 0.38$  и г – режим бегущих волн при  $\sigma = 0.8$ . Режимы проиллюстрированы с помощью пространственно-временных диаграмм для переменных  $x_i$ . Параметры:  $r = 0.083$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\beta = 0.0001$  и  $N = 300$  (положительным) и в системе отсутствуют какие-либо колебания или к режиму с пространственной структурой, характерной для химерных состояний [41, 42, 45] (область  $B$ ). Пространственно-однородный равновесный режим показан на рисунке 3.21,б. Химерная структура отражена на рисунке 3.21,в. Она будет рассмотрена более подробно в следующем разделе настоящей статьи. Надо отме-

титель, что режим химерных состояний наблюдается только при достаточно малых радиусах связи  $r < 0.18$  и может существовать почти до самого перехода к локальному взаимодействию при  $P = 1$ .

В отличие от других, рассмотренных в данной главе ансамблей бистабильных элементов в кольце (3.9) при определенных значениях силы и радиуса связи наблюдаются бегущие волны. Режим бегущих волн в ансамбле бистабильных осцилляторов ФитцХью-Нагумо с локальной диффузионной связью уже был описан в главе 1. Возможность возникновения бегущих волн связана именно с тем, что в бистабильном режиме осциллятор сохраняет свойство возбудимости. При нелокальном характере связи осцилляторов ФитцХью-Нагумо в кольце бегущие волны также могут существовать. Режим бегущих волн (область  $D$  красного цвета на диаграмме) проиллюстрирован на рисунке 3.21,г. Он, как и химерные структуры, наблюдается для сравнительно малых радиусов связи, но при более значительных  $\sigma$ . В этом режиме периодическая бегущая волна распространяется по кольцу в одном из двух направлений. С ростом силы связи увеличивается фазовая скорость волны. Необходимо отметить, что для выбранных случайных условий во всей области существования бегущей волны реализуется только одномодовый режим, т.е. только одна полная длина волны укладывается на длине системы.

Как уже отмечалось, химерные состояния были найдены в кольце осцилляторов ФитцХью-Нагумо в автоколебательном и возбуждаемом режимах. В первом случае был получен аналог фазовых химер, существующих в ансамблях фазовых осцилляторов Курамото с нелокальной связью, а во втором – наблюдались индуцированные шумом химеры. В обоих указанных случаях связь между осцилляторами вводилась одним и тем же специальным способом. Если выбирать более простой вид связи, который используется в модели (3.9), то химерные состояния в автоколебательном и возбуждаемом режимах обнаружить не удастся. Отличительной чертой обнаруженного химерного режима является также то, что он наблюдается только при малых значениях радиуса связи  $r$ .

По своим характеристикам химера в кольце бистабильных осцилляторов ФитцХью-Нагумо (3.9) имеет следующие особенности: осцилляторы, принадлежащие когерентному кластеру находятся на дне одной потенциальной ямки и почти неподвижны. Имеется, как минимум, два когерентных кластера, соответствующих двум равновесным состояниям (двум ямкам). Осцилляторы, расположенные в пограничной области, составляют два некогерентных кластера. Эти осцилляторы не только оказываются в один момент времени нерегулярным образом распределены между ямками, но, кроме того, совершают нерегулярные колебания во времени, в том числе могут перескакивать из ямки в ямку. Области в пространстве, в которых наблюдаются нерегулярные колебания, остаются практически неизменными во времени.

Нужно отметить, что эффект формирования локализованных структур из колеблющихся во времени элементов в ансамбле взаимодействующих бистабильных осцилляторов ФХН был известен и ранее. Такие структуры описаны в [153] для решетки бистабильных взаимодействующих осцилляторов ФХН с локальной связью. Однако, эти кластеры состоят из периодически колеблющихся элементов и соответствующие пространственные структуры достаточно просты и не могут называться химерами.

Характер колебаний во времени осцилляторов ансамбля внутри когерентного кластера может быть как хаотическим, так и периодическим. Хаотические колебания наблюдаются только при очень малом значении параметра  $\beta$ . Однако, абсолютное равенство  $\beta = 0$ , которое ведет к образованию особенностей динамики, не требуется. С ростом  $\beta$  химерные режимы с периодически колеблющимися элементами внутри некогерентного кластера становятся преобладающими. Если  $\beta \leq 0.0001$  и сила связи  $\sigma$  мала ( $\sigma < 0.32$ ), то временная динамика элементов некогерентного кластера преимущественно периодическая. Если сила связи становится выше этого значения, то динамика становится преимущественно хаотической, что подтверждается путем вычисления старшего показателя Ляпунова, который имеет положительные значения. Формирование

пространственной структуры происходит достаточно быстро. При этом осцилляторы некогерентных кластеров колеблются хаотически на всем времени вычисления. Для точного определения, что пространственная структура является устойчивой во времени режим устанавливался на достаточно большом времени (30000 единиц времени). После этого структура исследовалась на 10000 единицах времени наблюдения. Никаких видимых изменений режима на всем времени наблюдения не наблюдалось. Таким образом, можно утверждать, что двухъямные химеры в системе (3.9) являются устойчивыми во времени. Имеет место некоторая мультистабильность – для различных начальных условий может образовываться структуры с различным числом некогерентных кластеров.

На рисунке 3.22 подробно представлена химерная структура с хаотической динамикой. Мгновенный пространственный профиль  $x_i$  на рисунке 3.22,а показывает структуру, типичную для химерных состояний и содержит пару некогерентных кластеров. Набор из 30 мгновенных пространственных профилей в разные моменты времени показан на рисунке 3.22,б. С помощью него можно наблюдать поведение системы во времени. Этот график иллюстрирует, что осцилляторы в середине когерентных кластеров покоятся в состоянии равновесия без каких-либо колебаний. Слабые колебания появляются вблизи границы с некогерентным кластером. Внутри некогерентных кластеров амплитуда колебаний растет и становятся возможными высокоамплитудные переключения между ямками. Хаотический характер колебаний виден из временной реализации на рисунке 3.22,в.

Для количественного анализа химерного состояния был вычислен средний квадрат девиации  $\Delta_i$  по формуле (3.6) (показана на рисунке 3.23,а), пространственное распределение средней частоты переключений для элементов ансамбля (см. рисунок 3.23,б) и взаимная корреляция элемента из когерентного кластера с остальными элементами ансамбля по формуле (3.5) (см. рисунок 3.23,в)

Графики, представленные на рисунке 3.23, показывают, что все вычисленные характеристики явно демонстрируют разницу между поведением ос-

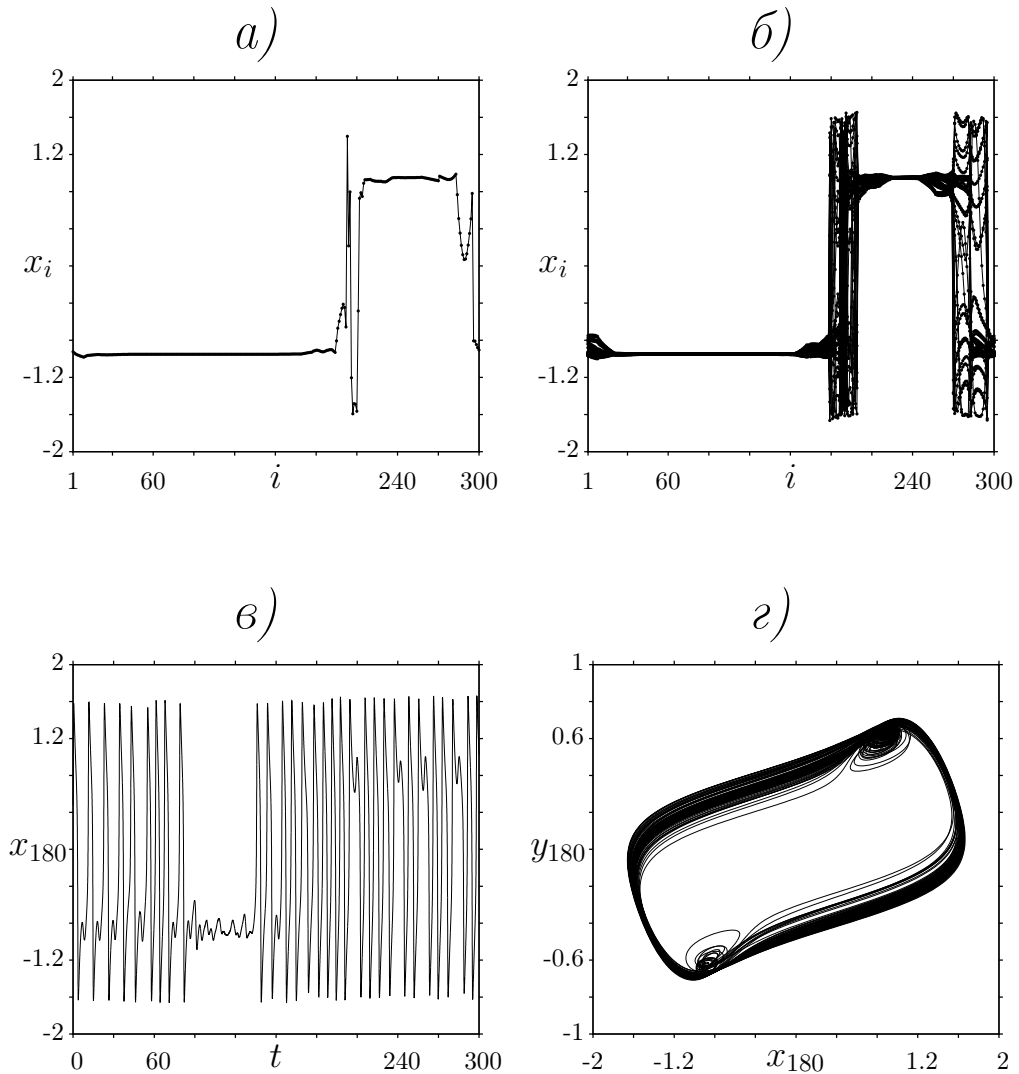


Рис. 3.22. Химера с хаотической динамикой в ансамбле (3.9): а – мгновенный пространственный профиль; б – серия из 30 мгновенных пространственных профилей в различные моменты времени; в – временные реализации для выбранного элемента с  $i = 180$  и г –  $(x_i, y_i)$ -проекция фазового портрета для 180-го элемента. Параметры:  $r = 0.083$ ,  $\sigma = 0.34$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\beta = 0.0001$  и  $N = 300$

цилляторов из когерентного кластера и некогерентного. Первая и вторая характеристика (см. рисунки 3.23,а,б) выделяют области с некогерентным поведением. Видно, что и девиация состояний соседних элементов, и средняя частота колебаний внутри некогерентного кластера имеют различные значения. Значения коэффициента взаимной корреляции у элементов некогерентно-

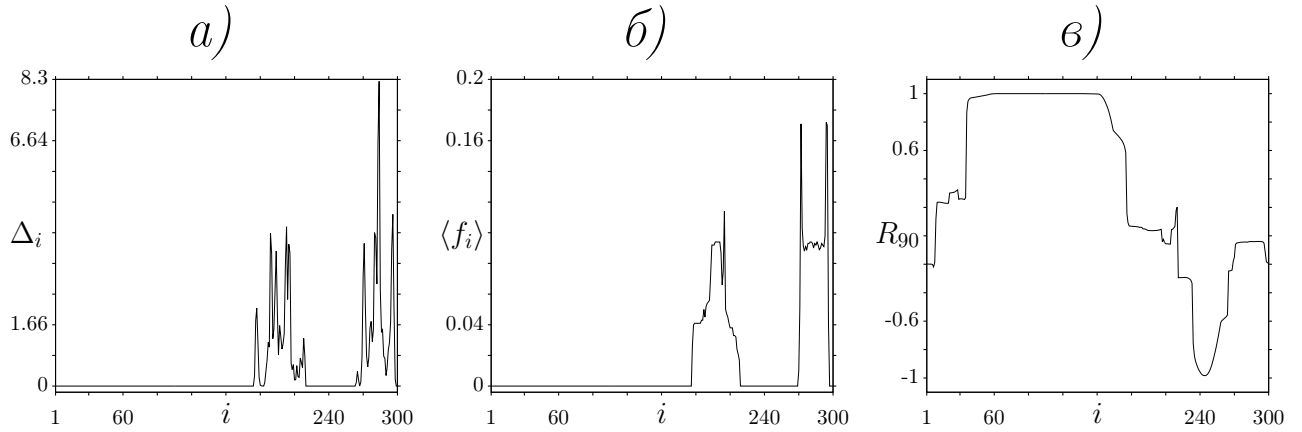


Рис. 3.23. Количественные характеристики для химерного состояния с хаотической динамикой в кольце (3.9): а – пространственное распределение среднего квадрата девиации  $\Delta_i$ ; б – пространственное распределение средней частоты переключений  $\langle f_i \rangle$  осцилляторов; в – коэффициент взаимной корреляции между 90-м элементом и остальными элементами ансамбля. Параметры:  $r = 0.083$ ,  $\sigma = 0.38$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\beta = 0.0001$  и  $N = 300$ .

Старший показатель Ляпунова равен  $0.1646 \pm 0.0001$

го кластера, совершающих хаотические колебания, не равны  $\pm 1$ . Хаотический характер колебаний подтверждается значением старшего показателя Ляпунова  $\lambda_{max} = 0.1646 \pm 0.0001$ .

Химера, представленная на рисунке 3.24 имеет пространственную структуру, похожую на структуру в предыдущем случае. Однако, элементы внутри некогерентного кластера колеблются уже периодически. Это хорошо видно на рисунках 3.25, в, г. Кроме того, старший показатель Ляпунова равен нулю. Периодические колебания соседних элементов в некогерентном кластере имеют значительный фазовый сдвиг относительно друг друга. Таким образом, пространственный профиль имеет форму, типичную для химерных структур, с сильно отличающимися мгновенными значениями переменных в некогерентных кластерах. Следует отметить, что наблюдаемые химерные структуры несколько проще, чем в случае хаотической динамики системы. Количественные характеристики  $\Delta_i$ ,  $\langle f_i \rangle$  и  $R_n(i)$  для химеры с периодической динамикой представлены



на рисунке 3.25. Видно, что значения средней частоты  $\langle f_i \rangle$  одинаковы для всех элементов из некогерентного кластера, в отличие от случая хаотической динамики.

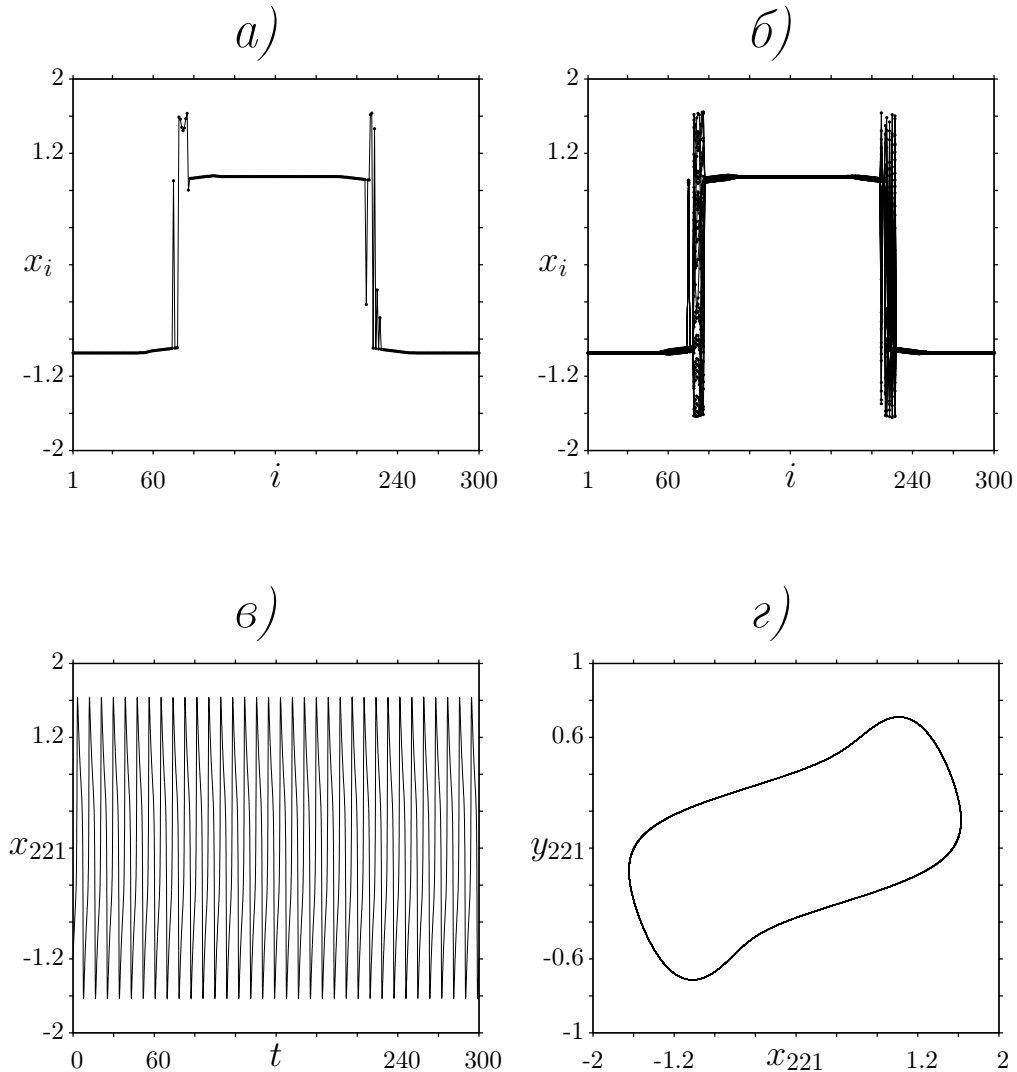


Рис. 3.24. Химера с периодической динамикой в кольце (3.9): а – мгновенный пространственный профиль; б – серия из 30 мгновенных пространственных профилей в различные моменты времени; в – временные реализации для выбранного элемента с  $i = 221$ ; г –  $(x_i, y_i)$ -проекция фазового портрета для 221-го элемента. Параметры:  $r = 0.083$ ,  $\sigma = 0.14$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\beta = 0.001$  и  $N = 300$

Мультистабильность (сосуществование нескольких устойчивых структур), типичная для систем с периодическими граничными условиями, харак-

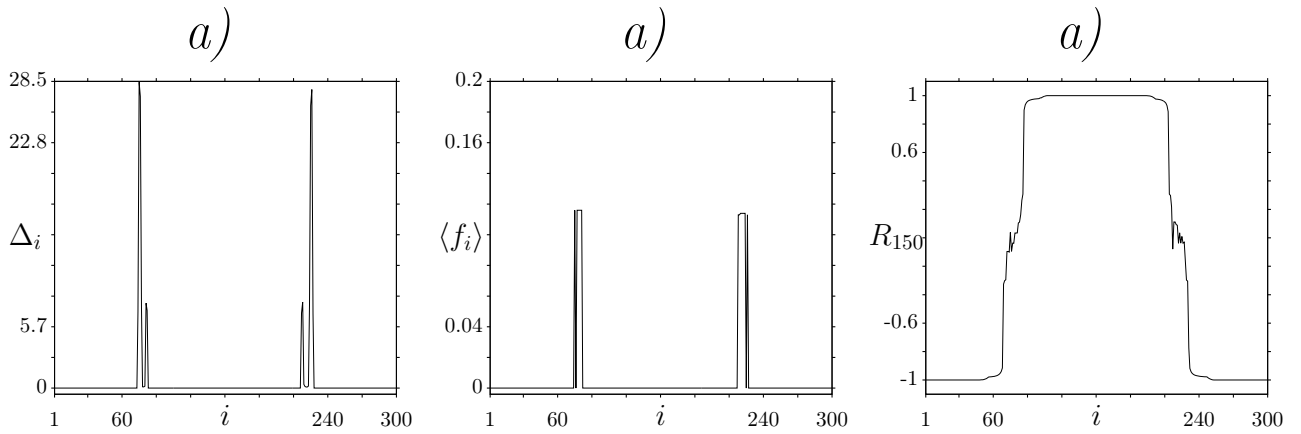


Рис. 3.25. Количественные характеристики для химерного состояния с периодической динамикой в кольце (3.9): а – пространственное распределение среднего квадрата девиации  $\Delta_i$ ; б – пространственное распределение средней частоты переключений  $\langle f_i \rangle$  осцилляторов; в – коэффициент взаимной корреляции между 90-м элементом и остальными элементами ансамбля.

Параметры:  $r = 0.083$ ,  $\sigma = 0.14$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\beta = 0.0001$  и  $N = 300$

терна и для ансамбля системе (3.9). Так, в (3.9) пространственно-нерегулярные структуры и бегущие волны всегда сосуществуют с пространственно-однородным равновесием. Если начальные состояния осцилляторов соответствуют аттрактору только одного состояния равновесия, то при любых значениях  $\sigma$  установившимся режимом будет пространственно-однородное равновесие и  $r$ . При относительно малых радиусах связи имеет место мультистабильность химерных структур: возможно сосуществование химерных с разным количеством некогерентных кластеров ("многоголовые" химеры). Примеры двух сосуществующих химер ("двухголовой" и "четырёхголовой") показаны на рисунке 3.26. При дальнейшем уменьшении  $r$  число сосуществующих структур возрастает, а размер кластеров некогерентности уменьшается, стремясь к одному-двум осцилляторам в пределах локальной связи. В этом случае говорить о существовании химеры становится нецелесообразно. С ростом радиуса связи  $r$  для различных начальных условий реализуются только "двухголовые" химеры. С уменьшением  $\gamma$  осцилляторы, формирующие некогерентный кластер переста-

ют колебаться и распределяются между двумя состояниями равновесия. Происходит переход к стационарным пространственным структурам. При выходе из области бистабильности в область возбудимой динамики с ростом параметра  $\beta$  химеры также исчезают, сменяясь режимом бегущих волн.

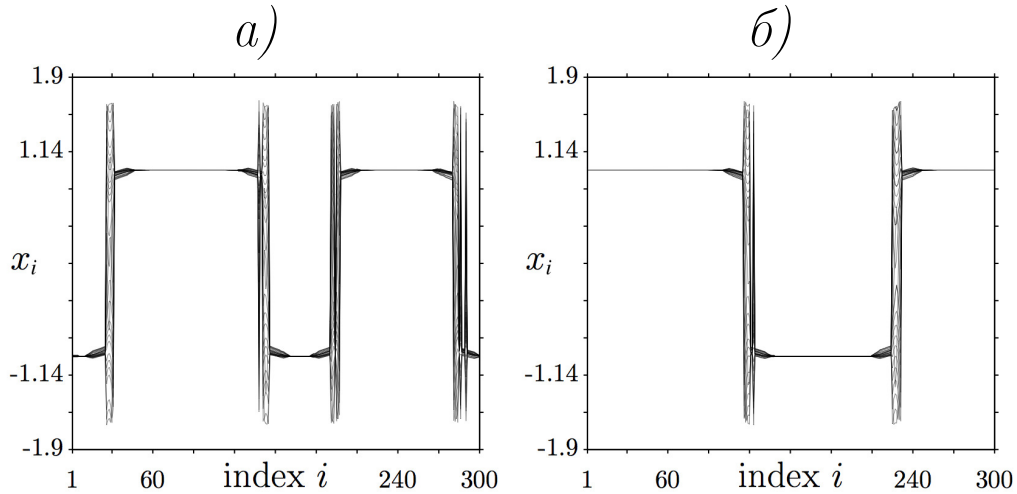


Рис. 3.26. Мультистабильность химерных структур в кольце (3.9) при  $\varepsilon = 0.02$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\beta = 0.001$ ,  $r = 0.05$  и  $\sigma = 0.19$ . На фрагментах (а) и (б) приведены последовательности из 30 пространственных профилей двух химер, наблюдающихся при разных начальных условиях. Параметры:  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.19$ ,  $\varepsilon = 0.2$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\beta = 0.0001$  и  $N = 300$

Выявленный в кольце (3.9) тип химерной структуры существует в достаточно узком, но конечном интервале значений параметров  $\gamma$  и  $\beta$ , которые управляют динамикой осциллятора ФХН. Условием возникновения двухъямной химеры является бистабильный режим осциллятора с двумя устойчивыми фокусами, а также близость к порогу перехода к автоколебательному режиму.

### 3.5 Особенности формирования химерных структур при переходе от пространственно-временного хаоса к режиму полной хаотической синхронизации в двумерной решетке нелокально связанных кубических отображений

В данном разделе главы исследуется пространственно-временная динамика двумерной квадратной решетки нелокально-связанных кубических отображений, которая описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 x_{i,j}(n+1) &= f(x_{i,j}(n)) + \frac{\sigma}{B} \sum_{\substack{k=i-R \\ p=j-R}}^{i+R, j+R} (f(x_{k,p}(n)) - f(x_{i,j}(n))), \quad i, j = 1, \dots, N, \\
 f(x) &= (\alpha x - x^3) \exp \left[ -\frac{x^2}{\beta} \right], \quad B = (1 + 2R)^2 - 1, \\
 x_{i+N,j}(n) &= x_{i,j}(n), \quad x_{i,j+N}(n) = x_{i,j}(n).
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

Индексы  $i$  и  $j$  задают положение элемента в решетке и рассматриваются как дискретные пространственные координаты ( $X$  и  $Y$ , соответственно),  $n = 0, 1, 2, \dots$  – номер итерации (дискретное время). Функция  $f(x)$  определяет динамику отдельно взятого отображения и зависит от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Размер исследуемой системы есть  $N^2$ , где  $N$  – число элементов в одном направлении (вдоль оси  $X$  или  $Y$ ). Граничные условия являются периодическими по обоим направлениям. Взаимодействие элементов носит нелокальный характер. Каждый элемент решетки связан со всеми соседями, попадающими в квадрат с ребром  $2R + 1$ , в центре которого расположен данный элемент (см. рисунок 3.27). Таким образом,  $B = (2R + 1)^2 - 1$  есть общее число связей для каждого элемента. Сила связи контролируется параметром  $\sigma$ . Часто в многомерных ансамблях рассматривается связь каждого элемента со всеми элементами, попадающими в сферу с заданным радиусом  $R$  (см., например, [46, 51, 58]). В этом

случае величину  $R$ , нормированную на полное число элементов будем называть радиусом связи. Предполагается (что подтверждают численные расчеты), что замена окружности на квадрат, в рассматриваемом случае не является принципиальной и все характерные для системы режимы сохраняются. В то же время, численный алгоритм существенно упрощается, что дает заметное ускорение вычислений. Несмотря на то, что в нашем случае  $R$  есть половина ребра квадрата, будем для удобства использовать привычный термин и называть нормированную величину  $r = R/N$  радиусом связи. Ансамбль (3.10) имеет размер  $N^2 = 100 \times 100$  элементов. Значения параметров кубического отображения  $\alpha$  и

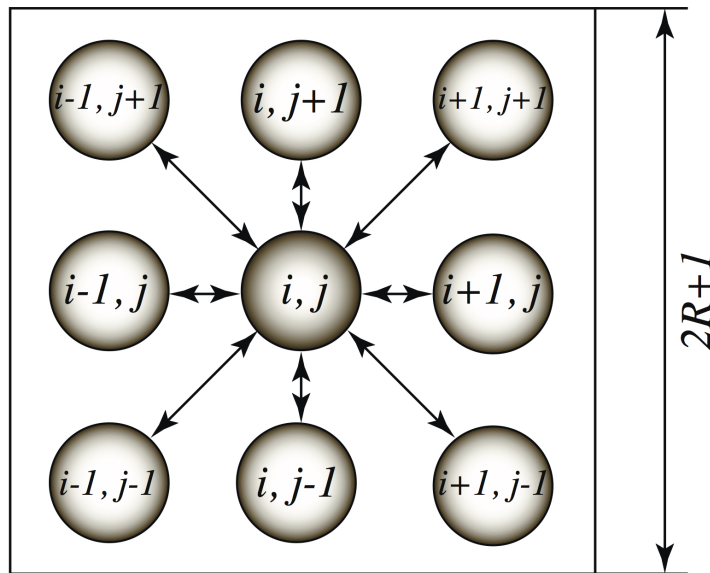


Рис. 3.27. Иллюстрация структуры связей элементов решетки

$\beta$  выбирались соответствующими режиму развитого хаоса с объединенным аттрактором. Как и в случае одномерной цепочки кубических отображений (3.2), для удобства изложения используется термин "потенциальная ямка". Два аттрактора одиночного отображения будем связывать с положительной и отрицательной ямками.

Как отмечалось ранее, в ансамбле связанных отображений за счет влияния связи эффективное значение параметра  $\alpha_{eff}$  меняется, чем объясняется возникновение регулярных режимов и сложных пространственных структур

при переходе от когерентного хаоса к некогерентному с уменьшением параметра связи [47].

В целях составить общее представление о поведении системы (3.10) была рассчитана диаграмма режимов на плоскости параметров  $\sigma$  и  $r$  при фиксированных  $\alpha = 3$  и  $\beta = 10$ . Она представлена на рисунке 3.28. В качестве начальных условий при построении диаграммы использовалась одна и та же реализация последовательности случайных величин, создаваемая с помощью генератора случайных чисел с равномерным распределением в единичном интервале  $t_0$   $0 \leq x_{i,j} \leq 1$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ . Таким образом, в начальный момент все элементы решетки находятся в положительной ямке. В режиме бистабильности при данных начальных условиях все элементы будут продолжать совершать колебания только в положительной ямке, а в режиме объединенного хаоса элементы решетки, несмотря на начальные состояния в положительной ямке, окажутся распределены между двумя ямками.

Следует отметить, что исследуемая система обладает очень сложной структурой областей с различными типами поведения. Для нее характерно явление мультистабильности, а границы различных областей могут иметь сложную форму. Диаграмма, приведенная на рисунке 3.28, носит упрощенный и обобщенный характер. На ней отображены области существования наиболее существенных типов пространственно-временной динамики системы. В то же время, такая диаграмма важна для понимания поведения исследуемой системы. Она дает общее представление о динамических режимах и их эволюции при вариации параметров связи.

На диаграмме 3.28 области выделены различными тонами или отмечены римскими цифрами, причем эти области могут пересекаться или существовать одна в другой. Так римскими цифрами отмечены области, соответствующие одноямным или двухъямным структурам, в то время как тонами выделены области с различным поведением. Так, тонами выделены четыре основных состояния, характерных для решетки (3.10): полная хаотическая синхронизация

всех элементов (A); частичная когерентность (колебательная синхронизация) в терминах [87]; химерные структуры (C); пространственная некогерентность (D). Римскими цифрами I,II,III отмечены режимы, соответствующие различному распределению мгновенных состояний элементов решетки между ямками (интервалами положительных и отрицательных значений). Эти области разделены сплошными или пунктирными линиями. В области, отмеченной цифрой I, наблюдаются преимущественно двухъямные пространственные структуры, для которых мгновенные значения  $x_{i,j}$  будут как положительными, так и отрицательными. При этом колебания элементов во времени могут происходить как в пределах одной ямки, так и демонстрировать переключения между ямками. В области II для рассматриваемых начальных условий реализуются только одноямные структуры. Все элементы решетки колеблются в одной и той же ямке (все значения  $x_{i,j}$  либо положительны, либо отрицательны). Область III соответствует синхронизации хаотических переключений. В этом случае мгновенная пространственная структура является одноямной, как и в области II, но во времени элементы решетки совершают хаотические переключения из ямки в ямку, делая это одновременно. Сплошной и пунктирной линиями на диаграмме обозначены границы существования двухъямных и одноямных пространственных структур. Точечная линия отмечает границу режима синхронизации хаотических переключений.

Как видно из диаграммы 3.28, нижняя граница области одноямных структур II (сплошная линия), как и граница области некогерентности  $D$ , практически не зависят от радиуса связи  $r$ . Химеры также наблюдаются примерно в одном и том же интервале значений силы связи  $\sigma$  для большинства значений  $r$ , кроме больших радиусов  $r > 0.38$  (область ). Для больших радиусов связи область существования химер расширяется, но при этом химерные состояния начинают чередоваться с некогерентными состояниями (на диаграмме отмечено чередованием серых и светло-желтых полос). Верхняя граница одноямных структур (пунктирная линия) имеет довольно сложную форму, а граница об-

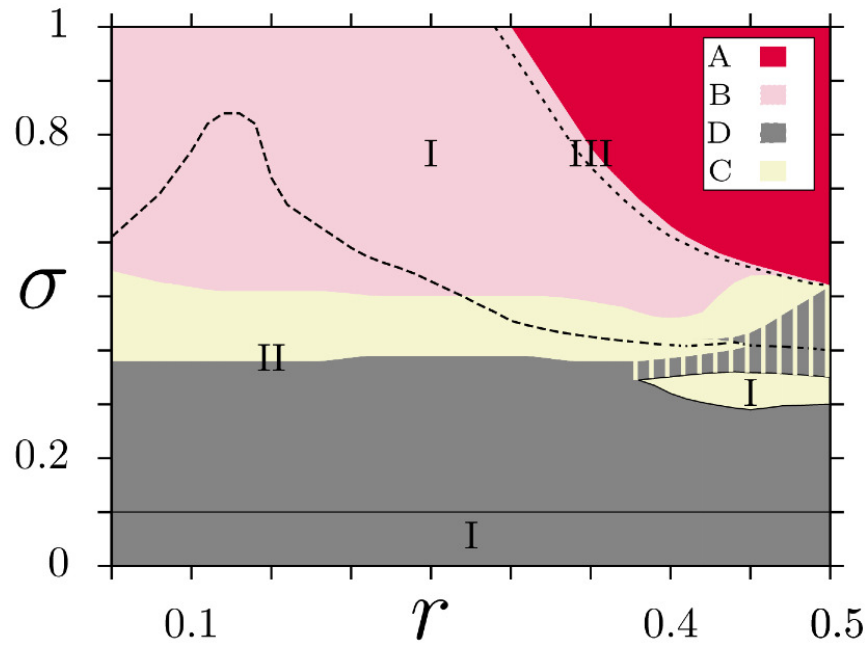


Рис. 3.28. Диаграмма режимов системы (3.10) на плоскости параметров  $(r, \sigma)$ .

Буквами (различными тонами) обозначены области: А — область полной хаотической синхронизации; В — область частичной синхронизации; С — область существования химерных состояний; D — область некогерентности.

Цифрами отмечены: I — область преимущественного существования двухъямных пространственных структур; II — область одноямных структур;

III — область синхронизации хаотических переключений. При построении диаграммы использовалась фиксированная реализация случайных начальных условий

ласти полной хаотической синхронизации (область А) резко сдвигается в сторону увеличения параметра связи  $\sigma$ . Для значений  $r < 0.3$  полной хаотической синхронизации не наблюдается, и имеет место только частичная когерентность (область В). При очень больших радиусах связи ( $r \approx 0.5$ ) режим полной хаотической синхронизации устанавливается сразу после режима химер. На границе областей частичной и полной хаотической синхронизации происходит так называемая бифуркация прорыва (Blowout bifurcation, [154, 155]).

Диаграмма, приведенная на рисунке 3.28, отражает преимущественно пространственные характеристики режимов. При этом поведение элементов ре-



шетки во времени может быть как хаотическим, так и регулярным. Для части области  $D$ , находящейся в области  $I$  типично хаотическое во времени поведение, а в другой части области  $D$  из области  $II$  наблюдаются и хаотические и регулярные режимы. Это касается и области существования химер  $C$ . Колебания в режиме частичной когерентности  $B$  в рассматриваемом случае являются в основном регулярными (периодическими или квазипериодическими), в то время как в области полной хаотической синхронизации  $A$  они соответствуют режиму объединенного хаоса, реализующемуся в отдельно взятом кубическом отображении. Примеры пространственных структур и колебаний во времени, наблюдающихся в различных областях диаграммы будут приведены в следующем разделе.

При специальном выборе начальных условий (когда зависимости  $x_{ij}(t_0)$  для парциальных элементов в решетке задаются гармоническими функциями с небольшой случайной добавкой), на плоскости параметров  $\sigma$  и  $r$  можно получить области, соответствующие существованию режимов стоячих волн. Эти структуры возникают в области частичной когерентности  $B$ , имеют гладкий регулярный мгновенный пространственный профиль и периодическую динамику во времени. Области стоячих волн различной длины были ранее построены для цепочек логистических отображений и осцилляторов Рёсслера [43, 51, 86]. Они характеризуются числом  $k$ , равным количеству длин волн, укладывающихся на длине системы. В случае двумерной решетки каждая такая структура описывается двумя числами  $k_1$  и  $k_2$ , задающими число волн в поперечном и продольном направлениях.

В данной работе строится только область существования структуры  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$ . Она приведена на двухпараметрической диаграмме, изображенной на рисунке 3.29 (область  $B_1$ ).

При движении в области  $B_1$  сверху вниз или справа налево можно наблюдать бифуркации удвоения периода колебаний во времени. Примеры, иллюстрирующие эти бифуркации, даны на рисунке 3.30. На рисунке приведены

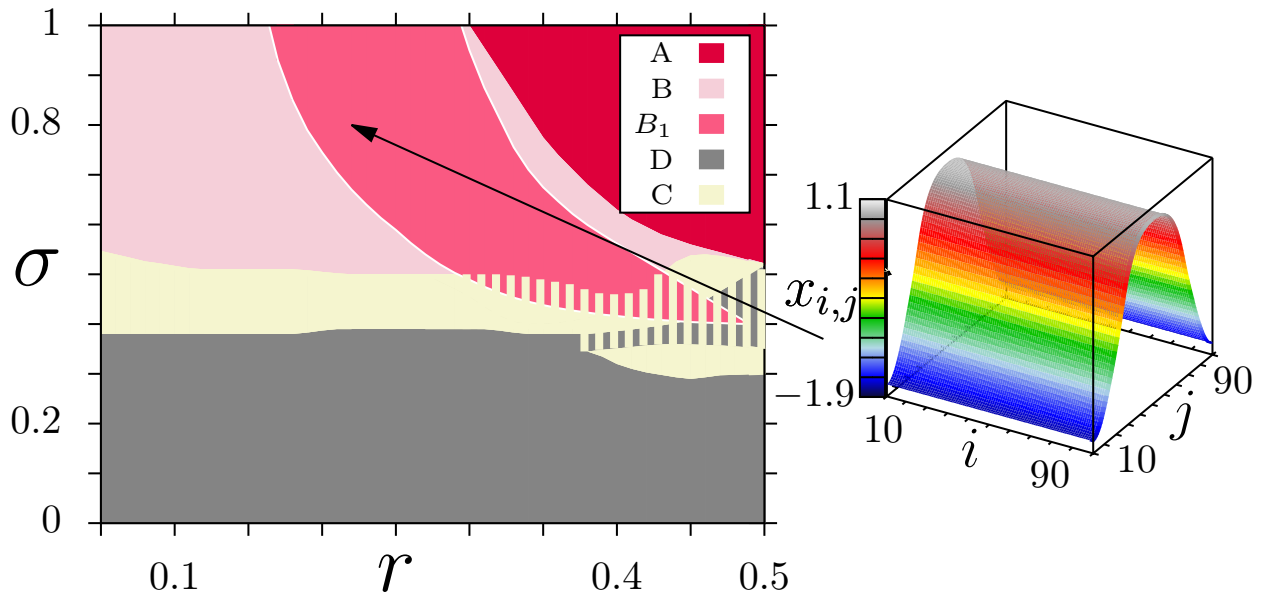


Рис. 3.29. Область  $B_1$ , соответствующая существованию стоячей волны  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$  на плоскости параметров  $(r, \sigma)$  (Справа представлен мгновенный пространственный профиль при  $r = 0.2$ ,  $\sigma = 0.8$ ). Буквами А, В, С, D обозначены те же области, что и на рисунке 3.28. При построении области  $B_1$  начальные условия выбирались специальным образом

срезы пространственного профиля в разные моменты времени для фиксированного значения силы связи  $\sigma = 0.8$  и различных значений радиуса связи  $r$ . При  $r = 0.2$  пространственный профиль не меняется во времени, что соответствует неподвижной точке системы. При  $r = 0.19$  имеются два профиля, повторяющиеся через итерацию, т.е. наблюдаются периодические колебания с периодом 2. При  $r = 0.18$  можно наблюдать множество различных профилей, что означает возникновение хаотических колебаний.

Кроме рассмотренной структуры  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$  в решетке (3.10) можно обнаружить множество других подобных структур, наблюдающихся в более узких областях на плоскости параметров. На рисунке 3.31 приведены срезы пространственных профилей, иллюстрирующие некоторые из таких структур.

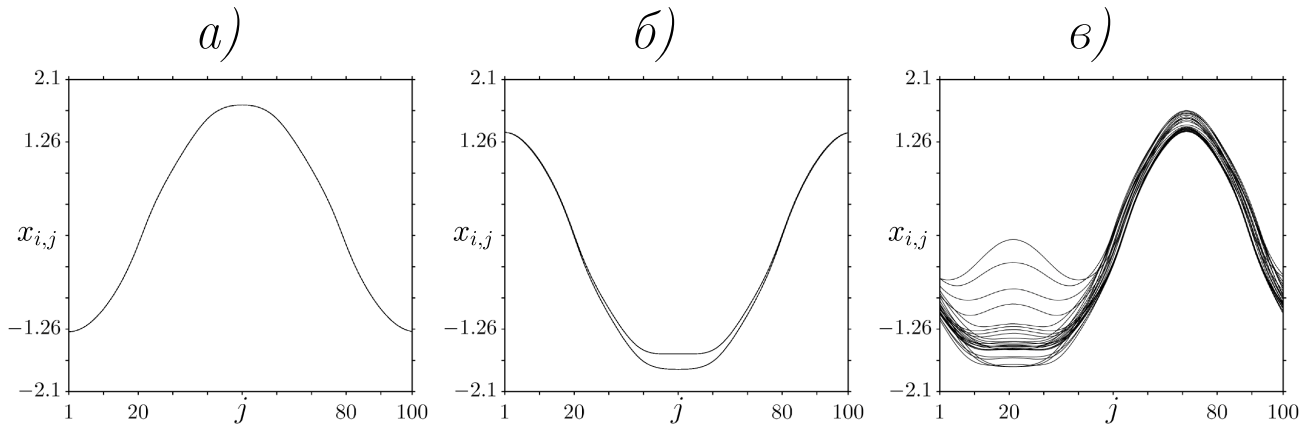


Рис. 3.30. Сечение пространственно-временного профиля стоячей волны  $x_{i,j}(n)$  при  $i = 50$  и фиксированных  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1$  и  $\sigma = 0.8$  для  $r = 0.2$  (а),  $r = 0.19$  (б) и  $r = 0.18$  (в)

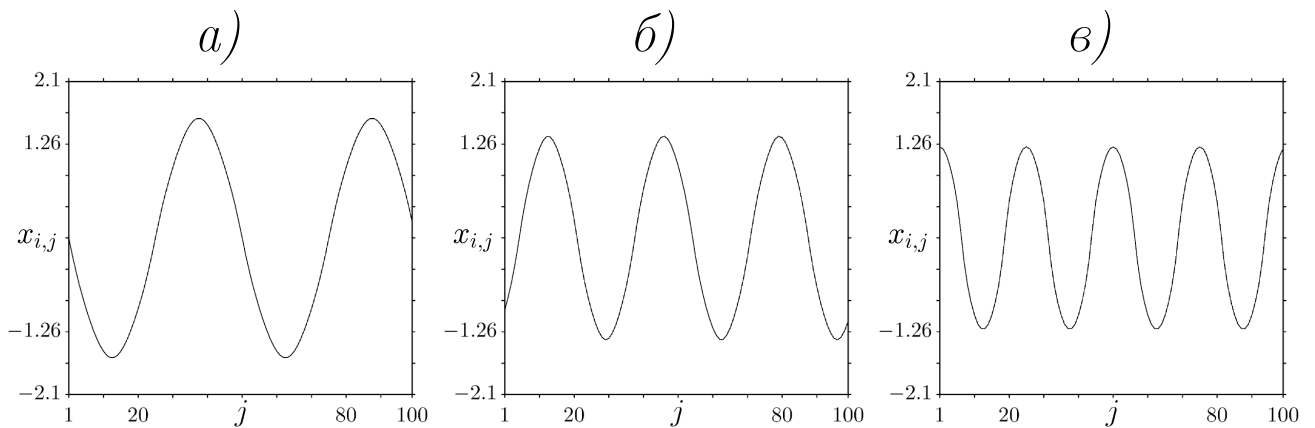


Рис. 3.31. Сечения пространственно-временных профилей стоячих волн  $x_{i,j}(n)$  при  $i = 50$  и фиксированных  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 2, 3, 4$  и  $\sigma = 0.8$  для  $r = 0.11$  (а),  $r = 0.08$  (б) и  $r = 0.07$  (в)

### 3.5.1 Характерные режимы решетки при различных значениях параметра связи $\sigma$ и фиксированном радиусе связи $r = 0.35$

Зафиксируем радиус связи  $r = 0.35$ . Выбор такого значения  $r$  позволил пронаблюдать наибольшее число характерных режимов при вариации силы свя-

зи  $\sigma$ . Рассмотрим более детально поведение системы при увеличении силы связи  $\sigma$  от 0 до 1.

На рисунке 3.32 приведена фазо-параметрическая диаграмма состояний заданного элемента решетки ( $i = j = 50$ ), построенная при изменении параметра  $\sigma$  для указанного значения  $r$ . Для каждого значения управляющего параметра в качестве начальных условий бралась та же реализация случайной последовательности чисел в интервале  $[0, 1]$ , что и при построении двухпараметрической диаграммы, приведенной на рисунке 3.28. Точками отмечены значения  $x_{i,j}$ ,  $i = 50$ ,  $j = 50$ , получаемые в различные моменты времени при данном значении параметра  $\sigma$ . Разумеется, конкретный вид этой диаграммы зависит от выбора рассматриваемого элемента решетки и начальных условий. В то же время она позволяет в первом приближении обозначить границы разных пространственных структур, а ее вид при выборе различных элементов будет качественно подобен.

Диаграмма 3.32 разбита на области двухъямных и одноямных пространственных структур, а также область синхронизации хаотических переключений между ямками, обозначенные римскими цифрами I, II, III. Полоса разных тонов, помещенная под графиком, отмечает участки, соответствующие областям диаграммы на рисунке 3.28, выделенным тем же тоном.

При слабой связи система находится в режиме двухъямных пространственных структур (область I). Однако, при этом поведение элементов решетки во времени, может быть различным. При совсем слабой связи ( $\sigma < 0.05$ ) динамика каждого элемента соответствует режиму объединенного хаоса и переменные  $x_{i,j}$  при итерациях принимают как положительные так и отрицательные значения. Такое поведение наблюдается не только при начальных условиях, указанных ранее, но и при любом другом выборе начальных состояний элементов решетки. Иллюстрация данного режима приведена на рисунке 3.33.

С превышением силой связи значения  $\sigma \approx 0.05$  поведение элементов решетки во времени становится бистабильным. Каждый элемент продолжает

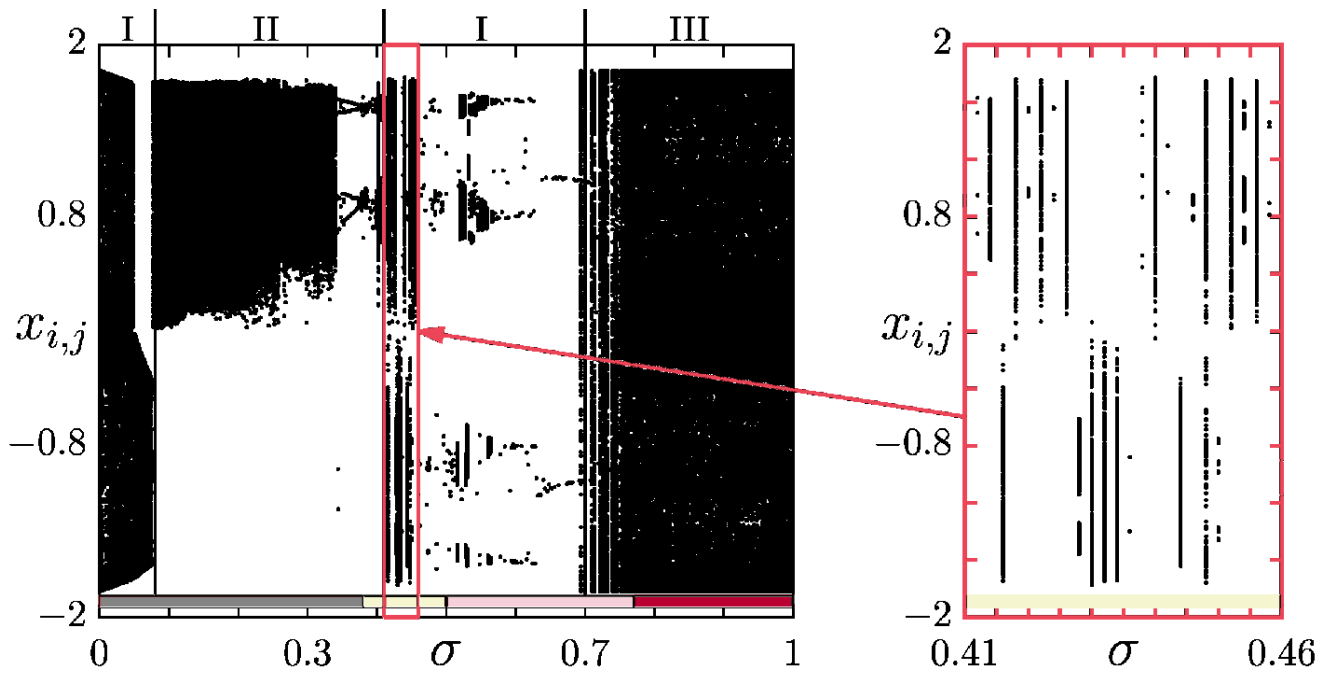


Рис. 3.32. Фазо-параметрическая диаграмма состояний элемента решетки  $i = 50$ ,  $j = 50$  в зависимости от параметра связи  $\sigma$  при радиусе связи  $r = 0.35$ .

Римскими цифрами (сверху) и полосой разных тонов (снизу) показаны области, соответствующие аналогичным областям на рисунке 3.28. На вставке приведен фрагмент диаграммы в увеличенном масштабе

оставаться в области либо положительных, либо отрицательных состояний (в левой или правой ямке). В то же время с произвольных начальных условий реализуются двухъямные пространственные структуры: часть элементов колеблется в левой ямке, а другая часть – в правой (см. рисунок 3.34). Как видно из диаграммы на рисунке 3.32 элемент с координатами  $i = 50$ ,  $j = 50$  при  $0.05 < \sigma < 0.095$  попадает в левую (отрицательную) ямку, однако при  $\sigma \approx 0.095$  переходит в правую (положительную) ямку. Временная динамика остается хаотической, с относительно равномерным распределением значений  $x_{i,j}$  от 0 до 1.8.

При достижении параметром связи значения  $\sigma \approx 0.1$  происходит переход в область одноямных структур (область II на диаграммах). При этом появляются сложные, но устойчивые во времени структуры с хаотическим одноямным поведением элементов как во времени, так и в пространстве, Т.е. все элемен-

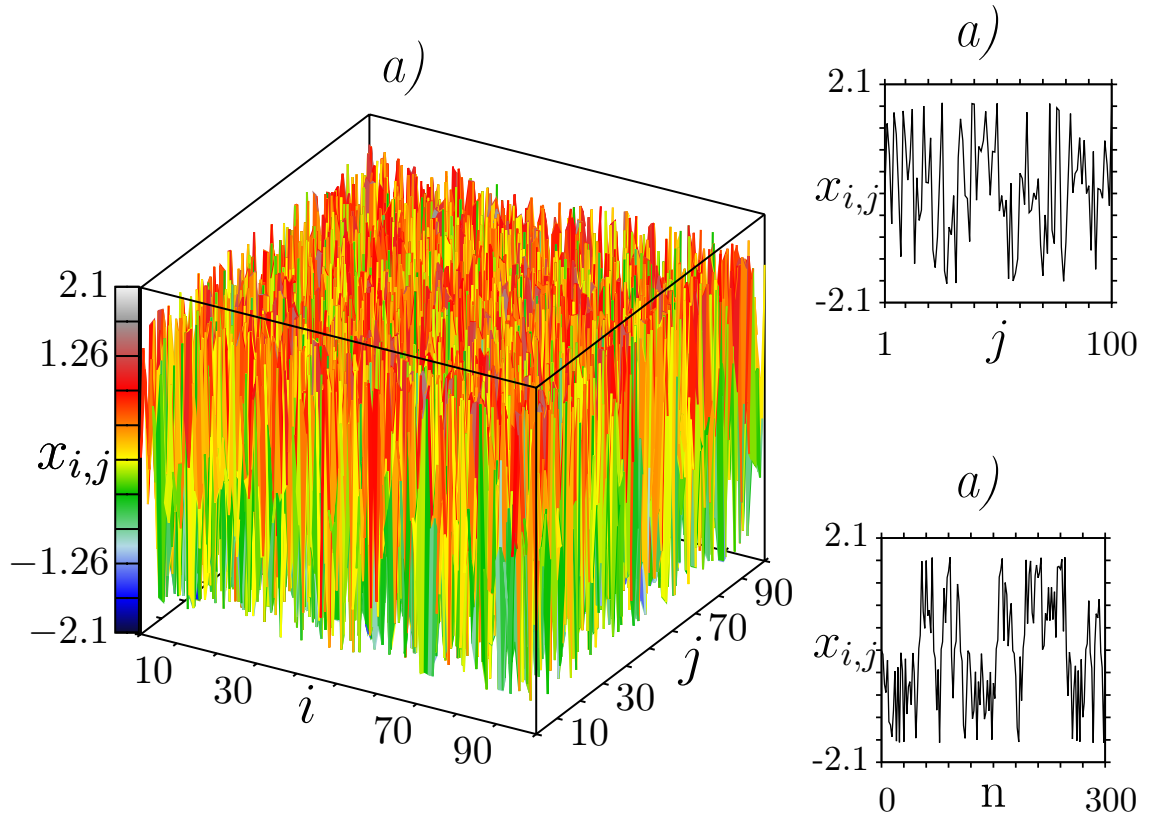


Рис. 3.33. Режим некогерентного объединенного хаоса при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.044$ :

а – мгновенный пространственный профиль  $x_{i,j}$ ; б – сечение мгновенного профиля при  $i = 50$ ; в – реализация колебаний  $x_{i,j}(n)$  элемента с координатами ( $i = 50$ ,  $j = 50$ ) во времени

ты решетки находятся либо в левой, либо в правой ямке, где и колеблются в течении всего времени наблюдения (рисунок 3.35). Описанное поведение наблюдается во всей нижней части области одноямных структур II, соответствующей режиму некогерентности D, выделенному на диаграмме 3.28 тёмно-серым цветом.

С дальнейшим ростом силы связи корреляция между элементами увеличивается, что приводит к возникновению в системе кластеров с принципиально различным поведением соседних элементов. Так часть элементов решетки характеризуются некогерентным поведением соседей, а другая часть демонстрируют эффект синхронизации. Формирование стационарных во времени когерентных и некогерентных кластеров означает переход системы в область хи-

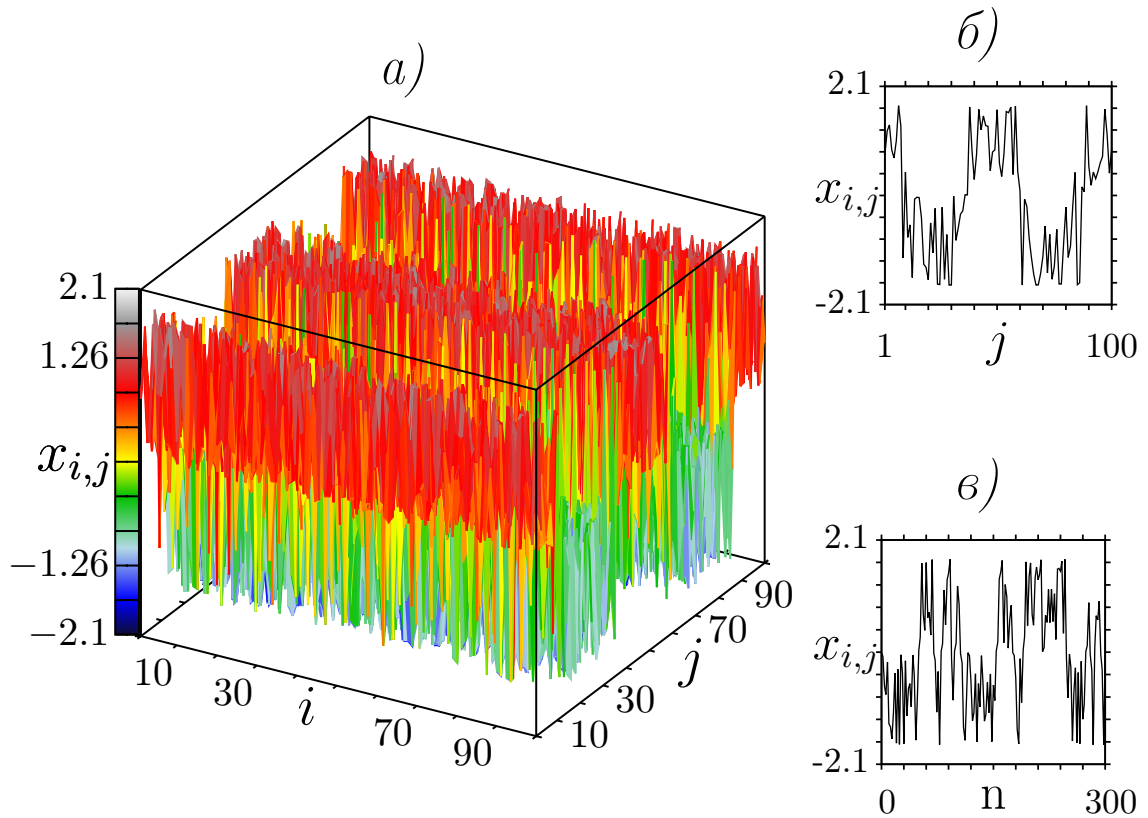


Рис. 3.34. Режим двухъямной хаотической структуры с бистабильной динамикой элементов во времени при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.048$ : а – мгновенный пространственный профиль  $x_{i,j}$ ; б – сечение пространственного профиля при  $i = 50$  (сверху); в – реализация колебаний  $x_{i,j}(n)$  элемента с координатами  $i = 50$ ,  $j = 50$  во времени

мерных структур (область С, отмеченная на диаграмме режимов 3.28 желтым цветом).

В регионе пересечения областей  $II$  и химерные структуры являются одноямыми в пространстве и времени, т.е. все элементы решетки постоянно находятся либо в положительной либо в отрицательной ямке. Здесь можно наблюдать химеры, аналогичные фазовым и амплитудным химерам, обнаруженным в цепочках логистических отображений и хаотических автогенераторов в [47]. Пример структуры с фазовой и амплитудной химерами приведен на рисунке 3.36,а. Как видно из графиков, приведенных на рисунках 3.36,б-д, в решетке действительно наблюдается фазовая и амплитудная химеры. В случае фазовой

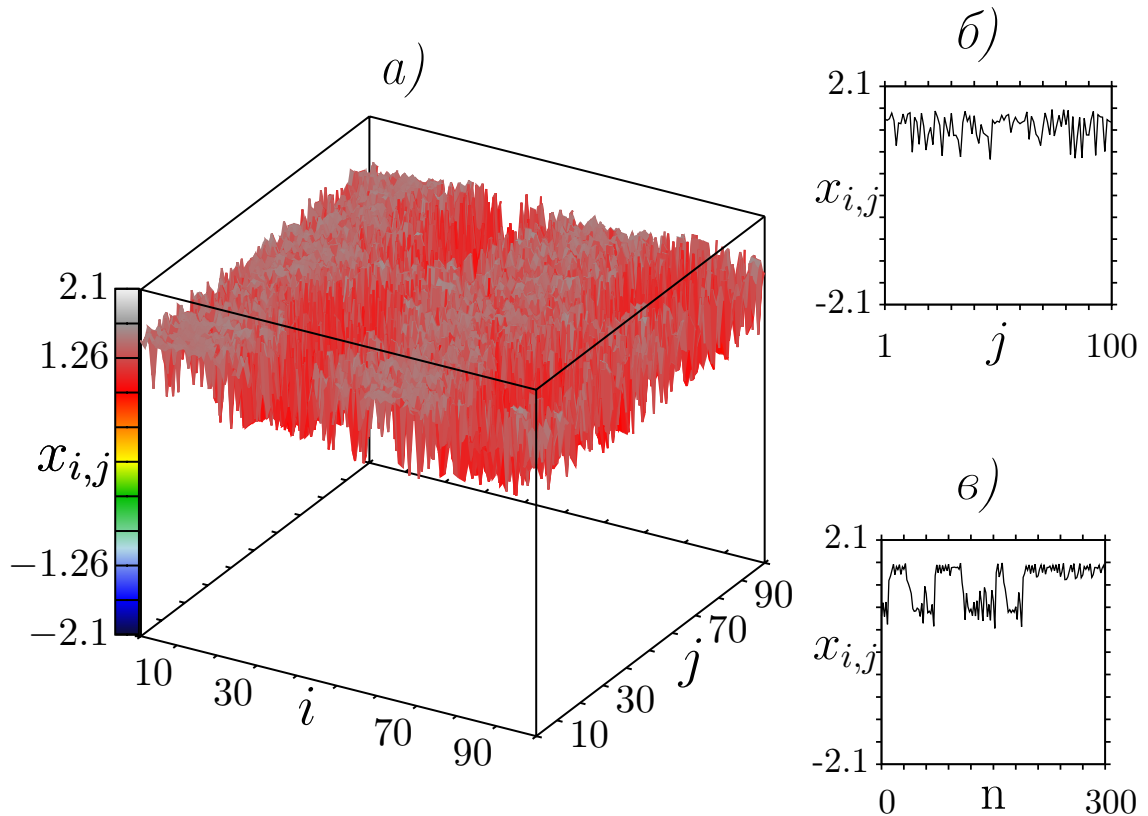


Рис. 3.35. Одноямная структура в режиме бистабильного хаоса при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.284$ : а – мгновенный пространственный профиль  $x_{i,j}$ ; б – сечение пространственного профиля при  $i = 50$ ; в – реализация колебаний  $x_{i,j}(n)$  элемента с координатами  $(i = 50, j = 50)$  во времени

химеры элементы в некогерентном кластеры совершают колебания со сдвигом на одну итерацию, что аналогично фазовому сдвигу на пол-периода в системе с непрерывным временем. Для амплитудной химеры колебания происходят "в фазе но их "амплитуды"(мгновенные значения  $x_{i,j}$ ) сильно различаются [47].

На верхней границе области одноямных структур (пунктирная линия на диаграммах) происходит бифуркация объединения химерных структур, принадлежащих различным ямкам и возникает двухъямная химера. Этот тип химер характерен для пересечения областей  $I \cap C$ . Двухъямные химеры в решетке кубических отображений аналогичны двухъямным химерам, наблюдающимся в одномерных ансамблях бистабильных элементов и описанным в предыдущих разделах. Для двухъямных химер элементы когерентных кластеров находятся в



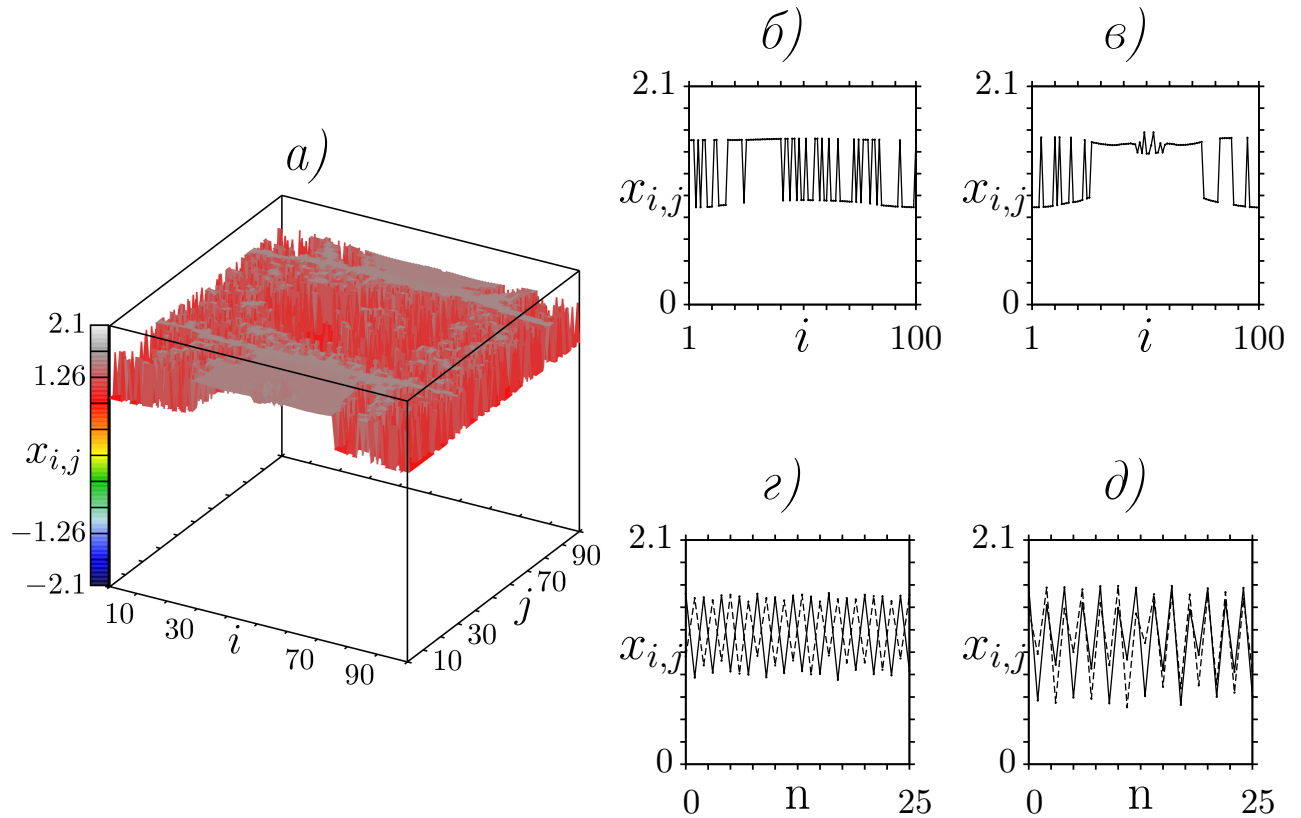


Рис. 3.36. Одноямная структура с фазовой и амплитудной химерами при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.402$ : а – мгновенный пространственный профиль  $x_{i,j}$ ; б – сечение пространственного профиля при  $i = 80$ ; в – сечение пространственного профиля при  $j = 6$  (сверху); г – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для двух соседних элементов с координатами  $(i = 51, j = 80)$  и  $(i = 51, j = 81)$ , принадлежащих некогерентному кластеру фазовой химеры; д – реализации колебаний  $x_{i,j}(n)$  двух соседних элементов с координатами  $(i = 49, j = 6)$  и  $(i = 50, j = 6)$ , находящихся в области некогерентного кластера амплитудной химеры

одной ямке, а элементы, принадлежащие некогерентным кластерам нерегулярным образом распределены между ямками. Пример такой структуры приведен на рисунке 3.37. Мгновенный пространственный срез  $x_{i,j}(n)$  при фиксированном  $i = 6$  (см. рисунок 3.37,б) дает четкое представление о характере двухъямной химеры. Приведенные на рисунке 3.37,г графики колебаний двух элементов из некогерентного кластера показывают, что они всё время остаются в разных

ямках. Двухъямная химера сосуществует вместе с амплитудной химерой, расположенной в отрицательной ямке. Именно ее можно видеть на приведенном мгновенном пространственном срезе  $x_{i,j}(n)$  при фиксированном  $j = 50$  (см. рисунок 3.37,в) . Следует отметить, что большинство химерных структур, наблюдающихся в решетке (3.10), являются комбинированными, в том смысле, что включают кластеры, характерные для разного типа химер: фазовых, амплитудных и двухъямных. В различных сечениях двумерного пространственного профиля можно получать различную картину когерентных и некогерентных кластеров.

На рисунке 3.32 область двухъямных химер показана на увеличенном фрагменте диаграммы, приведенном справа. Несмотря на начальное положение всех элементов в положительной ямке, для установившейся структуры состояния элемента  $x_{i,j}$  ( $i = 50, j = 50$ ) могут быть сосредоточены в любой из ямок. Причем, как это видно из приведенного фрагмента диаграммы, даже при небольшом сдвиге по параметру рассматриваемый элемент может оказаться уже в другой ямке. Можно заключить, что пространственные структуры в области двухъямных химер очень чувствительны не только к начальным условиям, но и к изменениям параметра связи и могут демонстрировать резкие перестройки. При этом во времени любой элемент решетки попав в определенную ямку остается в ней навсегда.

Если несколько увеличить параметр связи, то в той же области  $I \cap$  можно наблюдать неподвижные во времени химерные структуры, аналогичные структурам, описанным ранее в кольце кубических отображений при  $\alpha = 2$ . Пример такой "мертвой химеры" приведен на рисунке 3.38.

После превышения значения  $\sigma \approx 0.51$  происходит переход решетки в режим частичной когерентности (область  $B$  на двухпараметрической диаграмме 3.28). В области  $B$  существуют двухъямные пространственные структуры, которым соответствуют гладкие пространственные профили. Элементы решетки распределены между различными ямками, однако поведение во времени,

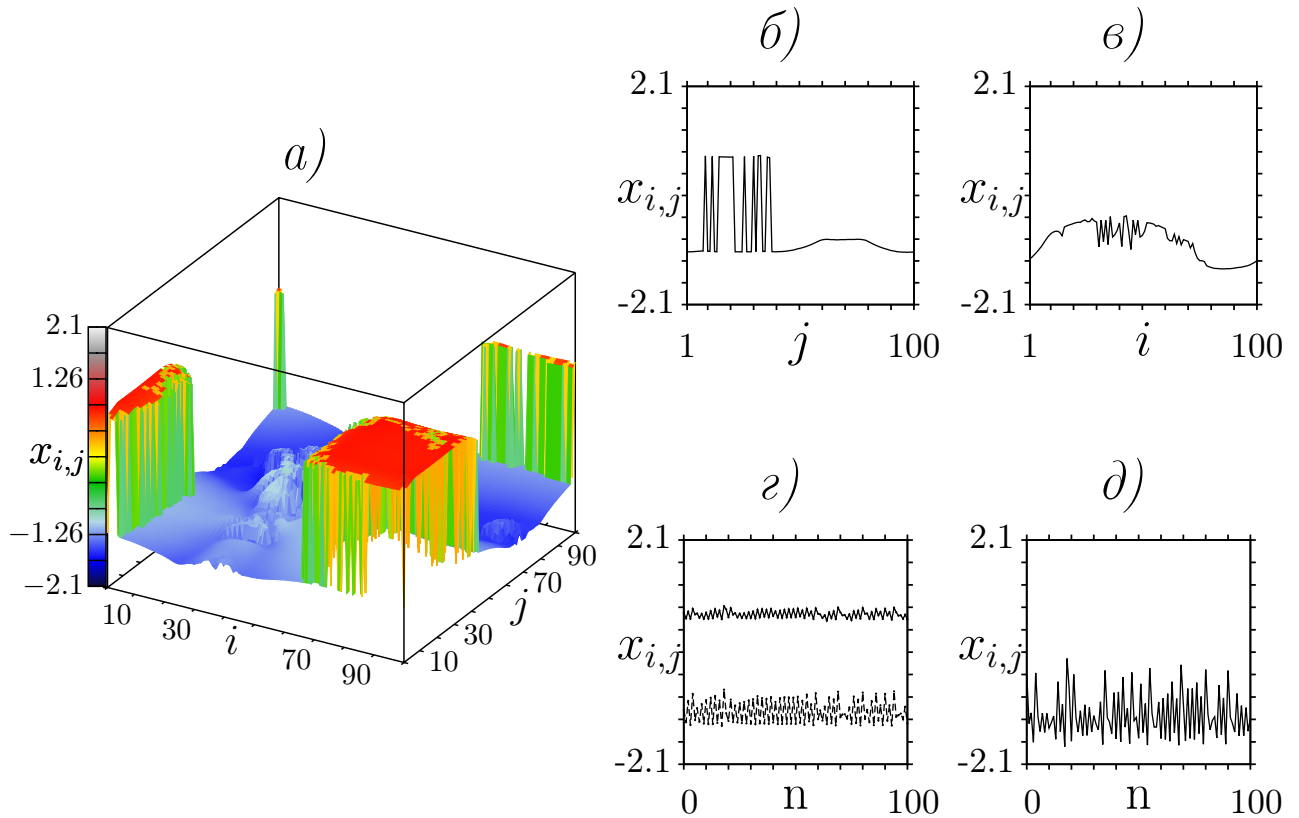


Рис. 3.37. Структура с двухъямной и амплитудной химерами при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.444$ : а – мгновенный пространственный профиль  $x_{i,j}$ ; б – сечение пространственного профиля при  $i = 6$ ; в – сечение пространственного профиля при  $j = 50$ ; г – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для двух соседних элементов с координатами  $(i = 49, j = 6)$  и  $(i = 50, j = 6)$  в некогерентном кластере двухъямной химеры; д – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для элемента с координатами  $(i = 31, j = 50)$  в области амплитудной химеры как и в области  $C$ , является бистабильным (однойямным). Каждый элемент не покидает свою ямку. При этом элементы совершают регулярные колебания, соответствующие циклам различных периодов. Возможны также неподвижные во времени структуры данного типа с распределением элементов между двумя равновесиями. Пример такой структуры приведен на рисунке 3.39. Данная структура представляет собой стоячую волну, направленную вдоль оси  $i$  и имеющую форму единичного импульса с резким переходом между состояниями, принадлежащими разным ямкам.

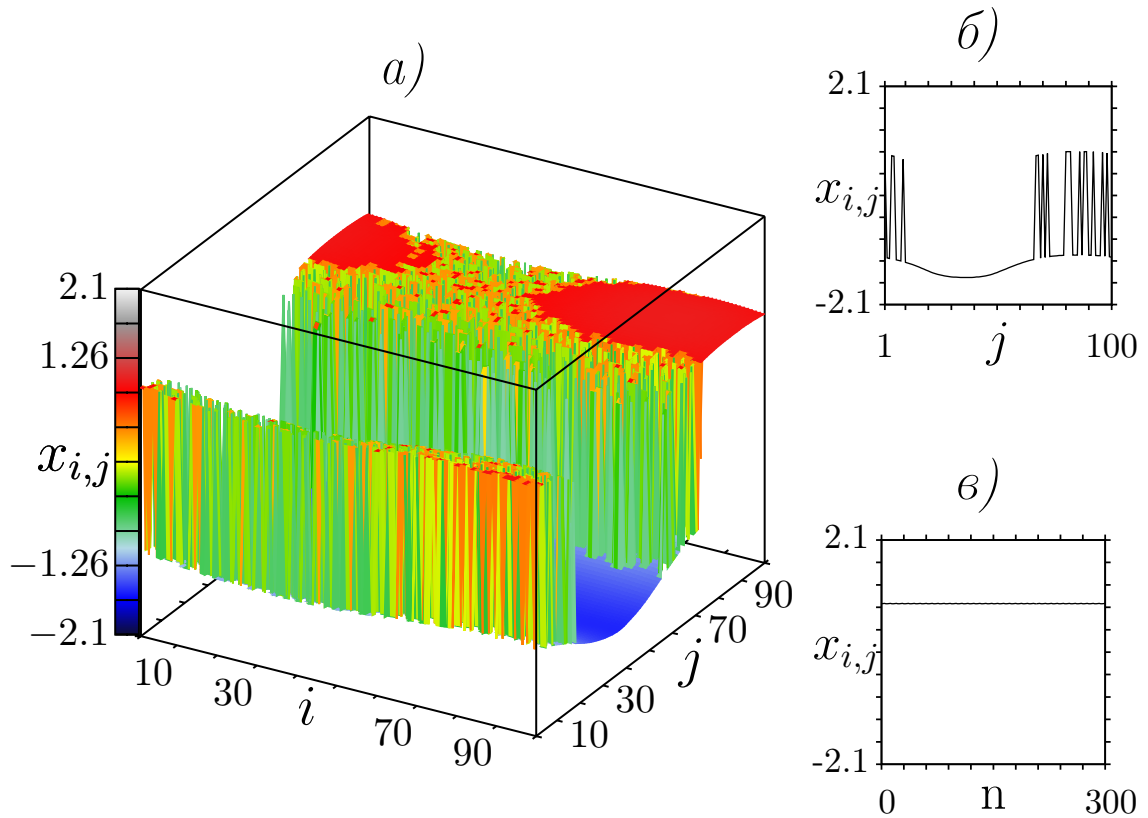


Рис. 3.38. Неподвижная двухъямная химера при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.450$ : а – мгновенный пространственный профиль состояния решетки  $x_{i,j}$ ; б – сечение пространственного профиля  $j = 20$ ; в – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для элемента с координатами  $(i = 50, j = 50)$

Хотя в области  $I$  для случайного начального распределения в пределах одной ямки реализуются преимущественно двухъямные структуры, однако в некоторых случаях можно наблюдать и неподвижные структуры с расположением элементов в одной ямке (см. рисунок 3.40)

При пересечении границы области III (штрихованная линия на диаграммах) взаимная корреляция элементов резко возрастает и переключения между положительными и отрицательными ямками происходят одновременно во всех элементах решетки. Колебания во времени при этом соответствуют режиму объединенного хаоса, но мгновенные пространственные профили отражают одновременное пребывание всех элементов в одной и той же ямке (рисунок 3.41). Однако в области  $III \cap B$  полная хаотическая синхронизация хаотических коле-

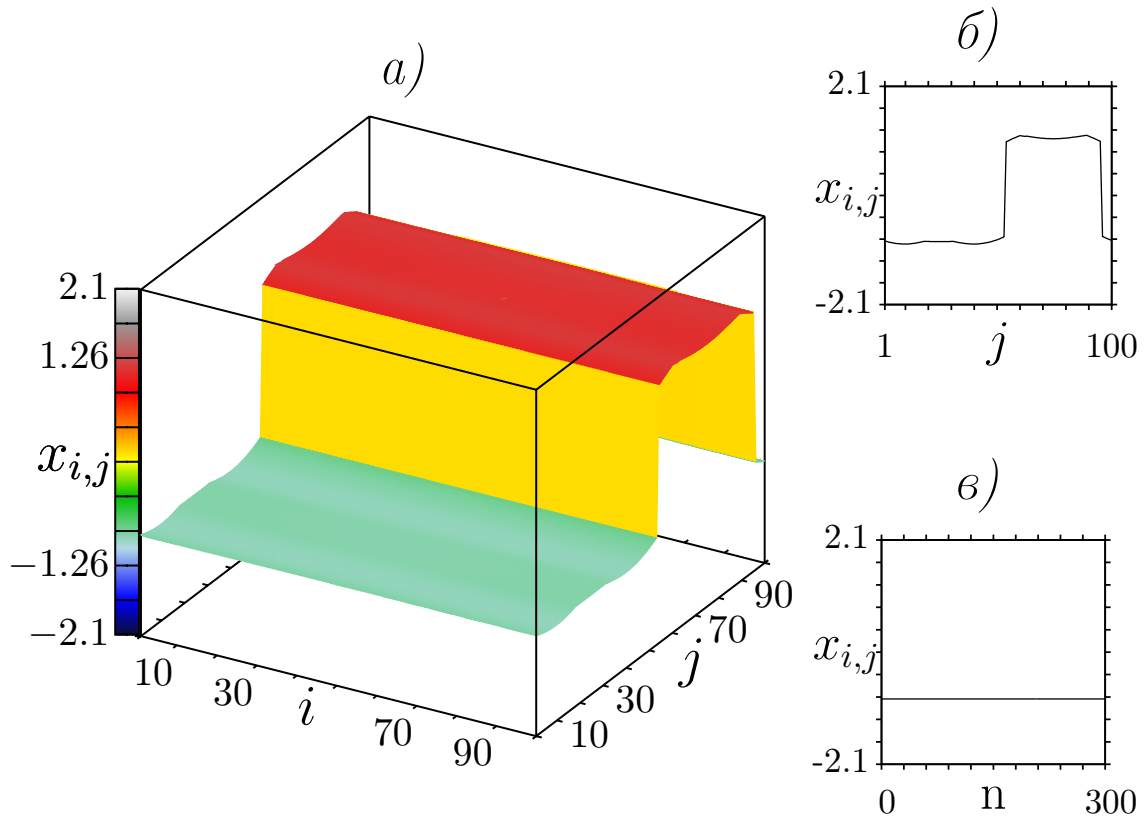


Рис. 3.39. Неподвижная двухъямная пространственная структура в режиме частичной когерентности при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.502$ : а – мгновенный пространственный профиль состояния решетки  $x_{i,j}$ ; б – сечение мгновенного профиля при  $i = 20$ ; в – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для элемента с координатами  $(i = 50, j = 50)$

баний еще не происходит и колебания разных элементов не являются полностью идентичными (рисунок 3.41,в).

При  $\sigma \approx 0.72$  происходит бифуркация прорыва (в обратном направлении) и система (3.10) переходит в режим полной хаотической синхронизации объединенного хаоса (область А). Данный режим проиллюстрирован на рисунке 3.42.

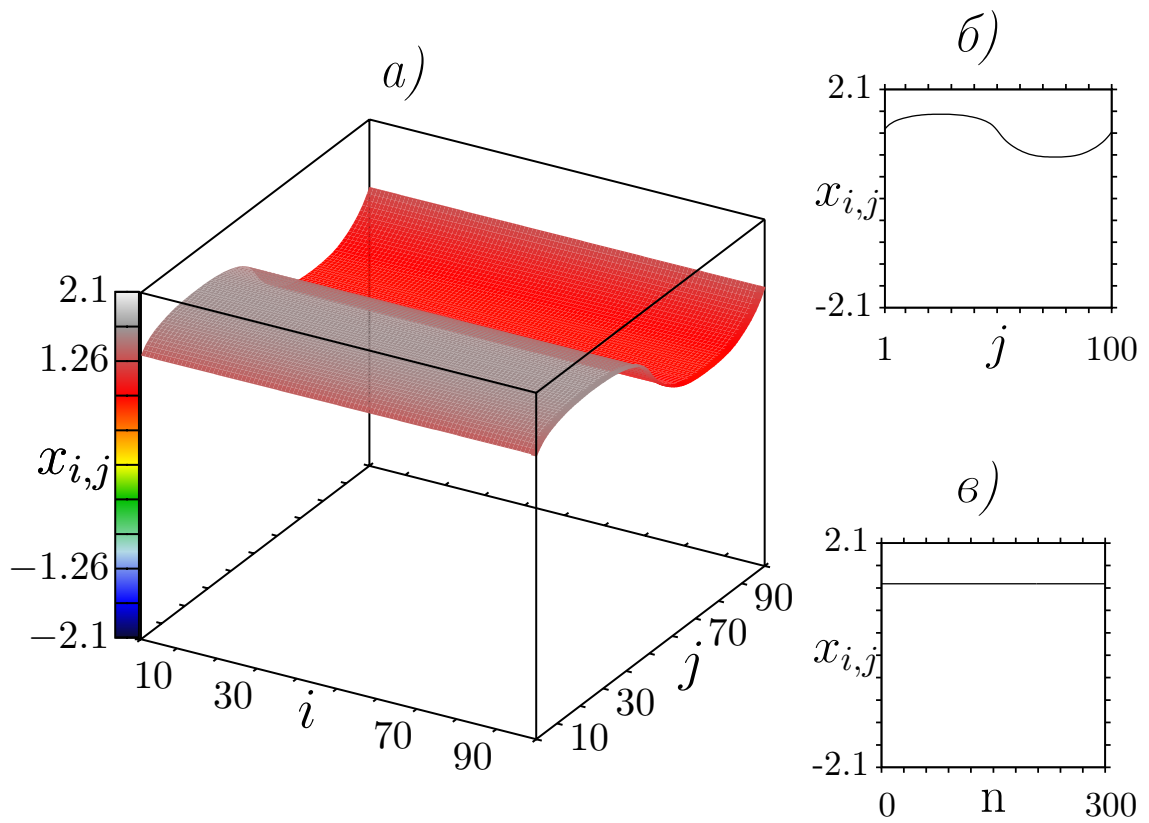


Рис. 3.40. Неподвижная одноямная пространственная структура при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.614$ : а – мгновенный пространственный профиль  $x_{i,j}$ ; б – сечение пространственного профиля при  $i = 50$ ; в – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для элемента  $(i = 50, j = 50)$

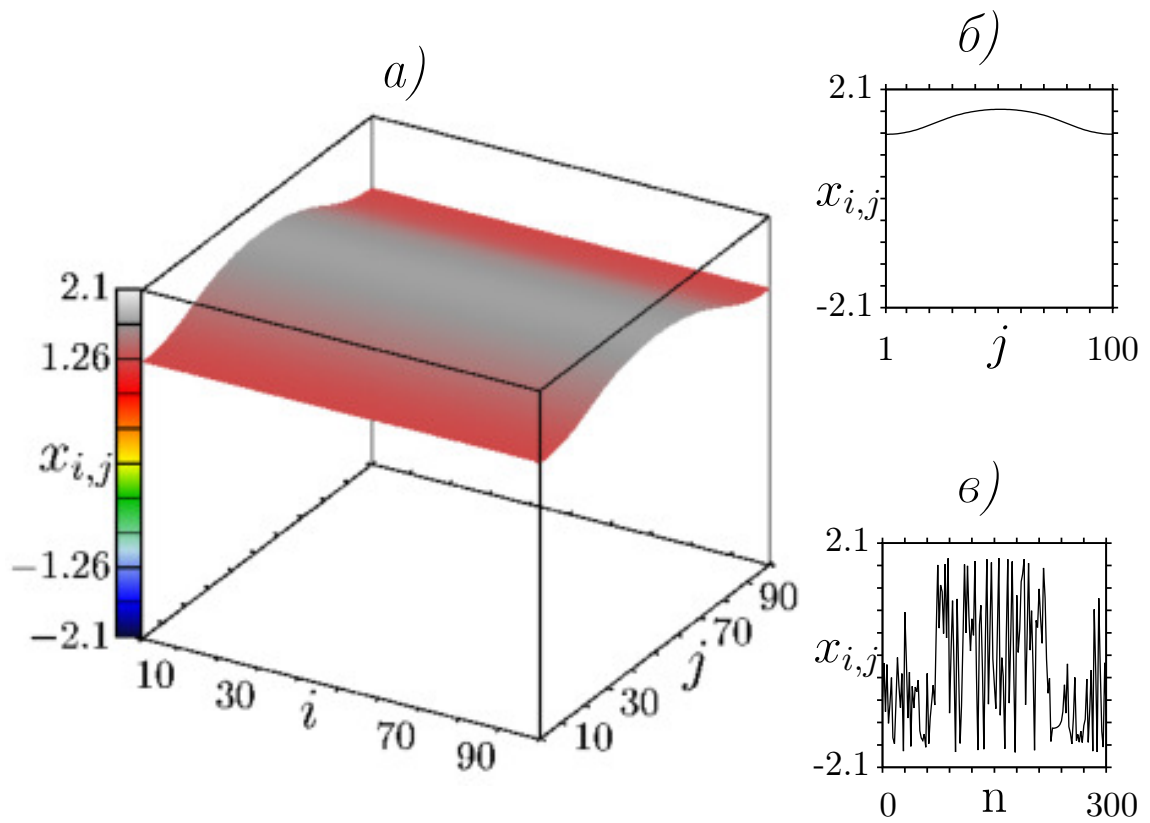


Рис. 3.41. Режим синхронизации хаотических переключений при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.714$ : а – мгновенный пространственный профиль состояния решетки; б – сечение пространственного профиля при  $i = 50$ ; в – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для элемента с координатой  $(i = 50, j = 50)$

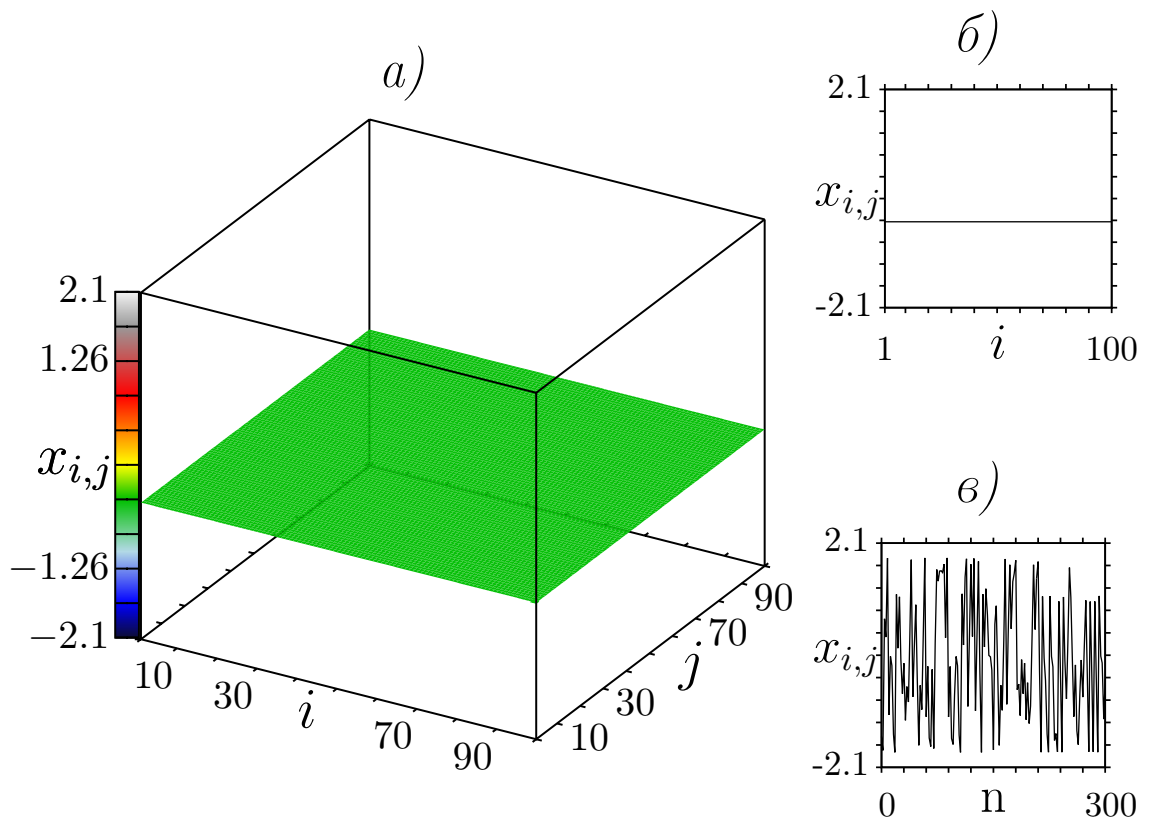


Рис. 3.42. Режим полной хаотической синхронизации при  $r = 0.35$ ,  $\sigma = 0.894$ :  
 а – мгновенный пространственный профиль состояния решетки; б – сечение  
 пространственного профиля при  $j = 20$ ; в – реализация колебаний во времени  
 $x_{i,j}(n)$  для элемента с координатой  $(i = 50, j = 50)$



### 3.6 Особенности поведения решетки кубических отображений при стремлении к глобальному взаимодействию. Уединенные состояния

Из диаграммы режимов, приведенной на рисунке 3.28, видно, что при связи, близкой к глобальной ( $r \lesssim 0.5$ ) система становится очень чувствительной к изменению коэффициента связи. Даже при слабом изменении  $\sigma$  можно наблюдать резкое изменение поведения решетки (штрихованная серая область). Эта особенность сильно затрудняет задачу построения достаточно точной диаграммы режимов на плоскости управляющих параметров. Действительно, любая область значений параметра связи  $\sigma$  для больших радиусов связи  $r$  является областью сосуществования целой группы характерных режимов, сложным образом чередующихся при изменении  $\sigma$  и заданных начальных условиях. Рассмотрим наиболее типичные режимы, наблюдающиеся при фиксированном радиусе связи  $r = 0.47$  и различной силе связи  $\sigma$  в области умеренных значений. Далее рассмотрим примеры характерных структур, наблюдаемые в решетке (3.10) при большом радиусе связи, когда нелокальная связь становится близкой к глобальной и в случае строго глобальной связи.

#### 3.6.1 Связь, близкая к глобальной

При различных значениях  $\sigma$  с одних и тех же описанных выше начальных условий, в решетке (3.10) могут устанавливаться разные химерные структуры. На рисунке 3.43 показан режим одноямной химеры со слабо-хаотической динамикой, близкой к циклу с периодом 3 итерации. Все элементы решетки колеблются в пределах только одной ямки (отрицательной), никогда не перескакивая

в соседнюю. При этом мгновенный пространственный профиль (рисунок 3.43,а) имеет вид, типичный для химерной структуры. Можно выделить регулярные кластеры, элементы которых ведут себя согласованно, и некогерентные кластеры, для которых характерен нерегулярное распределение состояний элементов в пространстве. На срезе мгновенного состояния решетки (рисунок 3.43,б) хорошо видно, что мгновенные состояния всех элементов соответствуют двум значениям переменных  $x_{i,j}$ . Все элементы с одинаковыми мгновенными состояниями совершают одинаковые колебания во времени, при этом колебания элементов, имеющих разные мгновенные состояния, происходят в одной фазе, но существенно различны по амплитуде. Это хорошо видно на временной реализации на рисунке 3.43,в. Данная химерная структура отличается от амплитудных и фазовых химер, ранее обнаруженных в ансамблях хаотических осцилляторов [43,47,51,87]. Можно предположить, что образование таких структур является следствием почти глобального взаимодействия.

С ростом  $\sigma$  при тех же начальных условиях можно наблюдать двухъямные химерные структуры. По своим характеристикам они ничем не отличаются от двухъямных химер, наблюдающихся в решетке при меньших радиусах связи, которые были описаны в предыдущем параграфе.

Как уже отмечалось, при больших значениях силы связи система переходит в режим полной хаотической синхронизации. Ей предшествует синхронизация хаотических переключений, когда хаотические колебания различных элементов решетки в пределах одной ямки не совпадают, но переключения из ямки в ямку происходят одновременно. Такому режиму частичной синхронизации может соответствовать различный характер мгновенного пространственного профиля. Если радиус связи не слишком велик, то более типичен гладкий пространственный профиль. При радиусах связи близких к  $r = 0.5$  в этом режиме возникают пространственные профили, со значительной пространственной некогерентностью. При этом возможно образование одноямных химероподобных структур в режиме развитого хаоса с синхронными переключениями всех

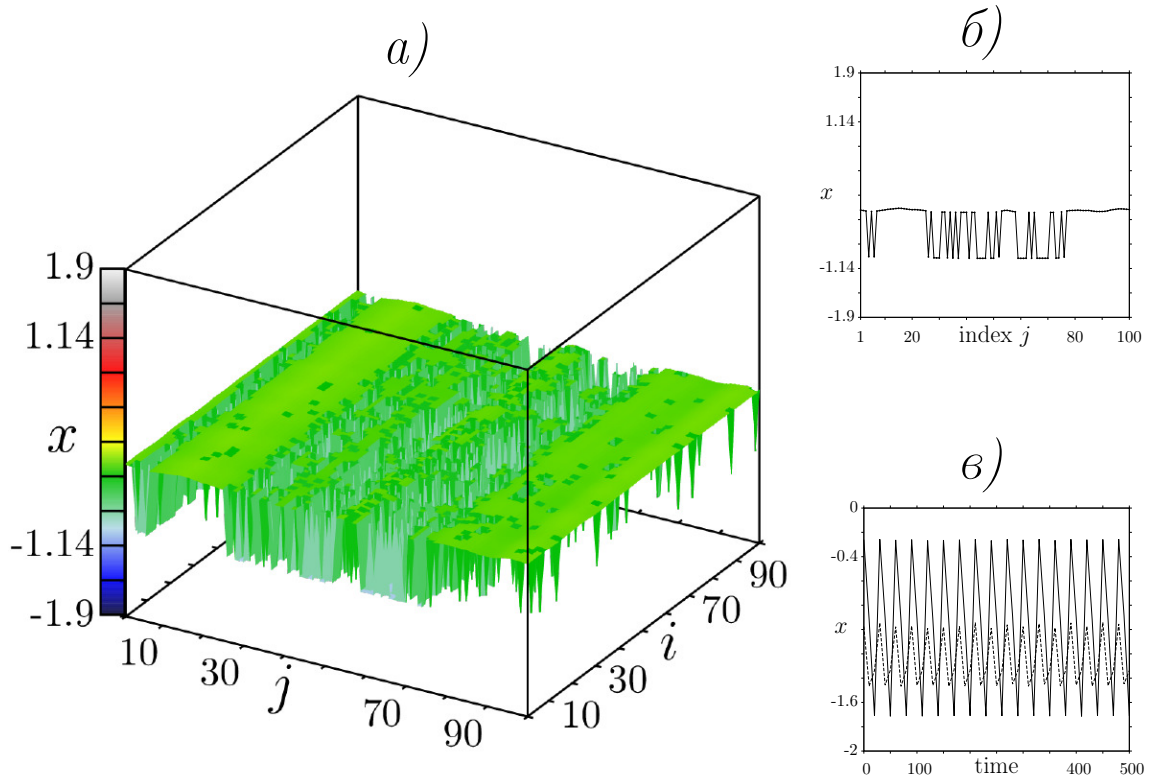


Рис. 3.43. Режим одноямной фазовой химеры в решетке (3.10) при  $\alpha = 3.0$ ,  $\beta = 10$ ,  $r = 0.47$  и  $\sigma = 0.479$ : а – мгновенный пространственный профиль состояния решетки; б – сечение пространственного профиля при  $i = 0$ ; в – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для двух соседних элементов с координатами  $(i = 0, j = 25)$  и  $(i = 0, j = 26)$

элементов. В пределах одной ямки, можно выделить группы элементов с близкими мгновенными состояниями, в то время как состояния других элементов существенно различаются. Эти структуры похожи на описанную выше одноямную химеру с почти периодической динамикой (рисунок 3.43). Однако когерентные кластеры здесь невелики и кластерная структура в целом выражена не достаточно четко. Пример химероподобной структуры в режиме синхронных хаотических переключений между ямками показан на рисунке 3.44. Из приведенных графиков, видно, что пространственная структура является одноямной и достаточно сложной. Можно выделить несколько групп элементов с одинаковыми состояниями, в то время как остальная часть элементов решетки

распределена в пространстве хаотично. Колебания всех элементов во времени соответствуют развитому хаосу с переключениями между ямками.

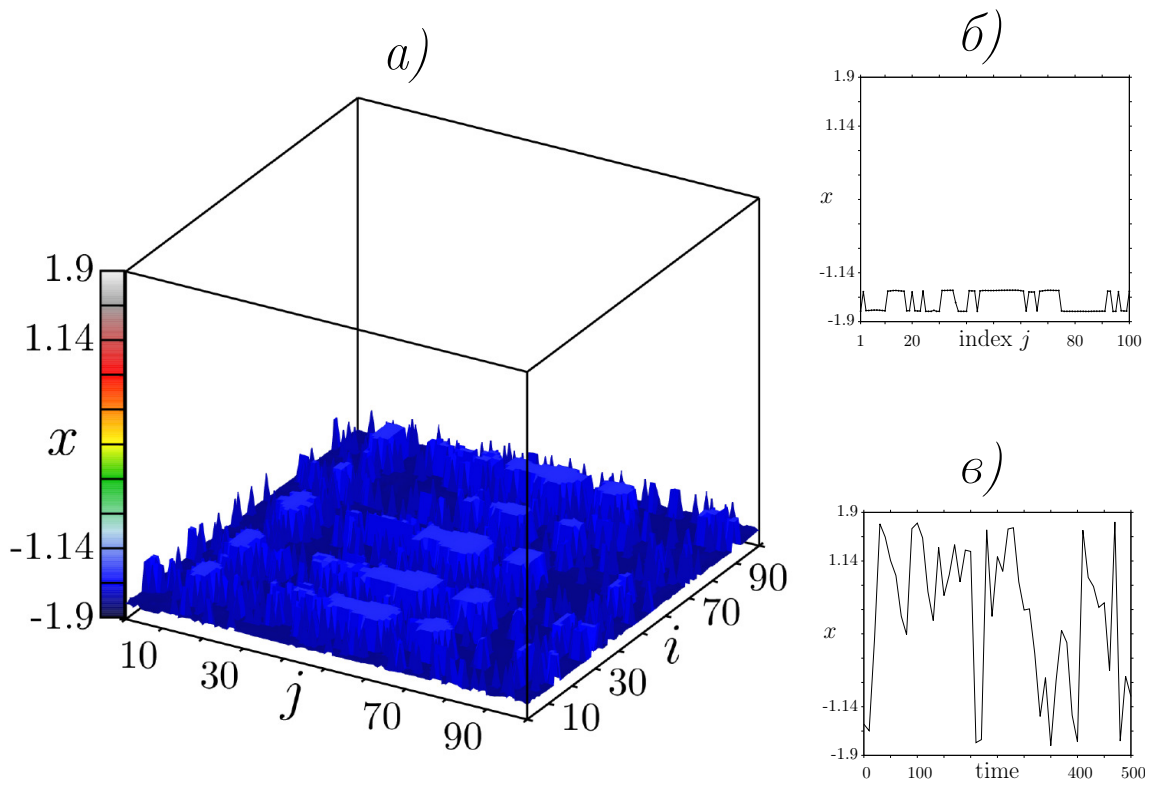


Рис. 3.44. Режим одноямной химероподобной структуры при синхронизации хаотических переключений элементов во времени. Значения параметров:  $\alpha = 3.0$ ,  $\beta = 10$ ,  $r = 0.47$ ,  $\sigma = 0.497$ : а – мгновенный профиль состояния решетки; б – сечение пространственного профиля при  $i = 30$ ; в – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для элемента с координатами  $(i = 30, j = 50)$

Как показали проведенные расчеты, в исследуемой решетке кубических отображений (3.10) существуют режимы уединенных состояний. Они наблюдаются при большом радиусе связи, когда нелокальная связь становится близка по своим свойствам к глобальной. Уединенные состояния уже встречались при описании динамики ансамбля осцилляторов Лоренца (раздел 4 данной главы), причем радиус связи в том случае был сравнительно невелик, а отдельно взятый элемент (система Лоренца) обладал сингулярно-гиперболическим аттрактором. Из сравнения двух ансамблей следует, что в общем случае возникнове-

ние уединенных состояний нельзя связать ни с гиперболичностью хаотических колебаний элементов ансамбля, ни с глобальным или близким к глобальному характером взаимодействия. По-видимому в разных системах возникновение уединенных состояний может быть связано с различными причинами, которые еще не вполне ясны.

Пример режима уединенных состояний в (3.10) при  $r = 0.47$  показан на рисунке 3.45. Этот режим очень похож на полную синхронизацию. Однако имеется существенное отличие. Хотя абсолютное большинство элементов решетки одновременно находятся в одном и том же состоянии, имеются отдельные элементы, демонстрирующие состояния, сильно отличающиеся от состояния большинства ("выбросы"). Во времени имеют место периодические переключения элементов между ямками. Подавляющее большинство элементов находится в одном и том же состоянии и переключается синфазно. Т.е. на каждой итерации почти вся решетка целиком переходит из одной ямки в другую, причем новое состояние представляет собой зеркальное отражение состояния на предыдущей итерации. Однако, при этом, имеются отдельные осцилляторы, которые ведут себя иначе. Все они находятся в одном и том же неподвижном состоянии, отличном от двух периодически меняющихся состояний, в которых находится большинство элементов решетки. Соответственно на каждой итерации на фоне общего состояния решетки можно видеть отдельные выбросы. При изменении состояния решетки на следующей итерации направление выбросов меняется на противоположное. Надо отметить, что данный режим является достаточно редким. Он наблюдается только при очень больших радиусах связи (при  $\sigma \geq 0.46$ ). Причем с ростом радиуса связи вероятность реализации такого режима значительно увеличивается.

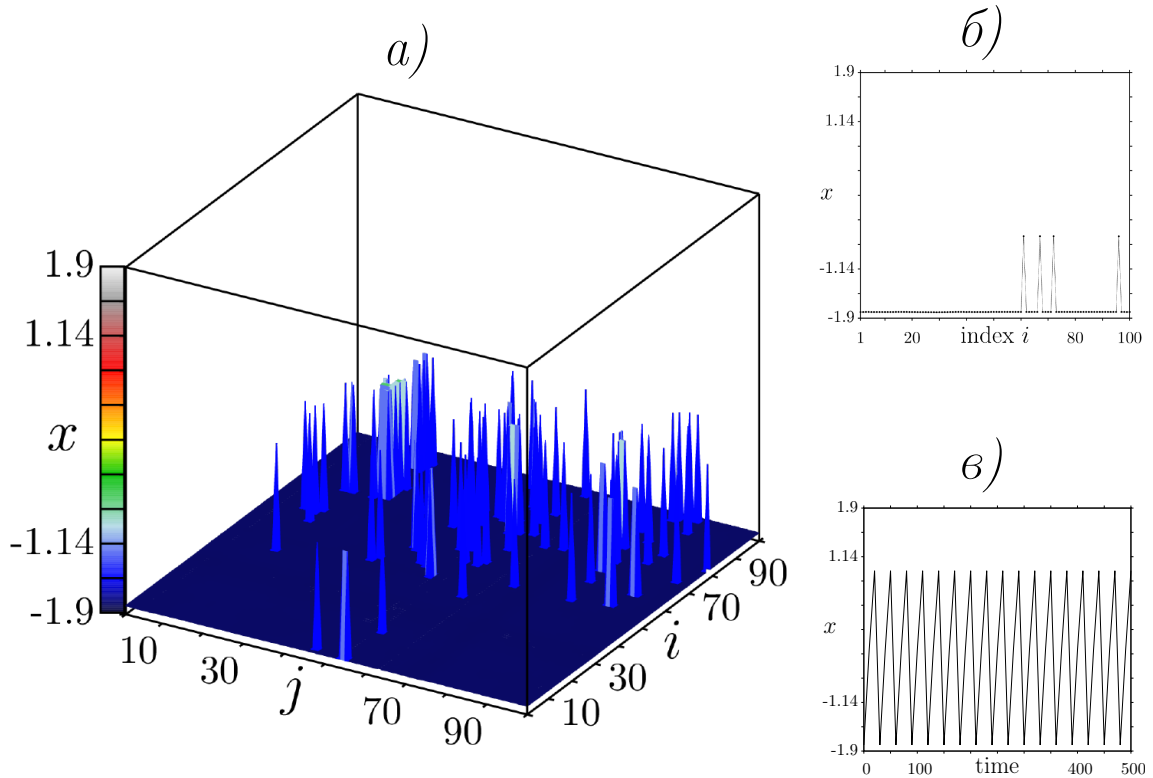


Рис. 3.45. Режим уединенных состояний при  $\alpha = 3.0$ ,  $\beta = 10$ ,  $r = 0.47$ ,  $\sigma = 0.528$ : а – мгновенный пространственный профиль состояния решетки; б – сечение пространственного профиля при  $j = 51$ ; в – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для элемента с координатами  $(i = 30, j = 51)$

### 3.6.2 Переход к глобальной связи

При переходе к глобальной связи ( $r = 0.5$ ) режим уединенных состояний реализуется достаточно часто, являясь одним из наиболее характерных режимов вблизи области полной хаотической синхронизации. Пример такого режима при глобальной связи приведен на рисунке 3.46. Качественно он эквивалентен режиму уединенных состояний при нелокальной связи с большим радиусом взаимодействия (см. рисунок 3.45).

При глобальной связи поведение решетки в целом не претерпевает особых изменений. С ростом параметра связи наблюдается переход от несинхронного хаоса в режим полной хаотической синхронизации, сопровождающийся в неко-

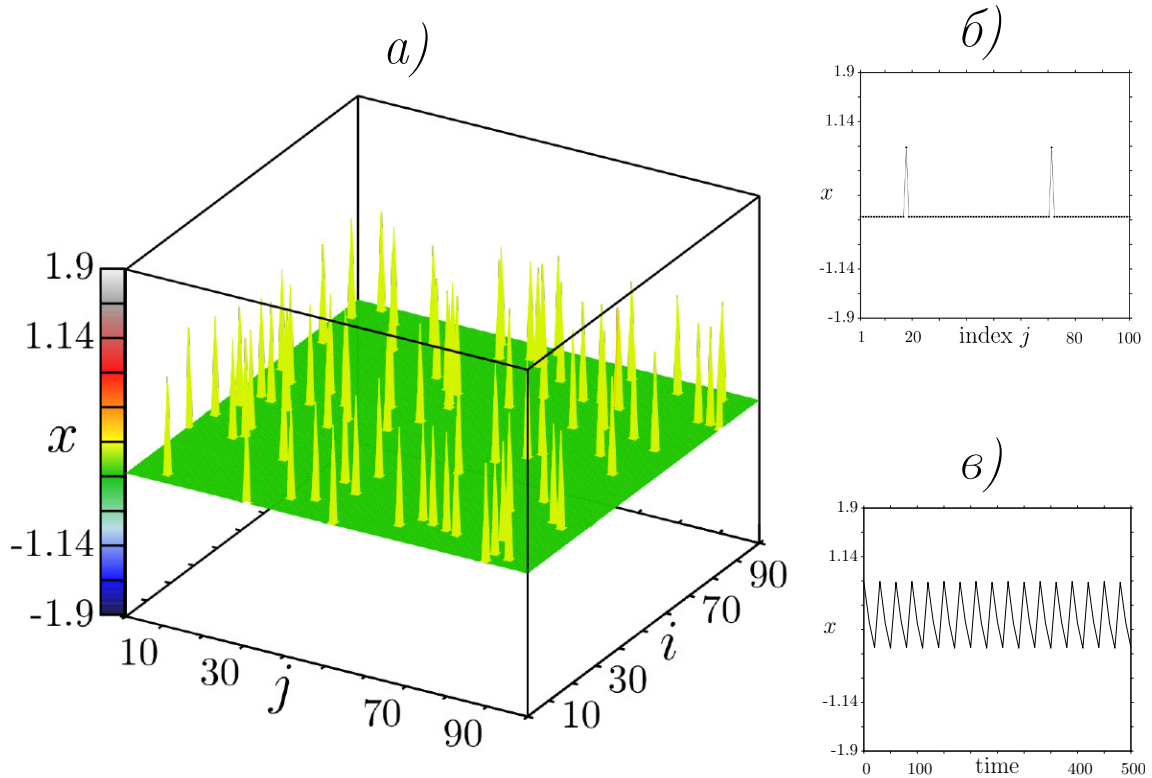


Рис. 3.46. Режим уединенных состояний при  $\alpha = 3.0$ ,  $\beta = 10$ ,  $r = 0.5$ ,  $\sigma = 0.4915$ : а – мгновенный пространственный профиль состояния решетки; б – сечение мгновенного профиля при  $j = 51$ ; в – реализация колебаний во времени  $x_{i,j}(n)$  для элемента с координатами  $(i = 30, j = 51)$

торой области значений силы связи сильной чувствительностью к начальным условиям и силе связи. Однако имеется одно существенное отличие исследуемой решетки со строго глобальной связью от той же решетки со связью близкой к глобальной. Это отличие заключается в отсутствии химерных структур. Как в случае одноямной пространственной структуры, так и для двухъямной структуры, можно наблюдать пространственную некогерентность, проявляющуюся в хаотическом распределении элементов между ямками без образования когерентных кластеров.

На рисунке 3.47 приведены диаграммы, позволяющие сравнить типичность различных режимов в промежуточной области между пространственно-временным (несинхронным) хаосом и полной хаотической синхронизацией для

решетки (3.10) со связью, близкой к глобальной и со строго глобальным взаимодействием. При построении диаграмм рассматривалась относительная доля различных установившихся режимов, реализующиеся при одних и тех же случайных начальных условиях для 200 значений параметра связи  $\sigma$  в интервале  $\sigma \in [0.47 \div 0.53]$ . Диаграммы отражают исчезновение химер и рост относительной доли уединенных состояний и пространственно-некогерентных структур с переходом к полностью глобальному взаимодействию.

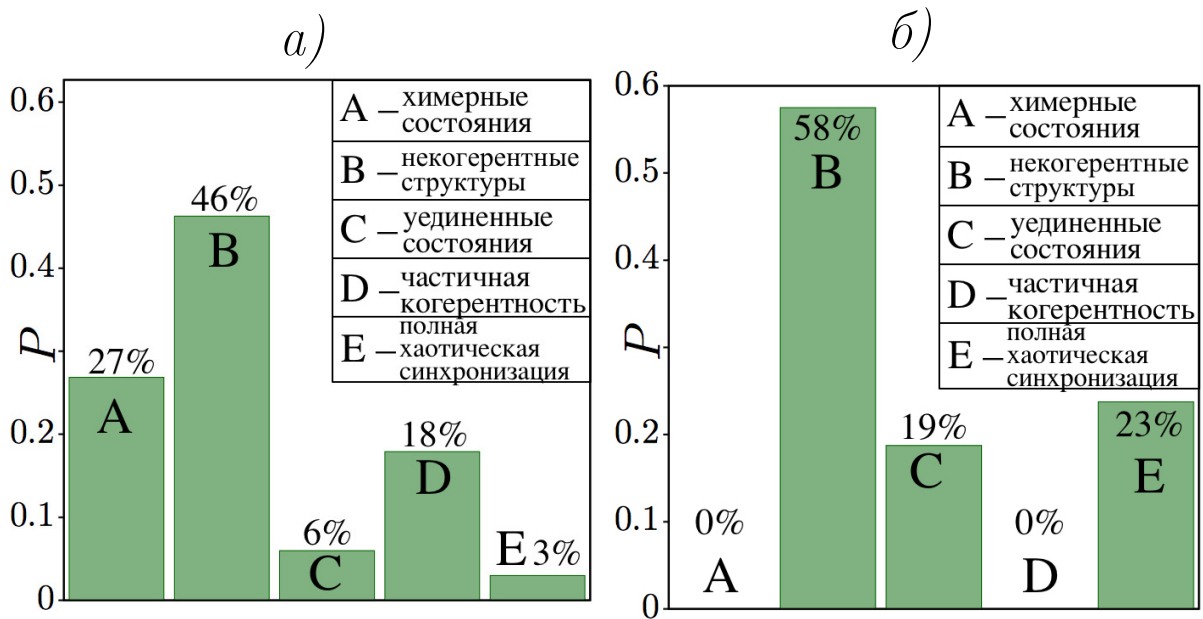


Рис. 3.47. Доля различных режимов, наблюдающихся при силе связи  $\sigma \in [0.47 \div 0.53]$  в решетке (3.10) с почти глобальной связью  $r = 0.47$  (а) и полностью глобальной связью  $r = 0.5$  (б). Параметры элементов решетки:

$$\alpha = 3.0, \beta = 10$$

### 3.7 Выводы по третьей главе

В главе представлены результаты многостороннего исследования множества динамических режимов, реализуемых в ансамблях нелокально-связанных бистабильных осцилляторов как с дискретным, так и с непрерывным временем.



Рассмотрены случаи регулярной и хаотической динамики элементов, составляющих ансамбль. Были получены следующие основные результаты.

1. Выявлен особый тип химерных состояний характерный для ансамблей бистабильных элементов с нелокальным взаимодействием и названный двухъямной химерой. Этот тип химер ранее не был описан в научной литературе. Особенность двухъямных химер состоит в существовании кластеров некогерентности, в пределах которых элементы ансамбля нерегулярно распределены между окрестностями двух притягивающих множеств, существующих в отдельно взятом элементе (двух "потенциальных ямок").
2. Было обнаружено, что двухъямные химерные структуры могут быть неподвижными, в этом случае элементы ансамбля не совершают колебаний. Такие неподвижные химеры были обнаружены, как в ансамблях, состоящих из элементов с двумя устойчивыми состояниями равновесия, так и при хаотической динамике несвязанных элементов. В последнем случае элементы ансамбля переходили в бистабильный режим в результате сдвига эффективного значения управляющего параметра в результате влияния связи. Неподвижные двухъямные химеры в ансамблях элементов с бистабильной динамикой имеют сходство с режимом "chimera death" в ансамбле гармонических автогенераторов [44, 156]. С другой стороны они могут рассматриваться как результат эволюции известных в литературе стационарных нерегулярных структур [4] при увеличении радиуса связи. В отличие от стационарных структур в ансамблях с локальным взаимодействием неподвижные химеры характеризуются четко выраженными кластерами и обладают достаточно широким бассейном притяжения.
3. В одномерном и двумерном ансамблях кубических отображений с хаотической динамикой наблюдаются двухъямные химеры, для которых характерно периодическое или слабо хаотическое поведение элементов во времени.

Кроме двухъямных химер, при изменении значений силы связи возникают одноямные химерные структуры. Они подобны амплитудным и фазовым химерам, типичным для ансамблей осцилляторов и отображений со сценарием Фейгенбаума развития хаоса [43, 47, 51, 87, 88]. Это связано с тем обстоятельством, что в исследуемых кубических отображениях также реализуется последовательность удвоений периода для каждого из двух сосуществующих устойчивых состояний.

4. Показано, что ансамбль нелокально-связанных цепей Чуа (3.7) демонстрирует пространственно-временную динамику, в целом аналогичную динамике ансамбля нелокально-связанных кубических отображений. В обеих системах наблюдаются однотипные химерные структуры, такие как двухъямные химеры, а также одноямные химеры амплитудного и фазового типа.
5. Обнаружено, что в ансамбле связанных осцилляторов Лоренца в режиме аттрактора Лоренца (3.8) за счет сдвига эффективных значений управляющих параметров парциального осциллятора происходит переход от квазигиперболического хаоса к бистабильной хаотической динамике. В результате реализуются устойчивые двухъямные химерные структуры, идентичные двухъямным химерам в ансамблях связанных кубических отображений (3.2) или осцилляторов Чуа (3.7). Однако, в отличие от этих ансамблей в ансамбле осцилляторов Лоренца (3.8) в исследуемом режиме не наблюдаются амплитудные и фазовые химеры.
6. Установлено, что в ансамбле (3.8) переход к режиму полностью несинхронного хаоса происходит через перемежаемость во времени между несинхронным хаосом и режимом частичной когерентности. Были обнаружены три вида перемежаемости. Первый из них - это перемежаемость во времени между пространственно-однородным режимом и режимом несинхронного хаоса. Второй случай соответствует перемежаемости между простран-

ственно однородным режимом и режимом химероподобных структур. Важно отметить, что перемежаемость происходит не только во времени, но также и в пространстве: некогерентные кластеры химероподобных состояний образуются в различных пространственных областях ансамбля. По своему характеру эти состояния близки к амплитудным химерам, наблюдающихся в ансамблях хаотических осцилляторов. Третий случай перемежаемости включает свойства как первого, так и второго типа, а именно: пространственно-однородный режим перемежается то с режимом несинхронного хаоса, то с режимом химероподобных состояний.

7. В ансамбле бистабильных осцилляторов ФитцХью-Нагумо (3.9) помимо неподвижных двухъямных химер был обнаружен новый тип химерных структур. Они представляют собой двухъямные химеры, у которых осцилляторы, принадлежащие некогерентным кластерам совершают колебания во времени, а осцилляторы, расположенные в центре когерентных кластеров являются практически неподвижными. Колебания элементов в некогерентных кластерах могут быть как периодическими, так и хаотическими. Возникновение колебаний в некоторых группах элементов в ансамбле бистабильных осцилляторов ФХН было установлено ранее для случая локальной связи [153]. В проведенном исследовании показано, что нелокальный характер связи приводит к формированию химерных структур.
8. Исследован переход когерентность – некогерентность в двумерном ансамбле нелокально-связанных бистабильных хаотических кубических отображений (3.10). Показано, что в целом в двумерном ансамбле (решетке) реализуются те же типы пространственно-временной динамики, что и в одномерном ансамбле таких отображений. Были найдены те же химерные состояния, в том числе двухъямные химеры. Показано, что в результате влияния связи динамика элементов некогерентных кластеров двухъямной

химеры может быть как хаотической, так и регулярной, в том числе химеры могут быть неподвижными.

9. В двумерном ансамбле кубических отображений (3.10) при глобальной и близкой к глобальной связи был обнаружен режим уединенных состояний. В этом режиме ансамбль близок к полной хаотической синхронизации, однако отдельные элементы оказываются в особых состояниях, отличных от состояний большинства элементов ансамбля. Исследованы изменения в поведении решетки при переходе от связи, близкой к глобальной, к строго глобальному взаимодействию. Результаты свидетельствуют об исчезновении химер и высокой вероятности наблюдения режима уединенных состояний при глобальном взаимодействии элементов ансамбля.

# Глава 4. ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕГО ПЕРИОДИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА ФОРМИРОВАНИЕ ХИМЕРНЫХ СТРУКТУР

## Введение

Задача управления химерными состояниями посредством целенаправленных внешних воздействий является достаточно интересной, важной с точки зрения возможного применения на практике и, в то же время, мало исследованной. Можно выделить два аспекта данной задачи: влияние на химеры случайных возмущений (шума) и влияние периодических внешних сил. Как отмечалось во введении, имеется небольшое число работ, посвященных влиянию шума ([96–98]), из которых следует, что влияние шума на химеры может быть различно, в зависимости от типа химерной структуры. Что касается, влияния периодических возмущений, то оно практически не исследовалось, за исключением эффекта синхронизации виртуальной химеры внешним периодическим воздействием, рассмотренного в [98].

В данной главе диссертационной работы изложены результаты исследования влияния локализованного и глобального внешнего периодического воздействия на ансамбль нелокально связанных хаотических осцилляторов в режиме химерных состояний, а также в режиме частичной синхронизации. В первом случае установлен характер влияния воздействия на уже существующие химерные состояния, во втором – выявлена возможность возникновения химероподобных структур, индуцированных внешним воздействием.

Результаты исследований, изложенные в данной главе, представлены в работе [113].

## 4.1 Влияние локального внешнего воздействия на ансамбль нелокально связанных хаотических осцилляторов Рёсслера

Рассмотрим ансамбль нелокально-связанных идентичных хаотических осцилляторов, находящийся под внешним воздействием в виде гармонического сигнала, приложенного к выбранной группе осцилляторов. В качестве элемента ансамбля был выбран осциллятор Рёсслера [157], который является классической моделью нелинейной динамики, демонстрирующей хаотическое поведение. Существование химерных состояний в ансамбле нелокально-связанных осцилляторов Рёсслера было показано ранее в работах [43, 51]. Исследуемый ансамблю осцилляторов описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= -y_i - z_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (x_k - x_i), \\
 \dot{y}_i &= x_i + ay_i + \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (y_k - y_i) + F_i(t), \\
 \dot{z}_i &= b + z_i(x_i - c) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{k=i-P}^{i+P} (z_k - z_i), \\
 x_{i+N}(t) &= x_i(t), \\
 y_{i+N}(t) &= y_i(t), \\
 z_{i+N}(t) &= z_i(t), \quad i = 1, \dots, N,
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

где индекс  $i$  номер элемента в цепочке,  $a$ ,  $b$  и  $c$  – управляющие параметры системы,  $\sigma$  – сила связи,  $P$  – число соседей, связанных с элементом с индексом  $i$  с каждой стороны. Число элементов в ансамбле равно  $N = 300$ . Граничные

условия являются периодическими. Взаимодействие между элементами носит нелокальный характер, причем элементы связаны по всем переменным. Степень нелокальности связи характеризуется радиусом связи  $r = \frac{P}{N}$ . Параметры осцилляторов были выбраны следующим образом:  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$  и  $c = 4.5$ , что соответствует хаотической динамике парциального элемента. Параметры связи также были зафиксированы:  $\sigma = 0.051$ ,  $r = 0.3$ . На ансамбль воздействует внешняя гармоническая сила  $F(i, t)$ . Она описывается следующим выражением:

$$F_i(t) = \begin{cases} A_{ext} \sin(2\pi f_{ext} t), & i \in [i_1; i_2] \\ 0, & i \notin [i_1; i_2], \end{cases} \quad (4.2)$$

где  $A_{ext}$  – амплитуда гармонических колебаний,  $f_{ext}$  – частота. Внешняя сила воздействует на ансамбль в определенной области пространства в интервале от  $i_1$  до  $i_2$ . Вне этой области амплитуда равна нулю. Таким образом, воздействие является локализованным в пространстве, если  $[i_1; i_2] \subset [1; N]$ . В случае  $i_1 = 1$ ,  $i_2 = N$  воздействие становится глобальным (т.е. сила действует на все элементы ансамбля). Также необходимо отметить, что внешняя сила воздействует на все осцилляторы в интервале  $[i_1; i_2]$  с одной и той же амплитудой, частотой и фазой.

Как известно, (см. [43, 51]), ансамбль нелокально-связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (4.1) в отсутствии внешнего воздействия ( $A = 0$ ) с ростом силы связи  $\sigma$  демонстрирует следующие состояния: полная некогерентность, химерные состояния, частичная когерентность и полная хаотическая синхронизация.

### 4.1.1 Влияние внешней локализованной гармонической силы на ансамбль в режиме химерных состояний

Сначала рассматривается влияние внешней локализованной гармонической силы на ансамблю в режиме химерных состояний. Все элементы некогерентного кластера находятся под воздействием одинакового внешнего гармонического сигнала. Частота этого сигнала меньше собственной усредненной частоты хаотических автоколебаний в автономном режиме  $f_0: f_{ext} < \langle f_0 \rangle$ . Как отмечалось ранее, в ансамблях нелокально-связанных хаотических осцилляторов с фейгенбаумовским механизмом перехода к хаосу существуют два типа химерных структур. Они известны как амплитудная и фазовая химеры [47]. В первую очередь рассмотрим влияние внешней силы на амплитудную химеру. На рисунке 4.1,а представлен пример такой структуры в системе (4.1). Воздействие гармоническим сигналом на некогерентный кластер химеры приводит к образованию области с гладким профилем внутри интервала воздействия (соседние элементы ведут себя когерентно). Кроме этого, химера не пропадает, а образуется в другой области пространства. Пример этого режима приведен на рисунке 4.1,б. Пространственно-временная динамика представлена с помощью пространственно-временной диаграммы на рисунке 4.1,в. В ней используется специальная цветовая схема, представляющая собой множество чередующихся белых, красных и черных линий. Такая схема позволяет выделить области с некогерентной пространственно-временной динамикой.

Под внешним воздействием некогерентный кластер существует только определенное время (см. рисунок 4.1,в), после чего она разрушается. Возникает множество неустойчивых структур на в течение всего переходного процесса, после которого происходит формирование нового некогерентного кластера в новой области пространства. Такое поведение обусловлено мультистабильностью системы и внешнее воздействие приводит к переключению из одного



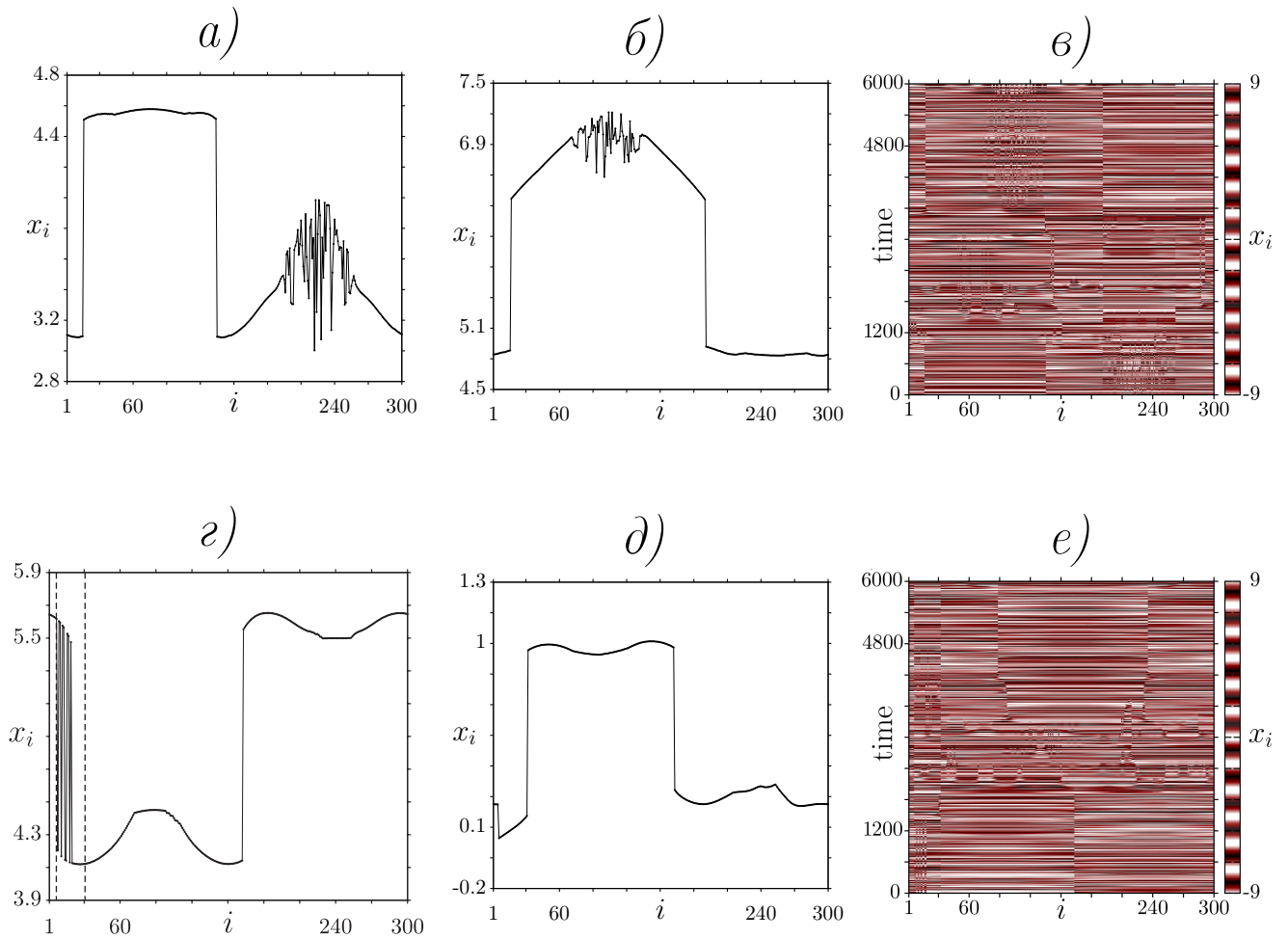


Рис. 4.1. Локализованное внешнее воздействие на систему (4.1) в режиме химерных состояний двух типов. Воздействие в режиме амплитудной химеры при  $\sigma = 0.04$ : а – мгновенный пространственный профиль без внешнего воздействия; б – мгновенный пространственный профиль при внешнем воздействии в области  $i \in [190; 260]$  с амплитудой  $A_{ext} = 0.005$  ( $t = 6000$ ); в) – пространственно-временная диаграмма. Воздействие в режиме фазовой химеры при  $\sigma = 0.044$ : г – мгновенный пространственный профиль без внешнего воздействия; д – мгновенный пространственный профиль при внешнем воздействии в области  $i \in [5; 30]$  с  $A_{ext} = 0.009$  ( $t = 6000$ ); е – пространственно-временная диаграмма. Области воздействия на графиках выделены пунктирными линиями. Параметры:  $f_{ext} = 0.11$ ,  $r = 0.3$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 4.5$ ,  $N = 300$

устойчивого состояния в другое. Подобное поведение модели (4.1) под внешним воздействием наблюдается в широком диапазоне амплитуды  $A_{ext}$ , начиная с  $A_{ext} > 0.004$ . Амплитудные химеры образуются в режиме развитого хаоса. По этой причине такая химера плохо синхронизируется либо подавляется внешним воздействием, которое приводит к переходу к другой аналогичной структуре с иным пространственным расположением кластеров.

Результаты локализованного воздействия на ансамбль в режиме фазовой химеры отличаются от предыдущего случая. Фазовая химера в ансамбле (4.1) без внешнего воздействия показана на рисунке 4.1,г. Воздействие на некогерентный кластер химеры достаточно слабым сигналом (начиная от  $A_{ext} > 0.008$ ) приводит к его исчезновению. Пространственный профиль становится кусочно-гладким с характерными разрывами на граница области воздействия (см. рисунок 4.1,д). На пространственно-временной диаграмме на рисунке 4.1,е представлена пространственно-временная динамика ансамбля. Некогерентный кластер также разрушается только спустя некоторое время. Режим с кусочно-гладким профилем без некогерентных кластеров устанавливается в системе после достаточно длительного переходного процесса. Можно предположить, что это происходит в результате фазовой синхронизации. Колебания элементов некогерентного кластера фазовой химеры очень близки к периодическим. Внешнее воздействие захватывает частоту и фазу колебаний. В результате, колебания всех осцилляторов под внешним воздействием становятся синфазными и поведение становится когерентным. При частоте внешнего воздействия близкой к собственной средней частоте системы (4.1) эффекты воздействия остаются сходными, однако они наблюдаются при бóльших амплитудах.

## 4.1.2 Влияние внешней локализованной гармонической силы на систему (4.1) в режиме частичной когерентности.

### Индукцированные химеры

Рассмотрим влияние внешней локализованной гармонической силы на ансамбль (4.1) в режиме частичной когерентности, которая характеризуется гладким мгновенным пространственным профилем, однако удаленные друг от друга осцилляторы могут вести себя некогерентно. Типичный пример такого состояния в рассматриваемой системе при  $A_{ext} = 0$  проиллюстрирован мгновенным пространственным снимком на рисунке 4.2,а. На графике видно, что пространственный профиль имеет гладкую структуру без некогерентных участков. При этом, в структуре наблюдаются два разрыва. Пунктирными линиями на графике показаны границы интервала, в пределах которого на систему будет осуществляться локализованное гармоническое воздействие. Динамика осцилляторов во времени является слабохаотической. Характерные реализации колебаний для двух соседних элементов с индексами  $i = 162$  и  $i = 163$  показаны на рисунке 4.2,г красной сплошной и черной пунктирной линиями, соответственно. Из графика видно, что колебания соседних осцилляторов практически идентичны, как по фазе, так и амплитуде. Средняя частота колебаний  $f_0$  в данном режиме равна 0.172 для всех осцилляторов ансамбля (4.1).

Теперь рассмотрим, что произойдет с поведением ансамбля, при воздействии внешней силы. Как упоминалось выше на все элементы в интервале  $[i_1; i_2]$  подается один и тот же гармонический сигнал с одинаковой амплитудой и фазой. Можно предположить, что отклик различных осцилляторов на внешний сигнал также должен быть почти одинаковым. Однако проведенные исследования показали, что локальное воздействие на часть элементов ансамбля может индуцировать образование кластера осцилляторов с некогерентным простран-

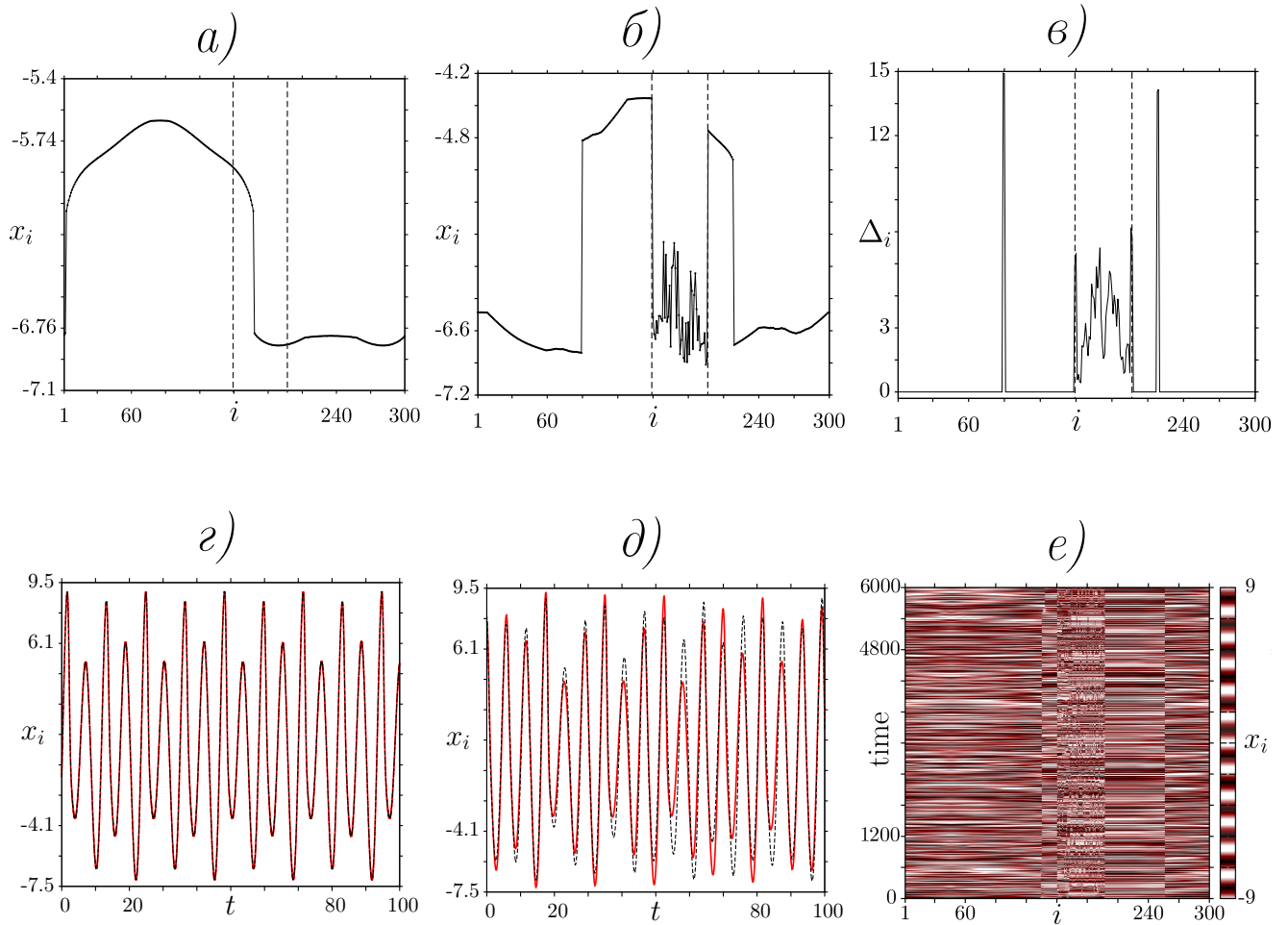


Рис. 4.2. Режим частичной когерентности в (4.1) и амплитудная химера, индуцированная внешней гармонической силой при  $f_{ext} = 0.11$ : а – мгновенный пространственный профиль для автономного случая ( $A_{ext} = 0$ ); б – мгновенный пространственный профиль системы под внешним воздействием с  $A_{ext} = 0.22$ ; в – средний квадрат девиации соседних элементов для  $A_{ext} = 0.22$ ; г – реализации колебаний во времени для 162-го (красная сплошная линия) и 163-го (черная пунктирная линия) элементов для автономного случая; д – реализации колебаний во времени для 162-го (красная сплошная линия) и 163-го (черная пунктирная линия) элементов из некогерентного кластера при  $A_{ext} = 0.22$ ; е – пространственно-временная диаграмма при  $A_{ext} = 0.22$ . Область воздействия  $i \in [149; 195]$  выделена пунктирной линией. Параметры:  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 4.5$ ,  $\sigma = 0.051$ ,  $r = 0.3$  и  $N = 300$

ственным поведением. Типичный пример мгновенного пространственного профиля при  $A = 0.12$  и  $f = 0.11$  представлен на рисунке 4.2,б. В результате внешнего воздействия в области влияния внешней силы формируется некогерентный кластер. Т.е., элементы системы (4.1) имеют различный отклик на внешнее воздействие, не смотря на то, что воздействие одинаково для всех элементов. Для количественной оценки некогерентности на рисунке 4.2,в приведено пространственное распределение среднего квадрата девиации состояний соседних элементов, вычисленной по формуле (3.6). Из графика видно, что в области воздействия наблюдается типичный для химеры рост значений данной характеристики. Для определения типа химерного состояния рассмотрим реализации во времени колебаний двух соседних элементов в некогерентном кластере. Они представлены на рисунке 4.2,д. Хаотические колебания осцилляторов являются синфазными, однако, в отличие от случая автономной системы, мгновенные амплитуды колебаний у соседних элементов заметно отличаются. Такое поведение характерно для амплитудной химеры, описанной в [47]. Пространственно-временная динамика показана на пространственно-временной диаграмме на рисунке 4.2,е. Хорошо видно, что некогерентный кластер появляется в области воздействия и существует в течении всего времени наблюдения.

Таким образом, внешнее гармоническое воздействие может приводить к образованию амплитудной химеры в рассматриваемом ансамбле (4.1). В данном случае более корректно называть индуцированное состояние не химерой, а химероподобным состоянием, т.к. термин "химера" как правило применяется для ансамблей идентичных элементов с одинаковыми параметрами. В данном исследовании воздействие ведется только на группу осцилляторов. Поэтому, использование термина "химера" не вполне корректно. Для простоты, будем называть индуцированное химероподобное состояние "индуцированной химерой".

Возникает вопрос, в каких интервалах значений параметров воздействия будет наблюдаться формирование индуцированных химер. С этой целью была построена карта режимов на плоскости параметров воздействия

$(A_{ext}, f_{ext})$ , представленная на рисунке 4.3. Она получена для случая локально-распределенного воздействия в области пространства  $i \in [149; 195]$  для зафиксированных параметров связи  $\sigma = 0.051$ ,  $r = 0.3$ , соответствующих режиму частичной когерентности в автономной системе. В качестве начальных условий используется реализация, полученная после установления системы со случайно-распределенных начальных состояний без внешнего воздействия. При указанных параметрах системы реализуется только этот режим для большинства начальных условий. На карте режимов можно выделить две области, соответствующие двум типам отклика системы на внешнюю силу. Для области  $A$  мгновенный пространственный профиль системы изменяет свою форму под действием внешней силы, однако все равно остается кусочно-гладким. В областях  $B$  и  $B'$  образуются индуцированные химеры. Разница между  $B$  и  $B'$  будет рассмотрена ниже. Заштрихованная область означает, что режим неустойчив, т.е. малое изменение значений параметров воздействия приводит к смене режима.

Нужно отметить, что отклик системы на низкочастотное воздействие ( $f_{ext} < \langle f_0 \rangle$ ) достаточно сильно отличается от случая высокочастотного воздействия ( $f_{ext} > \langle f_0 \rangle$ ). Так, при низкочастотном воздействии индуцированные химеры возникают как при достаточно малых амплитудах воздействия  $A_{ext}$  вплоть до  $f_{ext} \approx 0.15$  (область  $B'$ ), так и для больших значениях  $A_{ext}$  (область  $B$ ). Более того, с последующим увеличением  $A_{ext}$  химероподобное состояние продолжает существовать. В случае высокочастотного воздействия индуцированные химеры наблюдаются только при больших значениях  $A_{ext}$ . Кроме того, порог индуцирования химер по амплитуде  $A_{ext}$  растет с увеличением частоты воздействия  $f_{ext}$ . При  $f_{ext} \gtrsim 0.19$ , начиная с определенного значения амплитуды воздействия, индуцированные химеры исчезают. При частоте воздействия, близком к собственной средней частоте автоколебаний  $\langle f_0 \rangle$  химероподобные состояния образуются уже при малых значениях амплитуды воздействия (область  $B'$ ), как и при низкочастотном воздействии. Нижняя граница области  $B$  достигает минимума вблизи  $\langle f_0 \rangle$ . При этом точную границу между областями  $A$ ,

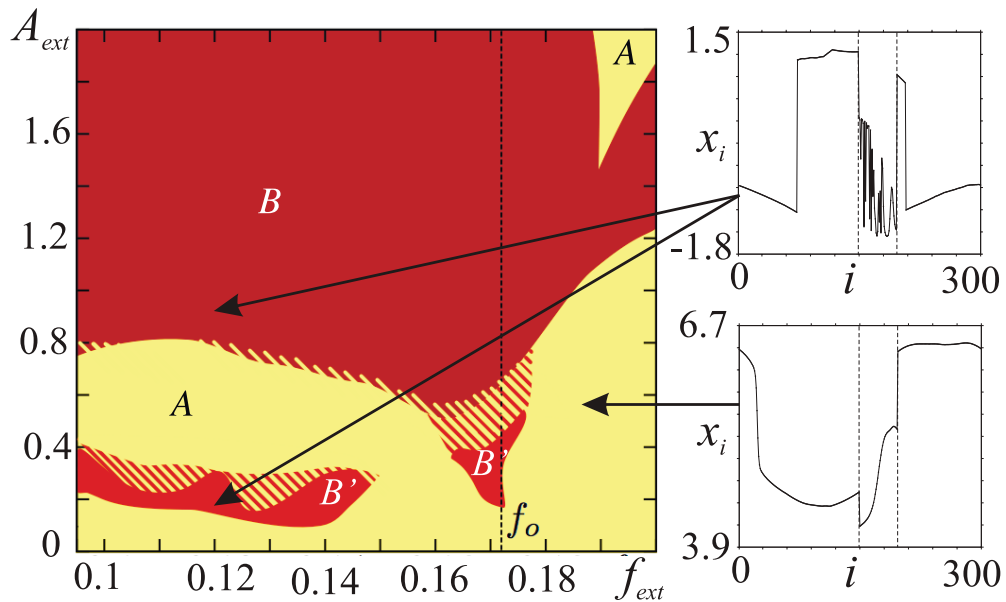


Рис. 4.3. Карта режимов системы (4.1) на плоскости параметров воздействия  $(A_{ext}, f_{ext})$ .  $A$  – область кусочно-гладким пространственным профилем без некогерентных кластеров;  $B$  и  $B'$  – области индуцирования химероподобных состояний. Заштрихованные области подразумевают, что режим является неустойчивым и меняется на другой при малом изменении параметров связи.

Мгновенные пространственные профили справа иллюстрируют соответствующие области на диаграмме. Параметры:  $\sigma = 0.051$ ,  $r = 0.3$ ,

$$a = 0.2, b = 0.2, c = 4.5, N = 300$$

$B'$  и  $B$  не существует, т.к. режимы на границах неустойчивы и при изменении параметров воздействия сменяют друг друга. Таким образом, ансамбль (4.1) наиболее чувствителен с точки зрения образования некогерентных кластеров либо для низкочастотного сигнала, либо для сигнала с частотой, близкой к собственной. Важно отметить, что индуцирование химеры слабо связано с эффектом захвата частоты. При слабой  $A_{ext}$  область захвата очень узкая (область  $B'$  многократно шире). С увеличением амплитуды эта область становится шире, однако индуцированные химеры наблюдаются как внутри, так и вне ее.

### 4.1.3 Эволюция поведения ансамбля (4.1) в режиме частичной когерентности с ростом амплитуды внешнего воздействия

Зафиксируем частоту воздействия  $f_{ext} = 0.11$  и рассмотрим, как изменяется поведение ансамбля (4.1) с ростом внешней амплитуды. При низкой амплитуде воздействия пространственная структура является кусочно-гладкой. Пример такой структуры приведен на рисунке 4.4,а. С увеличением  $A_{ext}$  происходит переход в область  $B'$  на карте режимов, приведенной на рисунке 4.3. В этой области у структуры возникает некогерентный кластер в том интервале значений  $i$ , где оказывается воздействие. Важное свойство химер в данной области состоит в том, что размер некогерентного кластера может быть меньше области воздействия. В оставшейся части области воздействия профиль остается кусочно-гладким. Пример такой структуры приведен на рисунке 4.4,б. Пространственно-временная динамика представлена на пространственно-временной диаграмме на рисунке 4.4,в. Видно, что ширина некогерентного кластера может изменяться во времени. С ростом амплитуды снова наблюдается переход в область  $A$ , где отклик на внешнее воздействие соответствует сохранению когерентной структуры и пространственный профиль является кусочно-гладким (см. рисунок 4.4,г). С переходом в область  $B$  отклик на внешний сигнал становится некогерентным, т.е. формируется некогерентный кластер. Мгновенные состояния соседних осцилляторов некогерентного кластера могут значительно отличаться друг от друга. В отличие от области  $B'$ , некогерентный кластер в области  $B$  формируется на всем интервале воздействия. Мгновенный пространственный профиль для данного режима представлен на рисунке 4.4,д. Пространственно-временная динамика такого режима представлена на пространственно-временной диаграмме на рисунке 4.4,е. Некогерентный кластер индуцируется в пределах всей об-



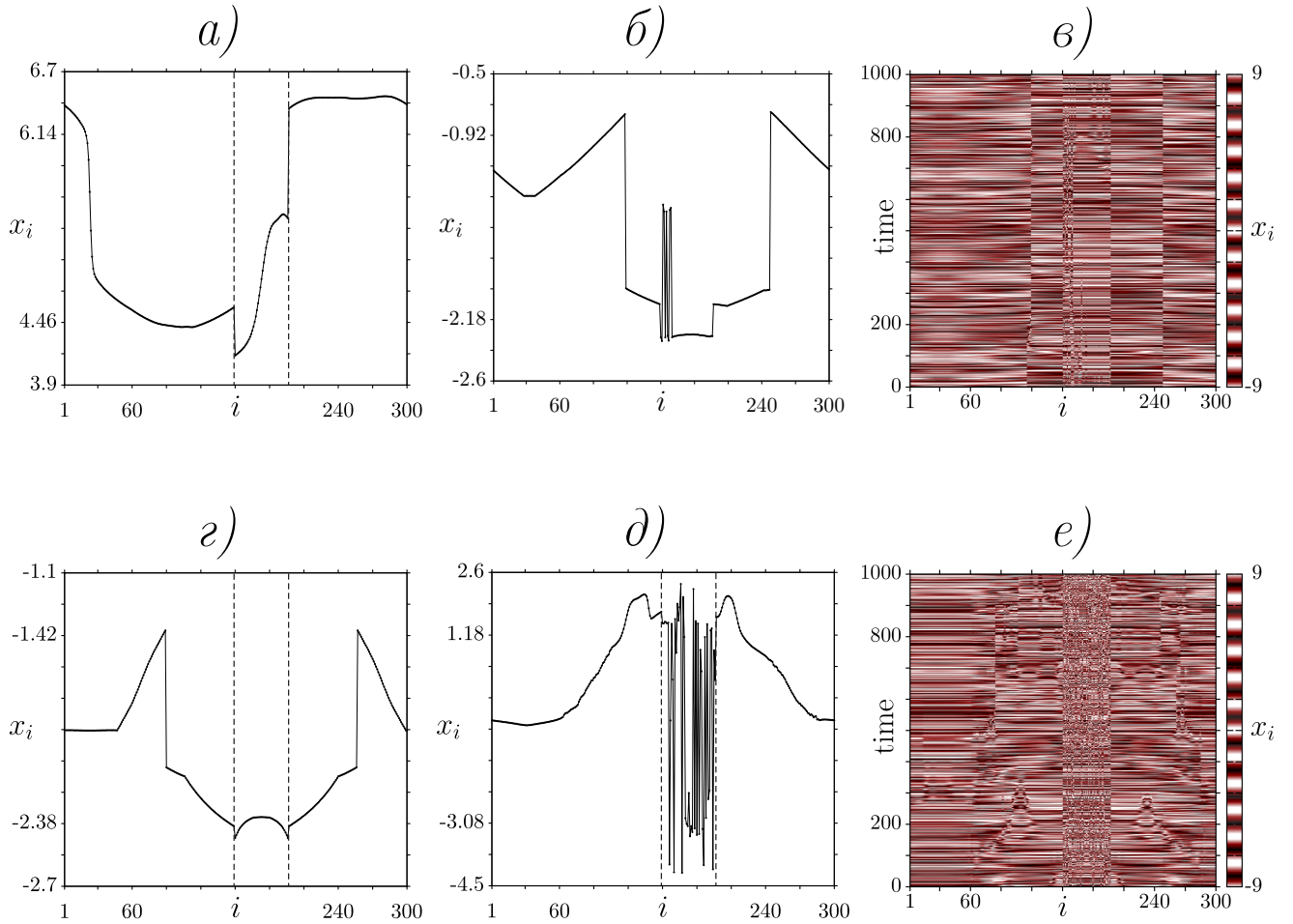


Рис. 4.4. Эволюция пространственной структуры в (4.1) с ростом амплитуды воздействия  $A_{exp}$ : а – мгновенный пространственный профиль при  $A_{ext} = 0.05$  (область  $A$ ,  $\Lambda = 0.0105$ ); б – мгновенный пространственный профиль при  $A_{ext} = 0.17$  (область  $B'$ ,  $\Lambda = 0.01793$ ); в – пространственно-временная диаграмма при  $A_{ext} = 0.17$ ; г – мгновенный пространственный профиль при  $A_{ext} = 0.53$  (область  $A$ ,  $\Lambda = 0.017$ ); д – мгновенный пространственный профиль при  $A_{ext} = 0.86$  (область  $B$ ,  $\Lambda = 0.0202$ ); е – пространственно-временная диаграмма при  $A_{ext} = 0.86$ . Границы области воздействия  $i \in [149; 195]$  выделены пунктирными линиями. Параметры:

$$f_{ext} = 0.11, \sigma = 0.051, r = 0.3, a = 0.2, b = 0.2, c = 4.5, N = 300$$

ласти воздействия, его ширина не изменяется во времени. Помимо этого, пространственная структура вне области воздействия становится неустойчивой. Малые некогерентные кластеры с коротким временем жизни появляются в раз-

личных областях ансамбля. Также было исследовано, как воздействие влияет на степень хаотичности колебаний в ансамбле (4.1). Для этого были вычислены значения старшего показателя Ляпунова  $\Lambda$  для растущей амплитуды воздействия. Так, значения  $\Lambda$  растут с увеличением  $A_{ext}$ . Определены значения  $\Lambda$  для всех случаев на рисунке 4.4.

Исследуем распределение средних по времени частот колебаний осцилляторов для различных областей на карте режимов, приведенной на рисунке 4.3. В рассматриваемом режиме собственная средняя частота хаотических колебаний для всех элементов ансамбля равна  $f_0 = 0.172$ . На рисунке 4.5 представлены пространственные распределения средних частот колебаний осцилляторов ансамбля, соответствующие режимам, проиллюстрированным на рисунке 4.4.

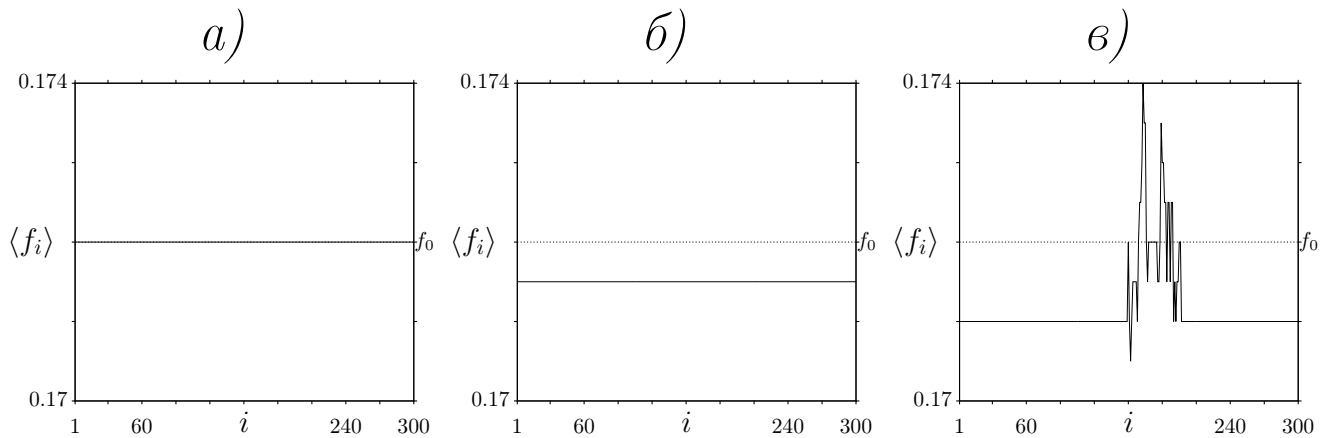


Рис. 4.5. Распределение средних частот  $\langle f_i \rangle (i)$  осцилляторов при различных значениях амплитуды воздействия в системе (4.1): а –  $A_{ext} = 0.05$ ; б –  $A_{ext} = 0.2$ ; в –  $A_{ext} = 0.95$ . Пунктирной линией отмечена собственная средняя частота осцилляторов  $f_0$ . Параметры:  $f_{ext} = 0.11$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 4.5$ ,  $\sigma = 0.051$ ,  $r = 0.3$ ,  $N = 300$

График на рисунке 4.5,а показывает, что при малой амплитуде воздействия  $A_{ext}$  все осцилляторы колеблются с одинаковыми средними частотами  $\langle f_i \rangle$ . При этом эта частота равна собственной средней частоте осцилляторов  $\langle f_0 \rangle$ , несмотря на то, что частота воздействия значительно меньше  $\langle f_0 \rangle$  ( $f_{ext} < \langle f_0 \rangle$ ). С увеличением  $A_{ext}$  все средние частоты  $\langle f_i \rangle$  осцилляторов несколько сме-

щаются к частоте воздействия. В области индуцирования химер  $B'$  все средние частоты осцилляторов также остаются одинаковыми. При больших значениях амплитудах воздействия осцилляторы внутри области воздействия начинают колебаться с разными средними частотами, отличающимися как от  $\langle f_0 \rangle$ , так и  $f_{ext}$ . Более того, частоты элементов могут значительно отличаться друг от друга. Такая расстройка частот не наблюдалась ни в одном режиме (4.1) для автономного случая, включая полную синхронизацию и химерные состояния.

Отдельно рассмотрим случай низкочастотного воздействия. Для этого зафиксируем частоту внешнего сигнала как  $f_{ext} = 0.05$  (что почти в 3.5 раза меньше собственной частоты колебаний осцилляторов). При такой частоте нет четкого разделения областей  $B'$  и  $B$  областью  $A$ , т.к. с ростом  $A_{ext}$  режим индуцированных химер чередуется с режимом частичной когерентности осцилляторов. Режимы с кусочно-линейным профилем полностью отсутствуют только в области  $B$ , где можно наблюдать только индуцированные химеры. Важной особенностью воздействия на низких частотах является то, что некогерентный кластер может образовываться не в области воздействия, а рядом с ней. При этом осцилляторы в области воздействия ведут себя когерентно. На рисунке 4.6 представлены два мгновенных пространственных профиля, демонстрирующих это явление.

При увеличении силы связи  $\sigma$  и прочих фиксированных параметрах степень когерентности колебаний осцилляторов автономного ансамбля увеличивается и мгновенный профиль пространственной структуры становится более гладким, исчезают разрывы профиля. При значении  $\sigma \approx 0.11$  поведение осцилляторов становится полностью когерентным, т.е. наблюдается режим полной хаотической синхронизации. Как показали наши исследования, возникновение химерных структур при внешнем гармоническом воздействии возможно и при более сильной связи, чем та, что рассматривалась ранее. Однако, пороговые значения амплитуды внешнего воздействия, при котором образуются химеры, значительно увеличивается с ростом  $\sigma$ . На рисунках 4.7,а,б,в,

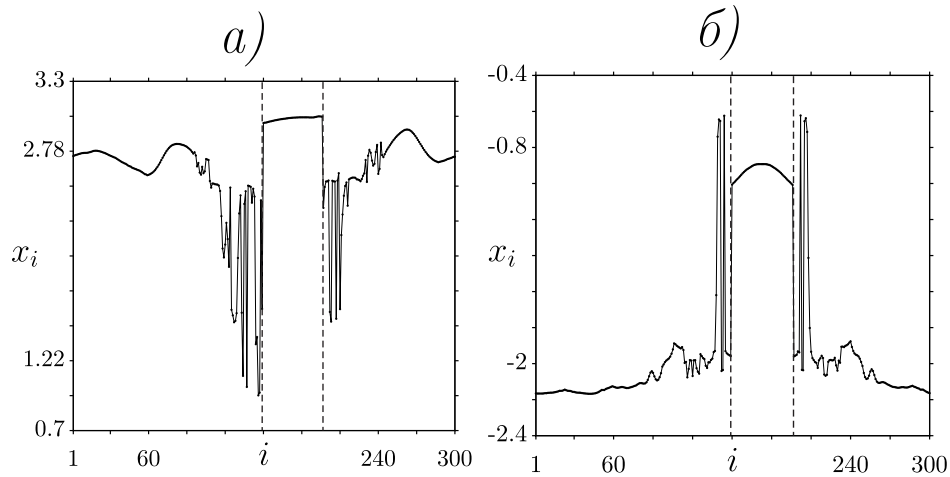


Рис. 4.6. Формирование некогерентных кластеров вне области воздействия при низкочастотном внешнем гармоническом сигнале: а – мгновенный пространственный профиль при  $A_{ext} = 0.625$ ; б – мгновенный пространственный профиль при  $A_{ext} = 0.688$ . Область воздействия  $i \in [149; 195]$  выделена пунктирными линиями. Параметры:  $f_{ext} = 0.05$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 4.5$ ,  $\sigma = 0.051$ ,  $r = 0.3$ ,  $N = 300$

соответственно, показаны мгновенные пространственные профили для режима без внешнего воздействия, при амплитуде, меньше порогового значения  $A_{ext}$  и больше него.

По своим характеристикам подобные химерные состояния сходны с рассмотренными ранее. Некогерентный кластер химеры располагается в области воздействия.

#### 4.1.4 Управление индуцированной химерой

В предыдущих разделах некогерентный кластер создавался в одной и той же области пространства (4.1). Меняя область воздействия, можно пожеланию менять расположение некогерентного кластера амплитудной химеры в пространстве. Поведение ансамбля при этом не претерпевает качественных

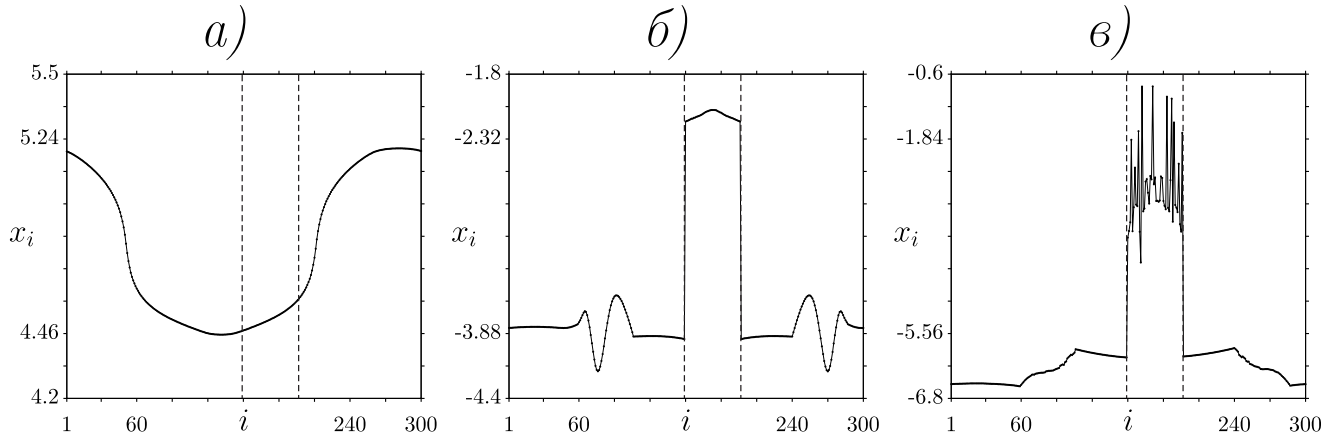


Рис. 4.7. Индуцированные химероподобные состояния в ансамбле (4.1) при больших значениях силы связи. На графиках приведены мгновенные пространственные профили при различных амплитудах воздействия: а –  $A_{ext} = 0$ ; б – до порога возникновения химер при  $A_{ext} = 1.26$ ; в – при амплитуде  $A_{ext} = 1.29$ , больше порогового значения. Область воздействия  $i \in [149; 195]$  выделена пунктирными линиями. Параметры:  $\sigma = 0.063$ ,  $f_{ext} = 0.11$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 4.5$ ,  $r = 0.3$ ,  $N = 300$

изменений. На рисунке 4.8 представлены мгновенные пространственные профили состояний системы при внешнем воздействии на систему в различных областях пространства при одних и тех же значениях управляющих параметров и начальных условий. Из приведенных графиков видно, что при воздействии в различных областях возникают однотипные химерные состояния. Важно отметить, что при изменении расположения интервала воздействия и сохранении его размера, вид карты режимов на плоскости параметров  $f_{ext}$ ,  $A_{ext}$ , практически остается таким же, как на рисунке 4.3, претерпевая лишь незначительные изменения формы границ отмеченных областей.

Меняя величину области воздействия, можно получать некогерентные кластеры различной величины. На рисунке 4.9 приведены примеры индуцированных химер при воздействии на очень широкую область и очень узкую область и одинаковых значениях всех прочих параметров. Как и в предыдущих случаях, с ростом амплитуды воздействия наблюдается чередование режима

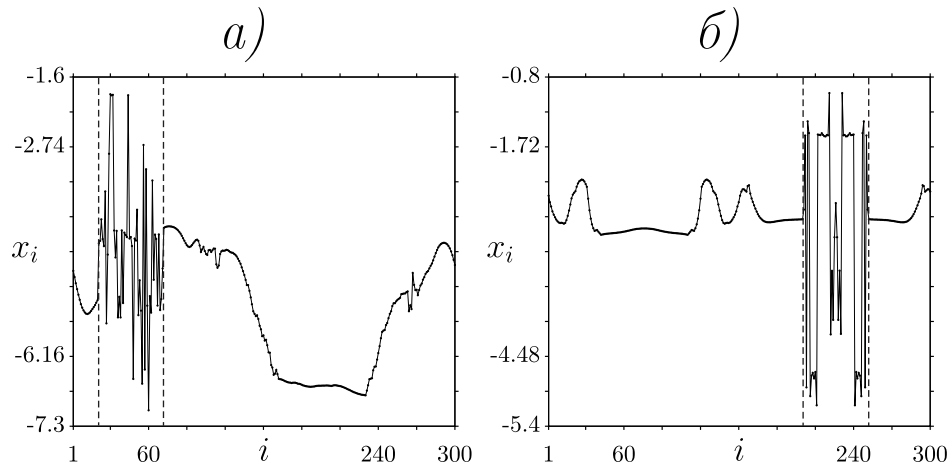


Рис. 4.8. Изменение места формирования некогерентного кластера для различных областей воздействия. На графиках приведены мгновенные пространственные профили, полученные для двух областей воздействия:  $i \in [20 : 70]$  (а) и  $i \in [200 : 250]$  (б). Область воздействия выделена пунктирными линиями. Параметры:  $A_{ext} = 0.81$ ,  $f_{ext} = 0.11$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 4.5$ ,  $\sigma = 0.051$ ,  $r = 0.3$ ,  $N = 300$

частичной когерентности с химерными состояниями. Некогерентные кластеры могут образовываться как на всей области воздействия, так и на части этой области.

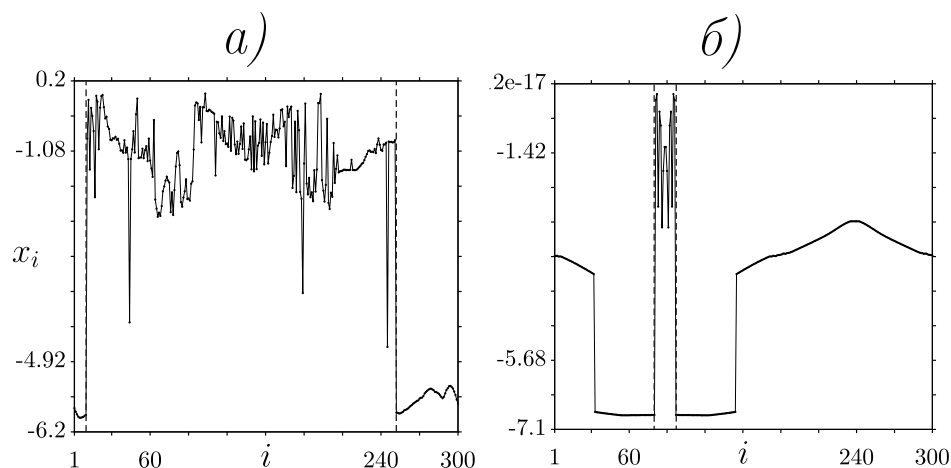


Рис. 4.9. Изменение ширины индуцированного некогерентного кластера путем изменения ширины области воздействия. На графиках приведены мгновенные пространственные профили, полученные для двух областей воздействия, сильно различающихся по ширине:  $i \in [10 : 250]$  (а) и  $i \in [80 : 95]$  (б). Область воздействия выделена пунктирными линиями. Параметры:  $A_{ext} = 0.75$ ,

$$f_{ext} = 0.11, a = 0.2, b = 0.2, c = 4.5, \sigma = 0.051, r = 0.3, N = 300$$

## 4.2 Пространственные структуры при воздействии внешнего гармонического сигнала на все осцилляторы ансамбля

Возникает вопрос, каков будет отклик исследуемой системы (4.1), если воздействовать сразу на все элементы ансамбля одним и тем же гармоническим сигналом. Расчеты показывают, что, меняя амплитуду и частоту воздействия можно наблюдать следующие состояния: режим полной хаотической синхронизации; режим частичной когерентности; химерные состояния и полная некогерентность. Примеры соответствующих пространственных структур приведены на рисунке 4.10. При малой амплитуде воздействия в системе сосуществуют два режима: режим полной хаотической синхронизации (рисунок 4.10,а) и режим частичной когерентности (рисунок 4.10,б). Таким образом, для малых значе-

ний  $A_{ext}$  отклик на внешний сигнал является пространственно-когерентным. При больших значениях амплитуды внешней силы отклик становится некогерентным. С ростом  $A_{ext}$  сначала наблюдается переход к химерным структурам, где сосуществуют когерентные и некогерентные кластеры (пример приведен на рисунке 4.10,в). При дальнейшем росте  $A_{ext}$  пространственная структура становится полностью некогерентной (рисунок 4.10,г). По своим характеристикам эти химероподобные состояния аналогичны состояниям, описанным выше.



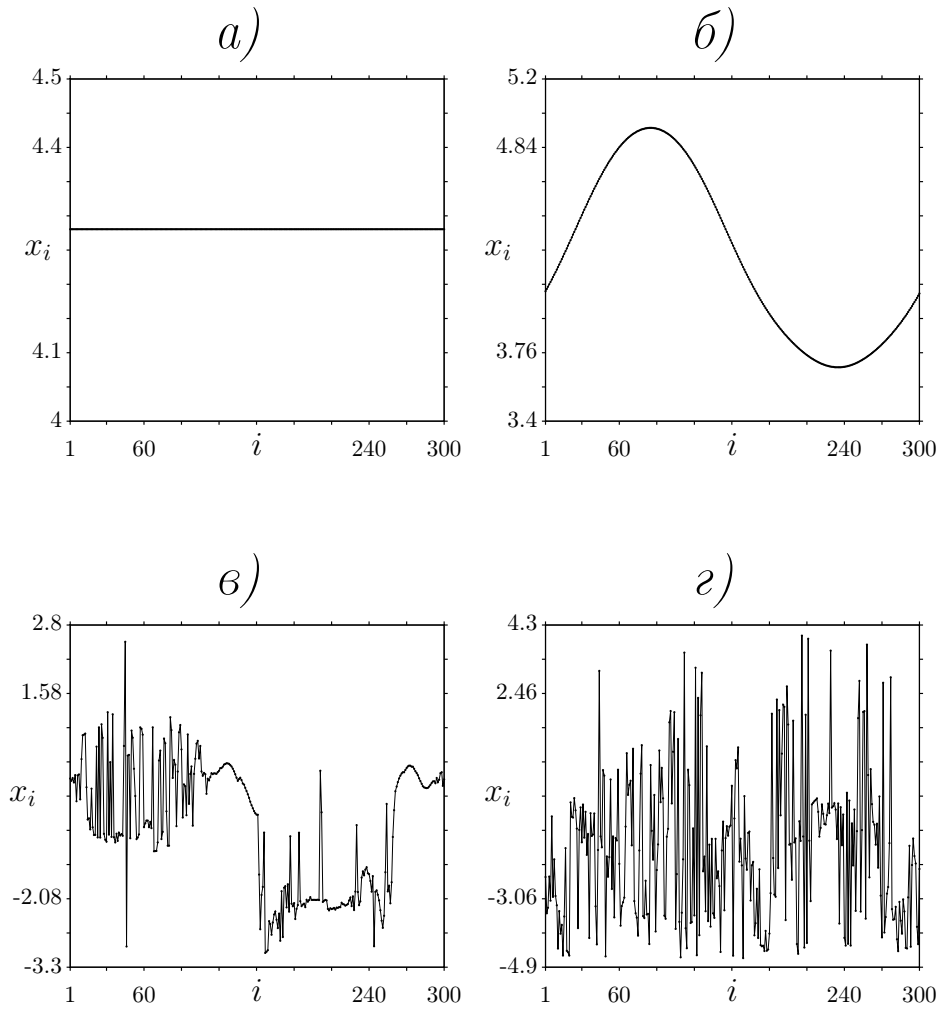


Рис. 4.10. Пространственные структуры в (4.1) при воздействии одного и того же гармонического сигнала на все элементы ансамбля. На графиках приведены мгновенные пространственные профили для различных значений амплитуды воздействия: а –  $A_{ext} = 0.15$ ; б –  $A_{ext} = 0.36$ ; в –  $A_{ext} = 0.63$ ; г –  $A_{ext} = 0.93$ . Параметры:  $f_{ext} = 0.11$ ,  $a = 0.2$ ,  $b = 0.2$ ,  $c = 4.5$ ,  $\sigma = 0.051$ ,  $r = 0.3$ ,  $N = 300$

### 4.3 Выводы по главе 4

В главе представлены результаты исследования внешнего локализованного и глобального гармонического воздействия на ансамбль нелокально-связанных хаотических осцилляторов Рёсслера (4.1). Рассмотрено влияние

внешней силы на различные динамические режимы ансамбля. Можно выделить следующие основные результаты.

1. При воздействии внешней локализованной гармонической силой на некогерентный кластер фазовой химеры происходит разрушение химерной структуры. После длительного переходного процесса в системе устанавливается режим, характеризующийся кусочно-гладким пространственным профилем. При воздействии на некогерентный кластер амплитудной химеры происходит перестройка пространственного профиля системы – некогерентный кластер образуется в новой пространственной области, а профиль в области воздействия становится кусочно-гладким.
2. Обнаружено явление образование химероподобных структур в пределах области воздействия для режима частичной когерентности, характеризующимся гладким пространственным профилем. По своим характеристикам это состояние близко к амплитудной химере. Такие состояния были названы "индуцированной химерой".
3. Построена карта режимов для ансамбля (4.1) на плоскости параметров внешнего воздействия ( $A_{ext}$ ,  $f_{ext}$ ). Выявлено, что индуцирование химероподобных состояний возможно в широкой области значений частоты и амплитуды внешнего воздействия для различных значений силы связи между элементами. При низкочастотном внешнем сигнале некогерентные кластеры могут возникать не только внутри области воздействия, но и вне его. Исследовано изменение распределение средних частот колебаний осцилляторов при различных значениях амплитуды внешнего воздействия.
4. Показана возможность управления топологией индуцированных химероподобных состояний путем простого изменения параметров локализации внешней гармонической силы. Качественных изменений состояний при этом не происходит.

5. При глобальном воздействии гармонического сигнала на ансамбль в режиме частичной когерентности с ростом амплитуды воздействия можно наблюдать все реализуемые в автономном случае режимы: от полной хаотической синхронизации до полной пространственной некогерентности. При определенном значении амплитуды воздействия можно получить химерную структуру, подобную амплитудной химере в автономном ансамбле.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе было проведено исследование широкого класса динамических режимов, характерных для активных распределенных систем с периодическими граничными условиями. Было исследовано влияние на происходящие в распределенной системе процессы как характера динамики парциальных элементов, так и типа связи между ними. Кроме того, для определенных случаев было исследовано воздействие на распределенную систему внешней периодической силы.

Обнаружено, что однонаправленный характер связи может приводить к формированию динамического химерного состояния в цепочке локально-связанных простейших линейных диссипативных осцилляторов. Установлено, что для ансамблей бистабильных осцилляторов с нелокальным типом взаимодействия характерен особый тип сложных пространственно-временных структур, названный "двухъямной химерой".

Были получены следующие основные результаты диссертационной работы:

1. В активной среде, представляющей собой предельный случай кольца из диффузионно-связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо (ФХН) в бистабильном режиме, происходит образование бегущих волн, подобных волнам возбуждения при возбудимой динамике элементов среды. При этом имеет место явление мультистабильности, связанное с сосуществованием нескольких устойчивых волновых мод с разной длиной волны. Конфигурация пространственного профиля волны имеет сильную зависимость от начальных условий. Переход от режима бистабильности в область возбудимой динамики не сопровождается бифуркацией бегущей волны, которая плавно изменяет свой профиль при изменении параметров. В тоже вре-

мя, переход из режима возбудимой среды в область автоколебаний носит различный характер и сопровождается бифуркацией.

2. Исследование синхронизации бегущих волн в диффузионной активной среде, моделируемой кольцом осцилляторов ФХН, в различных режимах парциальных осцилляторов для различных волновых мод показало качественное сходство закономерностей синхронизации в бистабильном режиме с синхронизацией в возбудимом режиме: в обоих случаях наблюдается расширение области синхронизации для более коротковолновых мод, в то время как в автоколебательном режиме ширина области синхронизации уменьшается с ростом длины волны. Данное свойство проявляется как при локальном воздействии внешней гармонической силы на единственный парциальный осциллятор, так и при пространственно-распределенном воздействии в форме гармонической бегущей волны.
3. В модели бистабильной среды на основе кольца диссипативных осцилляторов Дуффинга с двухъямным потенциалом при однонаправленном взаимодействии осцилляторов в определенной области значений коэффициентов диссипации и связи реализуется установившийся режим бегущих волн, которые могут иметь как регулярный, так и хаотический характер в пространстве и времени. При этом парциальные осцилляторы демонстрируют как хаотическое во времени поведение в пределах одной потенциальной ямы, так и хаотические переключения между двумя двумя потенциальными ямами. При слабой связи вместо бегущих волн наблюдаются неподвижные пространственные структуры, форма которых в основном определяется начальными условиями. Для данной модели бистабильной среды исследованы переходы от режима стационарных структур к режиму регулярных бегущих волн и от режима регулярных бегущих волн к хаотическим волнам. Построена диаграмма режимов на плоскости параметров, определяющих силу связи между осцилляторами и высоту потенциального

барьера в парциальном осцилляторе. Показано, что при переходе к режиму бегущих волн происходит скачок старшего показателя Ляпунова из отрицательной области к нулевому значению, а при переходе к хаотической динамике наблюдается резкий скачок показателя в область положительных значений.

4. Впервые были найдены химерные состояния в кольце элементов с локальной однонаправленной связью. Было показано, что для возникновения химер в этом случае достаточно, чтобы связь была однонаправленной и описывалась нелинейной функцией определенного вида. При этом элементами ансамбля могут быть простейшие линейные диссипативные осцилляторы. Химеры в такой системе имеют четко выраженные кластеры некогерентности, соответствующие хаотическому поведению осцилляторов и кластеры когерентности, соответствующие состоянию, близкому к равновесию. Данная структура вращается вдоль кольца с постоянной скоростью, при этом размеры и характер кластеров остаются постоянными. Обнаруженный тип химерного состояния во многом аналогичен виртуальным химерам, наблюдаемым в одном осцилляторе с запаздывающей обратной связью. Показано, что система обладает мультистабильностью и при разных начальных условиях могут наблюдаться химерные структуры с различным числом кластеров. Определены области значений параметров, при которых реализуются химерные состояния описанного типа. Выявлен общий вид нелинейной функции, описывающей однонаправленную связь, который необходим для формирования динамических химерных состояний. Показано, что при любой функции связи, обладающей соответствующими характеристиками, не происходит качественных изменений в свойствах установившегося режима.
5. Впервые обнаружен новый тип химерных состояний, характерный для ансамблей с нелокальным взаимодействием, состоящих из осцилляторов с бистабильным поведением. Данные химеры были названы "двухъямными".

Особенность химер данного типа заключается в том, что кластер некогерентности характеризуется нерегулярным распределением мгновенных состояний осцилляторов между окрестностями двух аттракторов, сосуществующих в парциальном элементе ансамбля. Показано, что химерные структуры данного типа могут сопровождаться как регулярной, так и хаотической динамикой элементов ансамбля во времени, а также быть неподвижными. В случае хаотической динамики элементов ансамбля двухъямные химеры могут сосуществовать с амплитудными и фазовыми химерами. В случае регулярной бистабильной динамики элементов двухъямные химеры являются единственным типом химер, наблюдаемых в ансамбле.

6. Обнаружены и исследованы химерные состояния в ансамбле нелокально-связанных систем Лоренца с квазигиперболическим хаотическим аттрактором. Их возникновение обусловлено смещением эффективных значений параметров парциальных осцилляторов под действием связи и сменой динамики элементов с переключательной на бистабильную. Обнаруженные химеры аналогичны двухъямным химерам в ансамбле кубических отображений. Кроме того обнаружено, что переход к полной пространственной некогерентности ансамбля происходит через режим перемежаемости между пространственно-когерентным поведением и либо режимом полной некогерентности, либо режима метастабильных химероподобных состояний. Кроме химер для ансамбля нелокально-связанных систем Лоренца с квазигиперболическим аттрактором характерен режим уединенных состояний.
7. В ансамбле бистабильных осцилляторов ФХН с нелокальным взаимодействием обнаружены и исследованы двухъямные химеры с особыми свойствами. Эти химерные структуры имеют "неподвижные" участки из осцилляторов, находящихся в состояниях, близких к равновесию, но не являются полностью статичными, т.к осцилляторы в кластерах некогерентности со-

вершают колебания большой амплитуды. Кроме данного типа химерных структур и пространственно-однородных равновесных состояний в ансамбле наблюдаются регулярные бегущие волны, которые исчезают с увеличением радиуса нелокальной связи.

8. Исследован переход от пространственной некогерентности к полной синхронизации в двумерной решетке нелокально-связанных бистабильных кубических отображений с периодическими граничными условиями по обоим направлениям. Обнаружены различные химерные состояния: как химеры двухъямного типа, так и известные ранее амплитудные и фазовые химеры. Показано многообразие пространственных структур и типов колебаний во времени, порождаемое переходом от ансамблей типа кольца с нелокальными связями к двумерной решетке. В то же время, показано, что общие закономерности перехода, связанные с кластерной синхронизацией и образованием химерных структур в двумерной решетке сохраняются.
9. Кроме химерных состояний различного типа в двумерной решетке нелокально-связанных бистабильных кубических отображений обнаружен режим уединенных состояний, который наблюдается только при полностью глобальном или близком к глобальному взаимодействию элементов.
10. Исследовано влияние внешнего периодического воздействия на ансамбль нелокально-связанных хаотических осцилляторов. Обнаружено, что воздействие на некогерентный кластер фазовой химеры приводит к разрушению химеры. В системе устанавливается режим, с характерным кусочно-гладким пространственным профилем. При воздействии на некогерентный кластер амплитудной химеры происходит перестройка пространственного профиля системы – некогерентный кластер образуется в новой пространственной области, а профиль в области воздействия становится кусочно-гладким. Показано также, что в режиме частичной когерентности при



гладком пространственном профиле ансамбля с помощью локализованного воздействия периодическим сигналом на группу осцилляторов можно индуцировать химероподобные структуры с кластером некогерентности в пределах области воздействия. По своим характеристикам этот режим близок к амплитудной химере. Свойствами таких химероподобных структур легко управлять, изменяя параметры внешней гармонической силы.

Таким образом, поставленная цель диссертационной работы достигнута и основные задачи решены. В то же время, полученные результаты могут служить основой для проведения дальнейших исследований в области нелинейной динамики сложных систем и закономерностей формирования пространственных структур.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kuramoto, Y.* Chemical oscillations, waves, and turbulence / Y. Kuramoto. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 19.
2. *Stability, Structures And Chaos In Nonlinear Synchronization Networks* / V. S. Afraimovich, V. I. Nekorkin, G. V. Osipov, V. D. Shalfeev. — Singapore: World Scientific, 1995. — Vol. 6.
3. *Mikhailov, A. S.* Foundations of synergetics II: Chaos and Noise / A. S. Mikhailov, A. Y. Loskutov. — Springer Science & Business Media, 2013. — Vol. 52.
4. *Nekorkin, V.* Synergetic Phenomena in Active Lattices: Patterns, Waves, Solitons, Chaos / V. Nekorkin, M. G. Velarde. — Springer Science & Business Media, 2002.
5. *Osipov, G. V.* Ensembles of Phase Oscillators / G. V. Osipov, K. Jürgen, C. Zhou. — Springer, 2007.
6. *Лоскутов, А.Ю.* Основы теории сложных систем / А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов // *Москва*. — 2007. — Vol. 612. — P. 612.
7. *Nekorkin, V. I.* Spatial chaos in a chain of coupled bistable oscillators / V. I. Nekorkin, V. A. Makarov // *Physical review letters*. — 1995. — Vol. 74, no. 24. — P. 4819.
8. *Nekorkin, V. I.* Clusters in an assembly of globally coupled bistable oscillators / V. I. Nekorkin, V. A. Makarov // *Physical review letters*. — 1995. — Vol. 74, no. 24. — P. 4819.

9. *Belykh, V. N.* Hierarchy and stability of partially synchronous oscillations of diffusively coupled dynamical systems / V. N. Belykh, I. V. Belykh, M. Hasler // *Physical Review E*. — 2000. — Vol. 62, no. 5. — P. 6332.
10. *Belykh, V. N.* Cluster synchronization modes in an ensemble of coupled chaotic oscillators / V. N. Belykh, I. V. Belykh, E. Mosekilde // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 63, no. 3. — P. 036216.
11. Relating the sequential dynamics of excitatory neural networks to synaptic cellular automata / V. I. Nekorkin, A. S. Dmitrichev, D. V. Kasatkin, V. S. Afraimovich // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2011. — Vol. 21, no. 4. — P. 043124.
12. Cluster synchronization and isolated desynchronization in complex networks with symmetries / L. M. Pecora, F. Sorrentino, A. M. Hagerstrom et al. // *Nature communications*. — 2014. — Vol. 5. — P. 4079.
13. *Winfree, A. T.* The geometry of biological time / A. T. Winfree. — Springer Science & Business Media, 2001. — Vol. 12.
14. *Keener, J. P.* Mathematical physiology / J. P. Keener, J. Sneyd. — Springer, 1998. — Vol. 1.
15. *Романовский, Ю. М.* Математическое моделирование в биофизике / Ю. М. Романовский, Н. В. Степанова, Д. С. Чернавский. — 1975.
16. *Елькин, Ю. Е.* Автоволновые процессы / Ю. Е. Елькин // *Матем. биология и биоинформ.* — 2006. — Vol. 1. — Pp. 27–40.
17. Simulation of networks of spiking neurons: a review of tools and strategies / R. Brette, M. Rudolph, T. Carnevale et al. // *Journal of computational neuroscience*. — 2007. — Vol. 23, no. 3. — Pp. 349–398.

18. *Epstein, I. R.* An introduction to nonlinear chemical dynamics: oscillations, waves, patterns, and chaos / I. R. Epstein, J. A. Pojman. — Oxford University Press, 1998.
19. *Malchow, H.* Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulation / H. Malchow, S. V. Petrovskii, E. Venturino. — Chapman and Hall/CRC, 2007.
20. *Васильев, В. А.* Автоволновые процессы / В. А. Васильев, Ю. М. Романовский, В. Г. Яхно. — 1987.
21. *Jones, C.* Stability of the travelling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system / C. Jones // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1984. — Vol. 286, no. 2. — Pp. 431–469.
22. *Neu, J. C.* Initiation of propagation in a one-dimensional excitable medium / J. C. Neu, R. S. Preissig Jr., W. Krassowska // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1997. — Vol. 102, no. 3-4. — Pp. 285–299.
23. Paroxysmal starting and stopping of circulating waves in excitable media / Y. Nagai, H. González, A. Shrier, L. Glass // *Physical review letters*. — 2000. — Vol. 84, no. 18. — P. 4248.
24. *Cytrynbaum, E.* Stability conditions for the traveling pulse: Modifying the restitution hypothesis / E. Cytrynbaum, J. P. Keener // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2002. — Vol. 12, no. 3. — Pp. 788–799.
25. *Alford, J. G.* Rotating wave solutions of the FitzHugh–Nagumo equations / J. G. Alford, G. Auchmuty // *Journal of mathematical biology*. — 2006. — Vol. 53, no. 5. — Pp. 797–819.

26. *Pertsov, A. M.* Rotating spiral waves in a modified Fitz-Hugh-Nagumo model / A. M. Pertsov, E.A. Ermakova, A.V. Panfilov // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1984. — Vol. 14, no. 1. — Pp. 117–124.
27. *Zaritski, R. M.* Stable spiral structures and their interaction in two-dimensional excitable media / R. M. Zaritski, A. M. Pertsov // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 66, no. 6. — P. 066120.
28. *Petrov, V. S.* Fibroblasts alter spiral wave stability / V. S. Petrov, G. V. Osipov, J. Kurths // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2010. — Vol. 20, no. 4. — P. 045103.
29. Coupling-induced oscillations in overdamped bistable systems / V. In, A. R. Bulsara, A. Palacios et al. // *Physical review E*. — 2003. — Vol. 68, no. 4. — P. 045102.
30. Emergent oscillations in unidirectionally coupled overdamped bistable systems / A. R. Bulsara, V. In, A. Kho et al. // *Physical review E*. — 2004. — Vol. 70, no. 3. — P. 036103.
31. Routes to complex dynamics in a ring of unidirectionally coupled systems / P. Perlikowski, S. Yanchuk, M. Wolfrum et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2010. — Vol. 20, no. 1. — P. 013111.
32. *Pikovsky, A.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge university press, 2003. — Vol. 12.
33. Interacting coherence resonance oscillators / S. K. Han, T. G. Yim, D. E. Postnov, O. V. Sosnovtseva // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 83, no. 9. — P. 1771.

34. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media / A. Neiman, L. Schimansky-Geier, A. Cornell-Bell, F. Moss // *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — Vol. 83. — P. 4896.
35. *Hu, B.* Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance / B. Hu, C. Zhou // *Physical Review E.* — 2000. — Vol. 61, no. 2. — P. R1001.
36. *Nomura, T.* Entrainment and termination of reentrant wave propagation in a periodically stimulated ring of excitable media / T. Nomura, L. Glass // *Physical Review E.* — 1996. — Vol. 53, no. 6. — P. 6353.
37. Resetting and annihilating reentrant waves in a ring of cardiac tissue: Theory and experiment / H. González, Y. Nagai, G. Bub et al. // *Progress of Theoretical Physics Supplement.* — 2000. — Vol. 139. — Pp. 83–89.
38. Predicting the entrainment of reentrant cardiac waves using phase resetting curves / L. Glass, Y. Nagai, K. Hall et al. // *Physical Review E.* — 2002. — Vol. 65, no. 2. — P. 021908.
39. *Слепнев, А. В.* Вынужденная синхронизация бегущих волн в активной среде в автоколебательном и возбудимом режимах / А. В. Слепнев, И. А. Шепелев, Т. Е. Вадивасова // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* — 2014. — Vol. 22, no. 2.
40. *Слепнев, А.В.* — Автоколебательные процессы в одномерных детерминированных и флуктуирующих активных средах с периодическими граничными условиями: дис. канд. физ.-мат. наук. — Master's thesis, Саратовский гос. университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2014.
41. *Kuramoto, Y.* Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators. / Y. Kuramoto, D. Battogtokh // *Nonlin. Phen. in Complex Sys.* — 2002. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 380–385.

42. *Abrams, D. M.* Chimera States for Coupled Oscillators / D. M. Abrams, S. H. Strogatz // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93, no. 17. — P. 174102.
43. Loss of coherence in dynamical networks: spatial chaos and chimera states / I. Omelchenko, Y. Maistrenko, P. Hövel, E. Schöll // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106. — P. 234102.
44. *Zakharova, A.* Chimera Death: Symmetry Breaking in Dynamical Networks / A. Zakharova, M. Kapeller, E. Schöll // *Phys. Rev. Lett.* — 2014. — Vol. 112. — P. 154101.
45. *Panaggio, M. J.* Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators / M. J. Panaggio, D. M. Abrams // *Nonlinearity*. — 2015. — Vol. 28. — P. R67.
46. Chimera states in three dimensions / Y. Maistrenko, O. Sudakov, O. Osiv, V. Maistrenko // *New J. Phys.* — 2015. — Vol. 17. — P. 073037.
47. Mechanisms of appearance of amplitude and phase chimera states in a ring of nonlocally coupled chaotic systems / S. Bogomolov, A. Slepnev, G. Strelkova et al. // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2016. — Vol. 43. — P. 25.
48. Solvable model for chimera states of coupled oscillators / D. M. Abrams, R. Mirollo, S. H. Strogatz, D. A. Wiley // *Physical review letters*. — 2008. — Vol. 101, no. 8. — P. 084103.
49. *Sethia, G. C.* Amplitude-mediated chimera states / G. C. Sethia, A. Sen, G. L. Johnston // *Physical Review E*. — 2013. — Vol. 88, no. 4. — P. 042917.
50. *Omel'chenko, O. E.* Coherence–incoherence patterns in a ring of non-locally coupled phase oscillators / O. E. Omel'chenko // *Nonlinearity*. — 2013. — Vol. 26, no. 9. — P. 2469.

51. Transition from spatial coherence to incoherence in coupled chaotic systems / I. Omelchenko, B. Riemenschneider, P. Hövel et al. // *Phys. Rev. E*. — 2012. — Vol. 85. — P. 026212.
52. When nonlocal coupling between oscillators becomes stronger: patched synchrony or multichimera states / I. Omelchenko, O. E. Omel'chenko, P. Hövel, E. Schöll // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110. — P. 224101.
53. *Rattenborg, Neils C.* Behavioral, neurophysiological and evolutionary perspectives on unihemispheric sleep / Neils C Rattenborg, CJ Amlaner, SL Lima // *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*. — 2000. — Vol. 24, no. 8. — Pp. 817–842.
54. Chimera states and synchronization in magnetically driven SQUID metamaterials / J. Hizanidis, N. Lazarides, G. Neofotistos, G. P. Tsironis // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2016. — Vol. 225, no. 6-7. — Pp. 1231–1243.
55. Traveling Chimera Pattern in a Neuronal Network under Local Gap Junctional and Nonlocal Chemical Synaptic Interactions / A. Mishra, S. Saha, D. Ghosh et al. // *Opera Medica et Physiologica*. — 2017. — no. 1.
56. *González-Avella, J. C.* Localized coherence in two interacting populations of social agents / J. C. González-Avella, M. G. Cosenza, M. San Miguel // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. — 2014. — Vol. 399. — Pp. 24–30.
57. Chimera states in a network-organized public goods game with destructive agents / N. E. Kouvaris, R. J. Requejo, J Hizanidis, A. Díaz-Guilera // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2016. — Vol. 26, no. 12. — P. 123108.
58. Experimental Observation of Chimeras in Coupled-Map Lattices / A. M. Hagerstrom, T. E. Murphy, R. Roy et al. // *Nature Phys.* — 2012. — Vol. 8. — Pp. 658–661.



59. Turbulent chimeras in large semiconductor laser arrays / J. Shena, J. Hizanidis, V. Kovanis, G. P. Tsironis // *Scientific reports*. — 2017. — Vol. 7. — P. 42116.
60. Chimera states in mechanical oscillator networks / E. A. Martens, S. Thutupalli, A. Fourrière, O. Hallatschek // *Proceedings of the National Academy of Sciences*. — 2013. — Vol. 110, no. 26. — Pp. 10563–10567.
61. Imperfect chimera states for coupled pendula / T. Kapitaniak, P. Kuzma, J. Wojewoda et al. // *Scientific reports*. — 2014. — Vol. 4. — P. 6379.
62. Transient scaling and resurgence of chimera states in networks of Boolean phase oscillators / D. P. Rosin, D. Rontani, N. D. Haynes et al. // *Physical Review E*. — 2014. — Vol. 90, no. 3. — P. 030902.
63. *Tinsley, M. R.* Chimera and phase-cluster states in populations of coupled chemical oscillators / M. R. Tinsley, S. Nkomo, k. Showalter // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8, no. 9. — P. 662.
64. Coexistence of synchrony and incoherence in oscillatory media under nonlinear global coupling / L. Schmidt, K. Schönleber, K. Krischer, V. Garcia-Morales // *Chaos*. — 2014. — Vol. 24, no. 1. — P. 013102.
65. *Laing, C. R.* Chimeras in networks with purely local coupling / C. R. Laing // *Physical Review E*. — 2015. — Vol. 92, no. 5. — P. 050904.
66. Chimera-type states induced by local coupling / M. G. Clerc, S. Coulibaly, M. A. Ferré et al. // *Physical Review E*. — 2016. — Vol. 93, no. 5. — P. 052204.
67. *Larger, L.* Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems / L. Larger, B. Penkovsky, Y. Maistrenko // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 111. — P. 054103.

68. *Larger, L.* Laser chimeras as a paradigm for multistable patterns in complex systems / L. Larger, B. Penkovsky, Y. Maistrenko // *Nature Commun.* — 2015. — Vol. 6. — P. 7752.
69. Delayed-feedback chimera states: Forced multiclusters and stochastic resonance / V. Semenov, A. Zakharova, Y. Maistrenko, E. Schöll // *EPL.* — 2016. — Vol. 115. — P. 10005.
70. *Кузнецов, С. П.* Сложная динамика генераторов с запаздывающей обратной связью (обзор) / С. П. Кузнецов // *Изв. вузов. Радиофизика.* — 1982. — Vol. 25, no. 12. — Pp. 1410–1428.
71. *Mounier, H.* Time delay systems / H. Mounier, J. Rudolph // *Encycl Life Support Syst 6.* — 2003. — Vol. 43, no. 19. — P. 4.
72. *Pyragas, K.* Continuous control of chaos by self-controlling feedback / K. Pyragas // *Phys. Lett. A.* — 1992. — Vol. 170. — P. 421.
73. Delayed self-synchronization in homoclinic chaos / F. T. Arecchi, R. Meucci, E. Allaria et al. // *Phys. Rev. E.* — 2002. — Apr. — Vol. 65. — P. 046237.
74. *Pyragas, K.* Delayed feedback control of chaos / K. Pyragas // *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* — 2006. — Vol. 364, no. 1846. — Pp. 2309–2334.
75. Time-delayed feedback control: from simple models to lasers and neural systems / E. Schöll, P. Hövel, V. Flunkert, M. A. Dahlem // *Complex time-delay systems: theory and applications* / Ed. by F. M. Atay. — Berlin: Springer, 2010. — Pp. 85–150.
76. *Ford, N. J.* Qualitative behaviour and stability of solutions of discretised non-linear Volterra integral equations of convolution type / N. J. Ford, C. T. H. Bak-

- er // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 1996. — Vol. 66, no. 1. — Pp. 213 – 225.
77. *Bocharov, G. A.* Numerical modelling in biosciences using delay differential equations / G. A. Bocharov, F. A. Rihan // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. — 2000. — Vol. 125, no. 1. — Pp. 183 – 199. — Numerical Analysis 2000. Vol. VI: Ordinary Differential Equations and Integral Equations.
78. *Mao, X.* Stochastic differential delay equations of population dynamics / X. Mao, C. Yuan, J. Zou // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. — 2005. — Vol. 304, no. 1. — Pp. 296 – 320.
79. *Baldi, P.* How delays affect neural dynamics and learning / P. Baldi, A. F. Atiya // *IEEE Transactions on Neural Networks*. — 1994. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 612–621.
80. Time-delayed feedback in neurosystems / E. Schöll, G. Hiller, P. Hövel, M. A. Dahlem // *Phil. Trans. R. Soc. A*. — 2009. — Vol. 367. — Pp. 1079–1096.
81. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems / M. A. Dahlem, G. Hiller, A. Panchuk, E. Schöll // *Int. J. Bifur. Chaos*. — 2009. — Vol. 19. — Pp. 745–753.
82. *Ikeda, K.* Study of a high-dimensional chaotic attractor / K. Ikeda, K. Matsumoto // *Journal of Statistical Physics*. — 1986. — Vol. 44, no. 5. — Pp. 955–983.
83. *Giacomelli, G.* Relationship between Delayed and Spatially Extended Dynamical Systems / G. Giacomelli, A. Politi // *Phys. Rev. Lett.* — 1996. — Vol. 76. — P. 2686.

84. Two-dimensional representation of a delayed dynamical system / F. T. Arecchi, G. Giacomelli, A. Lapucci, R. Meucci // *Phys. Rev. A.* — 1992. — Vol. 45. — P. R4225.
85. Coarsening in a bistable system with long-delayed feedback / G. Giacomelli, F. Marino, M. A. Zaks, S. Yanchuk // *Europhys. Lett.* — 2012. — Vol. 99, no. 5. — P. 58005.
86. Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of non-locally coupled chaotic oscillators? / N. Semenova, A. Zakharova, E. Schöll, V. Anishchenko // *Europhys. Lett.* — 2015. — Vol. 112. — P. 40002.
87. Correlation analysis of the coherence-incoherence transition in a ring of nonlocally coupled logistic maps / T. E. Vadivasova, G. Strelkova, S. A. Bogomolov, V. Anishchenko // *Chaos.* — 2016. — Vol. 26. — P. 093108.
88. *Slepnev, A. V.* Stationary and non-stationary chimeras in an ensemble of chaotic self-sustained oscillators with inertial nonlinearity / A. V. Slepnev, A. V. Bukh, T. E. Vadivasova // *Nonlinear Dynamics.* — 2017. — Vol. 88, no. 4. — Pp. 2983–2992.
89. *Dudkowski, D.* Different types of chimera states: An interplay between spatial and dynamical chaos / D. Dudkowski, Y. Maistrenko, T. Kapitaniak // *Phys. Rev. E.* — 2014. — Vol. 90. — P. 032920.
90. Chimeralike states in a network of oscillators under attractive and repulsive global coupling / A. Mishra, C. Hens, M. Bose et al. // *Physical Review E.* — 2015. — Vol. 92, no. 6. — P. 062920.
91. Excitation and suppression of chimera states by multiplexing / V. A. Maksimenko, V. V. Makarov, B. K. Bera et al. // *Physical Review E.* — 2016. — Vol. 94, no. 5. — P. 052205.

92. *Andrzejak, R. G.* Generalized synchronization between chimera states / R. G. Andrzejak, G. Ruzzene, I. Malvestio // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 5. — P. 053114.
93. *Ghosh, S.* Non-identical multiplexing promotes chimera states / S. Ghosh, A. Zakharova, S. Jalan // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2018. — Vol. 106. — Pp. 56–60.
94. New type of chimera and mutual synchronization of spatiotemporal structures in two coupled ensembles of nonlocally interacting chaotic maps / A. V. Bukh, E. Rybalova, N. I. Semenova et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 11. — P. 111102.
95. *Martens, E. A.* Solvable model of spiral wave chimeras / E. A. Martens, C. R. Laing, S. H. Strogatz // *Physical review letters*. — 2010. — Vol. 104, no. 4. — P. 044101.
96. Chimera patterns under the impact of noise / S. Loos, J. C. Claussen, E. Schöll, A. Zakharova // *Phys. Rev. E*. — 2016. — Vol. 93. — P. 012209.
97. Temporal intermittency and the lifetime of chimera states in ensembles of non-locally coupled chaotic oscillators / N. I. Semenova, G. I. Strelkova, V. S. Anishchenko, A. Zakharova // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 6. — P. 061102.
98. Delayed-feedback chimera states: Forced multiclusters and stochastic resonance / V. Semenov, A. Zakharova, Y. Maistrenko, E. Schöll // *EPL*. — 2016. — Vol. 115. — P. 10005.
99. Coherence-resonance chimeras in a network of excitable elements / N. Semenova, A. Zakharova, V. Anishchenko, E. Schöll // *Phys. Rev. Lett.* — 2016. — Vol. 117. — P. 014102.

100. *Jaros, P.* Chimera states on the route from coherence to rotating waves / P. Jaros, Y. Maistrenko, T. Kapitaniak // *Phys. Rev. E.* — 2015. — Vol. 91. — P. 022907.
101. *Maistrenko, Y.* Solitary state at the edge of synchrony in ensembles with attractive and repulsive interactions / Y. Maistrenko, B. Penkovsky, M. Rosenblum // *Physical Review E.* — 2014. — Vol. 89, no. 6. — P. 060901.
102. *Бух А. В., Шепелев И. А.* Компьютерная программа для моделирования сетей динамических элементов, описываемых одномерными или двумерными матрицами связи. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2017612340 от 29.01.2016.
103. *Шепелев, И. А.* Эволюция бегущих волн в бистабильной среде с периодическими граничными условиями / И. А. Шепелев, Т. Е. Вадивасова // *Письма в ЖТФ.* — 2015. — Vol. 41, no. 17.
104. *Shepelev, I. A.* Different synchronization characteristics of distinct types of traveling waves in a model of active medium with periodic boundary conditions / I. A. Shepelev, A. V. Slepnev, T. E. Vadivasova // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2016. — Vol. 38. — Pp. 206–217.
105. *Shepelev, I. A.* Traveling waves and dynamical formation of autonomous pacemakers in a bistable medium with periodic boundary conditions / I. A. Shepelev, T. E. Vadivasova, D. E. Postnov // *Saratov Fall Meeting 2014: Optical Technologies in Biophysics and Medicine XVI; Laser Physics and Photonics XVI; and Computational Biophysics / International Society for Optics and Photonics.* — Vol. 9448. — 2015. — P. 94481V.
106. *Шепелев, И. А.* Химерные режимы в кольце элементов с локальным однонаправленным нелинейным взаимодействием / И. А. Шепелев,

- Т. Е. Вадивасова // *Нелинейная динам.* — 2016. — Vol. 12, no. 2. — Pp. 197–209.
107. Шепелев, И. А. Уединенные состояния в 2D-решетке бистабильных элементов при глобальном и близком к глобальному характере взаимодействия / И. А. Шепелев, Т. Е. Вадивасова // *Нелинейная динам.* — 2017. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 317–329.
108. Shepelev, I. Chimera regimes in a ring of oscillators with local nonlinear interaction / I. Shepelev, A. Zakharova, T. Vadivasova // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2017. — Vol. 44. — Pp. 277–283.
109. New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction / I. A. Shepelev, T. E. Vadivasova, A. V. Bukh et al. // *Physics Letters A.* — 2017. — Vol. 381, no. 16. — Pp. 1398–1404.
110. Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh–Nagumo neurons with diffusive coupling / I. A. Shepelev, D. V. Shamshin, G. I. Strelkova, T. E. Vadivasova // *Chaos, Solitons & Fractals.* — 2017. — Vol. 104. — Pp. 153–160.
111. Chimera states in ensembles of bistable elements with regular and chaotic dynamics / I. A. Shepelev, A. V. Bukh, G. I. Strelkova et al. // *Nonlinear Dynamics.* — 2017. — Vol. 90, no. 4. — Pp. 2317–2330.
112. Double-well chimeras in 2D lattice of chaotic bistable elements / I. A. Shepelev, A. V. Bukh, T. E. Vadivasova et al. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* — 2018. — Vol. 54. — Pp. 50–61.
113. Shepelev, I. A. Inducing and destruction of chimeras and chimera-like states by an external harmonic force / I. A. Shepelev, T. E. Vadivasova // *Physics Letters A.* — 2018. — Vol. 382, no. 10. — Pp. 690–696.

114. *Шепелев, И. А.* Химеры и перемежаемость в ансамбле связанных осцилляторов Лоренца / И. А. Шепелев, В. С. Анищенко // Сб. т. Нелинейные волны - 2018. — Россия, Бор: 2018. — С. 205.
115. *Vadivasova, T. E.* Chimeras in ensembles of bistable oscillators / Т. Е. Vadivasova, I. A. Shepelev // Book of abstracts: Dynamics, Bifurcations and Chaos 2017. — Russia, Nizhniy Novgorod: 2017. — P. 42.
116. *Shepelev, I. A.* Dynamical chimeras in a ring of oscillators with local coupling / I. A. Shepelev, T. E. Vadivasova, V. V. Semenov // Book of abstracts: Control of self-organizing nonlinear systems: Theoretical methods and concepts of application. — Germany, Wittenberg: 2015. — P. 46.
117. *Шепелев, И. А.* Режимы химер в двумерном ансамбле кубических отображений с нелокальным взаимодействием / И. А. Шепелев, А. В. Бух // Сб. т. Хаос-2016. — Россия, Саратов: 2016. — С. 24.
118. *Вадивасова, Т. Е.* Химерные режимы в кольце локально-связанных осцилляторов / Т. Е. Вадивасова, И. А. Шепелев, А. Захарова // Сб. т. Хаос-2016. — Россия, Саратов: 2016. — С. 20.
119. *Shepelev, I. A.* Dynamical chimeras in a ring of oscillators with local coupling / I. A. Shepelev, V. V. Semenov, T. E. Vadivasova // Book of abstracts: Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015. — Russia, Nizhniy Novgorod: 2015. — P. 31.
120. *Vadivasova, T. E.* Synchronization of traveling waves in the active medium with periodic boundary conditions / Т. Е. Vadivasova, А. V. Slepnev, I. A. Shepelev // Book of abstracts: Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015. — Russia, Nizhniy Novgorod: 2015. — P. 36.
121. *Shepelev, I. A.* Traveling waves, bifurcations and multistability in bistable active medium with periodic boundary conditions / I. A. Shepelev, Т. Е. Vadi-



- vasova // Book of abstracts: Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity. — Russia, Saratov: 2014. — Pp. 109–112.
122. *Вадивасова, Т. Е.* Химерные режимы в кольце с однонаправленным нелинейным взаимодействием / Т. Е. Вадивасова, И. А. Шепелев // Материалы конференции Компьютерные науки и информационные технологии. — Россия, Саратов: 2016. — С. 109–112.
123. *Гапонов-Грехов, А. В.* Уравнение Гинзбурга–Ландау и нелинейная динамика неравновесных сред / А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович // *Изв. вузов. Радиофизика.* — 1987. — Vol. 32, no. 2. — Pp. 131–143.
124. *Aranson, I. S.* The world of the complex Ginzburg-Landau equation / I. S. Aranson, L. Kramer // *Reviews of Modern Physics.* — 2002. — Vol. 74, no. 1. — P. 99.
125. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation / B. I. Shraiman, A. Pumir, W. van Saarloos et al. // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 1992. — Vol. 57, no. 3-4. — Pp. 241–248.
126. *Cross, M. C.* Pattern formation outside of equilibrium / M. C. Cross, P. C. Hohenberg // *Reviews of modern physics.* — 1993. — Vol. 65, no. 3. — P. 851.
127. *Shabunin, A. V.* Developing chaos on base of traveling waves in a chain of coupled oscillators with period-doubling: Synchronization and hierarchy of multistability formation / A. V. Shabunin, V. V. Astakhov, V. S. Anishchenko // *International Journal of Bifurcation and Chaos.* — 2002. — Vol. 12, no. 08. — Pp. 1895–1907.
128. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде / А. В. Шабунин, А. А. Акопов, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика.* — 2005. — Vol. 13, no. 4.

129. *Shabunin, A.* Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators / A. Shabunin, U. Feudel, V. V. Astakhov // *Physical Review E*. — 2009. — Vol. 80, no. 2. — P. 026211.
130. *Слепнев, А. В.* Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными условиями / А. В. Слепнев, Т. Е. Вадивасова, А. С. Листов // *Нелинейная динамика*. — 2010. — Vol. 6, no. 4. — Pp. 755–767.
131. *FitzHugh, R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. FitzHugh // *Biophysical journal*. — 1961. — Vol. 1, no. 6. — Pp. 445–466.
132. *Nagumo, J.* An active pulse transmission line simulating nerve axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // *Proceedings of the IRE*. — 1962. — Vol. 50, no. 10. — Pp. 2061–2070.
133. *Hodgkin, A. L.* AL Hodgkin and AF Huxley, *J. Physiol.(London)* 117, 500 (1952). / A. L. Hodgkin // *J. Physiol.(London)*. — 1952. — Vol. 117. — P. 500.
134. *Ermentrout, G. B.* Relating neural dynamics to neural coding / G. B. Ermentrout, R. F. Galán, N. N. Urban // *Physical review letters*. — 2007. — Vol. 99, no. 24. — P. 248103.
135. *Lancaster, J. L.* Modeling excitable systems: Reentrant tachycardia / J. L. Lancaster, E. H. Hellen, E. M. Leise // *American Journal of Physics*. — 2010. — Vol. 78. — Pp. 56–63.
136. *Слепнев, А. В.* Два вида автоколебаний в активной среде с периодическими граничными условиями / А. В. Слепнев, Т. Е. Вадивасова // *Нелинейная динамика*. — 2012. — Vol. 8, no. 3. — Pp. 497–505.

137. Слепнев, А. В. Эффекты шумового воздействия на активную среду с периодическими граничными условиями / А. В. Слепнев, И. А. Шепелев, Т. Е. Вадивасова // *Письма в Журнал технической физики*. — 2014. — Vol. 40, no. 2. — Pp. 30–36.
138. Pikovsky, A. S. Coherence resonance in a noise-driven excitable system / A. S. Pikovsky, J. Kurths // *Physical Review Letters*. — 1997. — Vol. 78, no. 5. — P. 775.
139. Guckenheimer, J. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields / J. Guckenheimer, P. Holmes. — Springer Science & Business Media, 2013. — Vol. 42.
140. Мун, Ф. Хаотические колебания / Ф. Мун. — 1990.
141. Ueda, Y. Survey of regular and chaotic phenomena in the forced Duffing oscillator / Y. Ueda // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 1991. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 199–231.
142. Suli, E. Solution of equations by iteration / E. Suli, D. F. Mayers // *An Introduction to Numerical Analysis*. — 2003. — Pp. 2–35.
143. Madan, R. Chua's Circuit: a Paradigm for Chaos / R Madan // *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos. Edited by MADAN R. Published by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.,. ISBN# 9789812798855*. — 1993.
144. Lorenz, E. N. Deterministic nonperiodic flow / E. N. Lorenz // *Journal of the atmospheric sciences*. — 1963. — Vol. 20, no. 2. — Pp. 130–141.
145. Sparrow, C. The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors / C. Sparrow. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 41.

146. Bifurcations in discrete dynamical systems with cubic maps / H. Skjolding, B. Branner-Jørgensen, P. L. Christiansen, H. E. Jensen // *SIAM Journal on Applied Mathematics*. — 1983. — Vol. 43, no. 3. — Pp. 520–534.
147. Driven Quantum and Ingot / P. Hänggi, A. Primer, P. Talkner et al. // *Rev. Mod. Phys.* — 1990. — Vol. 62. — Pp. 251–342.
148. *Nekorkin, V. I.* Spatial disorder and pattern formation in lattices of coupled bistable elements / V. I. Nekorkin, M. L. Voronin, M. G. Velarde // *EPJ B*. — 1999. — Vol. 9. — Pp. 533–543.
149. *Dziubak, V.* Coherent traveling waves in nonlocally coupled chaotic systems / V. Dziubak, Y. Maistrenko, E. Schöll // *Phys. Rev. E*. — 2013. — Vol. 87, no. 3. — P. 032907.
150. Temporal intermittency and the lifetime of chimera states in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators / N.I. Semenova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, A. Zakharova // *Chaos*. — 2017. — Vol. 27, no. 6. — P. 061102.
151. Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors / E. Rybalova, N.I. Semenova, G.I. Strelkova, V. S. Anishchenko // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2017. — Vol. 226, no. 9. — P. 1857.
152. Nonlinearity of local dynamics promotes multi-chimeras / I. Omelchenko, A. Zakharova, P. Hövel et al. // *Chaos*. — 2015. — Vol. 25. — P. 083104.
153. Heteroclinic contours and self-replicated solitary waves in a reaction–diffusion lattice with complex threshold excitation / V. I. Nekorkin, D. S. Shapin, A. S. Dmitrichev et al. // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2008. — Vol. 237, no. 19. — Pp. 2463–2475.

154. *Ott, E.* Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency / E. Ott, J. C. Sommerer // *Physics Letters A.* — 1994. — Vol. 188, no. 1. — Pp. 39–47.
  
155. Loss of chaos synchronization through the sequence of bifurcations of saddle periodic orbits / V. V. Astakhov, A. V. Shabunin, T. Kapitaniak, V. S. Anishchenko // *Physical Review Letters.* — 1997. — Vol. 79, no. 6. — P. 1014.
  
156. Chimera patterns induced by distance-dependent power-law coupling in ecological networks / T. Banerjee, P. S. Dutta, A. Zakharova, E. Schöll // *Physical Review E.* — 2016. — Vol. 94, no. 3. — P. 032206.
  
157. *Rössler, O. E.* An equation for continuous chaos / O. E. Rössler // *Physics Letters A.* — 1976. — Vol. 57, no. 5. — Pp. 397–398.