

На правах рукописи



Слепнев Андрей Вячеславович

**АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ОДНОМЕРНЫХ
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И ФЛУКТУИРУЮЩИХ
АКТИВНЫХ СРЕДАХ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ
ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

Специальность 01.04.03 —

«Радиофизика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.-н., профессор

Вадивасова Т.Е.

Содержание

Введение	5
1 Динамика невозмущенных активных сред	23
1.1 Модели и методы их исследования	26
1.1.1 Автоколебательная среда со сложной динамикой элементарной ячейки	26
1.1.2 Активная среда с переходом от автоколебательного характера элементов к возбудимому	33
1.1.3 Методы численного интегрирования и достоверность численных экспериментов	35
1.2 Автоколебательная среда со сложной динамикой элементарной ячейки	40
1.2.1 Среда в режиме квазигармонических колебаний. Явление мультистабильности	40
1.2.2 Эволюция мод при изменении управляющего параметра	45
1.2.3 Динамический хаос в автоколебательной среде	57
1.3 Активная среда с переходом от автоколебательного характера элементов к возбудимому	65
1.3.1 Мультистабильность в активной среде	65
1.3.2 Характеристики поведения среды в автоколебательном и возбудимом режиме	65
1.3.3 Бифуркация перехода от автоколебательного режима к возбудимому	68

1.4	Выводы по первой главе	75
2	Динамика активных сред под действием шума	78
2.1	Модели и методы их исследования	80
2.1.1	Методы моделирования источников шума в среде	80
2.2	Воздействие шума на автоколебательную среду со сложной динамикой элементарной ячейки	81
2.2.1	Разрушение бегущих волн	81
2.2.2	Стохастические бифуркации удвоения и связанности	82
2.2.3	Влияние шума на переход к хаосу	88
2.3	Воздействие шума на активную среду с изменяемым характером поведения элементарной ячейки	91
2.3.1	Разрушение бегущих волн и влияние шума на характеристики колебаний	91
2.3.2	Явление когерентного резонанса	93
2.3.3	Переключение режимов вблизи точки бифуркации	97
2.4	Выводы по второй главе	101
3	Синхронизация активных сред внешним локальным гармоническим воздействием	103
3.1	Модели и методы их исследования	105
3.1.1	Методы диагностики синхронизации	105
3.2	Синхронизация автоколебательной среды со сложной динамикой элементов	106
3.3	Синхронизация в активной среде с изменяемым характером элементарной ячейки	112
3.3.1	Особенности синхронизации в различных режимах активной среды	112
3.3.2	Синхронизация колебаний в модели «осциллятор с запаздывающей обратной связью»	119

3.4 Выводы по третьей главе	123
Заключение	124
Литература	129

Введение

Автоколебательные системы являются важным классом нелинейных диссипативных систем, демонстрирующих незатухающие колебания, характеристики которых не зависят (по крайней мере, в некоторых пределах) от начального состояния и определяются параметрами системы. Энергия, расходуемая на диссипацию, компенсируется из некоторого постоянного источника. Автоколебания возникают как в сосредоточенных, так и в пространственно распределённых системах. В последнем случае к ним также применимо определение, данное А.А. Андроновым [1]. Однако, требуется уточнение: колебания должны быть незатухающими в любой точке пространства. В теории распределённых систем широко применяется понятие активной среды. Оно является обобщением понятия автоколебательной системы. Активная среда — это нелинейная диссипативная среда, в которой могут распространяться автоволны, т.е. незатухающие волновые процессы, поддерживающиеся за счет энергии постоянных источников. Автоволновой процесс отличается от автоколебательного тем, что автоволна может смещаться в неограниченном пространстве, и колебания в каждой точке среды в общем случае не обязаны быть незатухающими. В случае же любого распределённого автогенератора колебательный процесс постоянно повторяется в точках среды в ограниченной области пространства.

Автоколебания характерны для многих распределённых систем и сред. Это могут быть автоколебательные явления в гидродинамических и аэродинамических потоках [2, 3], в плазме [4, 5], пространственно распределённые химические реакции [6–9], экологические системы и эпидемиология [10, 11]. Примеры

пространственно распределённых автоколебаний можно найти в нейрофизиологии [12, 13]. Распределёнными автоколебательными системами являются оптические генераторы и радиоэлектронные генераторы СВЧ диапазона [14–17].

Пространственно распределённые системы могут представлять собой пространственно организованные ансамбли (цепочки и решетки), которые описываются дискретными пространственными координатами, и непрерывные среды, состояние которых задается в виде функций непрерывных пространственных координат. Сосредоточенные системы и ансамбли характеризуются конечной (хотя, может быть, и очень большой в случае ансамблей) размерностью фазового пространства, тогда как непрерывные среды имеют фазовое пространство бесконечной размерности. Во многих случаях непрерывную в пространстве среду можно представить как множество элементов. В отличие от пространственно организованного ансамбля из конечного (хотя, возможно, и большого) числа элементов, предполагается, что на единицу длины системы приходится бесконечно много элементов, а их размеры бесконечно малы. Цепочки и решетки, составленные из конечного числа элементов часто служат простейшими моделями непрерывных сред. Для распределённых систем, кроме формы колебаний во времени, важную роль играет поведение в пространстве. В распределённых системах реализуются режимы стоячих и бегущих волн, мгновенные пространственные профили которых могут быть как регулярными (пространственно упорядоченные структуры), так и нерегулярными (пространственный хаос). Хаотическое поведение во времени и пространстве соответствует турбулентному состоянию среды [15, 18].

Активные среды принято делить на автоколебательные, возбудимые и бистабильные [13, 19]. В автоколебательной среде каждый элемент представляет собой сосредоточенный автогенератор и, следовательно, в каждой точке среды могут наблюдаться незатухающие автоколебания. При наличии разности фаз колебаний соседних элементов в автоколебательной среде будут распространяться фазовые волны. Возбудимая среда состоит из элементов, представляющих собой возбудимые осцилляторы. Возбудимый осциллятор — это система с двумя состо-

яниями: устойчивым состоянием покоя и состоянием возбуждения. В отсутствии воздействий система находится в состоянии покоя (точке равновесия). В результате внешнего воздействия (некоторого толчка) система приходит в состояние возбуждения, из которого сама возвращается в состояние покоя. В среде, состоящей из возбудимых элементов, будут распространяться волны возбуждения. Наконец, элементами бистабильной среды являются бистабильные осцилляторы, характеризующиеся двумя устойчивыми состояниями равновесия. Внешнее воздействие приводит к переключениям бистабильного осциллятора. В бистабильной среде распространяются волны переключения [13, 19–21]. При исследовании активных сред в качестве граничных условий часто выбираются периодические условия, позволяющие в пространственно однородной среде реализовать решения в виде бегущих волн. При этом должно выполняться условие: вдоль длины системы укладывается целое число волн. Этому условию в общем случае удовлетворяет счетное множество решений. Не все они являются устойчивыми, однако, при определенных условиях, в системах с периодическими граничными условиями может сосуществовать несколько устойчивых волновых мод, т.е. будет наблюдаться явление мультистабильности.

Автоколебательные среды и их пространственно дискретные модели широко представлены в научной литературе. Классический пример модели автоколебательной среды — уравнение Гинзбурга – Ландау [22–26]:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \alpha a + \beta \Delta a - \gamma |a|^2 a, \quad (1)$$

где α , β , γ — некоторые параметры системы (в общем случае комплексные), Δ — оператор Лапласа. Уравнение (1) дает описание поведения среды вблизи бифуркации Андронова – Хопфа. Среда представляется в виде совокупности локально взаимодействующих квазигармонических генераторов. В отсутствие связи между элементами получаем $\beta \Delta a = 0$, и уравнение колебаний в каждой точке пространства сводится к укороченному уравнению Ван дер Поля, описывающему поведение автономного квазигармонического генератора.

В автоколебательных средах с периодическими граничными условиями и соответствующих дискретных моделях (кольцо автогенераторов) при не слишком сильной связи элементов и периодическом характере колебаний во времени наблюдаются фазовые волны с различной длиной волны. Кроме того, может существовать пространственно однородный режим, представляющий собой синфазные колебания всех элементов среды. Мультистабильность сохраняется и в режиме слабого хаоса [27–29]. При изменении параметров автоколебательной среды наблюдается эволюция сосуществующих мод, которые могут претерпевать различные бифуркации, приводящие к усложнению как характера колебаний во времени, так и пространственного профиля волн. При сильной нелинейности возникает режим хаотических во времени колебаний и пространственного беспорядка (турбулентное состояние). *Исследование эволюции пространственно-временных режимов распределённых систем при изменении параметров и механизмов развития турбулентности на сегодняшний день не является полностью завершённым и остаётся в ряду актуальных задач нелинейной динамики.*

Поведение модели (1) (в том числе с периодическими граничными условиями) достаточно хорошо изучено [30–34]. При некоторых значениях параметров однородный стационарный режим теряет устойчивость и в среде возникают квазигармонические колебания и фазовые волны, наблюдается мультистабильность. С ростом влияния нелинейности и неизохронности происходит развитие динамического хаоса. Сложное поведение среды (1) является следствием взаимодействия большого числа автоколебательных элементов, колебания которых в отсутствие связи были бы гармоническими. Можно предположить существование сред, состоящих из элементов со сложной динамикой. Такие модели сред могут, по-видимому, возникнуть в задачах биофизики и нейрофизиологии, где отдельный автоколебательный элемент способен в некоторых случаях демонстрировать сложное, в том числе хаотическое, поведение. Однако, *автоколебательные среды, состоящие из элементарных генераторов с собственной сложной динамикой, в научной литературе практически не рассматривались.* Имеется значи-

тельное число работ, в которых исследуются пространственно организованные ансамбли, составленные из конечного числа генераторов со сложным индивидуальным поведением. Например, цепочки из осцилляторов Ресслера [29, 35], систем Чуа [27, 36] или генераторов Анищенко – Астахова [37]. Эти модели служат для исследования явлений синхронизации хаоса и образования пространственных структур. Однако, при фиксированном и, как правило, не очень большом числе элементов такие модели могут качественно отражать лишь некоторые, наиболее грубые, черты поведения распределённых систем, но не дают полной картины возможных явлений и не могут, строго говоря, рассматриваться в качестве моделей непрерывных сред. Еще меньше соответствуют непрерывным средам цепочки и решетки отображений последования [38–42], так как в этом случае не только пространственные координаты, но и время оказывается дискретной переменной. *Таким образом, исследование модели непрерывной во времени и пространстве автоколебательной среды со сложным поведением элементарных ячеек является на сегодняшний день актуальной задачей нелинейной динамики.*

Автоколебательная среда всегда реализует незатухающие колебания, обладающие всеми свойствами автоколебаний. В то же время, хотя элементы возбудимой среды не являются автоколебательными, но при определенных граничных условиях в такой среде также могут наблюдаться локализованные в пространстве колебания, т.е. возбудимая среда может быть распределённым автогенератором, что определяется наличием в ней постоянных источников энергии. Простейший способ превратить возбудимую среду в автоколебательную систему — «свернуть» ее в кольцо (т.е. обеспечить периодические граничные условия) [43–46]. В этом случае автоволна циркулирует в локализованном участке среды, воздействуя на одни и те же элементы среды. Более сложный пример возникновения автоколебаний в возбудимой среде — хорошо известные спиральные волны [19, 47–51].

В возбудимой среде с периодическими граничными условиями, также как и в автоколебательной, наблюдаются мультистабильность волновых мод [44–46, 52–56]. По внешнему виду фазовые волны в автоколебательной среде и волны возбуждения в возбудимой среде могут мало различаться. На основании экспериментальных наблюдений не всегда можно сделать точный вывод о том, являются ли элементы исследуемой распределённой системы или среды возбудимыми осцилляторами или автогенераторами. В то же время, такая информация может быть важна с точки зрения создания адекватных математических моделей исследуемой системы. Поэтому *одной из актуальных задач является поиск методов для диагностирования типа активной среды, в которой распространяются волны. Для решения данной задачи необходимо исследовать и сопоставить различные аспекты поведения автоколебательных и возбудимых сред с периодическими граничными условиями.* Хотя возникновение незатухающих волн возбуждения и явление мультистабильности в возбудимых средах с периодическими граничными условиями хорошо известно, целенаправленное сопоставление этих режимов с соответствующими режимами автоколебательных сред в научной литературе на сегодняшний день не встречается. Важным отличием между автоколебательной и возбудимой средами является невозможность возникновения в последней пространственно однородных колебаний. Исчезновение данной моды при вариации параметров может свидетельствовать об изменении характера среды. Разница в поведении возбудимых и автоколебательных сред может проявиться также в различной зависимости характеристик бегущих волн от номера моды (длины волны), а также от управляющих параметров среды. Однако, такие исследования до настоящего времени не проводились.

В последние годы интерес к исследованию возбудимых систем и сред значительно возрос. Это связано с типичностью возбудимых режимов в задачах биофизики [13, 19, 49–52, 57–61]. Базовой моделью возбудимого осциллятора является система ФитцХью – Нагумо, также ведущая свое происхождения из био-

физики [62, 63]. Уравнения системы имеют вид:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - y - \alpha x^3, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x - y + \beta, \end{cases} \quad (2)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$ — безразмерные вещественные динамические переменные, t — безразмерное время, α , β , γ , ε — управляющие параметры системы. При определенном выборе значений параметров система (2) может находиться как в автоколебательном, так и в возбудимом режиме. Добавление источников шума в уравнения системы приводит к возникновению незатухающих стохастических колебаний в виде последовательности спайков (коротких импульсов). При определенных значениях интенсивности шума последовательность импульсов становится почти регулярной. Это явление получило название когерентного резонанса (КР) [64–68]. В условиях КР возбудимые системы обладают определенными чертами автоколебательных. Так, они демонстрируют явление вынужденной и взаимной стохастической синхронизации в полной аналогии с эффективной синхронизацией зашумленных автогенераторов, что позволяет ввести понятие стохастических автоколебаний [69–71].

Среда с периодическими граничными условиями, элементами которой являются осцилляторы ФитцХью – Нагумо, служит удобной моделью для сопоставления динамики автоколебательной и возбудимой среды, поскольку такая модель предусматривает изменение типа среды при выборе соответствующих значений параметров составляющих ее осцилляторов (2). Кроме того, исследования осцилляторных ансамблей и сред, в основе которых лежит модель ФитцХью – Нагумо, вызывают большой интерес в связи с задачами моделирования процессов в нейронных волокнах [12, 49, 72, 73].

Особый круг вопросов связан с воздействием шума на активные среды. В последние годы растет число исследований, посвященных этой теме. Можно назвать монографию [74] и ряд статей, в которых исследуются такие вопросы, как образование и разрушение пространственных структур под действием

шума [25, 75, 76], вызванная шумом абсолютная неустойчивость [77], переход автоколебательной среды под действием шума к хаотической динамике [78] и синхронизация распределённых систем и сред с помощью шума [79]. Для пространственно дискретных моделей типа кольца автогенераторов было исследовано влияние шума на мультистабильность и показана возможность переключений между сосуществующими модами [25, 28, 29, 74–79]. Имеется также большое число работ, посвященных явлению КР и стохастической синхронизации в возбудимых распределённых системах и средах [80–84]. В целом роль шума в распределённых системах остается еще недостаточно исследованной. *Мало изучено влияние шума на бифуркации в активных средах, а также не проводилось сравнения влияния шума на разные типы активных сред.* В то же время, различная реакция на внешний шум могли бы служить инструментом для диагностики типа активной среды.

Чтобы ответить на вопрос, можно ли считать колебания в возбудимых средах разновидностью автоколебаний, *необходимо выяснить, могут ли они быть синхронизованными внешним воздействием.* Как известно, одним из фундаментальных свойств автоколебаний является частотная синхронизация, т.е. захват характерных частот при внешнем воздействии или в результате взаимодействия систем [85]. Для возбудимых распределённых систем и сред, колебания которых индуцируются шумом, в условиях когерентного резонанса было установлено явление стохастической синхронизации [80, 81, 86]. При этом, эффекты синхронизации детерминированных колебаний в возбудимых системах не были четко установлены и изучены. Имеется ряд работ, посвященных управлению колебаниями с помощью внешних импульсов в моделях сердечной мышцы, представляющих собой распределённые возбудимые системы [87–89]. Из приведенных в них результатов видно, что локальное внешнее воздействие может изменять фазу колебаний и частоту следования импульсов возбуждения. Указанные работы не были направлены конкретно на изучение свойств синхронизации. В частности, не рассматривалось существование области синхронизации при вариации

параметров воздействия. С точки зрения задач диагностики характера среды по данным наблюдения *важно не только установить возможность синхронизации бегущих волн в детерминированной возбудимой среде, но и выяснить, имеются ли какие-либо особенности синхронизации колебаний в возбудимых распределённых системах и средах по сравнению с распределёнными системами и средами, состоящими из автоколебательных элементов, и не может ли реакция на внешний периодический сигнал служить средством определения характера исследуемой системы.*

Все вышесказанное подтверждает актуальность исследований в выбранной области и служит основанием для формулировки цели и задач диссертационного исследования. **Целью диссертационной работы** является решение актуальной задачи радиофизики, состоящей в установлении различий в поведении двух типов активных сред с периодическими граничными условиями (автоколебательных и возбудимых сред), в выявлении эффектов шумового и регулярного воздействия на автоколебательные и возбудимые среды, в разработке методов, позволяющих диагностировать характер среды на основании наблюдаемых данных и в анализе возможных сценариев развития хаоса в среде, составленной из автоколебательных элементов со сложной динамикой динамикой.

Для достижения поставленной цели в рамках диссертационного исследования необходимо было решить следующие **основные задачи**:

1. Создать модель автоколебательной среды на основе элементов со сложной динамикой. Исследовать явление мультистабильности в предлагаемой модели среды с периодическими граничными условиями и установить сценарии эволюции колебаний и перехода к хаосу для различных сосуществующих мод. Провести анализ влияния шума на поведение мультистабильной среды. Сравнить эффекты, наблюдаемые в непрерывной среде с особенностями поведения дискретных аналогов.

2. Исследовать активную среду с периодическими граничными условиями, которая, в зависимости от управляющих параметров, может быть автоколебательной или возбудимой. В качестве модели такой среды выбрать среду, составленную из возбудимых осцилляторов ФитцХью – Нагумо. Сравнить динамику выбранной модели среды в автоколебательном и возбудимом режимах и определить, наблюдаются ли различия в поведении бегущих волн, в зависимости их характеристик от длины волны и параметров системы в этих двух случаях. Исследовать бифуркационный переход от одного типа среды к другому при изменении управляющего параметра, задающего характер элемента среды.
3. Выяснить, как влияет шум на бифуркации волновых мод и переход к хаосу в автоколебательной среде со сложной динамикой элементов. Проанализировать возможность управления динамическим режимом поведением среды с помощью шумового воздействия. Исследовать влияние шума на поведение активной среды с периодическими граничными условиями, составленной из осцилляторов ФитцХью – Нагумо при автоколебательном и возбудимом характере элементов среды. Установить, имеются ли различия в реакции на шум в указанных двух случаях и можно ли их использовать для диагностики типа среды.
4. Исследовать влияние внешнего локального периодического воздействия на автоколебательную и возбудимую среду. Установить, имеются ли различия в эффектах, наблюдаемых в двух типах сред при внешнем периодическом воздействии. Выяснить возможна ли вынужденная синхронизация волн возбуждения и каковы ее особенности.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится краткий обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме

проводимого исследования, определяются цели и задачи исследования, формулируются положения и результаты, выносимые на защиту.

В первой главе диссертации исследуется динамика невозмущенных однородных активных сред с периодическими граничными условиями. Конструируются и анализируются две модели среды: автоколебательная среда, элементами которой являются генераторы Анищенко – Астахова, обладающие собственной сложной динамикой, и среда, составленная из осцилляторов ФитцХью – Нагумо, которые, в зависимости от значений параметров, могут находиться как в автоколебательном, так и в возбужденном режиме. В обеих моделях среды наблюдается мультистабильность волновых мод. В первой модели среды исследуется переход к хаотической динамике во времени, происходящий с ростом параметра нелинейности. Устанавливаются бифуркационные механизмы удвоения периода колебаний и перехода к хаосу для различных сосуществующих мод. Сопоставляется эволюция колебаний во времени и процесс усложнения формы волны. Предлагается метод идентификации волновых мод, основанный на определении изменения фазы колебаний на длине системы, позволяющий различать моды в условиях сложной формы волнового профиля. Во второй модели исследуется явление мультистабильности при автоколебательном и возбужденном режиме элементов среды. Устанавливаются различия в поведении волновых мод при вариации параметров для двух типов среды. Анализируется бифуркационный переход, связанный с изменением динамики элементов среды.

Во второй главе диссертации исследуется динамика двух моделей активной среды в присутствии шума. Описываются методы моделирования источников шума. На примере двух моделей среды исследуется воздействие шума на автоколебательную среду в режиме периодической динамики. Рассматриваются эффекты индуцированных шумом переключений между различными модами и разрушение режима фазовых волн. Устанавливается влияние шума на статистические характеристики колебаний. Для модели автоколебательной среды со сложной динамикой элементов исследуются стохастические бифуркации удвое-

ния периода колебаний во времени и влияние шума на переход к динамическому хаосу. На примере модели, составленной из осцилляторов ФитцХью – Нагумо, исследуется воздействие шума на динамику среды как в автоколебательном, так и в возбудимом режиме. Для возбудимой среды установлен эффект разрушения волн возбуждения и обнаружен когерентный резонанс. Исследовано влияние шума на среду в окрестности точки перехода от автоколебательной динамики элементов к возбудимой. Проводится сопоставление вызванных шумом эффектов в двух указанных режимах и анализируются возможности диагностики типа среды на основании отклика на шумовое воздействие.

Третья глава диссертации посвящена исследованию вынужденной синхронизации волновых мод в среде с периодическими граничными условиями, составленной из осцилляторов ФитцХью – Нагумо, в автоколебательном и возбудимом режимах. Был рассмотрен случай локального гармонического воздействия. Кроме того, исследовалась синхронизация модели среды, представляющей собой единственный осциллятор ФитцХью – Нагумо с дополнительной цепочкой запаздывающей обратной связи. Было установлено явление синхронизации как для автоколебательной, так и для возбудимой среды. Для трех волновых мод получены области значений частоты воздействия, в которых имеет место синхронизация. Показано различие в закономерностях вынужденной синхронизации в автоколебательной и возбудимой среде. Результаты, полученные для среды, качественно соответствуют результатам, полученным на модели с запаздывающей обратной связью. Исследована также синхронизация различных мод в модели автоколебательной среды со сложной динамикой элементов в квазигармоническом режиме.

В заключении сформулированы основные результаты диссертационной работы.

Материал диссертационной работы изложен на 147 страницах, содержит 49 иллюстраций и список цитируемой литературы из 149 наименований.

Научная новизна результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые предложена и исследована модель непрерывной автоколебательной среды, элементарной ячейкой которой является автогенератор, способный сам по себе демонстрировать разнообразную динамику, включая режим динамического хаоса, установлены бифуркационные механизмы удвоения периода волновых мод через возникновение и эволюцию квазипериодических колебаний.
2. Впервые установлено, что в непрерывной среде усложнение формы пространственного профиля волн с ростом параметра нелинейности, проявляющееся в возникновении всё более мелкомасштабных осцилляций, может проходить в условиях неизменного характера колебаний во времени.
3. Впервые в непрерывной среде установлены индуцированные шумом бифуркации связанности (обратные бифуркации удвоения).
4. Впервые установлен факт синхронизации волн возбуждения в детерминированной возбудимой среде с периодическими граничными условиями при локальном внешнем периодическом воздействии и показаны различия эффектов синхронизации в возбудимой среде по сравнению с автоколебательной средой.
5. Впервые проведено сравнение поведения волновых мод в возбудимой и автоколебательной средах с периодическими граничными условиями и рассмотрены возможности диагностирования типа активной среды с помощью анализа зависимостей характеристик колебаний от параметров, а также по отклику среды на внешние регулярное и стохастическое воздействия.

Достоверность научных выводов работы подтверждается соответствием результатов, полученных при использовании различных методов численного моделирования, включая применение различных схем интегрирования уравнений,

а также совпадением части промежуточных результатов проведенных исследований с данными, полученными другими авторами и представленными в научных публикациях.

На защиту выносятся следующие положения и результаты:

Положения:

1. В автоколебательной однородной среде, составленной из элементов со сложной динамикой, возможен сценарий развития пространственной турбулентности, не наблюдающийся в соответствующих распределённых моделях с конечным числом элементов и состоящий в постепенном усложнении мгновенного пространственного профиля и возникновении все более мелкокомасштабных пространственных осцилляций при неизменном характере колебаний во времени.
2. Имеются качественные различия в поведении волновых мод в возбудимой и автоколебательной средах с периодическими граничными условиями, состоящие в различной зависимости динамических характеристик режима от параметров системы, а также в различной реакции на шумовое воздействие.
3. Возможна вынужденная синхронизация волн возбуждения в детерминированной возбудимой среде с периодическими граничными условиями в некоторой конечной области изменения частоты воздействия, причем наблюдается различие эффектов вынужденной синхронизации в возбудимой и в автоколебательной средах, состоящее в различной зависимости ширины области синхронизации от длины волны: если в автоколебательной среде область синхронизации становится уже с ростом длины волны, то в возбудимой среде она возрастает.

Результаты:

1. Предложен способ, позволяющий идентифицировать различные волновые моды в распределённой системе в условиях сложных по форме простран-

ственных профилей (в том числе, в режиме слабого хаоса и в присутствии шума), в основе которого лежит расчет среднего фазового сдвига колебаний на длине системы.

2. Для модели непрерывной автоколебательной среды с периодическими граничными условиями подтверждён механизм удвоения периода колебаний для режимов фазовых волн, ранее установленный для пространственно неоднородных режимов в дискретных моделях распределённых систем и предполагающий возникновение квазипериодических колебаний и их эволюцию, приводящую к установлению колебаний удвоенного периода.
3. Показано, что воздействие случайной силы на непрерывную автоколебательную среду приводит к переключениям системы из режимов коротковолновых мод в режимы длинноволновых мод и, в конечном счете, к установлению «в среднем однородного» режима, что соответствует результатам, полученным для пространственно дискретных моделей.
4. Установленный эффект синхронизации колебаний детерминированной возбудимой среды с периодическими граничными условиями позволяет отнести данный тип систем к распределённым автогенераторам, несмотря на то, что элементы среды не являются автоколебательными.

Научная и практическая значимость результатов диссертации обусловлена тем, что они существенно расширяют современные представления нелинейной теории колебаний и статистической радиофизики о динамике активных сред и дополняют классическую концепцию автоколебаний. Научно-практическая значимость состоит в следующем:

1. Установлен сценарий развития хаоса и пространственной турбулентности в среде, составленной из автоколебательных элементов со сложной динамикой, демонстрирующих бифуркации удвоения периода во времени. Показан процесс усложнения пространственного профиля колебаний с ростом

управляющего параметра, который можно рассматривать как один из сценариев развития пространственной турбулентности.

2. Показана возможность управления режимом автоколебательной среды в условиях мультистабильности с помощью шумовых воздействий.
3. Установлен факт вынужденной синхронизации бегущих волн в детерминированной возбудимой среде с периодическими граничными условиями, позволяющий рассматривать такую среду как особый тип распределённой автоколебательной системы.
4. Установленные в работе качественные различия в поведении автоколебательной и возбудимой сред в режиме мультистабильности при вариации управляющих параметров, воздействии шума и периодического сигнала могут быть использованы при разработке методов диагностики типа среды на основании результатов натуральных экспериментов.

Полученные результаты могут быть применены для разработки методов диагностирования характера активной среды на основании экспериментальных данных и создания адекватных математических моделей реальных активных сред. Они также могут быть применены при разработке новых методов управления радиофизическими устройствами, основанными на использовании источников шума. Материалы диссертационного исследования частично используются в курсах лекций по теории нелинейных колебаний, синхронизации колебаний и флуктуациям в колебательных системах. Предполагается дальнейшее развитие указанных курсов с использованием полученных в диссертации результатов.

Апробация работы. Основные результаты научных исследований были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- Международная школа-семинар «Статистическая физика и информационные технологии» (StatInfo – 2009) (Саратов, 2009);

- Научная школа-конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых» (Саратов, 2009);
- Международная школа для студентов и молодых учёных по оптике, лазерной физике и биофизике «Saratov Fall Meeting» (SFM'10) (Саратов, 2010);
- Всероссийская научная конференция для молодых учёных «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика» (Саратов, 2011);
- Международная школа для студентов и молодых учёных по оптике, лазерной физике и биофизике «Saratov Fall Meeting» (SFM'11) (Саратов, 2011);
- Научная школа «Нелинейные волны – 2012» (Нижний Новгород, 2012);
- Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов – 2013» (Москва, 2013);
- Международная конференция «Динамика, бифуркации и странные аттракторы» (Нижний Новгород, 2013);
- Международная школа-конференция «Хаотические автоколебания и образование структур» (ХАОС – 2013) (Саратов, 2013);
- Научный семинар рабочей группы по стохастическим процессам, Институт физики Гумбольдтовского университета (Берлин, 2013);
- Научный семинар Eugene-Wigner-Colloquium (Берлин, 2013);
- Международная конференция «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems. Unraveling Complexity» (Саратов, 2014),

а также на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики.

Работа выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 1008).

Личный вклад. В данной работе подавляющая часть представленных результатов была получена лично автором в ходе численных экспериментов. Также автор принимал активное участие в постановке задач и интерпретации полученных экспериментальных данных.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 14 печатных изданиях [90–102] (5 статей в журналах, рекомендованных ВАК [91, 93, 96, 101, 102], 1 монография [95], 2 статьи в сборниках трудов конференции [90, 92] и 6 работ в сборниках тезисов конференций [94, 97–100, 103]).

Глава 1

Динамика невозмущенных активных сред

Автоколебательные среды являются актуальным объектом исследования в нелинейной динамике [2–10, 12–17]. Большое внимание в течении длительного времени привлекала к себе задача возникновения и развития турбулентности в автоколебательной среде. Одной из базовых моделей при решении данной задачи служит уравнение Гинзбурга – Ландау (1) [22–26]. Уравнение Гинзбурга – Ландау описывает поведение среды вблизи порога возникновения неустойчивости. Данная модель может быть получена в результате предельного перехода $N \rightarrow \infty$ в цепочке из N квазигармонических автоколебательных систем. При вариации параметров в (1) наблюдается возникновение абсолютной неустойчивости и появление колебательных и волновых режимов. С ростом степени взаимодействия элементов среды и влияния неизохронности колебаний в среде развиваются сложные динамические режимы и происходит переход к хаотическим колебаниям во времени и нерегулярному поведению в пространстве. Сложная динамика системы (1) является следствием взаимодействия большого числа квазигармонических автогенераторов. Можно предположить, что во многих случаях элемент среды сам характеризуется сложной динамикой. Подобные типы активных сред могут возникать в задачах биофизики при описании про-

цессов в клеточных тканях. Отдельные клетки, например нейроны, могут обладать собственной сложной динамикой. В том числе, демонстрировать различные бифуркации и переход к хаосу при вариации некоторых параметров, определяющих их автономное поведение. Однако в целом, поведение автоколебательных сред, составленных из элементов со сложной динамикой, изучено недостаточно. В основном задачи описания таких сред решались с использованием пространственно дискретных моделей в виде цепочек и решеток связанных отображений последования [38–40, 104–106] или взаимодействующих автогенераторов [27, 29, 36, 37, 107–110]. С помощью дискретных моделей был установлен и исследован ряд фундаментальных эффектов, типичных для автоколебательных сред. К ним можно отнести такие явления как мультистабильность, возникновение и разрушение фазовых волн, образование кластерных структур, пространственные бифуркации, переход к хаотической динамике и пространственной турбулентности, рост размерности хаотических множеств и формирование гиперхаоса, частичная и глобальная синхронизация элементов среды. В работах [27, 29] исследуется мультистабильность и переход к хаосу в модели среды с периодическими граничными условиями, представляющей собой кольцо из автогенераторов со сложным поведением. В качестве таких автогенераторов выбирается цепь Чуа [27] и осциллятор Рёсслера [29]. Обе системы демонстрируют фейгенбаумовский сценарий перехода к хаосу. В отмеченных работах показано, что для режимов бегущих волн при изменении управляющего параметра в кольце наблюдается удвоение периода колебаний во времени, затем рождение квазипериодических колебаний и переход к хаосу в результате их разрушения. В исследованных случаях рост периода колебаний во времени не приводил к изменениям пространственного периода. Добавление в систему шума вызывает переключения системы с коротковолновых режимов на более длинноволновые. Однако число элементов, составляющих кольцо, было сравнительно невелико, что не дает возможности распространить данные результаты на непрерывную среду без проведения соответствующих исследований.

Для изучения процессов в распределённых возбудимых средах, в том числе в нейронных волокнах, широко применяются модели активных сред, составленные из элементов типа осциллятора ФитцХью – Нагумо [12, 49, 72, 73]. Осциллятор ФитцХью – Нагумо может находиться не только в возбудимом режиме, но, при соответствующем выборе параметров, демонстрировать автоколебания. Таким образом, соответствующая модель среды может описываться как возбудимую среду, так и автоколебательную. Так как осциллятор ФитцХью – Нагумо является двумерной системой, то его собственная динамика не может быть хаотической. В отличие от уравнения Гинзбурга – Ландау, автоколебания отдельного осциллятора ФитцХью – Нагумо обычно носят релаксационный характер, поскольку в первом уравнении системы имеется малый параметр перед производной. В среде из релаксационных осцилляторов ФитцХью – Нагумо в режиме автогенерации при диффузионном характере взаимодействия элементов хаотическая динамика не реализуется. Однако данная модель среды позволяет исследовать переход от автоколебательного режима к возбудимому. Исследование такого перехода, а также сравнение характеристик бегущих волн ранее не проводилось и не отражено в научной литературе.

В первой главе диссертации исследуются две модели автоколебательной среды с периодическими граничными условиями. Описываются методы численного интегрирования и расчета характеристик, используемых для диагностики режима. Первая из исследуемых моделей воспроизводит среду, составленную из автогенераторов со сложной динамикой. В качестве элемента среды выбран генератор Анищенко – Астахова [111, 112]. Исследуются механизмы удвоения периода колебаний во времени и развитие хаоса для различных сосуществующих мод. Рассматривается взаимосвязь эволюции колебаний во времени и процесса усложнения формы пространственного профиля волны. Вторая модель представляет собой среду, составленную из осцилляторов ФитцХью – Нагумо. Исследуется эволюция различных волновых мод при вариации управляющих параметров вблизи перехода среды в возбудимый режим. Проводится сравнение характери-

стик бегущих волн в автоколебательном и волновом режимах. Представленные в первой главе диссертации результаты отражены в работах [91,93] (исследование первой модели) и [96] (исследование второй модели).

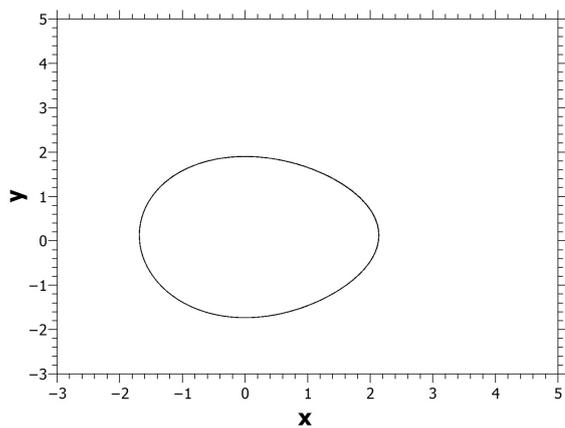
1.1 Модели и методы их исследования

1.1.1 Автоколебательная среда со сложной динамикой элементарной ячейки

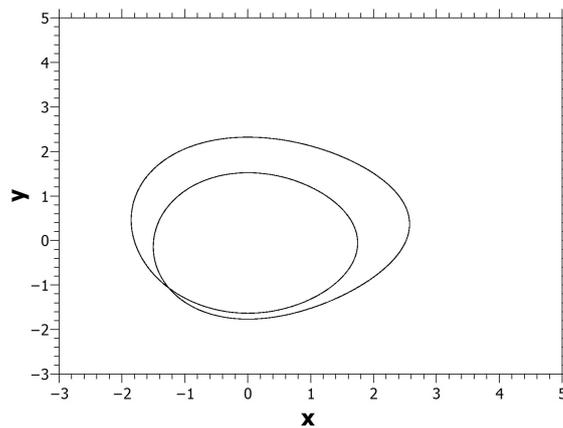
Для того, чтобы сконструировать модель автоколебательной среды со сложной динамикой, в качестве элементарной ячейки среды был взят генератор с инерционной нелинейностью Анищенко – Астахова (ГИН) [113], задаваемый уравнениями

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = mx + y - xz, \\ \frac{dy}{dt} = -x, \\ \frac{dz}{dt} = g(\Phi(x) - z), \\ \Phi(x) = \frac{x}{2}(x + |x|), \end{cases} \quad (1.1)$$

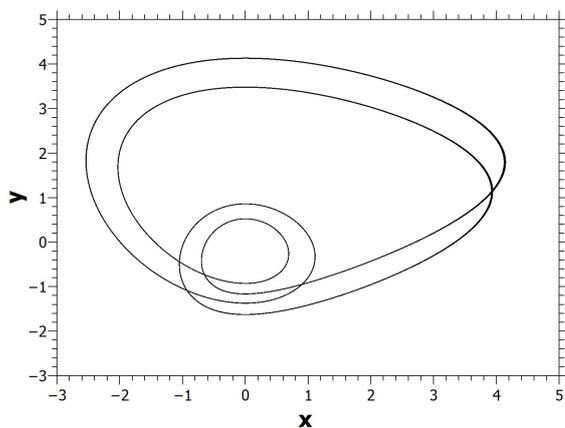
где m — параметр возбуждения, пропорциональный разности вносимой и рассеиваемой энергий, g — параметр инерционности генератора. В зависимости от значений управляющих параметров в ГИН возможны различные автоколебательные режимы от квазигармонических колебаний до развитого динамического хаоса. При фиксированном g и увеличении m переход к хаосу осуществляется по сценарию Фейгенбаума — через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода предельных циклов (рисунок 1.1) [111].



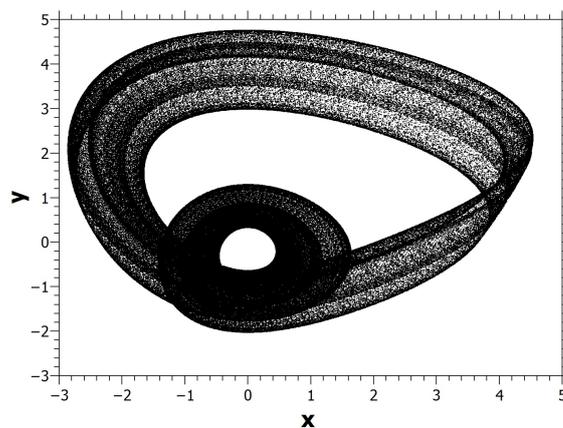
(a)



(b)



(c)



(d)

Рисунок 1.1: Проекция фазового пространства ГИН при увеличении параметра m (a — $m = 0.966$, b — $m = 0.992$, c — $m = 1.32$, d — $m = 1.4$).

Рассмотрим цепочку из N генераторов с инерционной нелинейностью, замкнутую в кольцо (рисунок 1.2):

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = mx_i + y_i - x_i z_i + \\ \quad + k(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i) - k(y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i), \\ \frac{dy_i}{dt} = -x_i, \\ \frac{dz_i}{dt} = g(\Phi(x_i) - z_i), \end{cases} \quad (1.2)$$

$$i = 1, 2, \dots, N,$$

с граничными условиями

$$x_{N+i} = x_i, \quad y_{N+i} = y_i, \quad z_{N+i} = z_i. \quad (1.3)$$

Параметр k характеризует взаимную резистивную связь между соседними генераторами.

Если число генераторов N , составляющих цепочку, достаточно велико, то можно ввести непрерывную пространственную координату $s = ih_s$ и перейти к непрерывной среде, описываемой уравнениями

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2(x - y)}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = g(\Phi(x) - z), \end{cases} \quad (1.4)$$

здесь $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$ — динамические переменные, являющиеся функциями пространственной координаты s и времени t , $\gamma = h_s^2 k = kL^2/N^2$ — коэффициент диффузии, $h_s = L/N$ — размер ячейки (шаг пространственного разбиения), L — длина системы. Граничные условия для среды (1.4) являются периодическими и имеют следующий вид:

$$\forall t \quad x(0, t) = x(L, t), \quad y(0, t) = y(L, t), \quad z(0, t) = z(L, t). \quad (1.5)$$

Система (1.4) упрощалась либо с помощью спектрального метода, либо с помощью метода конечных разностей, а затем интегрировалась методом Гюна.

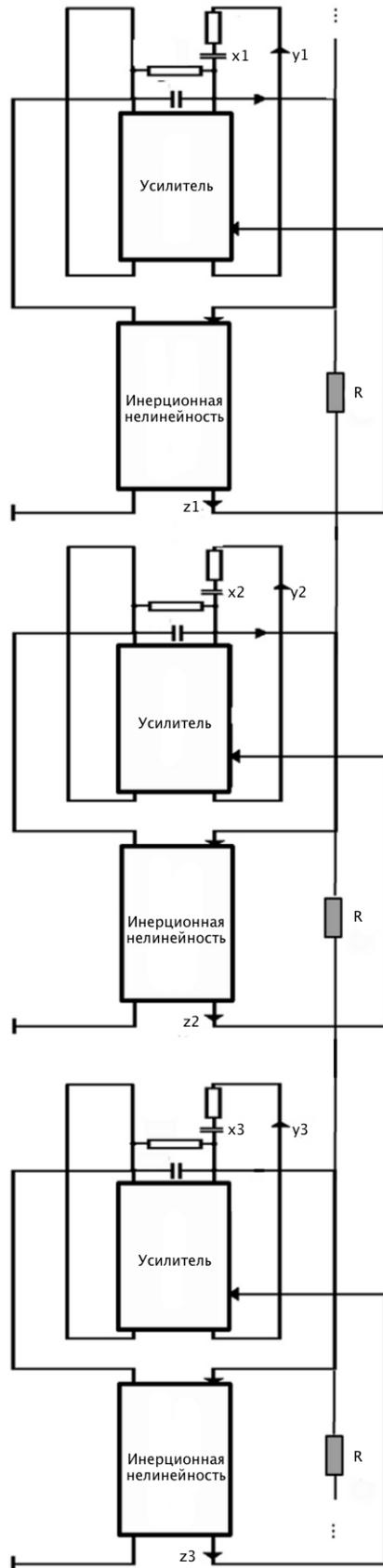


Рисунок 1.2: Схема цепочки ГИН с резистивной связью.

Более подробно это будет описано в п. 1.1.3. При исследовании динамики среды (1.4) использовались следующие методики и характеристики.

Построение мгновенных пространственных профилей. Для того чтобы можно было сравнивать пространственные структуры в различные моменты времени и диагностировать определенную повторяемость этих структур, соответствующую установившемуся режиму, в численных экспериментах использовались мгновенные пространственные профили. Мгновенный пространственный профиль строился как зависимость значений переменной x (или какой-либо другой переменной) от пространственной координаты s в фиксированный момент времени t_0 , который выбирался исходя из определенных условий, накладываемых на точку среды $s = 0$. Таким образом возможно проследить за эволюцией одного конкретного профиля. Повторяемость профилей в режиме периодических колебаний является свидетельством того, что режим является установившимся.

Построение пространственного распределения точек в сечении. Удобным для исследования пространственно-временного поведения среды оказалось построение пространственного распределения точек в заданном сечении. То есть в каждой точке пространства рассматривалась траектория, задаваемая переменными $x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$, и строилось сечение этой траектории некоторой секущей поверхностью (одной и той же для всех точек пространства). В результате для каждой точки пространства получается набор точек сечения. Обычно выбиралось сечение $y(s) = 0$. На графиках для каждого значения s откладывается множество значений $x_i(s, t)$, $i = 1, 2, 3, \dots$, соответствующих точкам в сечении. Такие графики позволяют сравнивать характер колебаний в разных точках среды и выделять различные пространственно-временные структуры.

Построение распределения сдвига фазы. Одной из основных характеристик режима колебаний в среде, служащей важным инструментом исследования, является мгновенное распределение сдвига фазы колебаний вдоль длины системы. Зависимость сдвига фазы от пространственной координаты рассчитывалась

по формуле:

$$\varphi(s) = \Phi(0) - \Phi(s), \quad \Phi(s) = -\operatorname{arctg} \frac{y(s, t_0)}{x(s, t_0)} \pm \pi i, \quad (1.6)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, \quad t_0 = \text{const},$$

где значение i выбиралось исходя из условия непрерывности функции $\Phi(s)$. С помощью этой характеристики из условия

$$n = \frac{\varphi(L)}{2\pi} \quad (1.7)$$

можно определить число n в данном режиме. В случае квазигармонических колебаний, когда пространственный профиль имеет форму, близкую к синусоидальной, n показывает, сколько раз длина волны укладывается вдоль длины системы, и может быть легко определено по виду мгновенного профиля. Однако с ростом параметра возбуждения m профиль любого из сосуществующих режимов сильно усложняется, и определить число n по виду профиля становится невозможным. Выражение (1.7) позволяет определять n в любом режиме. Будем называть число n , задаваемое выражением (1.7) номером моды. С помощью числа n можно различать и отслеживать различные моды при любом характере колебаний во времени и для любого вида пространственного профиля. Мода с данным номером соответствует определенное волновое число:

$$k = \frac{\varphi(L)}{L} = \frac{2\pi n}{L} \quad (1.8)$$

Расчет максимального ляпуновского показателя исследуемой системы. Чтобы исследовать экспоненциальную неустойчивость решений системы (1.4), рассчитывались максимальные ляпуновские показатели при различных значениях управляющих параметров. Для этого для (1.4) составлялась линеаризованная система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = mu + v - uz - xw + \gamma \frac{\partial^2(u-v)}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -u, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = g(2xH(x)u - w), \end{cases} \quad (1.9)$$

где $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$, $w = w(s, t)$ — компоненты вектора возмущения $\mathbf{d}(s, t)$, вычисляемые в точках $x(s, t)$, $y(s, t)$, $z(s, t)$; $H(x)$ — функция Хевисайда. Решения системы (1.9) находились аналогично решениям (1.4).

Далее производился расчет максимального ляпуновского показателя по методу Бенеттина [114], в котором величина возмущения определялась с помощью квадратичной нормы:

$$\begin{aligned} \eta(t) = \|\mathbf{d}(s, t)\| &= \left(\int_0^L [u^2(s, t) + v^2(s, t) + w^2(s, t)] ds \right)^{1/2} \approx \\ &\approx \left(\sum_{i=0}^{N-1} [u^2(i\Delta s, t) + v^2(i\Delta s, t) + w^2(i\Delta s, t)] \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\Delta s = L/N$ - шаг пространственной дискретизации.

Задание начальных условий и методика отслеживание режима. При проведении численных экспериментов предварительные начальные условия задавались следующим образом:

$$\begin{aligned} x(s, 0) &= c_1 + c_2 \sin(2\pi i s / L), \\ y(s, 0) &= c_3 + c_4 \cos(2\pi i s / L), \\ z(s, 0) &= 0.1, \\ i &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Константы c_k выбирались исходя из значений амплитуды колебаний в конечном ГИН, выбор значения i позволял попасть на желаемый режим из нескольких сосуществующих устойчивых мод.

Чтобы проследить за эволюцией конкретной пространственной структуры при увеличении параметра m , применялась следующая методика. Производилось интегрирование с выбранных начальных условий (1.11) и запоминалось конечное состояние системы. Затем параметр менялся на малую величину, и производилось интегрирование системы, причем конечный результат предыдущего интегрирования брался в качестве новых начальных условий при интегрировании с новым параметром, и т.д.

1.1.2 Активная среда с переходом от автоколебательного характера элементов к возбудимому

В качестве элементарной ячейки активной среды был выбран осциллятор ФитцХью – Нагумо, представляющий собой одну из простейших моделей нейрона [62, 63]:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - y - \alpha x^3, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x - y + \beta, \end{cases} \quad (1.12)$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$ – безразмерные вещественные динамические переменные, t – безразмерное время, α , β , γ , ε – управляющие параметры системы. Зафиксируем параметры $\alpha = 0.2$, $\gamma = 3$, $\varepsilon = 0.01$ и будем менять значение β . При $\beta \in [0; \beta_{cr})$ осциллятор находится в автоколебательном режиме, а при $\beta \in (\beta_{cr}; 5]$ – в возбудимом. Значение $\beta_{cr} = 2.988 \pm 0.001$ является бифуркационным и соответствует субкритической бифуркации Андронова – Хопфа (рисунок 1.3).

Модель среды конструируется следующим образом. Объединим N осцилляторов (1.12) в одномерное кольцо:

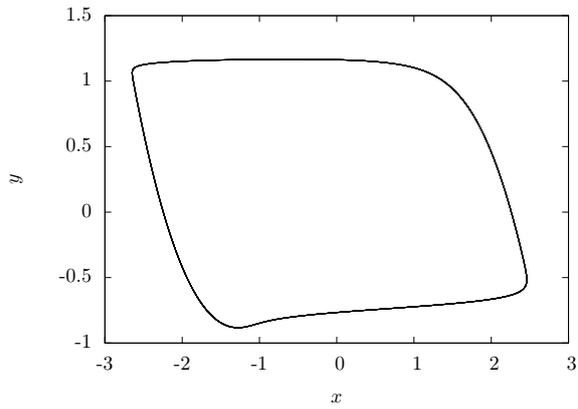
$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx_i}{dt} = x_i - y_i - \alpha x_i^3 + k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \\ \frac{dy_i}{dt} = \gamma x_i - y_i + \beta, \end{cases} \quad (1.13)$$

где $i = 1, 2, \dots, N$; k – коэффициент связи.

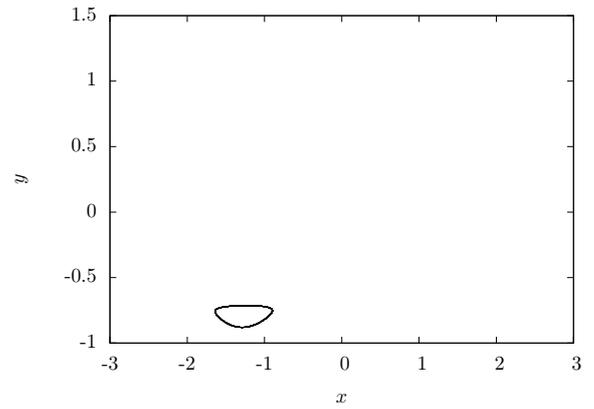
Затем используем предельный переход $N \rightarrow \infty$, считая размер каждого элемента h_s в пределе бесконечно малым. Получаем следующие уравнения активной среды:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} = x - y - \alpha x^3 + d \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma x - y + \beta. \end{cases} \quad (1.14)$$

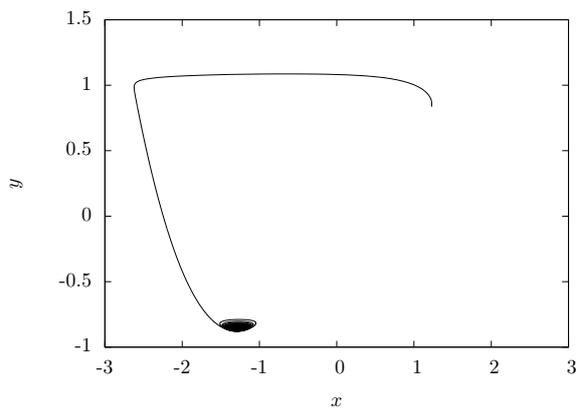
Здесь $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, где s – безразмерная пространственная координата, d – коэффициент диффузии (характеризует взаимодействие соседних



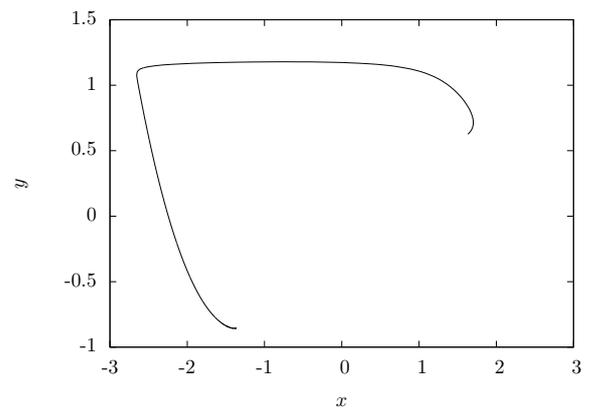
(a)



(b)



(c)



(d)

Рисунок 1.3: Проекция фазового пространства характерных режимов осциллятора ФитцХью – Нагумо при увеличении параметра β (a — $\beta = 2.95$, b — $\beta = 2.988$, c — $\beta = 2.995$, d — $\beta = 3.3$).

элементов). Граничные условия имеют вид:

$$x(0, t) = x(L, t), \quad y(0, t) = y(L, t), \quad (1.15)$$

где L — длина системы (пространственный период).

Модель (1.14) рассчитывалась методом конечных разностей, то есть, по сути, интегрировалась система (1.13), в которой для удобства была произведена замена $k = \frac{d}{h_s^2}$, где $h_s = \frac{L}{N}$ — пространственный шаг системы:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx_i}{dt} = x_i - y_i - \alpha x_i^3 + d \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h_s^2}, \\ \frac{dy_i}{dt} = \gamma x_i - y_i + \beta, \end{cases} \quad (1.16)$$

Уравнения (1.14) исследовались при фиксированных параметрах $\alpha = 0.2$, $\gamma = 3$, $\varepsilon = 0.01$, $d = 0.1$, $L = 100$, параметр β выбирался в диапазоне $[0; 5]$ в соответствии с требуемым режимом. Значение $\beta = \beta_{cr} \approx 3$, как и в одиночном осцилляторе (1.12), является бифуркационным и соответствует переходу элементов среды из автоколебательного режима в возбудимый.

1.1.3 Методы численного интегрирования и достоверность численных экспериментов

Один из методов численного интегрирования системы (1.4), применявшийся в проведённых исследованиях, состоял в следующем. К исходной системе применялось преобразование Фурье:

$$\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial t} = mX + Y - F(xz) - \gamma\omega^2(X - Y), \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = -X, \\ \frac{\partial Z}{\partial t} = g(F(\Phi(x)) - Z), \end{cases} \quad (1.17)$$

где F — оператор прямого преобразования Фурье; $X = F(x)$, $Y = F(y)$, $Z = F(z)$. Полученные уравнения решались с помощью метода Эйлера с пересчетом

(метода Гюна):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{X}_{i+1} = X_i + h_t f^X(X_i, Y_i, Z_i), \\ \tilde{Y}_{i+1} = Y_i + h_t f^Y(X_i, Y_i, Z_i), \\ \tilde{Z}_{i+1} = Z_i + h_t f^Z(X_i, Y_i, Z_i), \\ X_{i+1} = X_i + \frac{h_t}{2} (f^X(X_i, Y_i, Z_i) + f^X(\tilde{X}_{i+1}, \tilde{Y}_{i+1}, \tilde{Z}_{i+1})), \\ Y_{i+1} = Y_i + \frac{h_t}{2} (f^Y(X_i, Y_i, Z_i) + f^Y(\tilde{X}_{i+1}, \tilde{Y}_{i+1}, \tilde{Z}_{i+1})), \\ Z_{i+1} = Z_i + \frac{h_t}{2} (f^Z(X_i, Y_i, Z_i) + f^Z(\tilde{X}_{i+1}, \tilde{Y}_{i+1}, \tilde{Z}_{i+1})), \end{array} \right. \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} f^X(X, Y, Z) &= mX + Y - F(xz) - \gamma\omega^2(X - Y), \\ f^Y(X, Y, Z) &= -X, \\ f^Z(X, Y, Z) &= g(F(\Phi(x)) - Z). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Затем с помощью обратного преобразования Фурье вычислялось решение исходной системы уравнений (1.4):

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= F^{-1}(X_{i+1}), \\ y_{i+1} &= F^{-1}(Y_{i+1}), \\ z_{i+1} &= F^{-1}(Z_{i+1}), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где F^{-1} – оператор обратного преобразования Фурье.

При проведении всех численных экспериментов фиксировалась длина системы $L = 100$ безразмерных единиц, коэффициент диффузии $\gamma = 0.1$ и параметр $g = 0.2$. Параметр m изменялся от 0.9 до 1.7.

Необходимо также отметить, что в численном эксперименте использовался алгоритм быстрого преобразования Фурье. Число компонент разложения $N = 256$ для него было выбрано из таких соображений, чтобы дальнейшее их увеличение не оказывало существенного влияния на результаты расчетов. Шаг дискретизации по времени h_t был выбран равным 0.001.

По результатам численного интегрирования строились проекции фазовых траекторий в различных точках пространства, сечения фазового пространства

различными плоскостями, мгновенные пространственные профили, пространственно временные диаграммы и распределения сдвига фазы колебаний вдоль длины системы. Для диагностики хаоса проводились расчеты максимального ляпуновского показателя.

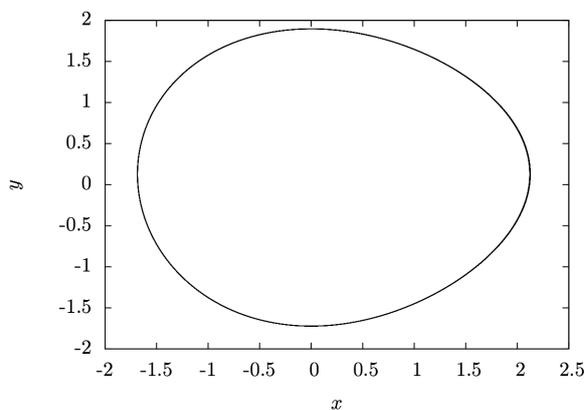
Для подтверждения достоверности проводимых численных экспериментов, а также для ускорения проведения расчетов на ЭВМ, среда (1.4) также интегрировалась с помощью метода конечных разностей. То есть, по сути, рассматривалась система (1.2), в которой для удобства была произведена замена $k = \frac{\gamma}{h_s^2}$, где $h_s = \frac{L}{N}$ – пространственный шаг системы. Таким образом, уравнения (1.2) примут вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_i}{dt} = mx_i + y_i - x_i z_i + \\ \quad + \gamma \frac{(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) - (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})}{h_s^2}, \\ \frac{dy_i}{dt} = -x_i, \\ \frac{dz_i}{dt} = g(\Phi(x_i) - z_i), \end{array} \right. \quad (1.21)$$

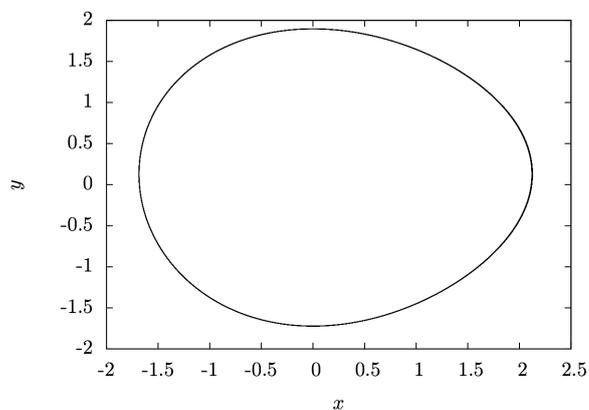
где $i = 1, 2, \dots, N$.

Затем система (1.21) интегрировалась методом Эйлера второго порядка (методом Гюна) аналогично (1.18). Для сравнения результатов расчётов спектральным методом и методом конечных разностей строились проекции множества фазовых траекторий на плоскость $y - x$, получаемые в различных точках среды. Эти проекции представлены на рисунке 1.4.

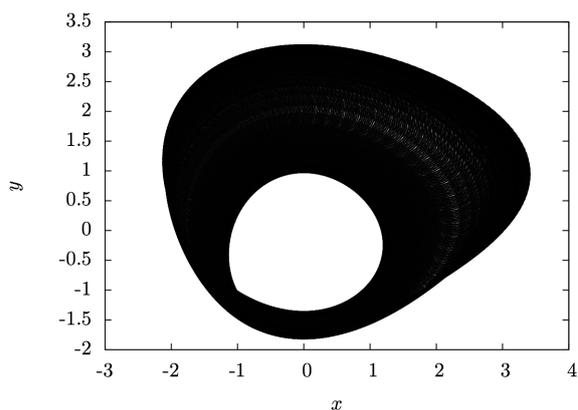
Как видно из рисунка 1.4, результаты, полученные двумя методами, идентичны, что позволяет говорить о достоверности результатов численных экспериментов в целом. Тестовые вычисления показали, что в случае достаточно сложного вида пространственного профиля колебаний использование метода конечных разностей позволяет существенно ускорить проведение численных экспериментов на ЭВМ.



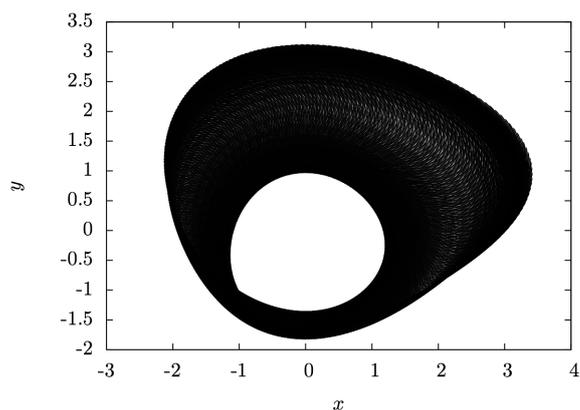
(a)



(b)



(c)



(d)

Рисунок 1.4: Проекция множества фазовых траекторий на плоскость $y - x$ для всех элементов среды (1.4), полученные различными методами расчетов для различных значений параметра m . Слева — расчет спектральным методом, справа — методом конечных разностей, сверху — $m = 0.96$, снизу — $m = 1.12$.

В данной работе часть расчетов для системы (1.4) была проведена с помощью спектрального метода, другая часть — с помощью метода конечных разностей. Для системы (1.14) все расчёты проводились методом конечных разностей.

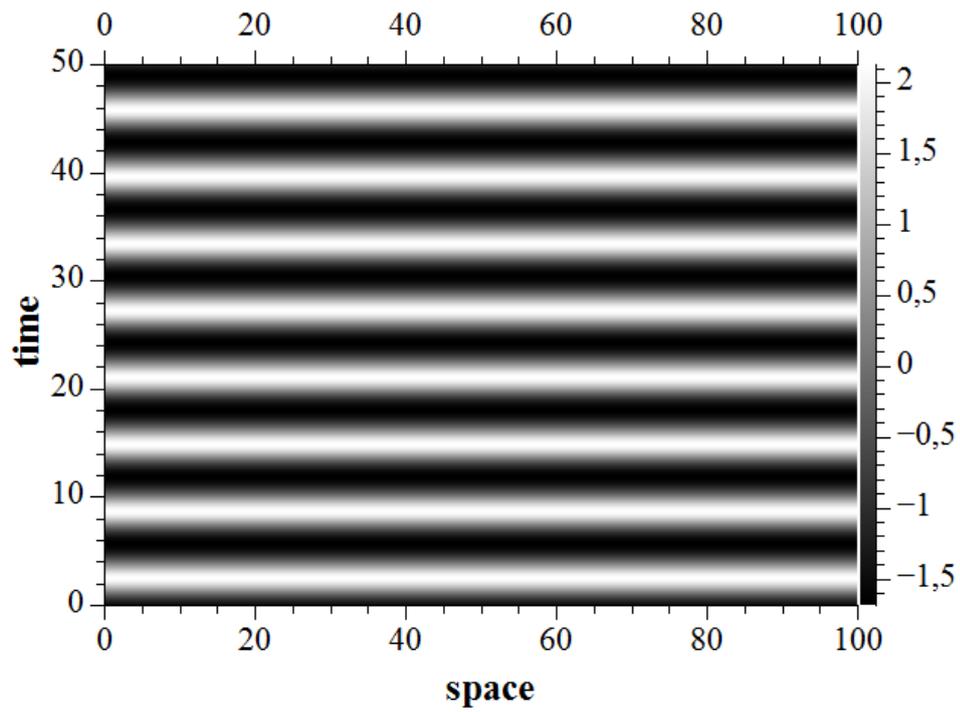
1.2 Автоколебательная среда со сложной динамикой элементарной ячейки

Рассмотрим сначала динамику невозмущенной автоколебательной среды (1.4), т.е. среды без какого бы то ни было внешнего воздействия. Проследим за эволюцией периодических во времени и пространстве колебаний среды с ростом управляющего параметра и переходом среды к хаотическому режиму, что является важным в контексте изучения сценариев развития пространственной турбулентности.

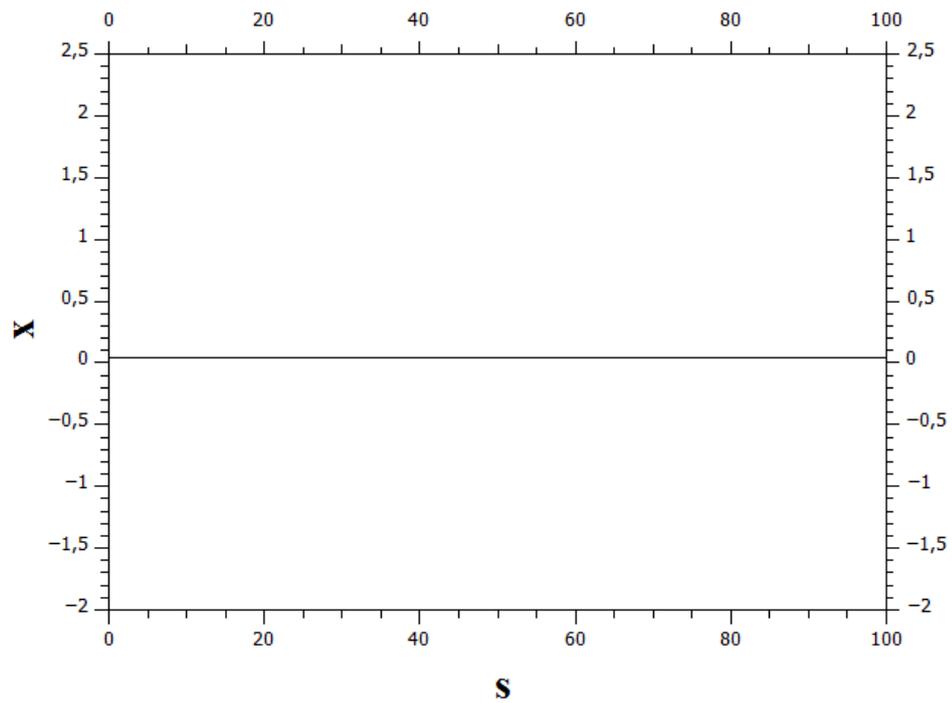
1.2.1 Среда в режиме квазигармонических колебаний. Явление мультистабильности

При $m \leq 0.966$ каждый элемент среды демонстрирует квазигармонические колебания во времени периода T_0 , которым в проекции $x(s) - y(s)$ для любой точки пространства соответствует одна и та же замкнутая кривая. Выбором начальных условий достигалось установление в системе одного из существующих режимов. При $\gamma = 0.1$ в системе наблюдались следующие устойчивые моды: пространственно однородный режим ($n = 0$) (рисунок 1.5) и режимы бегущих волн $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ (рисунок 1.6). Знак перед n показывает направление движения фронта волны (слева направо или наоборот), его значение определялось по формуле (1.7). Поведение мод, отличающихся направлением движения, при изменении параметра m совершенно аналогично, так что в дальнейшем будем рассматривать бегущие волны только с $n > 0$.

Пространственно однородный режим $n = 0$ соответствует колебаниям всех точек среды в одной фазе: $\varphi(s) = 0$. В силу однородности самой среды ($m = const, g = const, \gamma = const$) колебания во всех её точках в этом случае совершенно одинаковы. Пространственно неоднородные моды $|n| = 1, 2, 3$ в квазигармоническом режиме колебаний во времени представляют собой бегу-

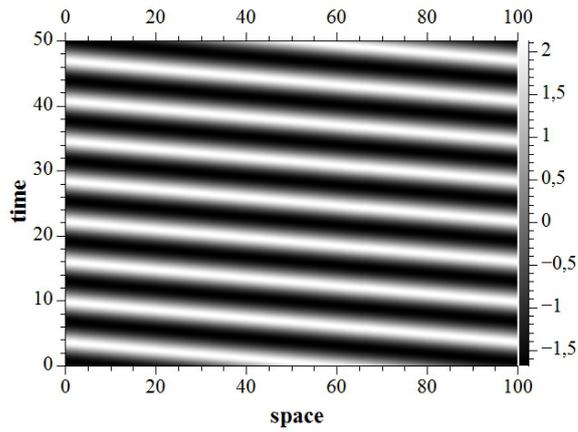


(a)

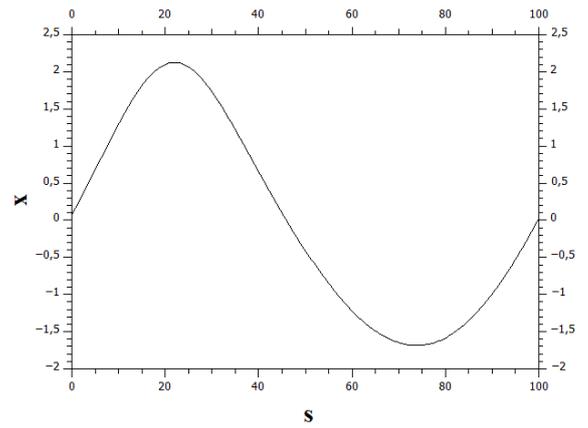


(b)

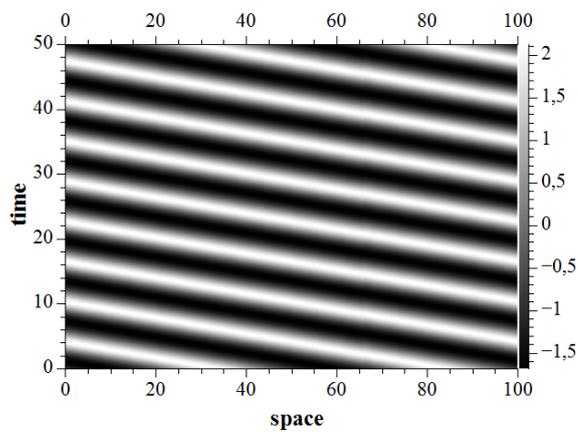
Рисунок 1.5: Пространственно-временная диаграмма (a) и мгновенный пространственный профиль однородной моды (b) в квазигармоническом режиме при $m = 0.96$. Здесь и далее оттенками серого на пространственно-временных диаграммах обозначены разные значения переменной x .



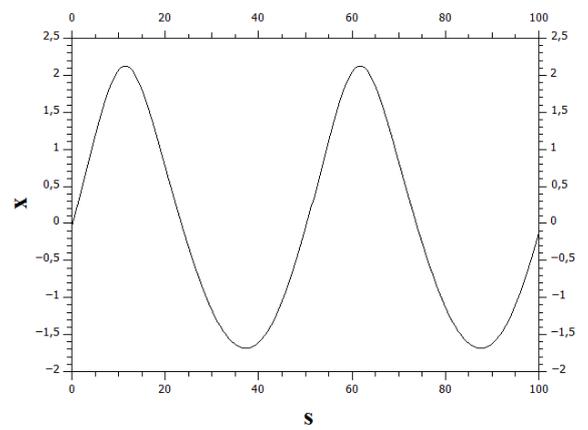
(a)



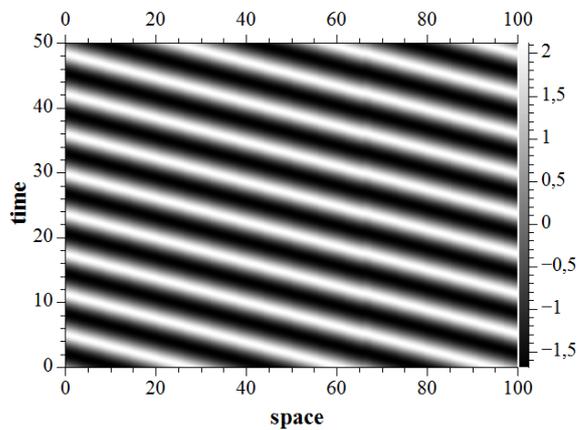
(b)



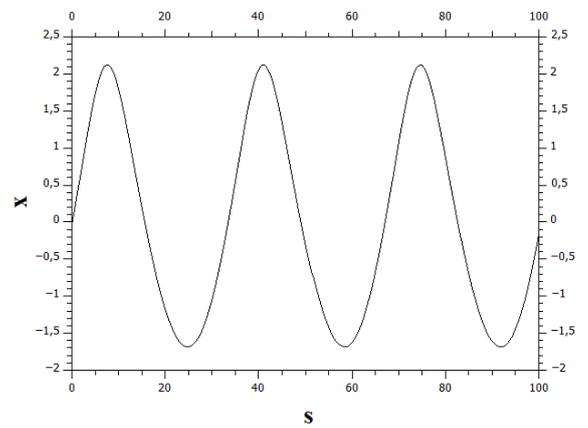
(c)



(d)



(e)



(f)

Рисунок 1.6: Пространственно-временные диаграммы (а, с, е) и мгновенные пространственные профили (b, d, f) неоднородных мод ($n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ сверху вниз) в квазигармоническом режиме при $m = 0.96$. Профили соответствуют условию $x(0) = 0$, $y(0) > 0$.

щие волны с квазигармоническим пространственным профилем (рисунок 1.6) и различной длиной волны $\lambda = L/n$. Набег фазы линейно нарастает вдоль среды (рисунок 1.7), чему соответствует линейный вид волнового фронта (рисунок 1.6а,с,е). Для моды $n = 1$ в квазигармоническом режиме на длине системы укладывается одна волна («одноволновая» мода). Для $n = 2$ на длине системы укладывается две длины волны («двухволновая» мода) и т.д.

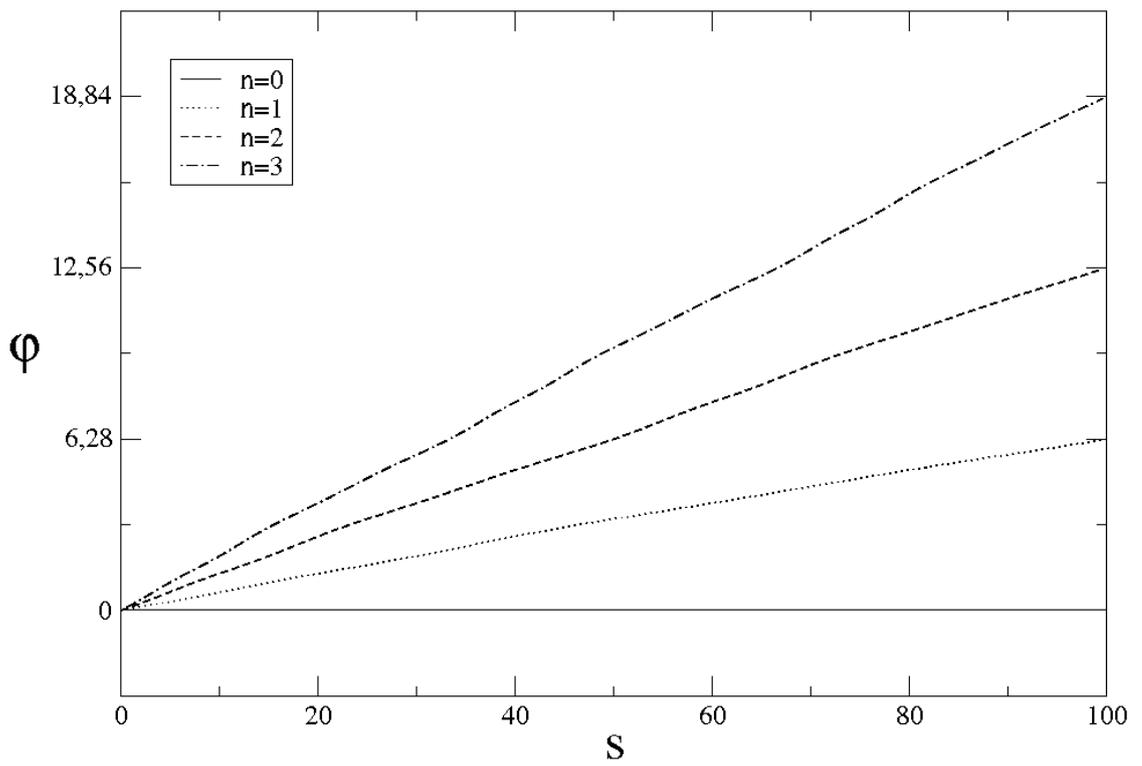


Рисунок 1.7: Распределения сдвига фазы $\varphi(s)$ вдоль длины системы мод $n = 1, 2, 3$ при $m = 0.96$.

1.2.2 Эволюция мод при изменении управляющего параметра

В генераторе Анищенко – Астахова при $g = 0.2$ значение параметра m , соответствующее первой бифуркации удвоения есть $m_1 \approx 0.966$. При том же значении параметра происходит удвоение периода колебаний во времени для однородного решения ($n = 0$) системы (1.4). По всем наблюдаемым характеристикам удвоение периода данной моды аналогично бифуркации удвоения предельного цикла в ГИН. Для однородного режима колебания в любой точке среды совершенно одинаковы, и, строя xy -проекции в любой точке среды, можно видеть, как замкнутая кривая при $m > m_1$ начинает проделывать два витка вместо одного. Расстояние между витками плавно увеличивается с удалением от бифуркационного значения значения m_1 , и наоборот, витки сливаются при приближении к точке бифуркации. Так как удвоение периода для однородной моды происходит «обычным образом», не станем детально его рассматривать и приводить соответствующие иллюстрации. Отметим только, что для однородной моды с ростом m наблюдается каскад удвоений периода. По-видимому, он является бесконечным. В численных экспериментах удавалось наблюдать четыре первые бифуркации. Бифуркационные значения параметра m в пределах точности расчетов совпадают с соответствующими бифуркационными значениями для конечномерного генератора. Для наблюдения дальнейших бифуркаций требуется уменьшить шаг по времени и по параметру. При переходе через критическое значение $m_{кр} \approx 1.375$ возникает хаотическая во времени динамика, а пространственная однородность колебаний при этом разрушается. Невозможность синфазных (в нашем случае — пространственно однородных) хаотических колебаний в системах с бесконечной размерностью отмечалась, например, в [109].

Удвоение периода колебаний для пространственно неоднородных мод происходит по иному сценарию. Для каждой из них существует своя определенная область значений параметра m (между первой и второй бифуркациями удвоения периода), в которой колебания во времени являются квазипериодическими,

а мгновенные пространственные профили, соответствующие одному и тому же состоянию в точке $s = 0$, в разные моменты времени оказываются неодинаковыми (рисунок 1.8).

Чтобы более детально исследовать механизм удвоения периода одноволновой моды, были построены распределения точек в сечении. Полученные для нескольких значений параметра m распределения $x_i(s)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) приведены на рисунке 1.9. Из представленных графиков видно, что при $m = 0.966$ бифуркация еще не произошла и имеют место периодические колебания с исходным периодом T_0 . Для любой точки среды траектории пересекают секущую плоскость в двух точках, что соответствует двум направлениям пересечения. Причем эти точки одинаковы для любого значения s , так как сами колебания отличаются только фазовым сдвигом. Поэтому на графике, представленном на рисунке 1.9а, значения $x_i(s)$ ложатся на две прямые горизонтальные линии. Далее происходит бифуркация и возникают квазипериодические колебания. При $m = 0.968$ на графике можно видеть две строго горизонтальные полосы постоянной ширины (рисунок 1.9b), при $m = 0.984$ в некоторых точках пространства сечение состоит из двух четких линий, а в некоторых размыто (рисунок 1.9c). Причина этого — недостаточное время построения сечения в режиме медленной модуляции колебаний. При дальнейшем росте параметра m устанавливаются колебания удвоенного периода $2T_0$ (рисунок 1.9d). Однако колебания в различных точках уже не будут одинаковы (с точностью до сдвига фаз). На рисунке 1.9d можно видеть, что точки в сечении зависят от координаты s . Можно также отметить точку среды, где сечение состоит не из четырех, а только из двух точек, то есть визуальное колебаниям соответствует цикл периода T_0 .

Режим медленной модуляции проиллюстрирован на рисунке 1.10. На представленных на рисунке 1.10а,b графиках можно видеть, как меняется во времени распределение точек в сечении, построенное для ограниченного интервала наблюдения. Первые, начиная с некоторого момента t_0 , 500 точек в сечении (для каждого s) представлены на рисунке 1.10а, а последующие 500 точек —

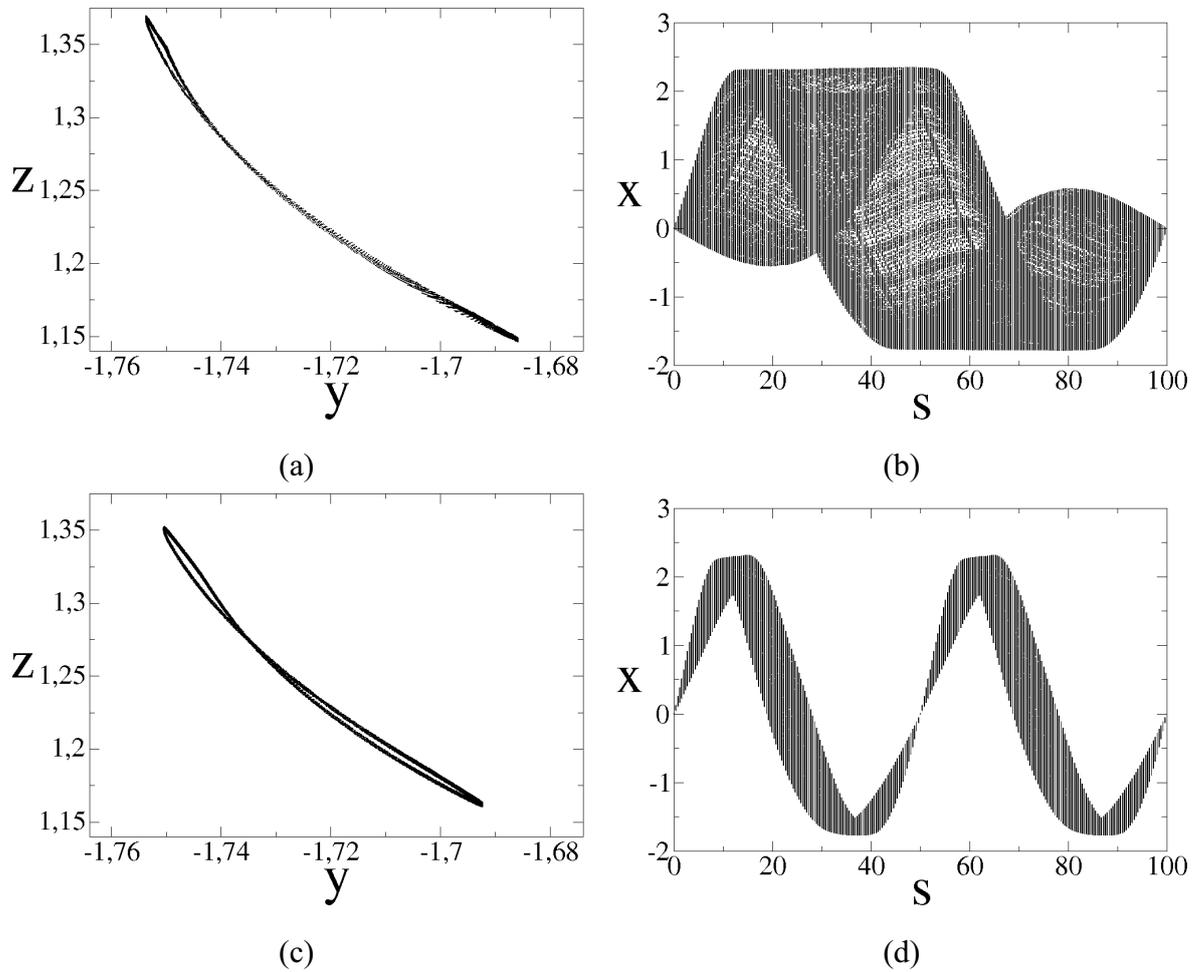


Рисунок 1.8: Переход к колебаниям удвоенного временного периода. Слева направо: фрагменты сечений фазового пространства плоскостью $x = 0$ и пространственные профили режимов $n = 1$ (a, b) и $n = 2$ (c, d) при $m = 0.972$.

Профили соответствуют условию $x(0) = 0$, $y(0) > 0$.

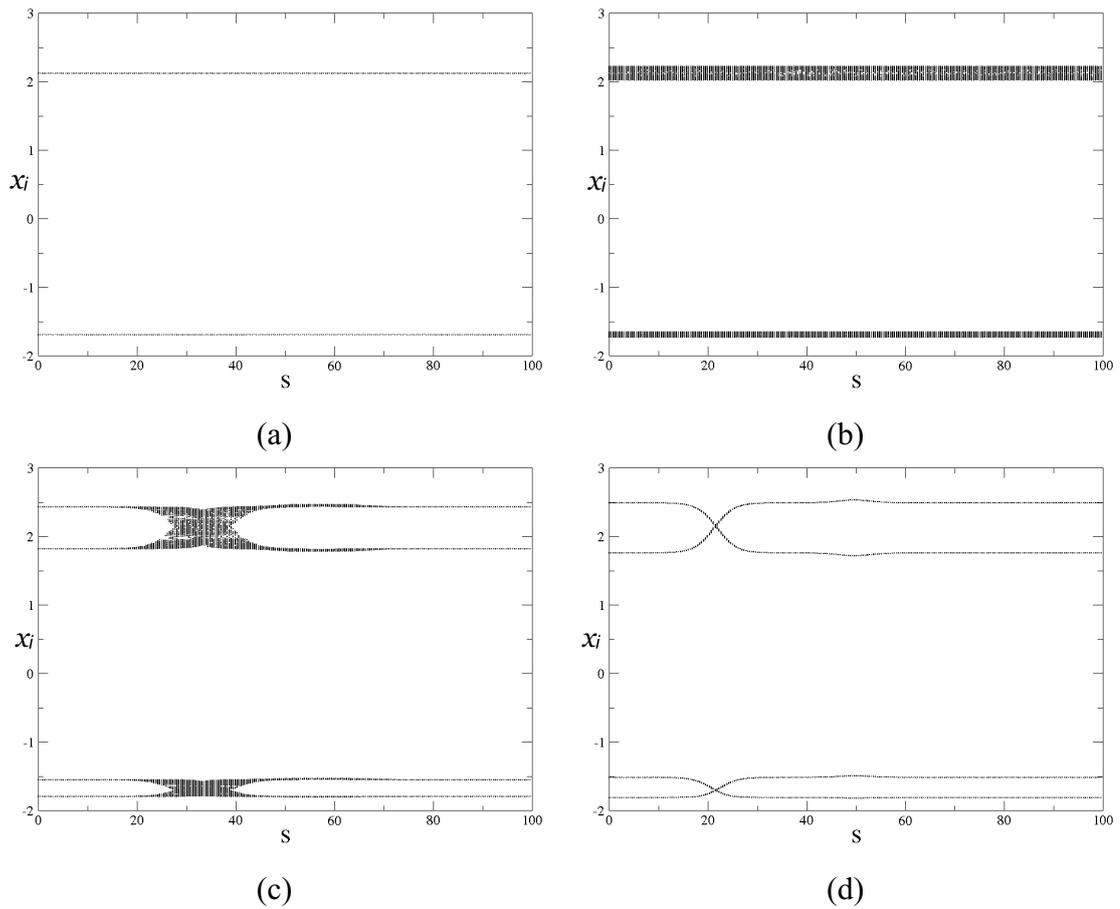


Рисунок 1.9: Распределения $x_i(s)$ для одноволновой моды при различных значениях параметра m : а — $m = 0.966$; б — $m = 0.968$; в — $m = 0.984$; д — $m = 0.992$.

на рисунке 1.10b. Можно видеть смещение наблюдаемой на конечном времени структуры. С ростом параметра m такое смещение становится все более медленным. Указанное поведение точек сечения соответствует медленной модуляции колебаний во времени. О характере огибающей колебаний можно судить по графикам, приведенным на рисунках 1.10c и 1.10d. С ростом параметра m период модуляции увеличивается, стремясь к бесконечности при некотором значении параметра, соответствующем установлению периодических колебаний удвоенного периода.

Неоднородность режима колебаний удвоенного периода в пространстве проиллюстрирована на рисунке 1.11 видом фазового портрета в различных точках среды. Таким образом, после бифуркации удвоения периода в некоторых точках пространства можно наблюдать цикл периода T_0 . Однако следует отметить, что режим колебаний в различных точках среды со взаимной связью между элементами должен быть топологически эквивалентен. Соответственно, существование в одних точках пространства колебаний удвоенного периода, а в других — исходного периода, скорее всего, только визуальным эффектом: расстояние между витками цикла оказывается меньше погрешности построения сечения.

Полностью аналогичный сценарий, но при некотором малом смещении по параметру m , имеет место и для двух других имеющихся устойчивых пространственно неоднородных мод ($n = 2$ и $n = 3$). Вместо «обычной» бифуркации удвоения периода для пространственно-неоднородных мод удвоение периода колебаний во времени происходит сложным эволюционным путем, начинающимся с бифуркации рождения квазипериодических колебаний. Результаты проведенных вычислений говорят о том, что для разных мод бифуркационное значение параметра m_1 , при котором возникают квазипериодические колебания, оказывается неодинаковым. Они несколько возрастают с увеличением номера моды (рисунок 1.12).

Можно отметить, что рождение квазипериодических колебаний и переход к колебаниям удвоенного периода через резонанс на торе наблюдается для несин-

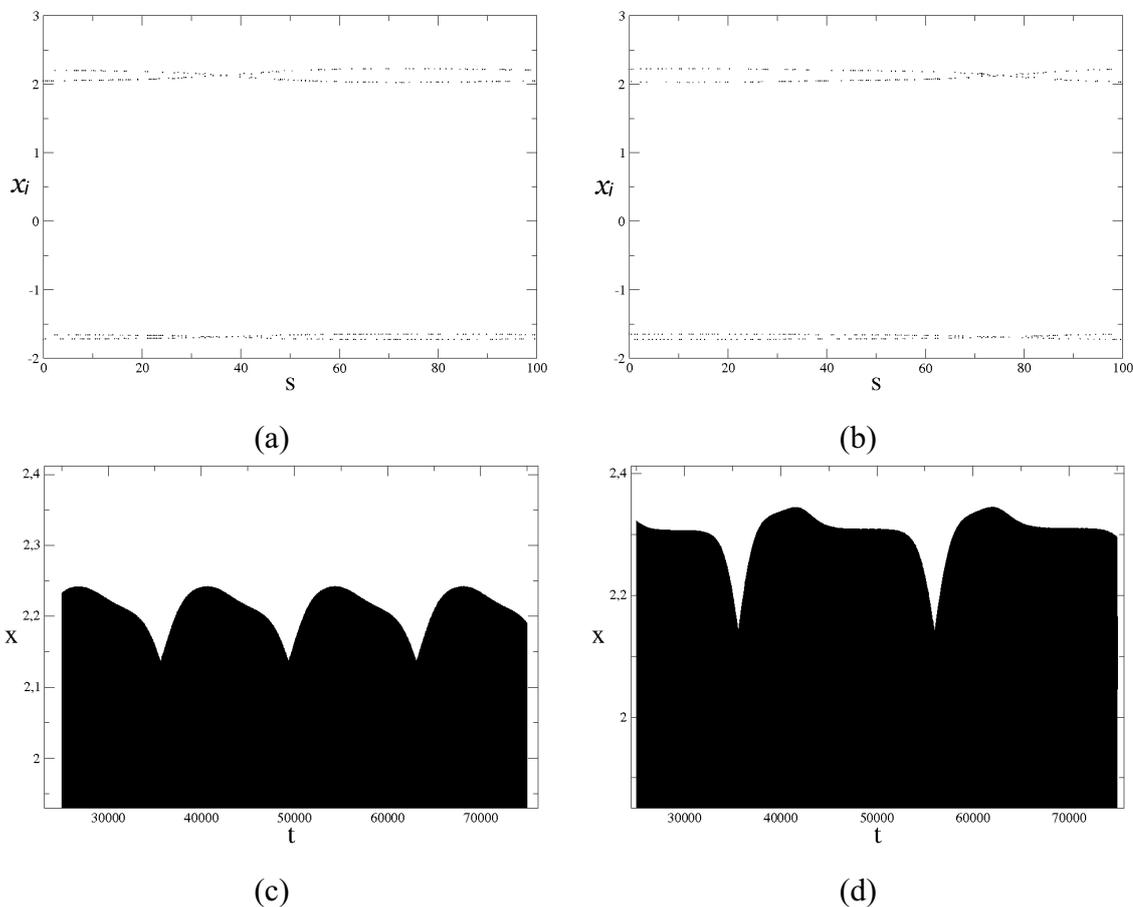
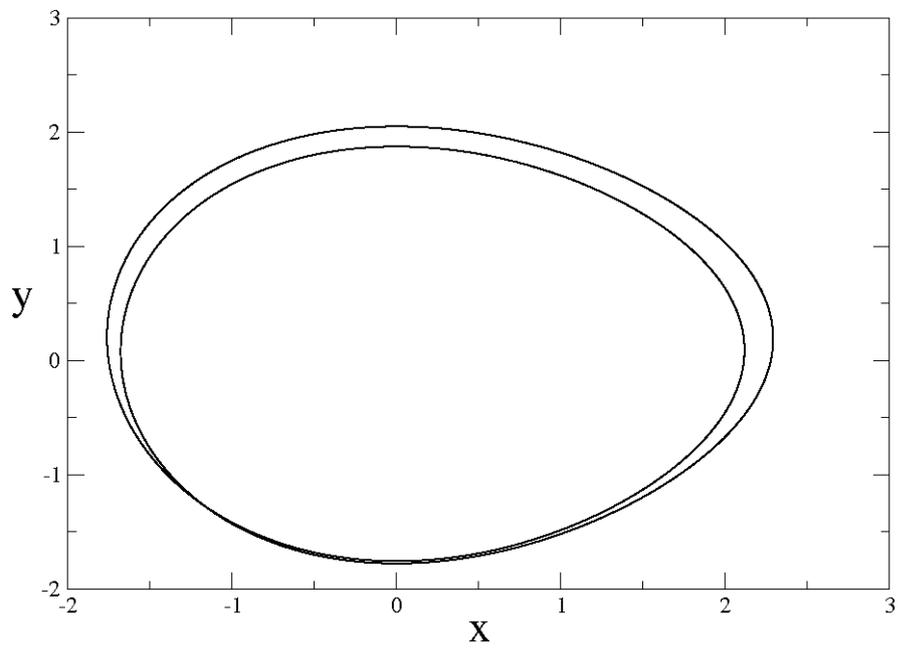
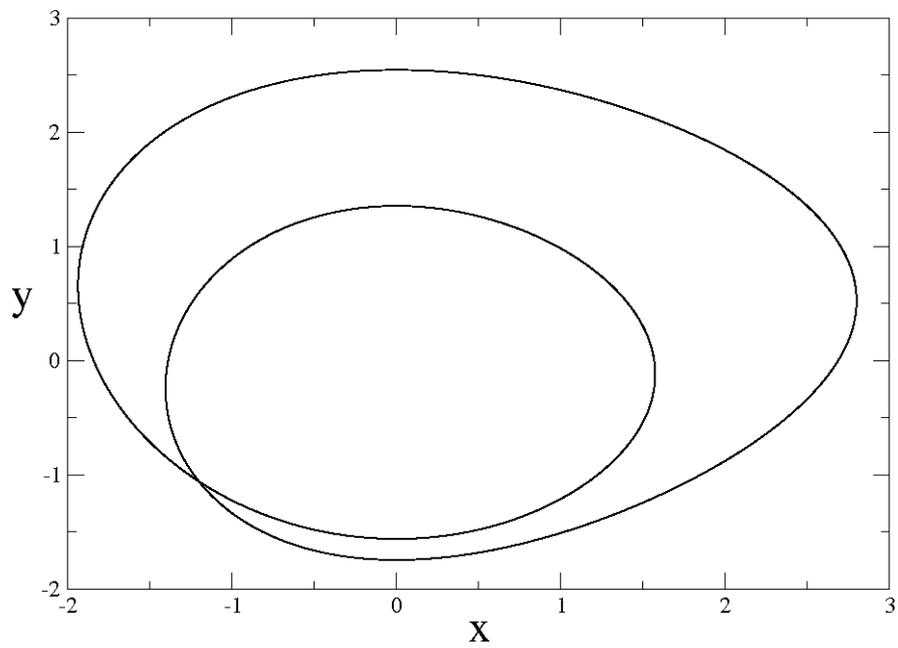


Рисунок 1.10: Режим медленной модуляции, возникающий для одноволновой моды, при переходе к колебаниям удвоенного периода: а, б — распределения $x_i(s)$, построенные при $m = 0.968$ для двух последовательных интервалов времени, в течении которых в каждой точке пространства было получено 500 точек в сечении траектории; с, д — фрагменты зависимости переменной x от времени в точке $s = 25$ при $m = 0.968$ и $m = 0.972$, соответственно. Черная область соответствует плотно «упакованным» колебаниям на основной частоте.

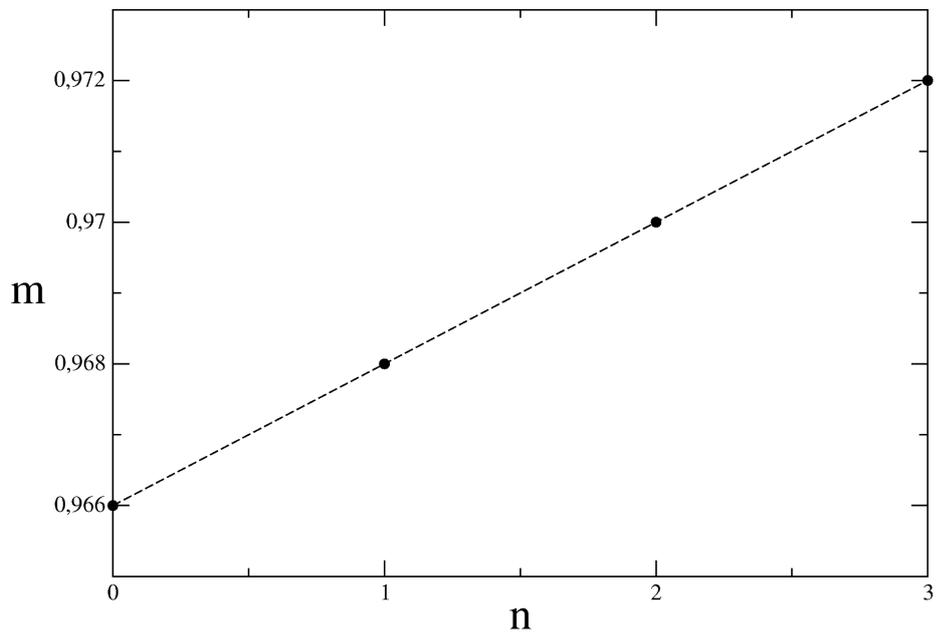


(a)

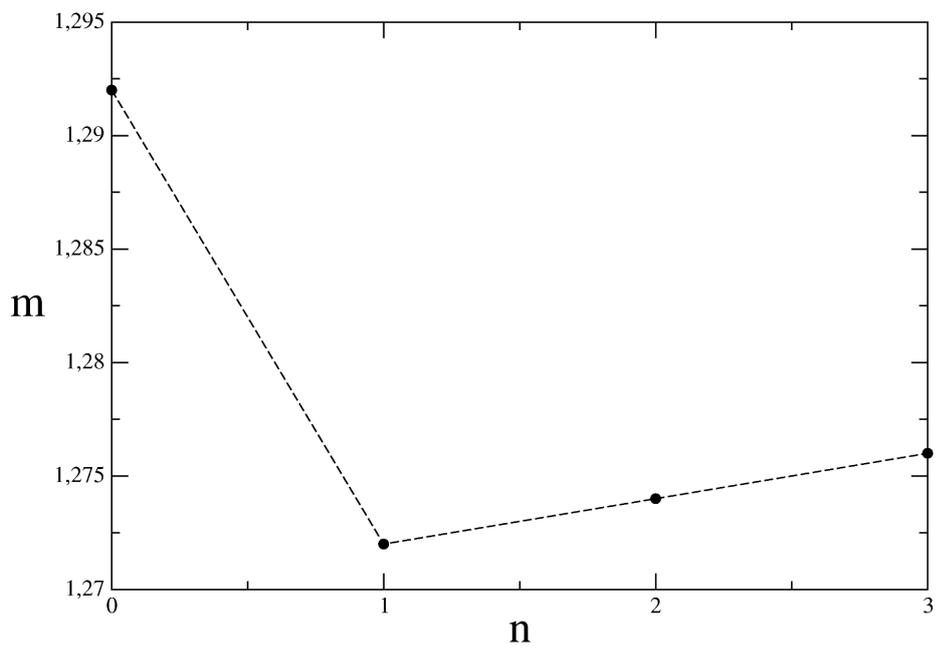


(b)

Рисунок 1.11: Фазовые портреты колебаний, полученные для $n = 1$ при $m = 1.03$ в двух точках среды: а — $s = 2$; б — $s = 20$.



(a)



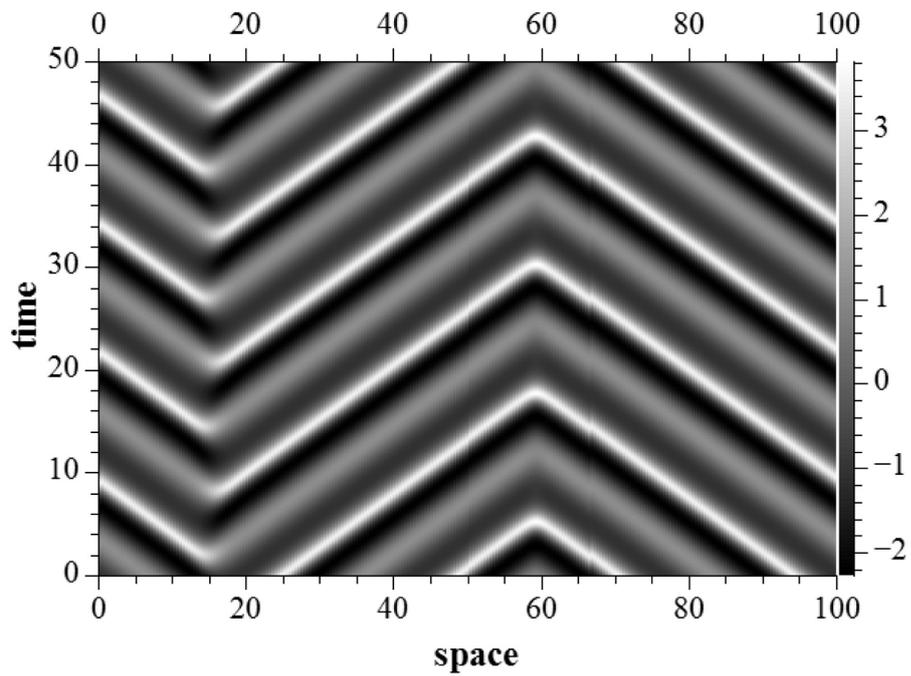
(b)

Рисунок 1.12: Бифуркационные значения параметра возбуждения для первой (а) и второй (b) бифуркаций в зависимости от номера моды n .

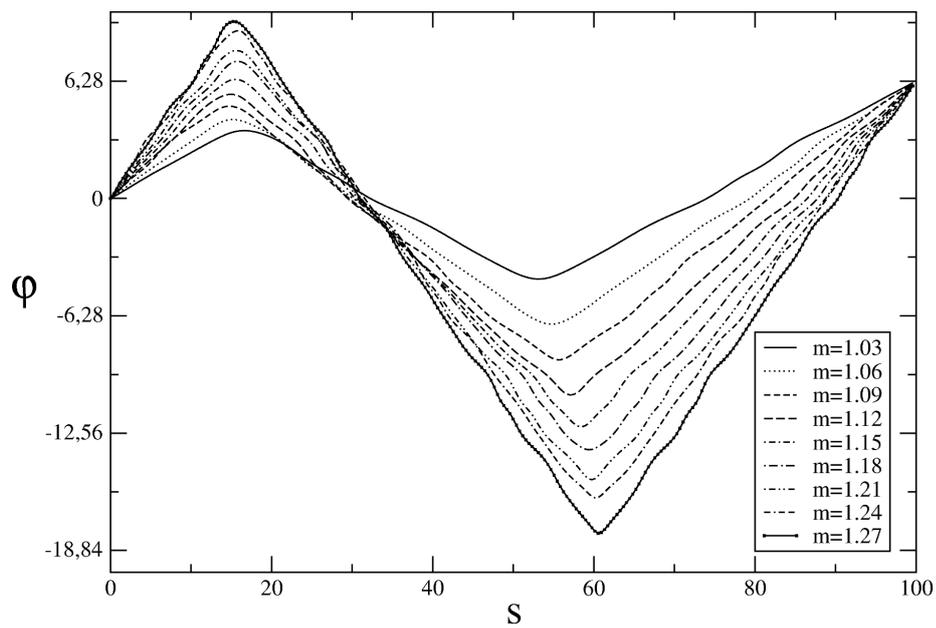
фазных режимов в системе двух взаимодействующих генераторов с бифуркациями удвоения периода [115]. Квазипериодические во времени колебания были обнаружены для пространственно неоднородных режимов в цепочках логистических отображений [38, 39, 105] и автогенераторов Чуа [27]. В этом отношении непрерывная среда ведет себя подобно пространственно дискретным моделям. Однако дискретные модели не могут демонстрировать в полной мере пространственно-временные структуры, возникающие в непрерывной среде после удвоения периода и нарушения квазигармоничности.

При дальнейшем увеличении параметра m , когда колебания во времени вновь становятся периодическими, но уже с периодом $2T_0$, пространственные профили также начинают повторяться через период временных колебаний. Однако волновой фронт теперь имеет сложную форму (рисунок 1.13), что соответствует эволюции пространственного профиля $x(s, t)$ в течение одного периода колебаний во времени (рисунок 1.14). На этом рисунке $t = t_0$ (a), $t = t_0 + \Delta t$ (b), $t = t_0 + 2\Delta t$ (c), $t = t_0 + 3\Delta t$ (d), $t = t_0 + 4\Delta t$ (e), $t = t_0 + 5\Delta t$ (f), $t = t_0 + 6\Delta t$ (g), $t = t_0 + T$ (h), где $T = 7\Delta t$ — период колебаний во времени. Несмотря на такое усложнение пространственных профилей, набег фазы за пространственный период остается постоянной величиной для каждой моды в регулярных режимах колебаний, что позволяет определить номер моды, когда по внешнему виду пространственного профиля это сделать невозможно (рисунок 1.13b).

Проследим за поведением мгновенных пространственных профилей с ростом параметра m на примере одного из профилей моды $n = 1$. Мгновенные пространственные профили колебаний для $n \neq 0$ в результате удвоения периода во времени искажаются и уже не являются квазигармоническими. Профиль каждой пространственно неоднородной моды между двумя последовательными бифуркациями удвоения периода претерпевает сложную эволюцию. Увеличивая m , можно наблюдать, как «горбы» и «впадины» на мгновенном пространственном профиле трансформируются, образуя все новые экстремумы. Возникают все более мелкомасштабные пространственные осцилляции (рисунок 1.15).



(a)



(b)

Рисунок 1.13: Пространственно-временная диаграмма моды $n = 1$ при $m = 1.2$ (a) и эволюция распределения фазы по пространственной координате с ростом параметра m (b).

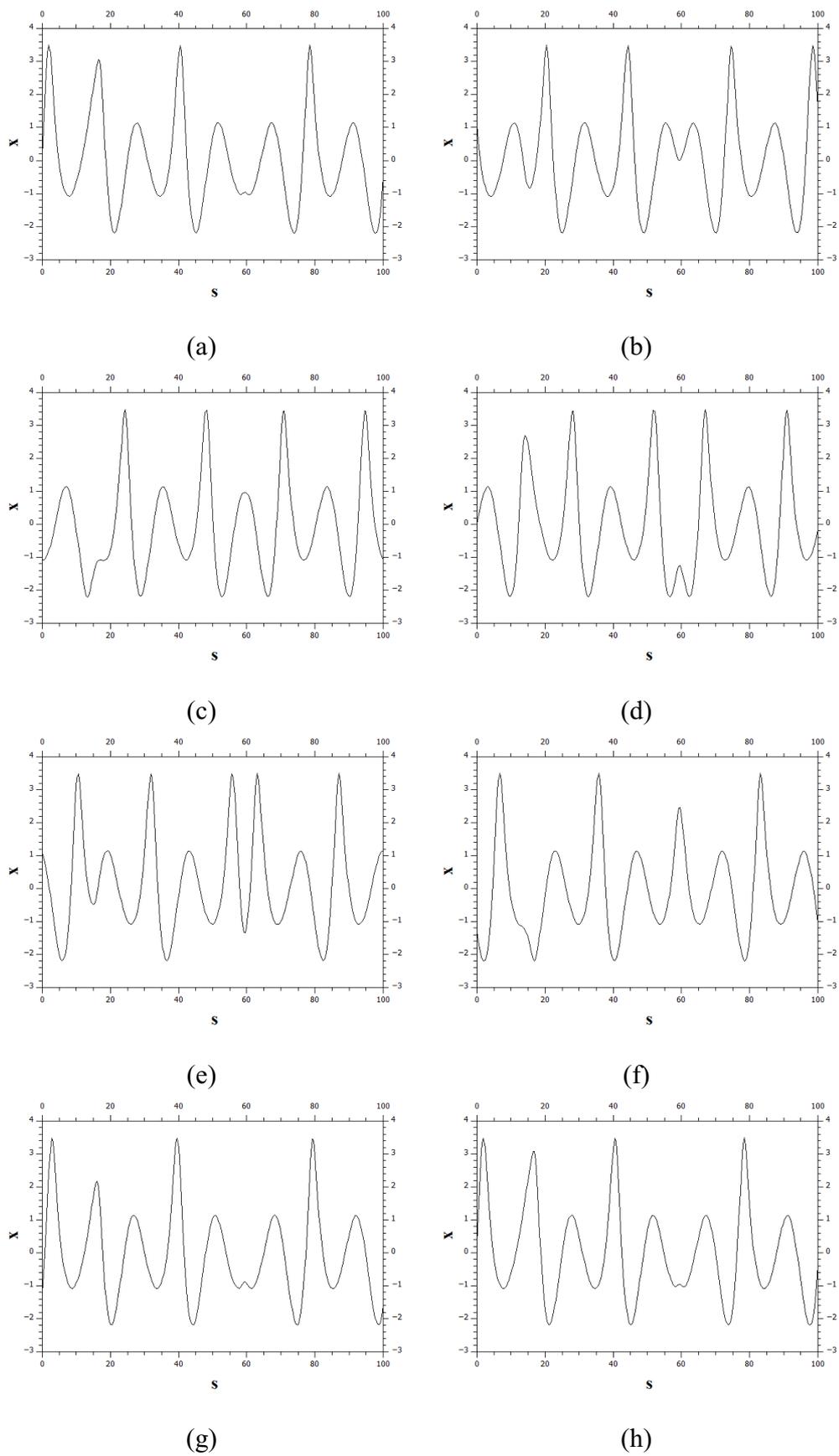


Рисунок 1.14: Эволюция пространственного профиля $x(s, t)$ режима $n = 1$ в области колебаний удвоенного периода при $m = 1.2$ в течение одного периода колебаний во времени.

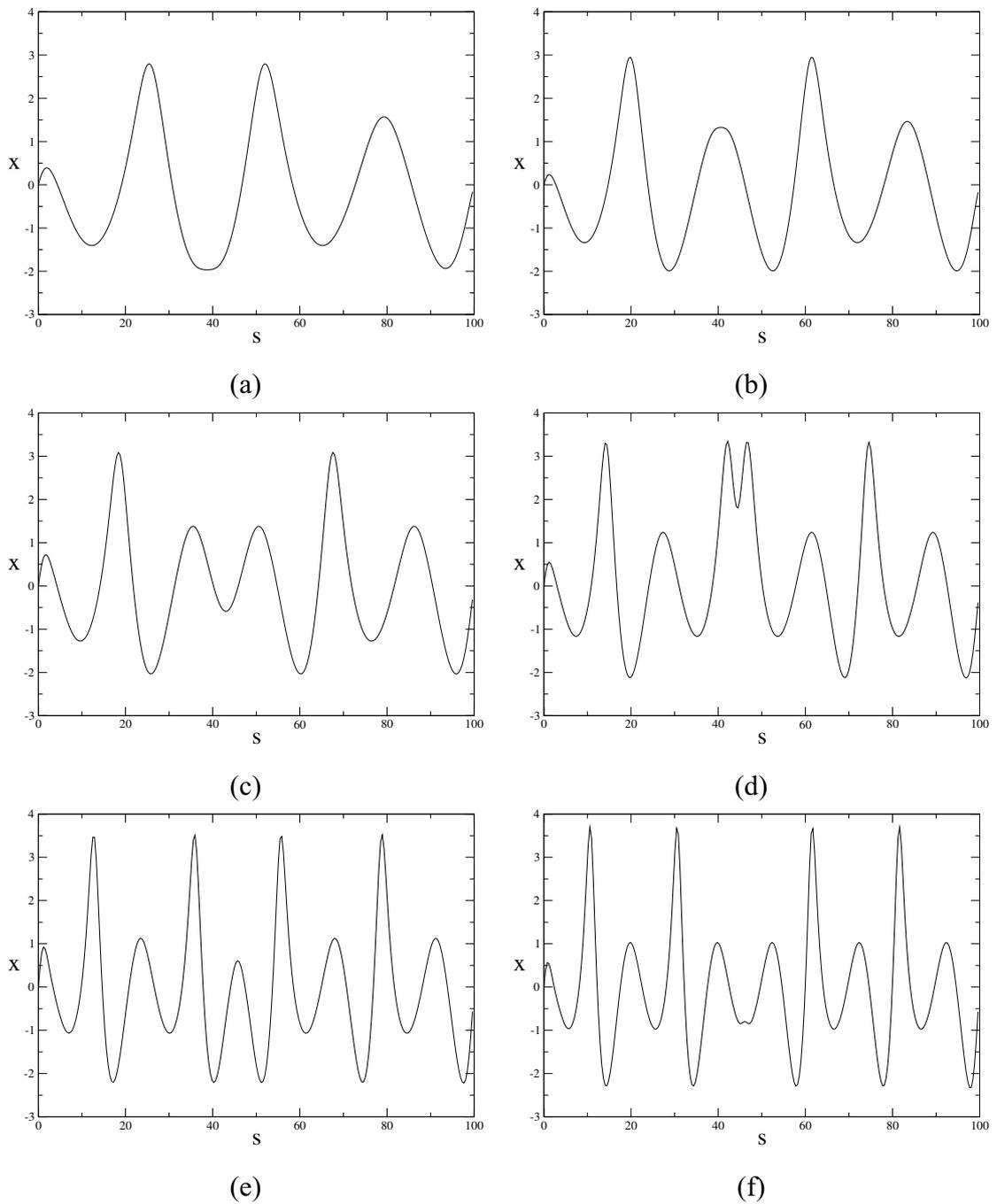


Рисунок 1.15: Эволюция пространственного профиля $x(s, t)$ режима $n = 1$ в области колебаний удвоенного периода с ростом параметра m : а — $m = 1.03$, б — $m = 1.06$, в — $m = 1.09$, д — $m = 1.15$, е — $m = 1.21$, ф — $m = 1.27$.

Профили соответствуют условию $x(0) = 0, y(0) > 0$.

Наблюдаемое в непрерывной среде (1.4) усложнение пространственного профиля не было зафиксировано в пространственно дискретной модели автоколебательной среды с удвоениями периода колебаний во времени [27]. Возможно, это объясняется слишком малым количеством автогенераторов в цепочке, моделирующей среду.

1.2.3 Динамический хаос в автоколебательной среде

При увеличении параметра m для однородной моды наблюдается бесконечная последовательность бифуркаций удвоения периода колебаний во времени, приводящая к хаотической динамике в соответствии со сценарием Фейгенбаума. Следует отметить, что область притяжения однородного режима с приближением к порогу хаоса постоянно уменьшается. Из ряда научных публикаций, посвященных пространственно дискретным системам с удвоениями периода колебаний (цепочкам модельных отображений и цепочкам автогенераторов), известно, что пространственно однородный хаотический режим возможен только в случае конечной длины цепочки [105, 109]. С увеличением числа элементов однородный режим перестает быть устойчивым раньше, чем происходит переход к хаотической динамике. Соответственно, точки непрерывной среды не могут одновременно совершать идентичные хаотические движения. В этом смысле однородный режим перестает существовать. Однако мы можем говорить о хаотической моде $n = 0$, понимая под этим пространственно-временной режим, соответствующий нулевой разности фаз на длине среды в среднем по времени: $\langle \varphi(L) \rangle = 0$. При этом различные точки среды будут совершать во времени различные хаотические колебания.

Для всех исследованных бегущих волн ($|n| = 1, 2, 3$) при выбранном параметре связи было обнаружено только одно удвоение периода. С ростом параметра m из периодических колебаний удвоенного периода снова возникает квазипериодический режим, который в дальнейшем разрушается, порождая хаотические

во времени колебания. В сечении фазового портрета, построенного в фиксированной точке пространства, можно видеть характерную картину разрушения инвариантной кривой, соответствующей двумерному тору (рисунок 1.16). Данный сценарий перехода к хаосу для пространственно неоднородных режимов описан в литературе для пространственно дискретных моделей. В частности, для цепочки осцилляторов Ресслера [29]. Таким образом, результат, полученный для модели непрерывной среды (1.4) находится в полном согласии с результатами исследования более простых моделей.

С ростом параметра m усложняется не только форма колебаний во времени. Для бегущих волн наблюдается эволюция волнового фронта, с увеличением m он дробится (рисунок 1.17), что в конце концов приводит нулевому среднему набегу фазы за длину системы, объединению всех мод (включая волны с отрицательными номерами $n = -1, -2, -3$, бегущие в обратную сторону) при $m \approx 1.56$ (рисунок 1.18) и пространственной нерегулярности.

Рассмотрим строго однородную моду, для которой не только имеет место равенство $n = 0$, но и все точки среды ведут себя идентично. В этом случае установившееся решение системы (1.4) принадлежит инвариантному многообразию $U: x(s, t) = x(t), y(s, t) = y(t), z(x, t) = z(t)$. До критической точки, соответствующей порогу хаотической динамики, однородная мода устойчива к малым возмущениям. За критической точкой однородная мода становится неустойчивой, но ее легко пронаблюдать в численном эксперименте, задав однородное начальное состояние системы (1.4) ($x(s, 0), y(s, 0), z(s, 0) = const$). Если при этом выбрать однородные начальные условия для возмущений (1.9) ($u(s, 0), v(s, 0), w(s, 0) = const$), то можно получить максимальный ляпуновский показатель λ_U^1 , который характеризует устойчивость или неустойчивость однородного решения относительно возмущений в инвариантном многообразии U . Из характера уравнений (1.4) следует, что решения, принадлежащие инвариантному многообразию U , полностью совпадают с режимами «элементарного генератора» и при вариации параметра m должны эволюционировать полностью

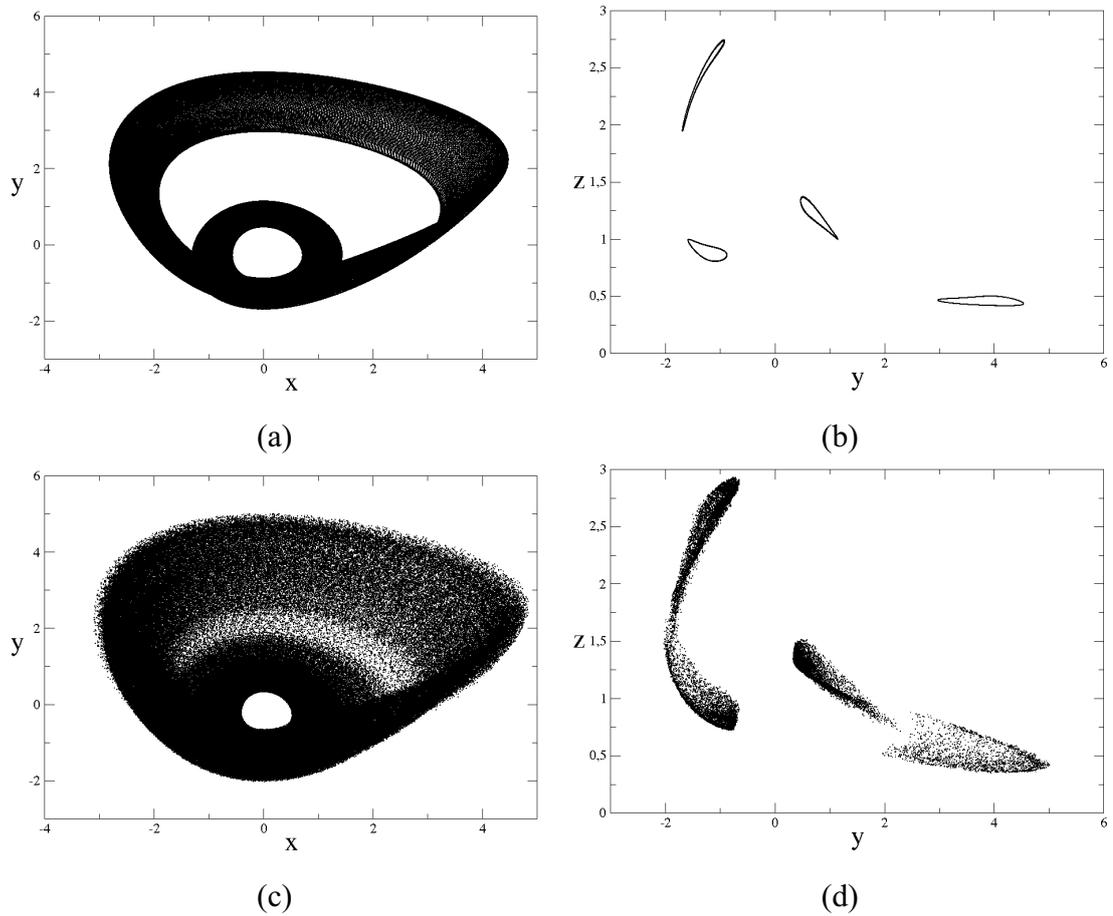


Рисунок 1.16: Вторичное возникновение квазипериодических колебаний, их разрушение и переход к хаосу для моды $n = 1$: (a, b) — $m = 1.34$; (c, d) — $m = 1.39$. Слева изображены проекции фазового пространства на плоскость $x - y$ в точке $s = 40$, справа — соответствующие сечения плоскостью $x = 0$.

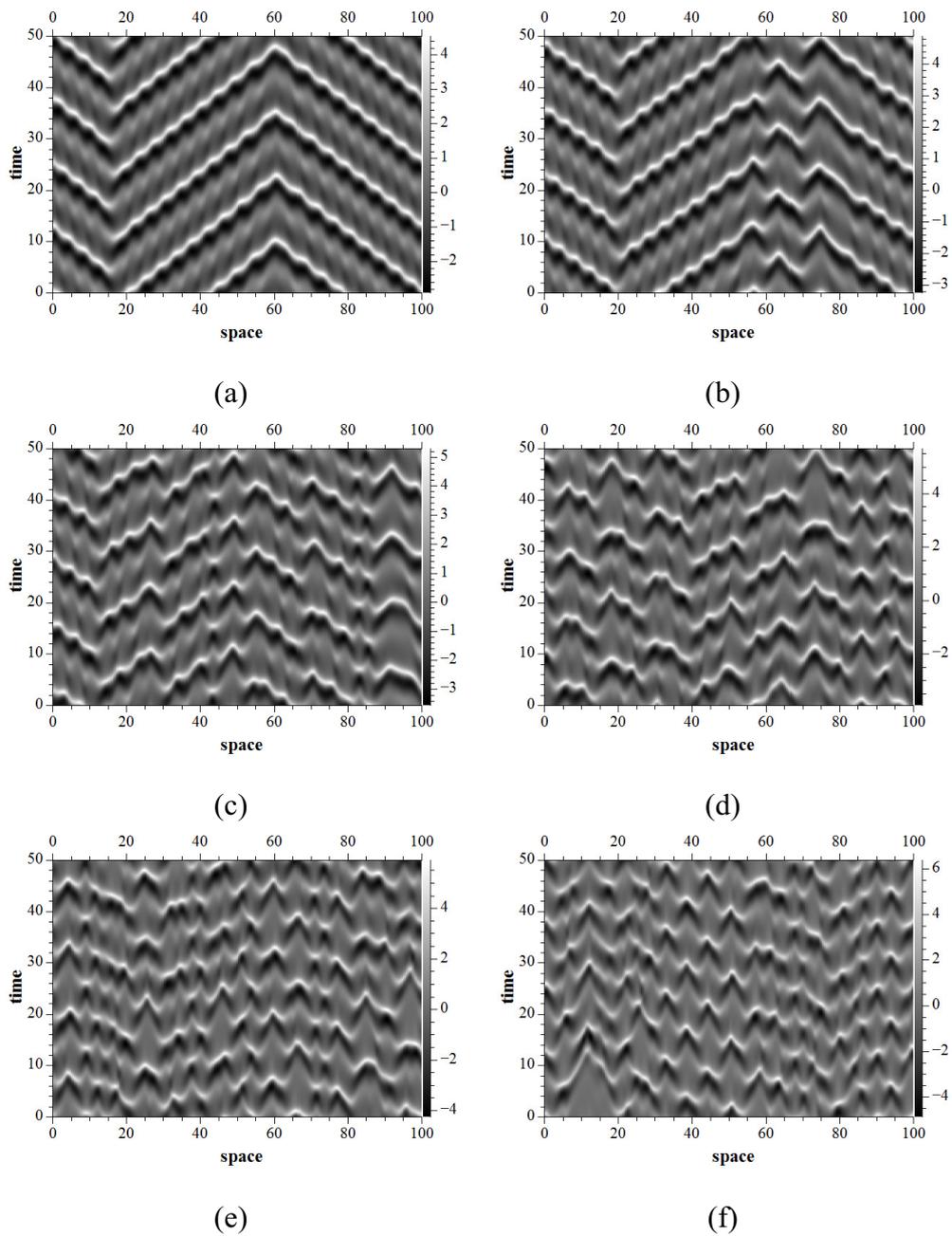


Рисунок 1.17: Эволюция волнового фронта моды $n = 1$ с ростом параметра m . Пространственно-временные диаграммы при а — $m = 1.34$, б — $m = 1.39$, с — $m = 1.44$, д — $m = 1.49$, е — $m = 1.54$, ф — $m = 1.59$.

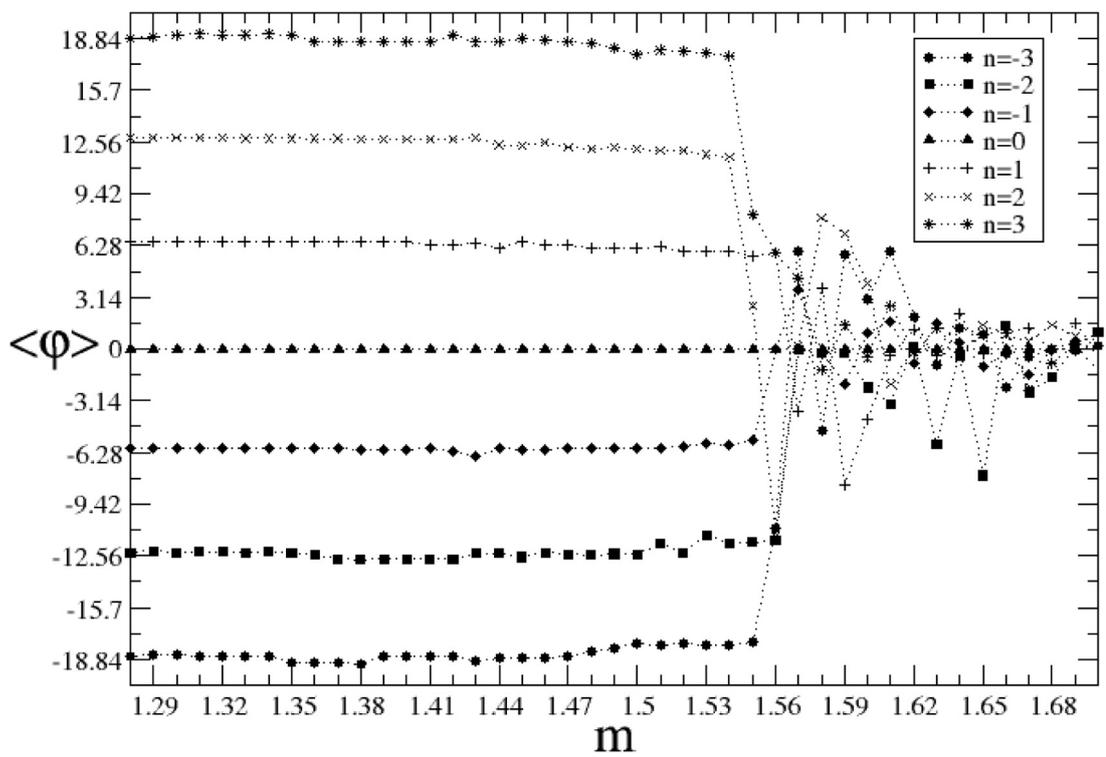


Рисунок 1.18: Зависимости среднего сдвига фазы за длину системы $\varphi(L)$ от параметра m для сосуществующих мод $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

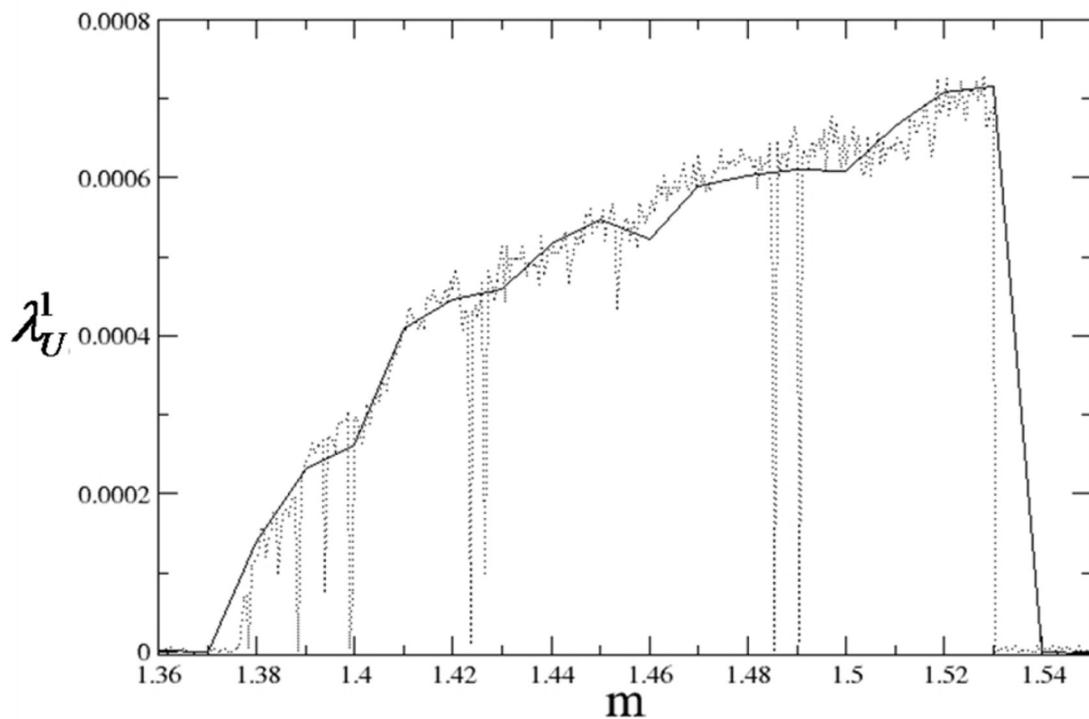
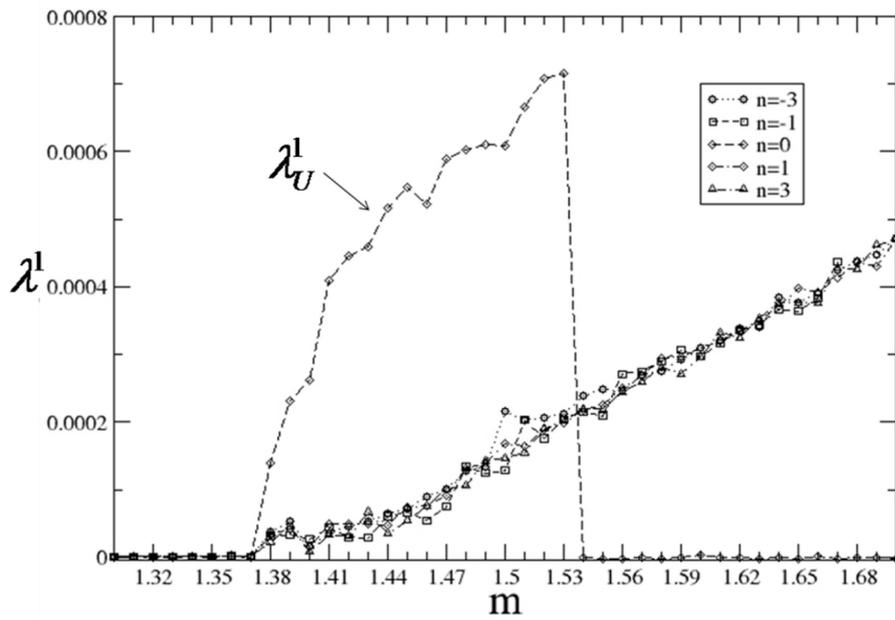


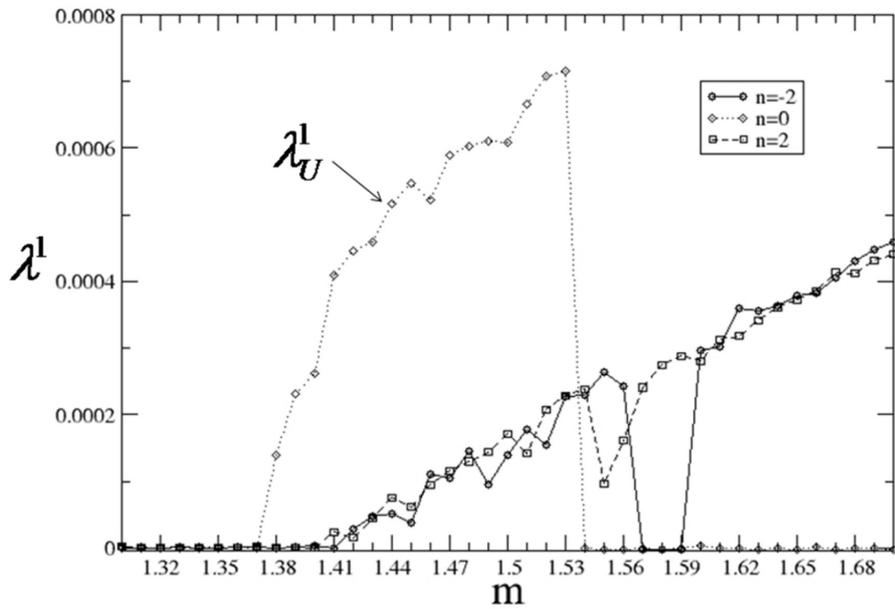
Рисунок 1.19: Зависимости максимального ляпуновского показателя λ_1 для моды $n = 0$ в среде (1.4) (сплошная линия) и для генератора Анищенко – Астахова (пунктирная линия) от параметра m .

аналогично. Проведённые численные расчеты подтверждают данный вывод: зависимость λ_U^1 от параметра m для строго однородной моды в пределах точности вычислений совпадает с соответствующей зависимостью, полученной для отдельного генератора Анищенко – Астахова с сосредоточенными параметрами (рисунок 1.19). Данный результат подтверждает корректность используемой численной схемы интегрирования и метода расчета максимального ляпуновского показателя.

В результате проведённых расчетов было установлено, что для мод $n = 0, \pm 1, \pm 3$ переход к хаотическому режиму происходит практически при одном и том же значении параметра $m \approx 1.375$, однако окно периодичности при $m > 1.54$, наблюдающееся для моды $n = 0$, у неоднородных мод исчезает (рисунки 1.20а и 1.20b). Особо нужно отметить «двухволновые» моды $n = \pm 2$, для которых граница перехода к хаосу оказывается сдвинутой в сторону роста значений параметра m , и для $n = -2$ наблюдается окно периодичности, отсутствующее у остальных режимов (рисунок 1.20b). По-видимому, такое отличие от остальных мод вызвано погрешностью численных расчетов.



(a)



(b)

Рисунок 1.20: Зависимости максимального ляпуновского показателя мод $n = 0, \pm 1, \pm 3$ (a) и $n = 0, \pm 2$ (b) от параметра m .

1.3 Активная среда с переходом от автоколебательного характера элементов к возбудимому

Перейдем к рассмотрению невозмущенной активной среды (1.14). Особенностью ее является то, что при различных значениях управляющего параметра она может демонстрировать как автоколебательный, так и возбудимый режимы. Это делает данную модель удобной для исследования перехода между двумя этими режимами, а также различий в их характеристиках.

1.3.1 Мультистабильность в активной среде

При значениях параметров $\alpha = 0.2$, $\gamma = 3$, $\varepsilon = 0.01$ в системе (1.14) при отсутствии шума наблюдается мультистабильность. В ней сосуществуют режимы бегущих волны, отличающиеся друг от друга длиной волны и направлением распространения (рисунки 1.21 и 1.22). Также, в автоколебательном режиме существует пространственно однородная автоколебательная мода, отсутствующая в возбудимом режиме. В данном случае однородность означает, что все точки среды совершают идентичные колебания в одной фазе. Введём номер моды так же, как это было сделано для среды (1.4).

1.3.2 Характеристики поведения среды в автоколебательном и возбудимом режиме

Проследим за изменением таких характеристик автоколебаний, как период и фазовая скорость, в незашумленной системе при вариации управляющих параметров β и d для различных мод, сосуществующих в рассматриваемой активной среде, и в различных режимах элементарной ячейки. Рассмотрим сначала зависимости периода T и фазовой скорости $v = \frac{L}{nT}$ колебаний от параметра β для волновых мод $n = 1, 2, 3$ при фиксированном значении коэффициента диффу-

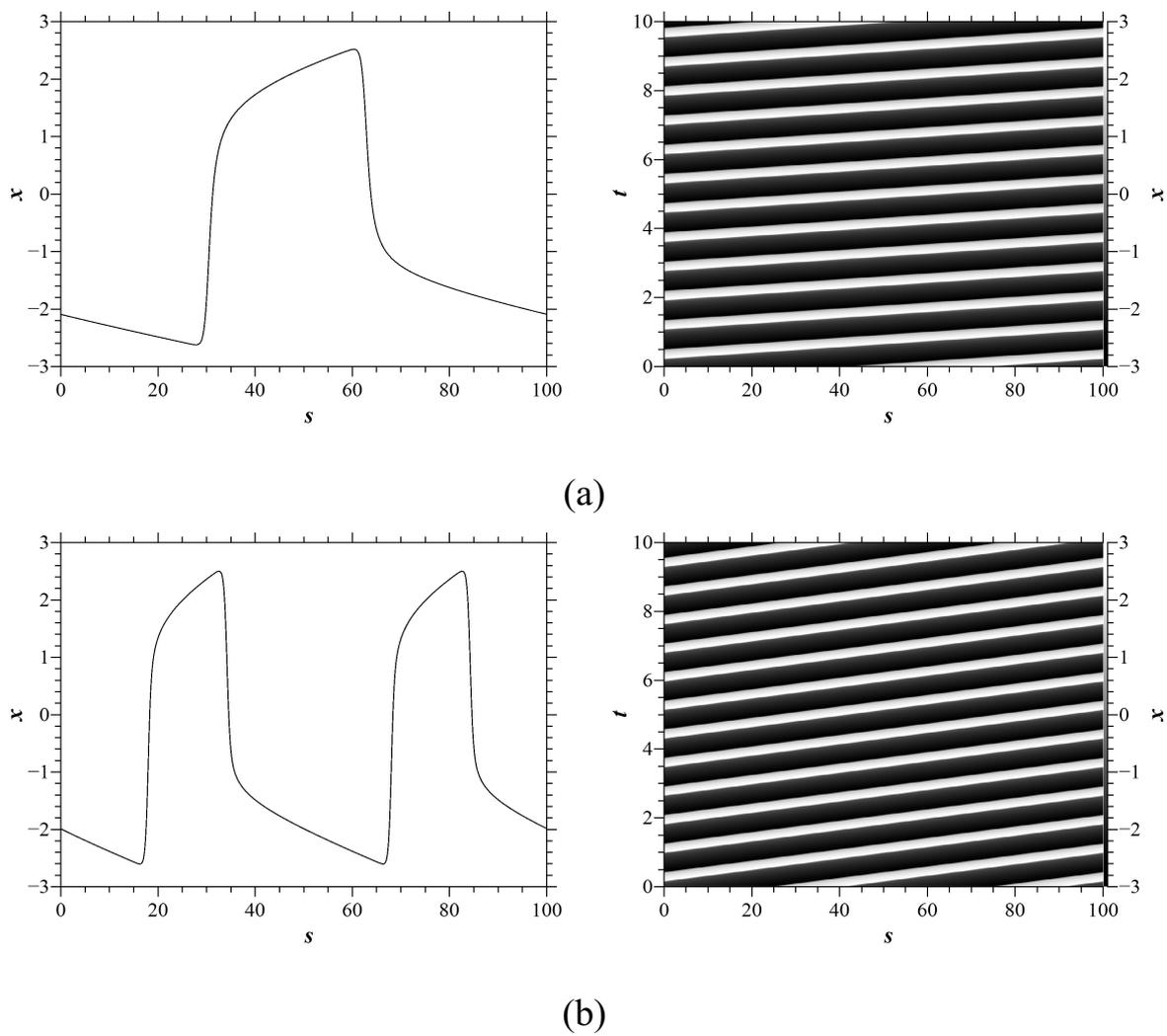
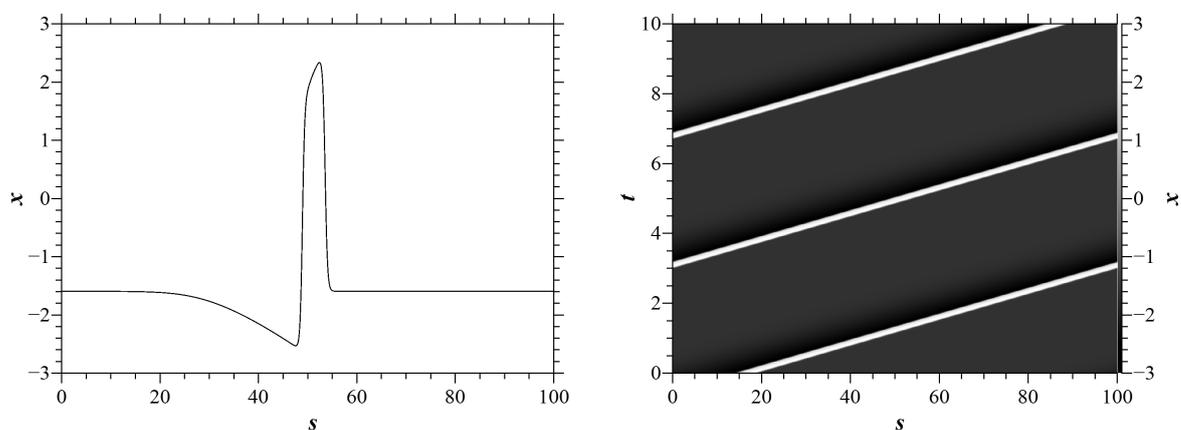
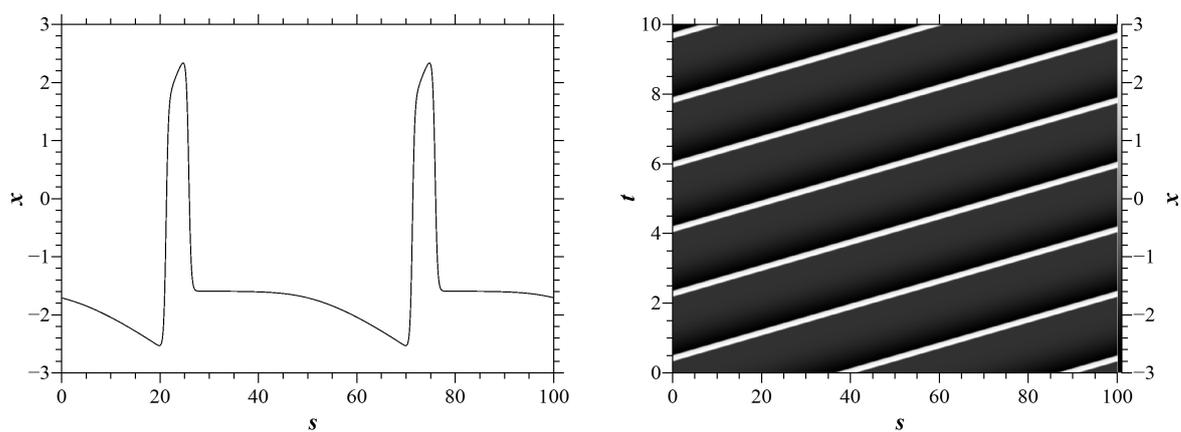


Рисунок 1.21: Пространственные профили (слева) и пространственно-временные диаграммы (справа) мод $n = 1$ (а) и $n = 2$ (б) в автоколебательном режиме ячейки при $\beta = 2$.



(a)



(b)

Рисунок 1.22: Пространственные профили (слева) и пространственно-временные диаграммы (справа) мод $n = 1$ (а) и $n = 2$ (б) в возбужденном режиме ячейки при $\beta = 4$.

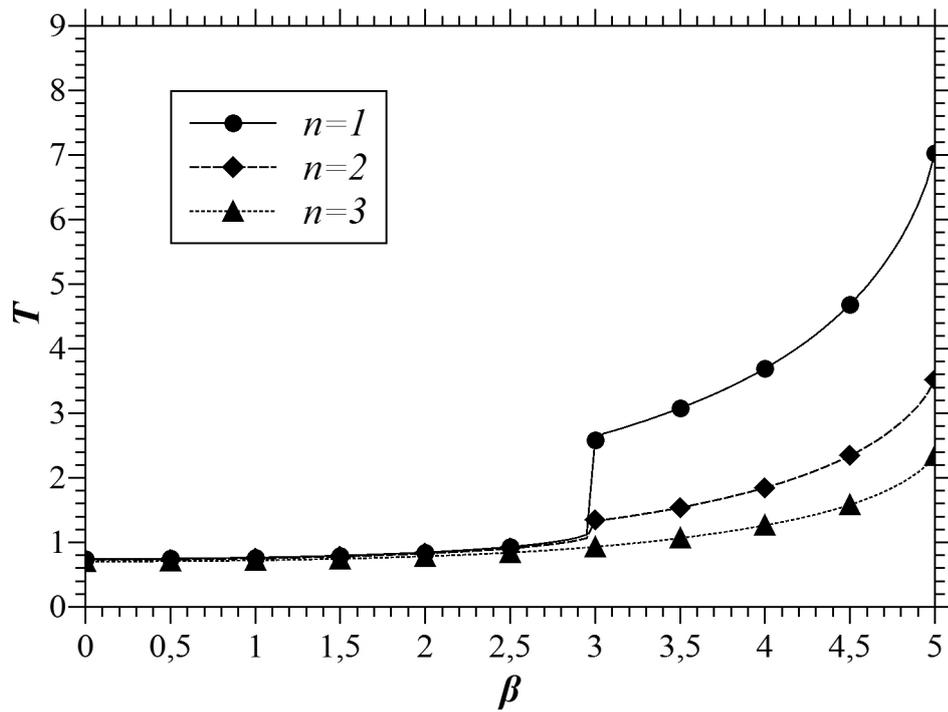
зии $d = 0.1$ (рисунок 1.23). На графиках можно выделить две области с различным поведением системы, соответствующие автоколебательному ($\beta \in [0; 3)$) и возбудимому ($\beta \in (3; 5]$) режимам элементарной ячейки. Они разделены бифуркационным значением параметра $\beta_{cr} \approx 3$. Как видно из рисунка 1.23а, период колебаний в автоколебательном режиме ячейки одинаков для всех сосуществующих мод и определяется, по-видимому, периодом колебаний самой ячейки. При этом значение периода практически не меняется с ростом параметра β . В возбудимом режиме ситуация иная — здесь период колебаний неодинаков для различных колебательных мод, а если проследить за изменением периода колебаний одной из мод, то виден значительный его рост с увеличением β .

Поведение фазовой скорости (рисунок 1.23b) оказывается противоположным поведению периода. Так, фазовая скорость различных мод неодинакова в автоколебательном режиме элементарной ячейки, а в возбудимом режиме — совпадает для всех сосуществующих мод.

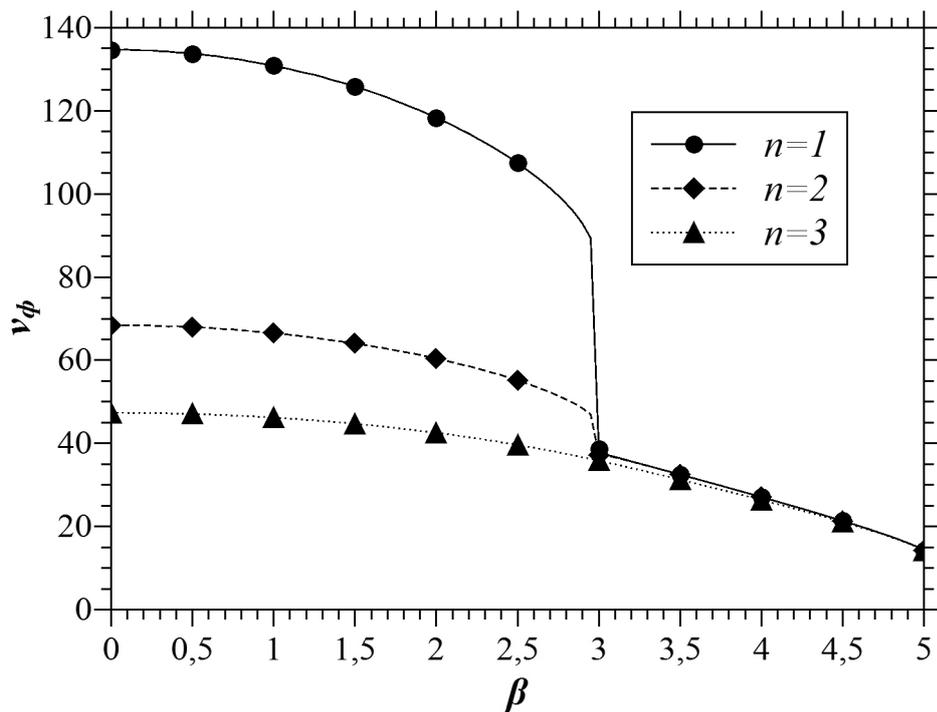
Теперь рассмотрим зависимости характеристик колебательной моды $n = 1$ от коэффициента диффузии d при фиксированных значениях параметра $\beta = 2$ (автоколебательный режим) и $\beta = 4$ (возбудимый режим). Как видно из рисунка 1.24, в автоколебательном режиме элементарной ячейки изменение коэффициента диффузии не оказывает влияния, ни на период колебаний, ни на их фазовую скорость. В отличие от возбудимого режима, в котором при увеличении коэффициента диффузии фазовая скорость также растет, а период колебаний — уменьшается.

1.3.3 Бифуркация перехода от автоколебательного режима к возбудимому

В одиночном осцилляторе ФитцХью – Нагумо при значении параметра $\beta_{cr} = 2.995 \pm 0.001$ и значениях остальных параметров, указанных выше, наблюдается бифуркация Андронова – Хопфа. Вместе с этим, в окрестности β_{cr}

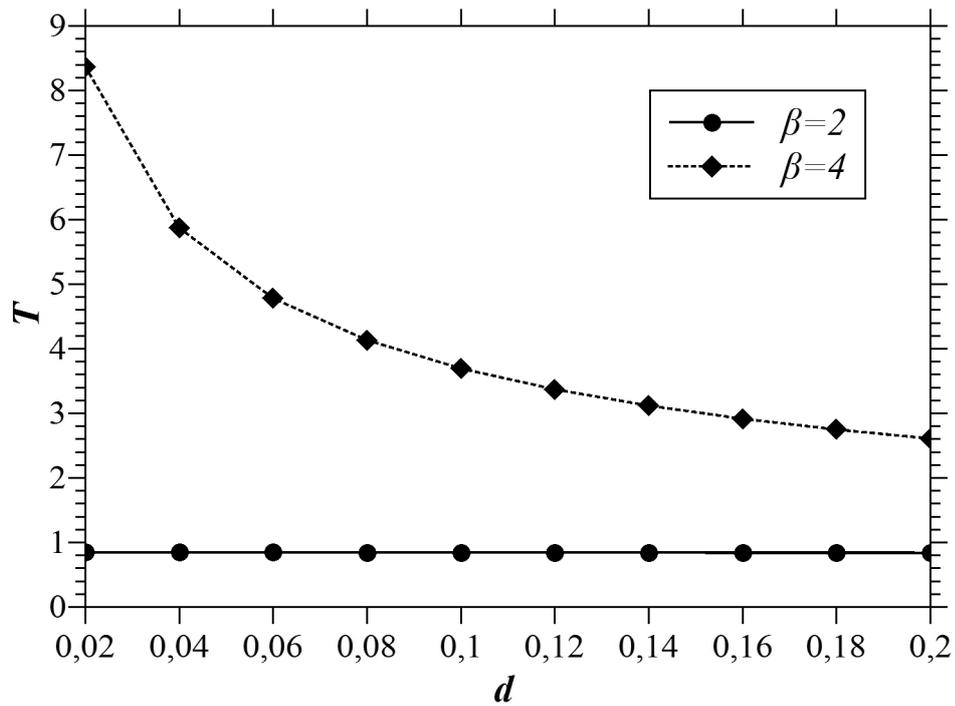


(a)

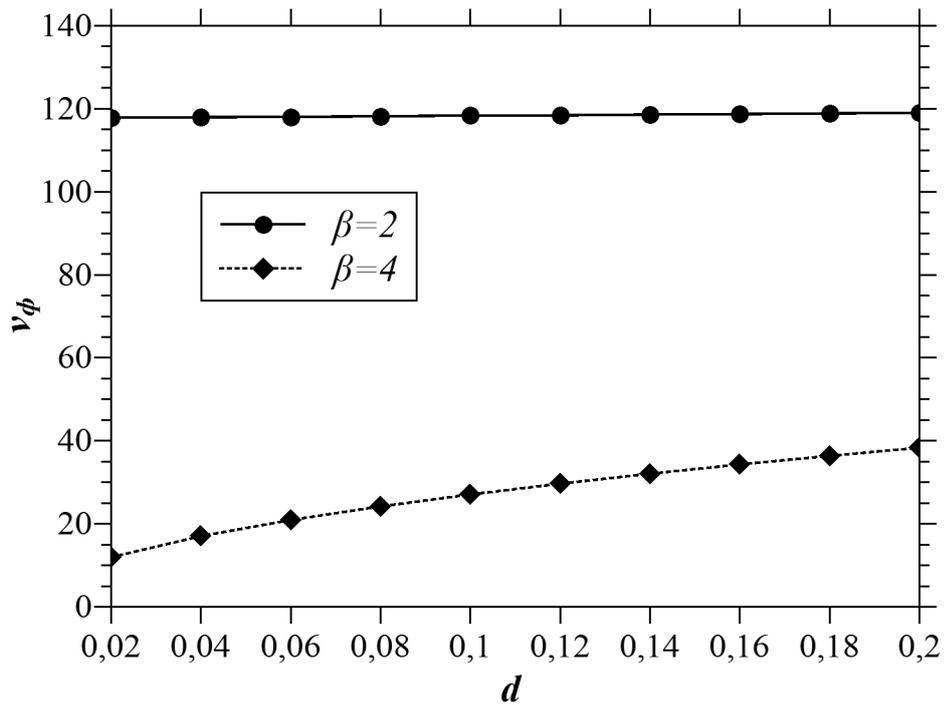


(b)

Рисунок 1.23: Зависимости периода (а) и фазовой скорости (б) колебательных мод $n = 1, 2, 3$ от параметра β .



(a)



(b)

Рисунок 1.24: Зависимости периода (а) и фазовой скорости (б) колебательной моды $n = 1$ от коэффициента диффузии d в различных режимах элементарной ячейки.

проходит граница двух типов поведения осциллятора — автоколебательного и возбуждимого.

Из рисунка 1.23 видно, что период колебаний во времени и фазовая скорость мод $n = 1$ и $n = 2$ активной среды (1.14) претерпевают скачкообразное изменение. Это позволяет говорить о некоей бифуркации в активной среде. Рассмотрим более подробно поведение исследуемой среды в окрестности критического значения управляющего параметра β_{cr} .

На рисунке 1.25 представлена эволюция формы пространственного профиля и колебаний во времени моды $n = 1$ с ростом параметра β . Как видно из приведённых на рисунке кривых, при переходе от значения $\beta = 2.98$ к значению $\beta = 2.99$ форма пространственного профиля волны качественно меняется: в «хвосте» волны возбуждения возникают колебания малой амплитуды. Они соответствуют колебаниям вблизи состояния равновесия типа фокуса в одиночном осцилляторе ФитцХью – Нагумо. При этом на графиках, изображающих поведение среды во времени, можно видеть резкий рост периода колебаний. Бифуркационное значение параметра β может быть оценено как $\beta_{cr_1} = 2.988 \pm 0.001$. При дальнейшем увеличении β осцилляции на «хвосте» волны исчезают.

Для моды $n = 2$ (рисунок 1.26) наблюдается схожая картина, однако скачкообразное изменение формы пространственного профиля и колебаний во времени, а также периода колебаний во времени, происходит не при $\beta_{cr_1} = 2.988 \pm 0.001$, а при $\beta_{cr_2} = 2.994 \pm 0.001$.

Перейдём к моде $n = 3$. Как видно из рисунка 1.27, ни характер пространственного профиля, ни форма колебаний во времени, ни период колебаний не претерпевают никаких резких качественных изменений с ростом параметра β . Можно предположить, что такая разница в поведении мод $n = 1$, $n = 2$ и моды $n = 3$ наблюдается из-за того, что для моды $n = 3$ волны возбуждения «плотно упакованы» в пространстве. «Хвост» волны оказывается слишком коротким для того, чтобы могли возникнуть осцилляции.

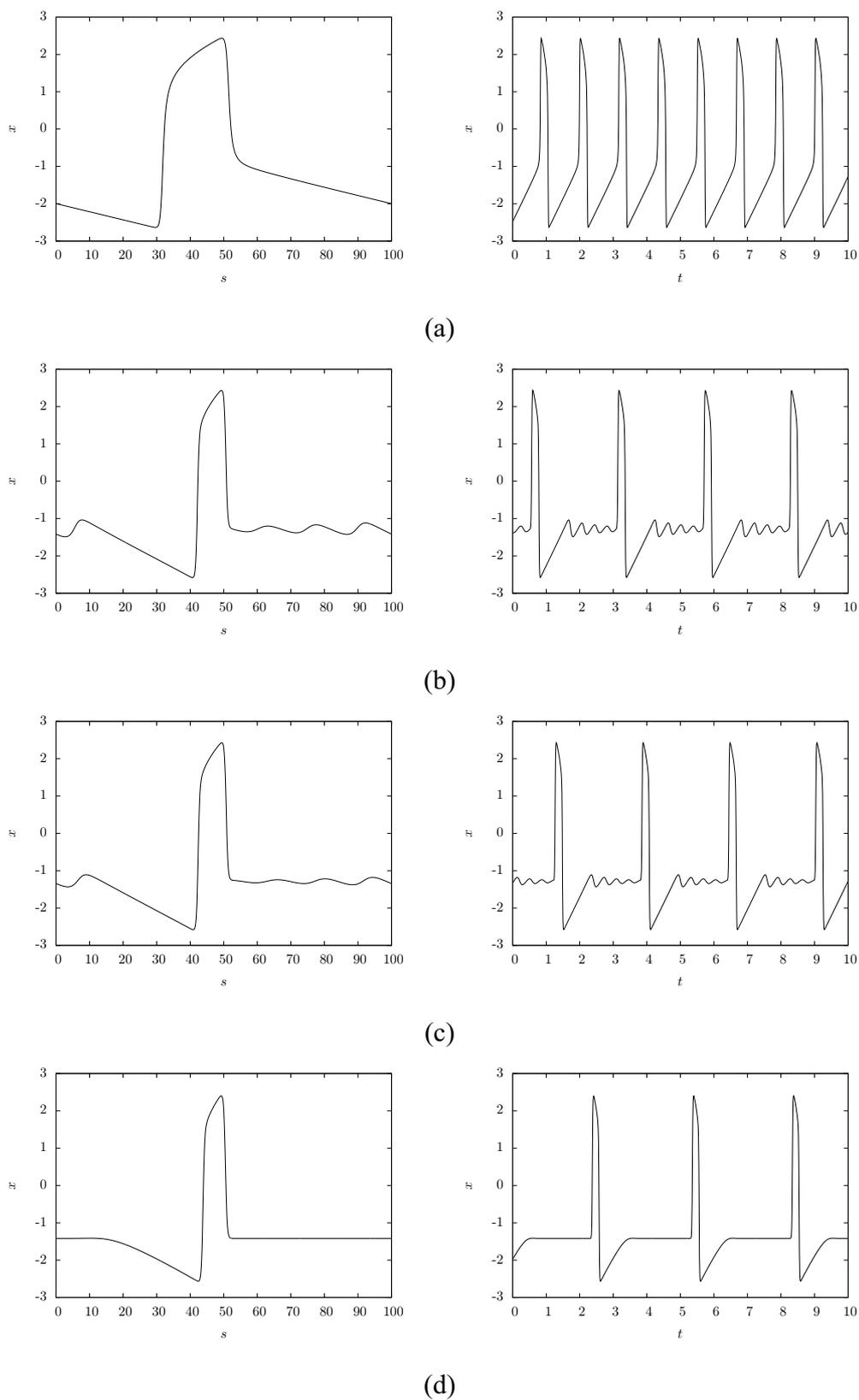


Рисунок 1.25: Эволюция форм пространственного профиля (слева) и колебаний во времени (справа) моды $n = 1$ с ростом параметра β .

Пространственно-временные диаграммы при а — $\beta = 2.98$, б — $\beta = 2.99$,

с — $\beta = 3.00$, д — $\beta = 3.4$.

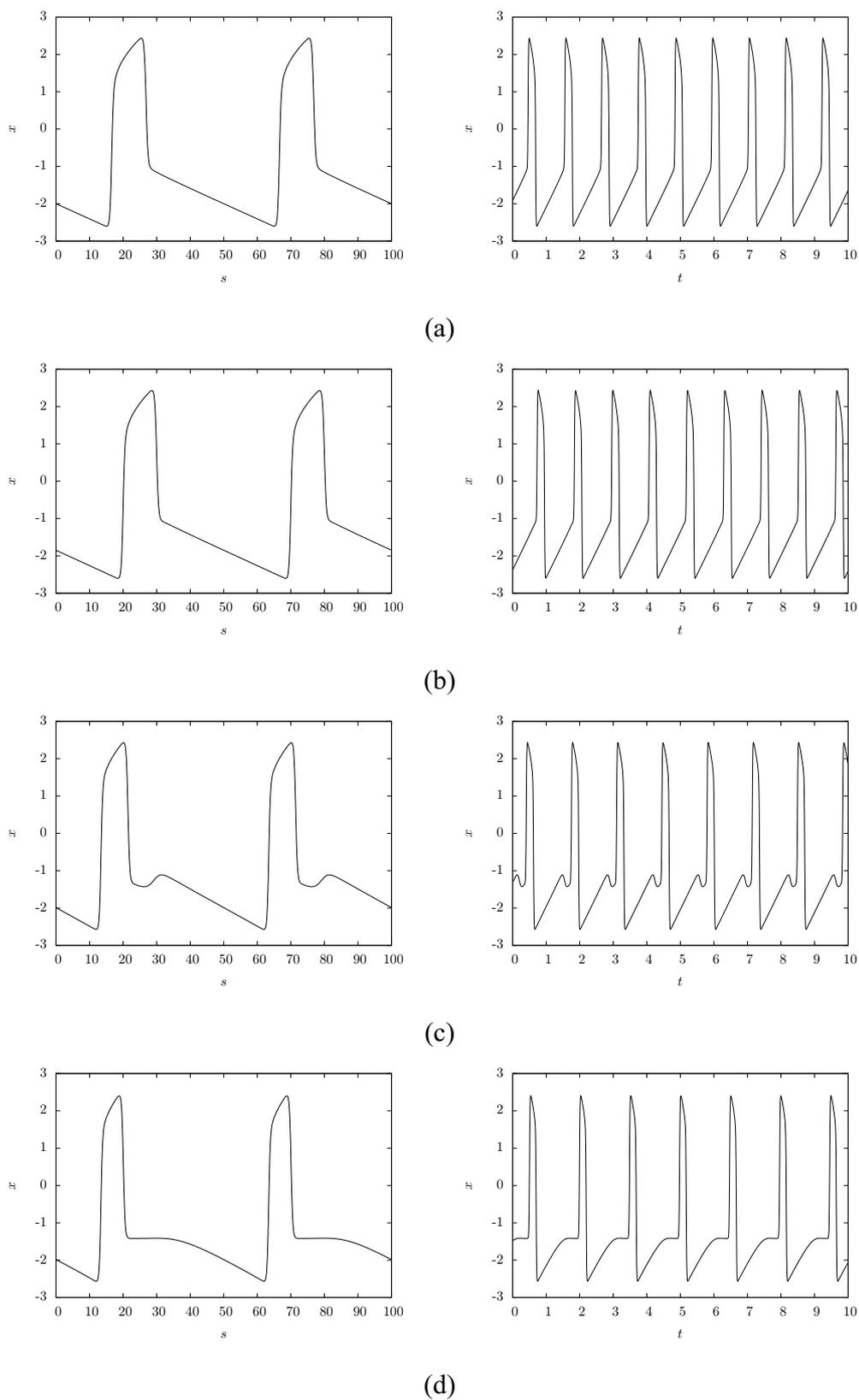


Рисунок 1.26: Эволюция форм пространственного профиля (слева) и колебаний во времени (справа) моды $n = 2$ с ростом параметра β .

Пространственно-временные диаграммы при а — $\beta = 2.98$, б — $\beta = 2.99$,

с — $\beta = 3.00$, д — $\beta = 3.4$.

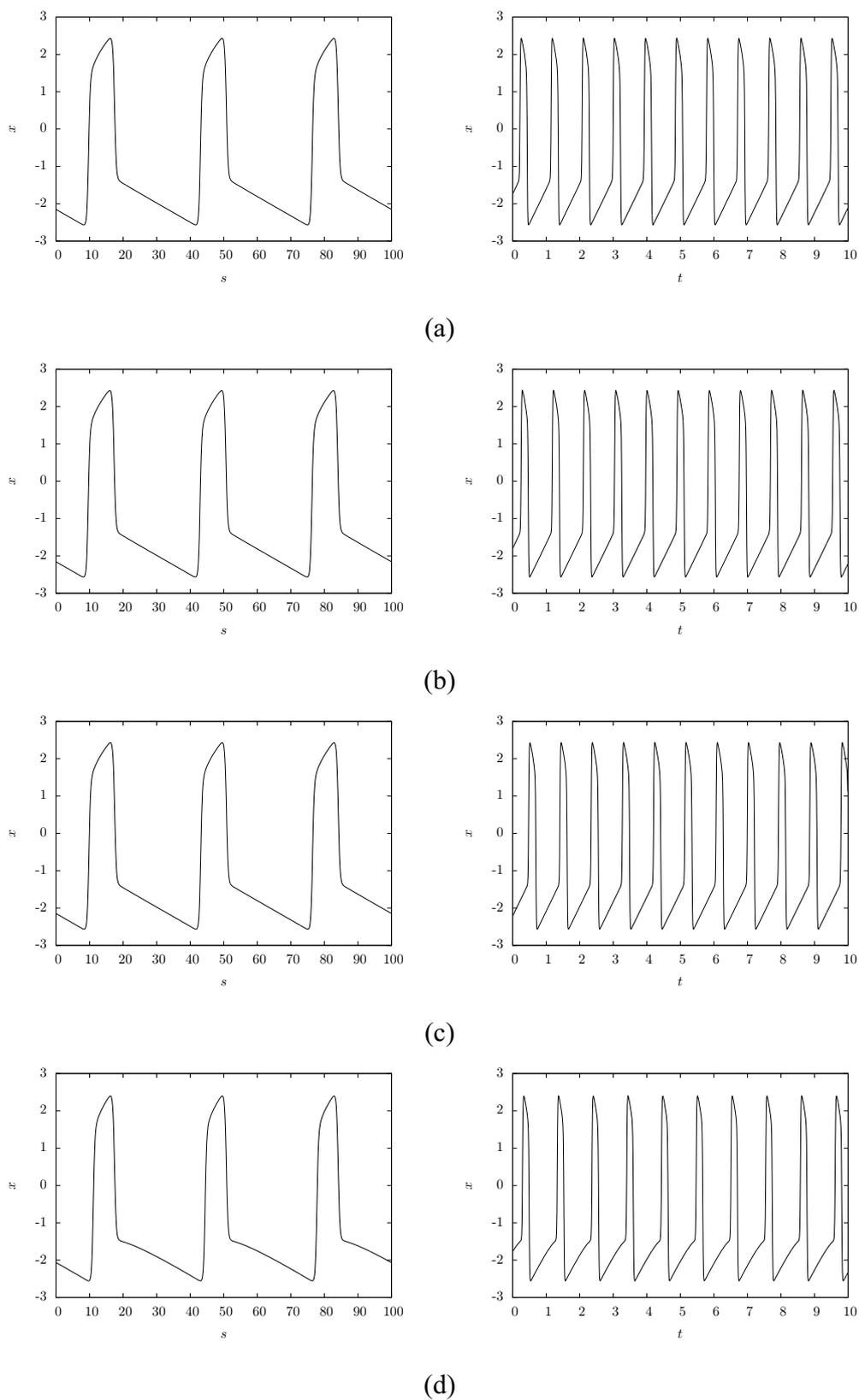


Рисунок 1.27: Эволюция форм пространственного профиля (слева) и колебаний во времени (справа) моды $n = 1$ с ростом параметра β .

Пространственно-временные диаграммы при а — $\beta = 2.98$, б — $\beta = 2.99$,

с — $\beta = 3.00$, д — $\beta = 3.4$.

Таким образом, можно говорить о бифуркационном переходе в среде (1.14), которому соответствует интервал значений управляющего параметра. В пределах этого интервала, не включающего точку бифуркации Андронова – Хопфа для одиночного осциллятора ФитцХью – Нагумо, наблюдается качественное изменение характеристик старших волновых мод.

1.4 Выводы по первой главе

Для предложенных моделей активных сред были получены следующие результаты. Для модели автоколебательной среды со сложной динамикой элементарной ячейки:

- Установлено сосуществование нескольких устойчивых мод (в экспериментах наблюдалось по крайней мере семь мод), различающихся фазовым сдвигом колебаний на длине системы. В режиме слабой хаотической динамики мультистабильность сохраняется и можно ввести средний сдвиг фазы, который будет различным для различных мод. Фазовый сдвиг на длине системы может служить главным критерием диагностики моды в таких условиях, когда форма колебаний как во времени, так и в пространстве становится сложной.
- При переходе от квазигармонических колебаний к колебаниям более сложной формы (квазипериодическим колебаниям, колебаниям удвоенного периода, хаотическим колебаниям), который имеет место при увеличении управляющего параметра, возникает немонотонное изменение мгновенной фазы колебаний вдоль пространственной координаты. Имеет место сложное поведение волнового фронта бегущих волн, который может менять направление движения.
- Механизм удвоения периода колебаний во времени различается для однородной моды ($n = 0$) и для бегущих волн ($n \neq 0$). Если для однородной мо-

ды удвоение периода колебаний происходит аналогично бифуркациям удвоения периода в конечномерных системах, то для бегущих волн имеет место сложная перестройка колебаний, включающая возникновение квазипериодического режима и его эволюцию, приводящую к установлению колебаний удвоенного периода. Данный механизм наблюдался ранее для неоднородных режимов в цепочках автогенераторов и для несинфазных циклов двух взаимодействующих генераторов, и, по-видимому, носит общий характер.

- В режиме колебаний удвоенного периода и других сложных (не квазигармонических) режимах с ростом управляющего параметра наблюдается постепенное усложнение мгновенного пространственного профиля бегущих волн. Возникают все более мелкомасштабные осцилляции, что в условиях слабой связи или большой длины системы ведет к пространственной хаотичности (то есть, к турбулентности). Данный процесс связан со все большим усложнением движения волнового фронта. Данный эффект связан с непрерывностью системы в пространстве и для пространственно дискретных моделей не был установлен.
- Переход к хаотическому во времени поведению для однородной моды осуществлялся по Фейгенбаумовскому сценарию. Для бегущих волн при выбранном значении связи наблюдалось только одно удвоение периода, а переход к хаосу происходил в результате возникновения и разрушения квазипериодического режима. В области слабого хаоса мультистабильность сохраняется. Однако при достижении управляющим параметром некоторого значения наблюдается кризис всех неоднородных мод и возникновение глобально устойчивого режима, для которого средний сдвиг фазы на длине системы является нулевым, но различные точки среды при этом совершают хаотические колебания с разными фазами.

Для модели активной среды с переменной динамикой элементарной ячейки:

- Проведённые исследования выявили существенные различия незатухающих колебаний, наблюдающихся в автоколебательной и возбудимой средах при периодических граничных условиях. Эти различия касаются, прежде всего, зависимости характеристик колебаний от номера волновой моды и параметров среды. Так, в случае автоколебательной среды период колебаний T слабо зависел от параметра β , управляющего поведением элемента среды и практически не зависел от коэффициента диффузии d . В то же время, для возбудимой среды зависимость T от β и d была весьма существенной. Следует отметить также, что период колебаний в случае автоколебательной среды не зависит от номера волновой моды, а фазовая скорость для различных мод существенно различается. В возбудимой среде, напротив, фазовая скорость практически одинакова для всех мод, а периоды колебаний — различны.
- Переход через критическое значение параметра $\beta_{cr} \approx 3$, соответствующее смене характера элемента среды, для большинства волновых мод сопровождается заметным изменением периода и фазовой скорости. Пространственно однородный режим при $\beta > \beta_{cr}$ вообще исчезает. Таким образом, в некотором смысле, можно говорить о бифуркационном переходе в среде.
- С точки зрения классического определения автоколебаний, данного А.А. Андроновым, незатухающие колебания в возбудимой среде с периодическими граничными условиями, также как и в автоколебательной среде, являются автоколебательными режимами. Однако в силу перечисленных выше различий между ними, их имеет смысл различать как два вида автоколебаний, характерных для активных сред. Установленные различия могут быть использованы при определении характера элемента среды по результатам натуральных экспериментов, что может быть существенно при построении математических моделей реальных сред.

Глава 2

Динамика активных сред под действием шума

Исследование влияния шума на активные распределённые системы и среды является на сегодняшний день актуальной задачей нелинейной динамики. Вопросам влияния шума на распределённые системы посвящена монография [74], а также ряд статей, в которых рассматриваются те или иные вызванные шумом эффекты. Среди этих статей можно указать работы, посвящённые явлениям когерентного резонанса в возбудимых средах [80–84] и стохастического резонанса в бистабильных средах [116, 117], а также связанному с ними эффекту фазовой синхронизации стохастических колебаний [80–82, 118]. Имеются работы, в которых исследуется воздействие шума на неоднородную автоколебательную среду в режиме частотных кластеров и показан эффект разрушения кластеров, сопровождающийся возникновением индуцированного шумом хаоса [78, 119]. В работах [28, 29] обнаружены индуцированные шумом переключения мультистабильных режимов в кольце автогенераторов и автоколебательной среде, приводящие к установлению моды, соответствующей отсутствию фазового сдвига колебаний в среднем на длине системы. Вызванные шумом эффекты в таких сложных нелинейных системах, какими являются активные среды и их пространственно дискретные модели (цепочки и решетки из активных элементов) могут быть

чрезвычайно разнообразны. В целом этот круг проблем ещё сравнительно мало исследован. В то же время, важность анализа влияния случайных сил очевидна, поскольку случайные воздействия присутствуют в любой реальной системе и никогда не могут быть полностью устранены.

Одним из важных направлений исследования роли шума в динамических системах является анализ стохастических бифуркаций, то есть бифуркаций, протекающих в присутствии шума, в том числе вызванных изменениями шумовых параметров [120–122]. Влияние шума на бифуркационные явления в распределённых системах всё ещё мало изучено. Кроме того, автоколебательная и возбудимая среды по-разному реагируют на шумовое воздействие. Менять параметры реальной среды в эксперименте не всегда возможно, в то время как исследование влияния внешнего шума во многих случаях практически реализуемо. Оно может служить инструментом для определения характера поведения элементов реальной активной среды, что важно для создания адекватной математической модели.

Во второй главе диссертации исследуются описанные в главе 1 модели активных сред в присутствии случайного внешнего воздействия. Характеризуются методы моделирования источников шума в активной среде. Рассматривается влияние шумового воздействия на активные среды в режиме периодических колебаний. Демонстрируется разрушение режимов бегущих волн с увеличением интенсивности шума. Описывается влияние шума на характеристики колебаний. Отдельно рассматриваются стохастические бифуркации удвоения и связности и влияние шума на переход к хаосу в модели автоколебательной среды со сложной динамикой отдельного элемента, а также явление когерентного резонанса и переключения режимов вблизи точки бифуркации в модели активной среды, составленной из осцилляторов ФитцХью – Нагумо. Проводится сравнение эффектов шумового воздействия на активную среду с автоколебательным и возбудимым характером элементарной ячейки и рассматривается возможность

диагностики характера среды на основании наблюдения эффектов шумового воздействия.

Представленные во второй главе диссертации результаты отражены в работах [91, 93, 96, 102].

2.1 Модели и методы их исследования

Добавив в модели (1.4) и (1.14) источники шума, получим следующие уравнения для автоколебательной среды со сложной динамикой элементарной ячейки:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2(x - y)}{\partial s^2} + \sqrt{2D}\xi, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = g(\Phi(x) - z) \end{cases} \quad (2.1)$$

и

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} = x - y - \alpha x^3 + d \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma x - y + \beta + \sqrt{2D}\xi \end{cases} \quad (2.2)$$

для активной среды с переходом от автоколебательного характера элементов к возбудимому. Здесь $\xi = \xi(s, t)$ — источник гауссова белого шума, D — интенсивность шума.

2.1.1 Методы моделирования источников шума в среде

В проводимых численных экспериментах рассматривались два вида случайного воздействия на активные среды: пространственно однородный и пространственно-некоррелированный шум. В первом случае источник шума задавался следующим образом:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(t), \\ \langle \xi(t) \rangle &\equiv 0, \\ \langle \xi(t) \xi(t + \tau) \rangle &= \delta(\tau), \end{aligned} \quad (2.3)$$

т.е. на каждую точку среды воздействует одинаковая, некоррелированная во времени случайная сила. В случае пространственно-некоррелированного шума:

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(s, t), \\ \langle \xi(s, t) \rangle &\equiv 0, \\ \langle \xi(s, t) \xi(s + \rho, t + \tau) \rangle &= \delta(\rho) \delta(\tau),\end{aligned}\tag{2.4}$$

т.е. на каждую точку среды воздействует разная, некоррелированная и в пространстве, и во времени случайная сила.

В численном эксперименте на ЭВМ, в соответствии с [74], случайные приращения в разностной схеме интегрирования задавались в виде $\sqrt{2D \frac{h_t}{h_s}} \xi$, где h_t — шаг по времени, h_s — шаг по пространству.

При исследовании модели (2.1) рассматривался только пространственно однородный шум, при исследовании модели (2.2) — и пространственно однородный, и пространственно-некоррелированный шум.

2.2 Воздействие шума на автоколебательную среду со сложной динамикой элементарной ячейки

2.2.1 Разрушение бегущих волн

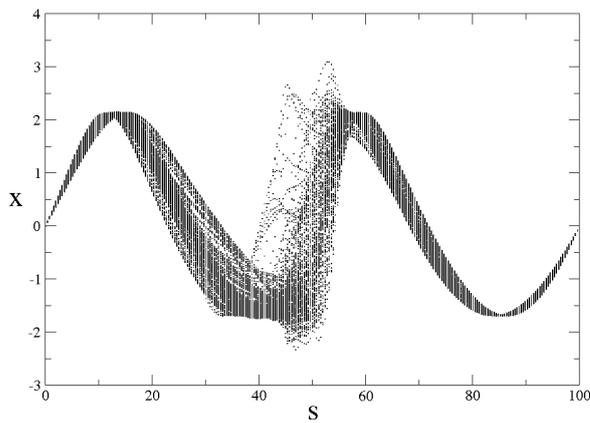
В ходе данной работы было установлено, что шум вызывает переключения с одних мод на другие и, таким образом, с помощью изменения интенсивности шума можно управлять режимами автоколебательной среды (2.1). Похожие эффекты наблюдались в кольце из конечного числа периодических генераторов [28]. С увеличением интенсивности шума при некотором её значении $D = D_{кр}(n)$ осуществляется переход с режима бегущей волны с номером n на режим с номером $n - 1$ (рисунки 2.1 и 2.2). На рисунке 2.1 представлена эволюция пространственных профилей с увеличением интенсивности шума. Из рисунка 2.2 видно, как сдвиг фазы за пространственный период уменьшается с

ростом интенсивности шума и при $D = 0.015$ становится нулевым. Возвращение в режим с номером n ни с течением времени, ни при изменении начальных условий не происходит. Таким образом, можно говорить о том, что шум подавляет пространственно неоднородные моды, начиная с больших значений номера n . При достаточно сильном шуме в кольце можно наблюдать только зашумлённый пространственно однородный режим, которому соответствует нулевой в среднем по времени сдвиг фазы на всей длине системы: $\langle \varphi(L) \rangle = 0$.

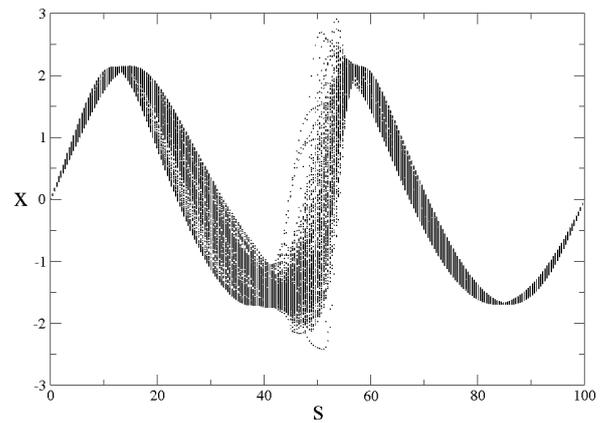
2.2.2 Стохастические бифуркации удвоения и связанности

Выберем значение интенсивности шума D таким, чтобы все устойчивые моды, наблюдаемые без шума, ещё сохранялись, и рассмотрим, как влияет шум на удвоения периода колебаний. Если зафиксировать значение m , соответствующее колебаниям удвоенного периода для данной моды, то увеличивая интенсивность шумового воздействия можно наблюдать, что с ростом шума фазовые портреты колебаний «замазываются» таким образом, что становится невозможно различить два витка на предельном цикле. Такое же поведение под действием шума имеет место в сосредоточенных системах малой размерности и отображениях последования [123].

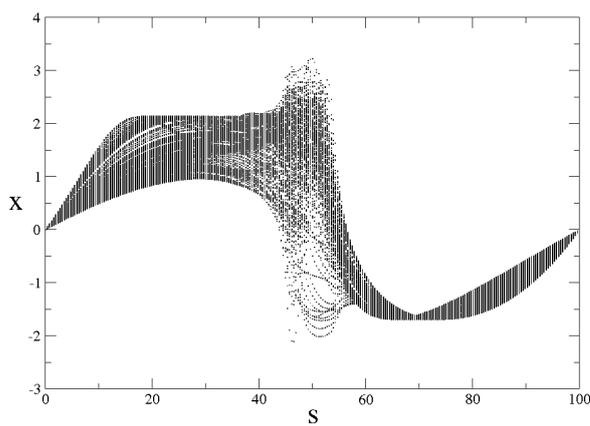
В среде с ростом интенсивности шума имеют место стохастические бифуркации связанности (или обратные бифуркации удвоения). Они представляют собой бифуркации феноменологического типа (т.н. P -бифуркации [121]), состоящие в качественном преобразовании плотности вероятности динамических переменных. Рассмотрим эволюцию распределения переменной $x(s, t)$ в точке пространства s . Если без шума имели место колебания удвоенного периода, то при достаточно малом шуме практически во всех точках среды устанавливается стационарное распределение $p(x, s)$, имеющее четыре локальных максимума. С ростом интенсивности шума D происходит постепенная эволюция распределения, приводящая к изменению числа максимумов: их становится два. Значение $D = D_c$,



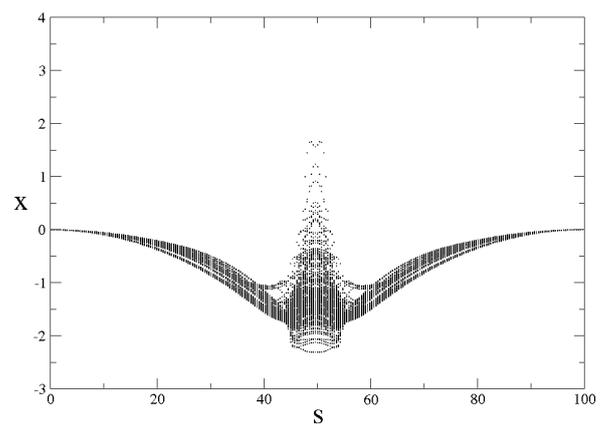
(a)



(b)



(c)



(d)

Рисунок 2.1: Пространственные профили для $n = 2$ при $m = 0.96$ при различных интенсивностях шума (a — $D = 0.012$, b — 0.013 , c — 0.014 , d — 0.015). Профили соответствуют условию $x(0) = 0$, $y(0) > 0$.

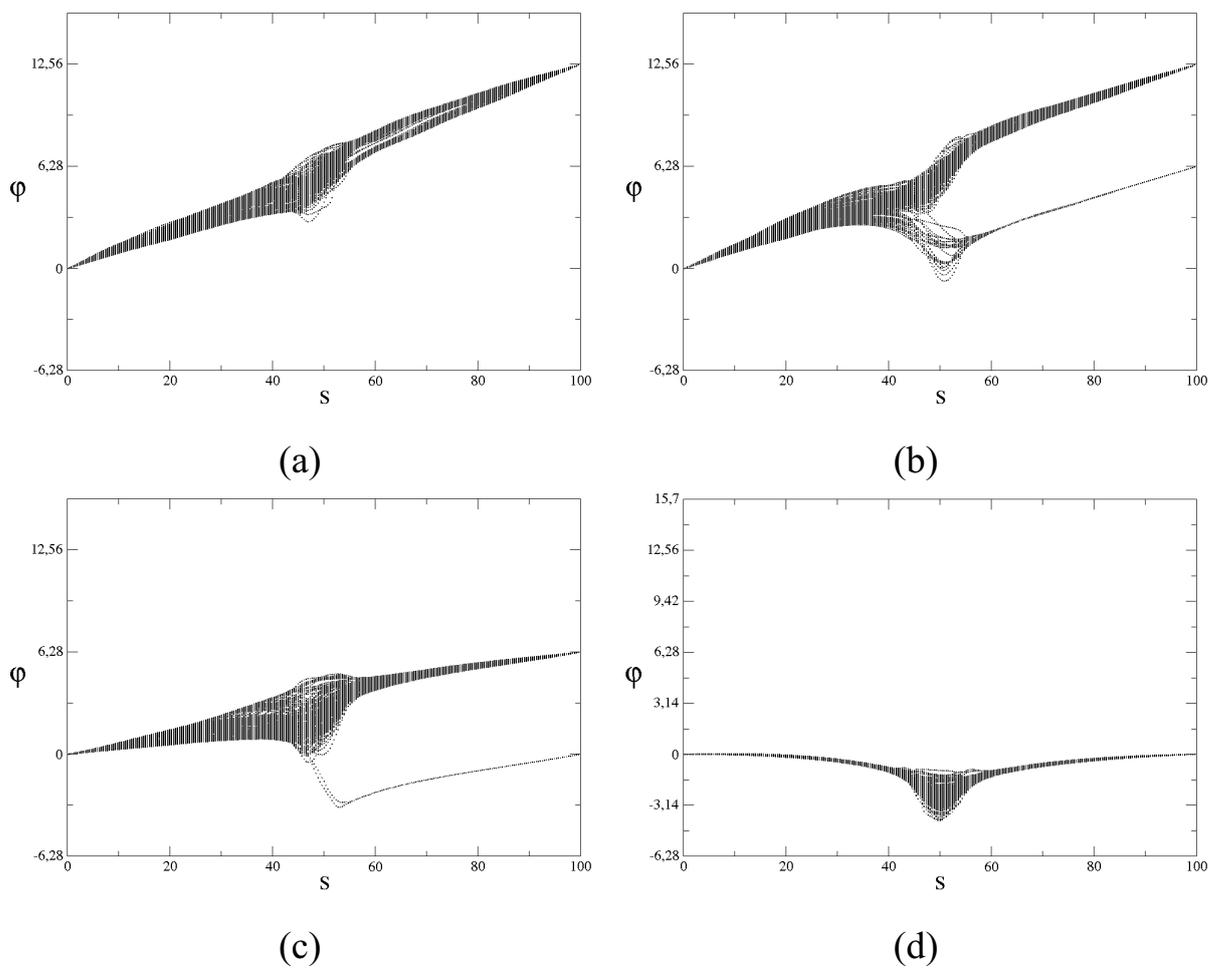


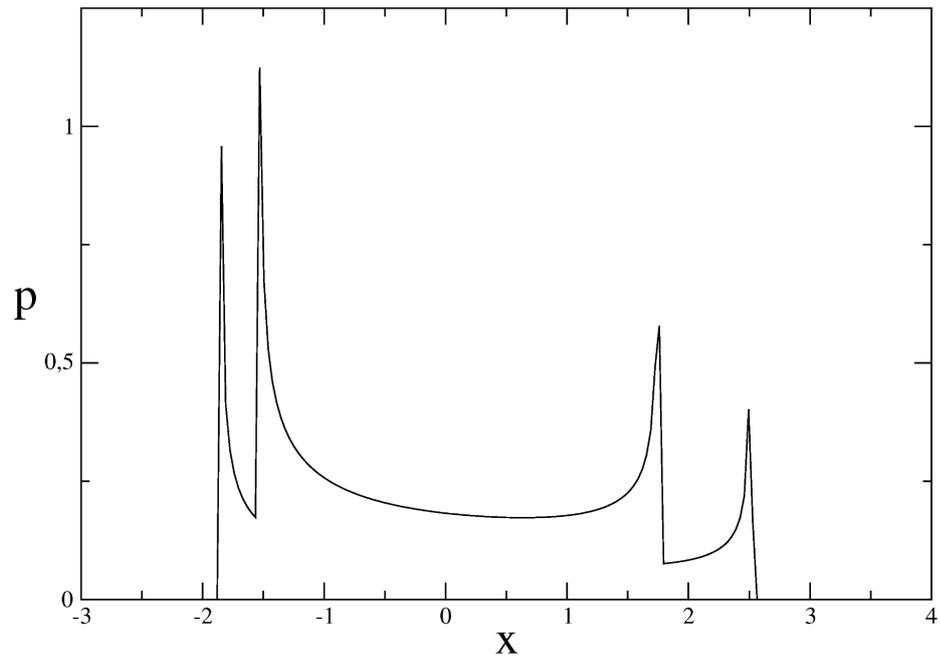
Рисунок 2.2: Распределения сдвигов фазы для $n = 2$ при $m = 0.96$ при различных интенсивностях шума (a — $D = 0.012$, b — 0.013 , c — 0.014 , d — 0.015).

при котором происходит изменение числа максимумов, соответствует стохастической бифуркации. Стохастические бифуркации связанности наблюдались для всех существующих устойчивых мод. На рисунке 2.3 приведены примеры распределений $p(x, s)$ в фиксированных точках s , полученные для моды $n = 0$ при различных значениях интенсивности шума D . Они иллюстрируют стохастические бифуркации связанности.

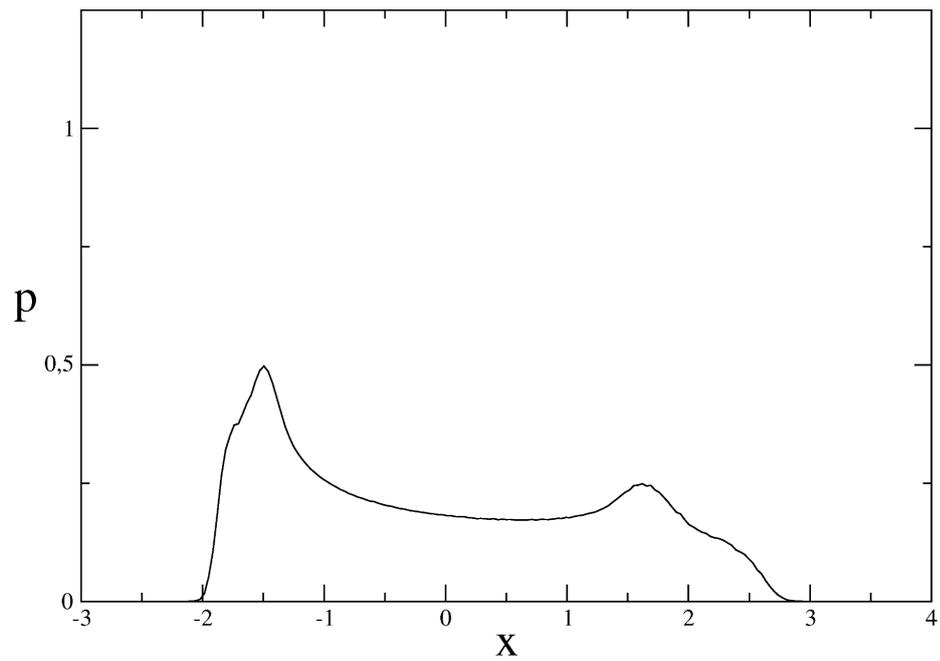
Проведённые исследования показывают, что изменение числа максимумов распределения $p(x, s)$ происходит одновременно во всех точках среды как для однородной моды $n = 0$ так и для неоднородных мод. Одновременность наблюдается даже при локальном характере шумового воздействия и несмотря на то, что для $n \neq 0$ расстояние между витками траектории на фазовом портрете сильно меняется в зависимости от координаты s ! Если и существует бифуркационный интервал значений $D_c(s)$, то он очень мал. Во всяком случае для всех значений s переход от распределения с четырьмя максимумами к распределению с двумя максимумами наблюдался для очень близких значений интенсивности D_c , различия между которыми укладывались в пределы ошибки численного эксперимента.

Имеется некоторая особенность шумового воздействия на неоднородные моды в режиме удвоенного периода вблизи его возникновения. Шум как бы «возвращает» систему в квазипериодический режим, порождая медленную модуляцию колебаний во времени и характерные медленные изменения пространственной структуры точек сечения. Однако огибающая в данном случае является не периодическими колебаниями, а медленным случайным процессом. Соответствующие иллюстрации приведены на рисунке 2.4.

Если зафиксировать интенсивность шума и увеличивать параметр m , то число максимумов распределения при некотором бифуркационном значении параметра будет удваиваться. То есть вместо бифуркаций связанности в этом случае правильнее говорить о стохастических бифуркациях удвоения. В действительности это одни и те же бифуркации, которым на плоскости параметров $m - D$ соот-

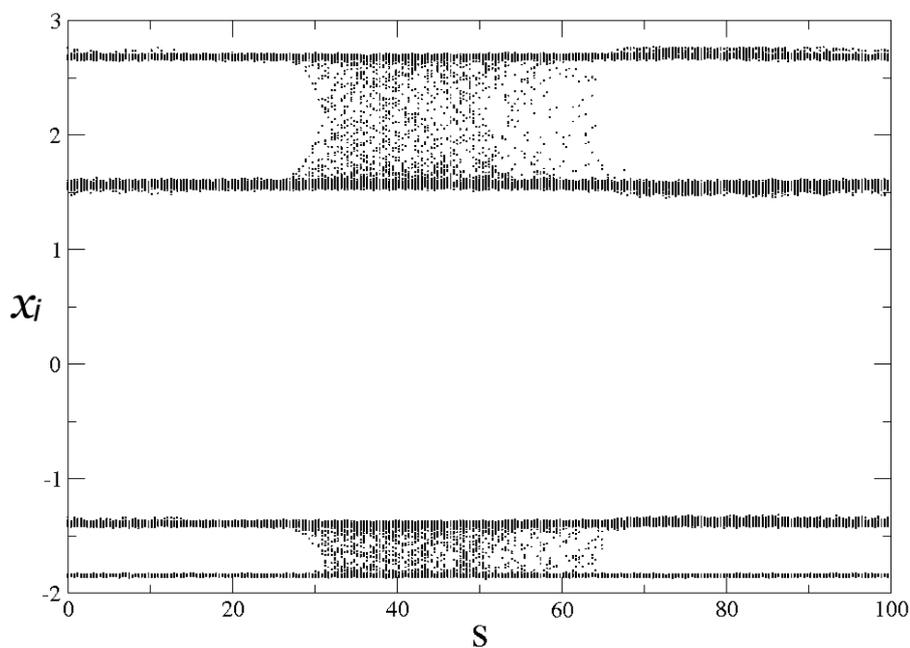


(a)

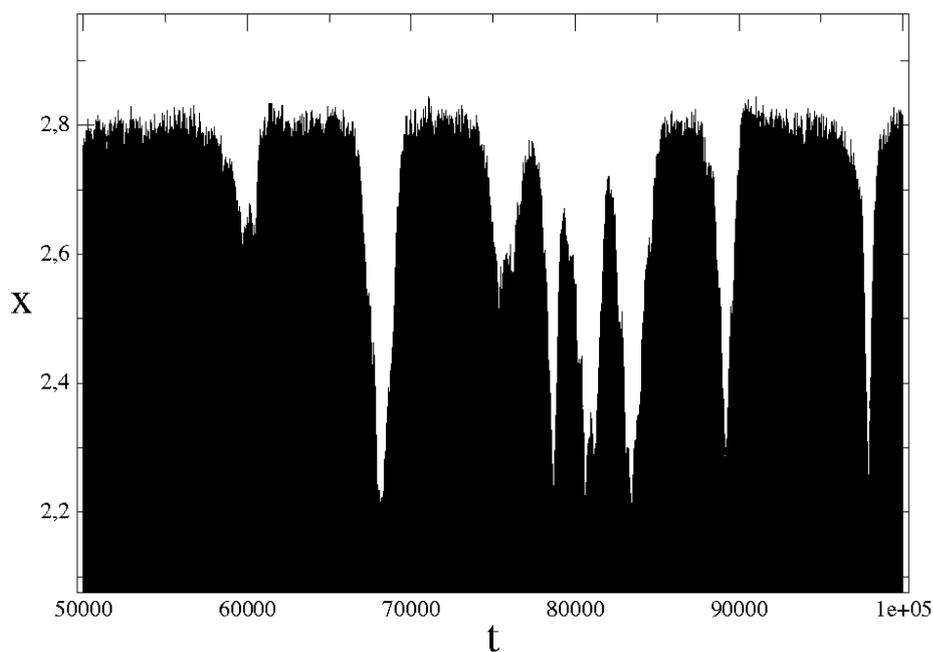


(b)

Рисунок 2.3: Вызванные шумом бифуркации связанности в среде при $m = 0.972$. На рисунке приведены плотности вероятности $p(x, s)$ в точке $s = 25$, полученные для однородного режима $n = 0$ при однородном шуме с интенсивностью $D = 0.0000001$ (a) и $D = 0.0001$ (b).



(a)



(b)

Рисунок 2.4: Режим медленной случайной модуляции, наблюдающийся для моды $n = 1$ при $m = 1.03$ в результате действия шума с интенсивностью $D = 0.00001$: а — распределение $x_i(s)$; б — фрагмент зависимости переменной x от времени в точке $s = 40$

ветствуют одни и те же бифуркационные линии, разделяющие области с разным числом экстремумов. Соответствующие линии, построенные для разных мод, представлены на рисунке 2.5. Можно видеть, что бифуркации удвоения с ростом интенсивности шума всё больше «запаздывают», смещаясь в сторону бóльших m . Это же происходит с ростом номера моды: удвоение происходит позже, а бифуркация связанности с ростом D наблюдается раньше.

2.2.3 Влияние шума на переход к хаосу

В ходе данной работы также было установлено, что результат воздействия однородного шума на однородную моду у границы перехода к хаосу аналогичен влиянию шума на «элементарный генератор». Граница перехода к хаотическому режиму незначительно сдвигается в сторону уменьшения параметра m , окна периодичности исчезают (рисунок 2.6а). Результат однородного шумового воздействия на неоднородные моды также оказался незначительным. На рисунке 2.6б представлены фрагменты зависимости максимального ляпуновского показателя от параметра m , полученные для моды $n = 1$ у порога хаоса при различной интенсивности шума. Влияние шума, даже значительной интенсивности, практически отсутствует. Граница хаоса в пределах точности вычислений ляпуновского показателя не изменяется.

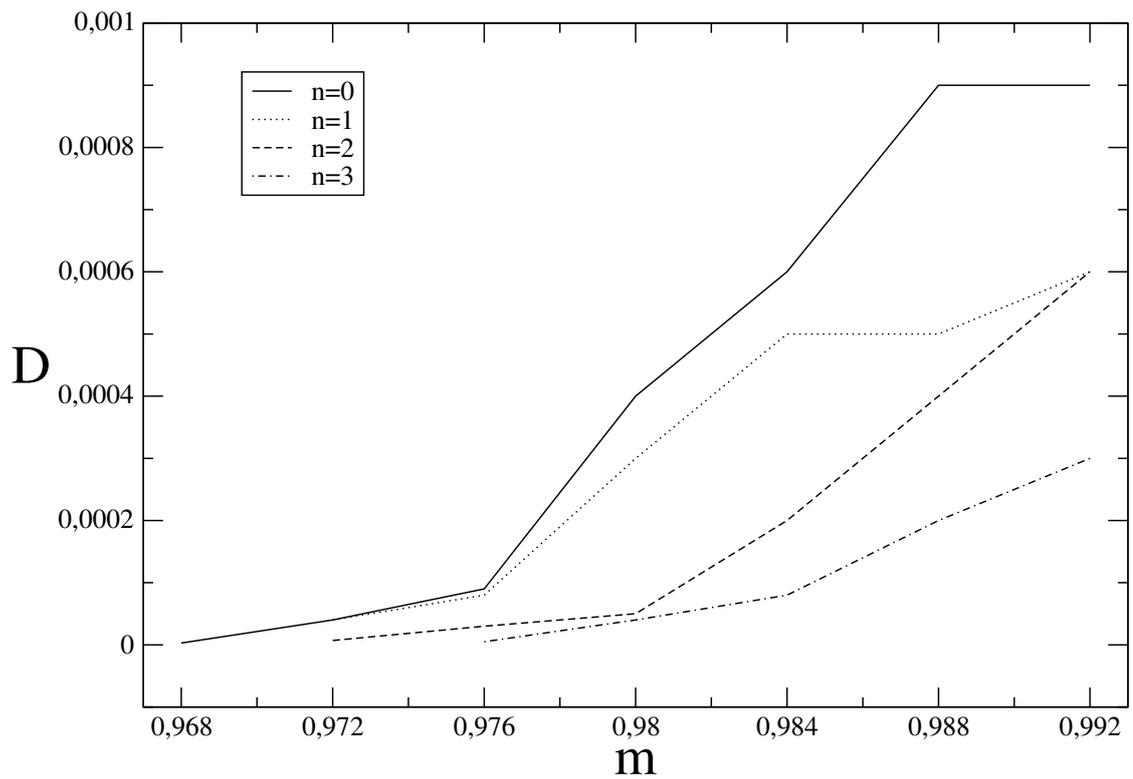
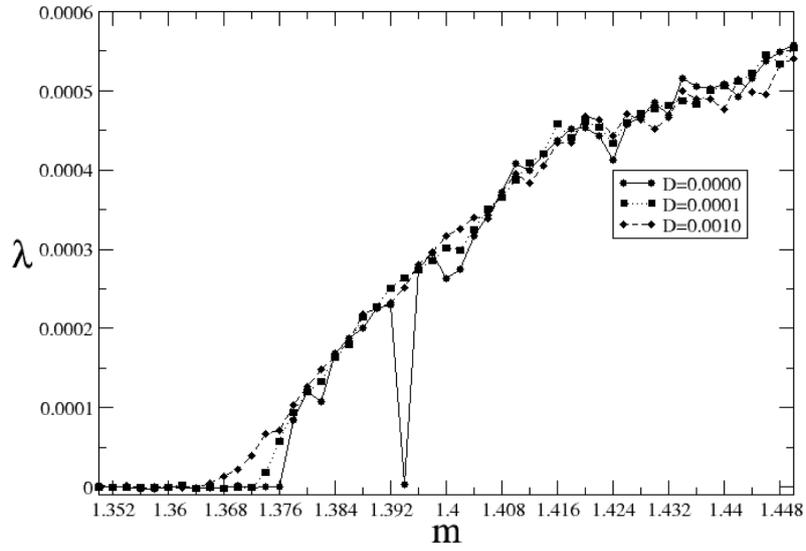
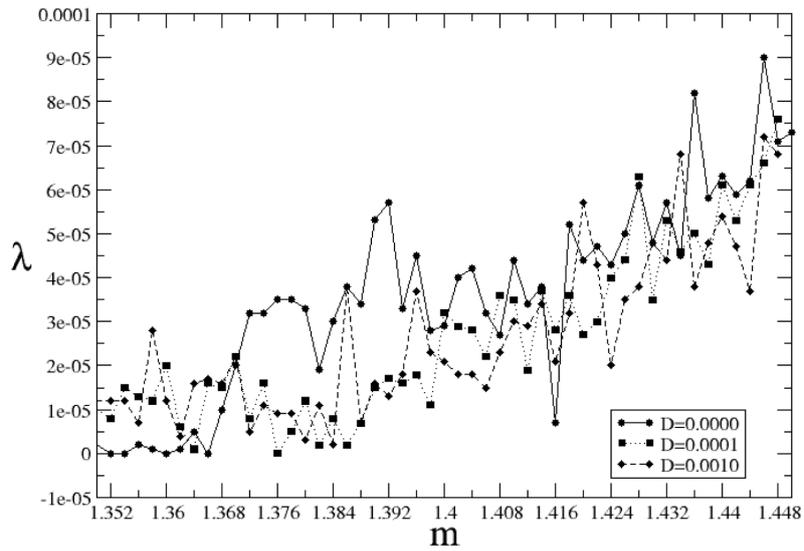


Рисунок 2.5: Зависимость критического значения интенсивности шума D_c от параметра возбуждения m для мод с различным числом n



(a)



(b)

Рисунок 2.6: Зависимости максимального ляпуновского показателя λ_U^1 мод $n = 0$ (a) и $n = 1$ (b) от параметра m для различных значений интенсивности однородного шума D .

2.3 Воздействие шума на активную среду с изменяемым характером поведения элементарной ячейки

2.3.1 Разрушение бегущих волн и влияние шума на характеристики колебаний

Рассмотрим влияние пространственно-некоррелированного шума на поведение активной среды (2.2) при фиксированном значении коэффициента диффузии $d = 0.1$ в автоколебательном ($\beta = 2$) и возбуждимом ($\beta = 4$) режимах элементарной ячейки. Как видно из рисунка 2.7, в автоколебательном режиме средний период колебаний медленно монотонно уменьшается с ростом D , в отличие от возбуждимого режима, в котором зависимость среднего периода колебаний от интенсивности шума является заметно более сложной.

Для активной среды в возбуждимом режиме можно особо выделить значение интенсивности шума $D_{cr_1} \approx 0.02$, которое является бифуркационным — при $D > D_{cr_1}$ качественно меняется характер колебаний, наблюдается переход среды в «режим случайных возбуждений» (рисунок 2.8). Возникают изломы волнового фронта, соответствующие локальным изменениям направления распространения волны (рисунок 2.8b). С увеличением интенсивности шума происходит полное разрушение режима бегущей волны и колебания среды становятся статистически однородными. Также можно отметить, что, начиная со значения интенсивности шума $D_{cr_2} \approx 0.07$ (рисунок 2.7), зависимость $\langle T \rangle$ от D при возбуждимом режиме ячейки становится практически линейной, а угол наклона её совпадает с углом наклона аналогичной зависимости при автоколебательном режиме ячейки. При этом, характер колебаний при различных режимах элементарной ячейки оказывается статистически однородным, но несколько различным (рисунок 2.9).

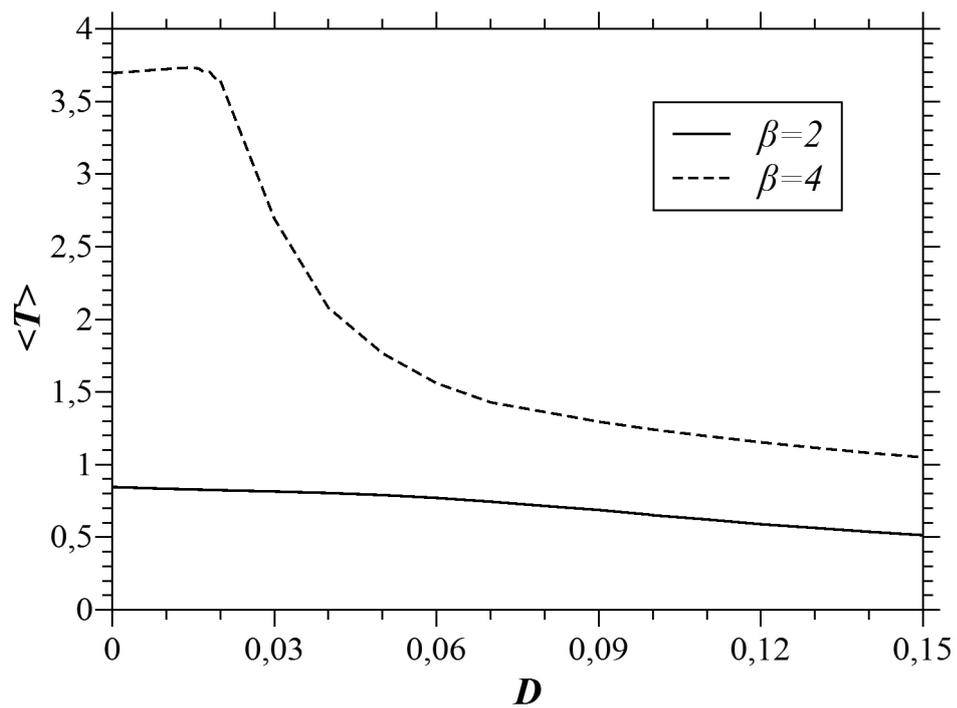


Рисунок 2.7: Зависимость среднего периода колебаний моды $n = 1$ от интенсивности шума D в автоколебательном ($\beta = 2$) и возбуждаемом ($\beta = 4$) режимах элементарной ячейки.

Так, например, на рисунке 2.9b видны разрывы волновых фронтов, в местах которых происходит возникновение или разрушение волн возбуждения.

2.3.2 Явление когерентного резонанса

Колебания среды (1.14) в автоколебательном и возбудимом режимах могут быть визуально неотличимы друг от друга, что затрудняет определение характера активной среды. Примеры пространственного профиля колебаний и характерных временных реализаций в двух указанных случаях приведены на рисунке 2.10.

Попробуем выявить различия поведения среды в указанных выше режимах с помощью случайного внешнего воздействия. В качестве характеристики степени беспорядка, вызванного в среде шумом, будем использовать нормированную девиацию интерспайковых интервалов:

$$R = \frac{\sqrt{\langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2}}{\langle T \rangle} \quad (2.5)$$

Термин «интерспайковый интервал» взят из биофизики и означает время между последовательными состояниями возбуждения (спайками). Он рассчитывался как время T между достижениями переменной $x(s, t)$ в фиксированной точке среды некоторого заданного уровня x_m (при расчетах полагалось $x_m = 2$). Угловые скобки означают статистическое усреднение. При $D = 0$, в силу периодичности спайков, $R = 0$. С ростом нерегулярности поведения системы во времени в результате действия шума величина R растет.

Проведённые исследования показали, что влияние шума на характеристики колебаний среды в автоколебательном и возбудимом режимах существенно различно. В возбудимом режиме шум приводит к гораздо более заметному изменению среднего интерспайкового интервала, который быстро убывает с ростом D . Кроме того, зависимости нормированной девиации R от интенсивности шума D , полученные в автоколебательном и возбудимом режимах, имеют качествен-

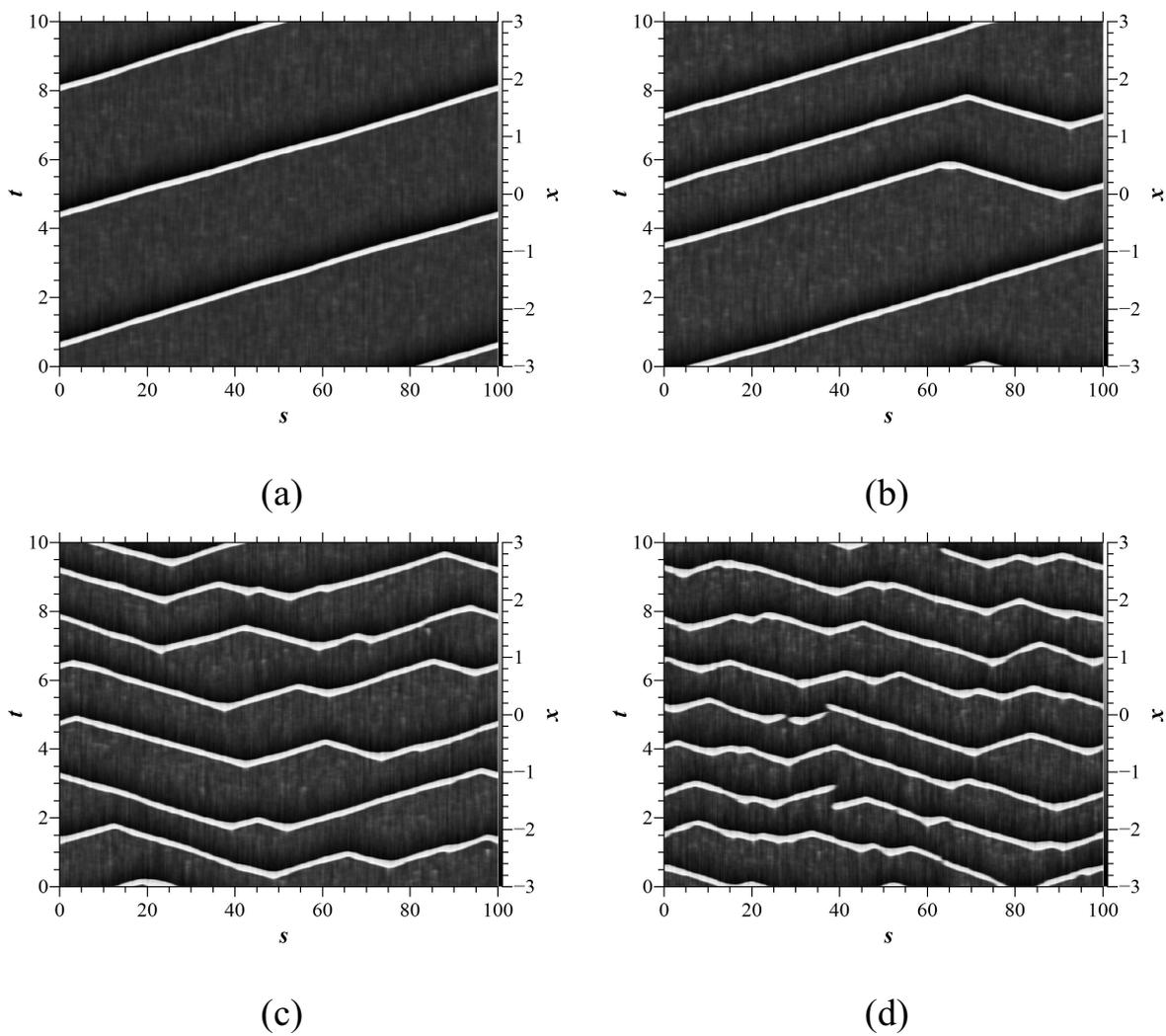
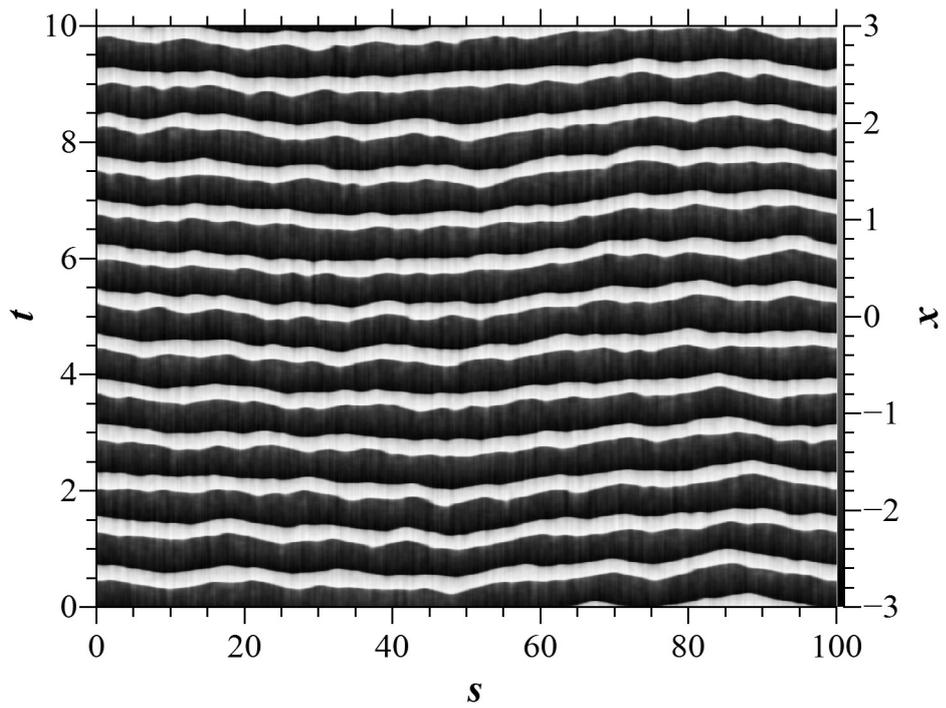
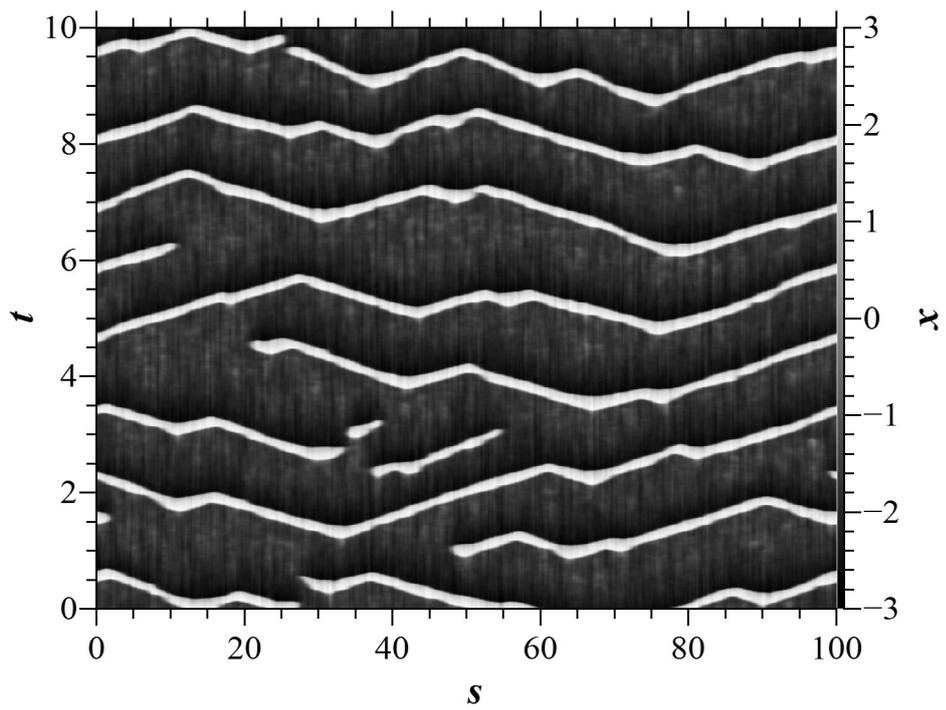


Рисунок 2.8: Пространственно-временные диаграммы моды $n = 1$ в возбужденном режиме ячейки при $\beta = 4$ и различных интенсивностях шума (a — $D = 0.02$, b — $D = 0.03$, c — $D = 0.06$, d — $D = 0.09$).

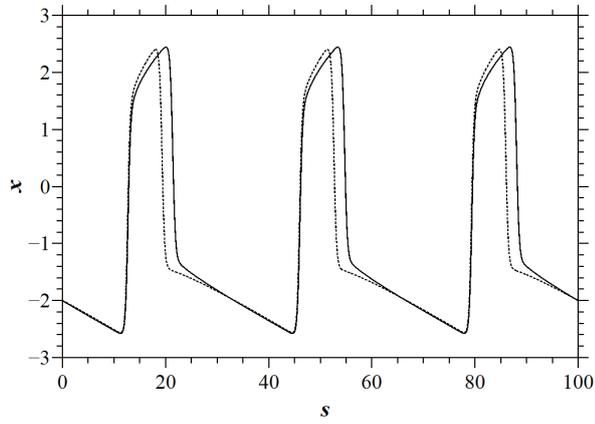


(a)

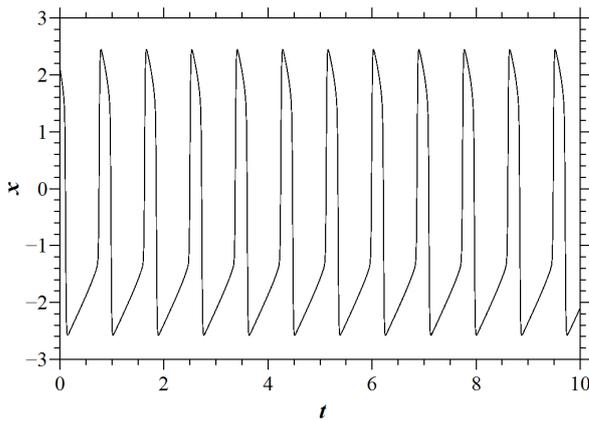


(b)

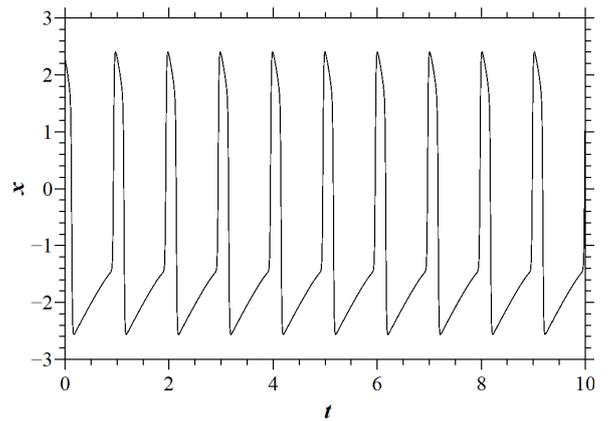
Рисунок 2.9: Пространственно-временные диаграммы моды $n = 1$ в автоколебательном (а, $\beta = 2$) и возбужденном (b, $\beta = 4$) режимах ячейки при интенсивности шума $D = 0.1$.



(a)



(b)



(c)

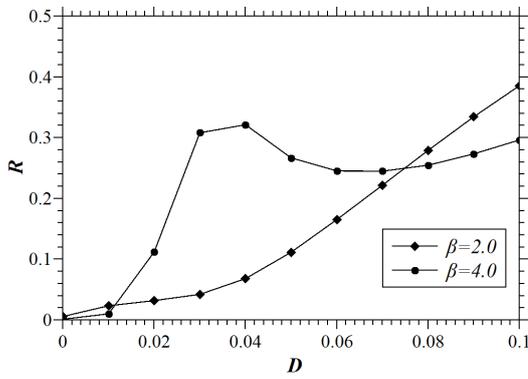
Рисунок 2.10: Пространственные профили бегущих волн (a) моды $n = 3$ при $d = 0.1$ в автоколебательном режиме (сплошная линия, $\beta = 2.7$) и в возбудимом режиме (пунктирная линия, $\beta = 3.3$) и характерные временные реализации той же моды при $\beta = 2.7$ (b) и $\beta = 3.3$ (c).

но разный характер (рисунок 2.11а). В автоколебательной среде R монотонно растет с ростом шума. В случае возбудимой среды у зависимости $R(D)$ есть локальный минимум при некотором оптимальном $D \neq 0$ (в случае, приведённом на рисунке 2.11а, вблизи $D = 0.07$), т.е. имеет место эффект когерентного резонанса (КР) [64]. Это подтверждается характерными спектрами колебаний во времени для разных значений интенсивности шума D , представленными на рисунке 2.11b-d. Как видно из рисунка, при значении интенсивности шума $D = 0.001$ колебания достаточно регулярны. В спектре мощности имеется хорошо выраженный максимум на некоторой характерной частоте (рисунок 2.11b). С увеличением интенсивности шума регулярность уменьшается и форма спектра становится более сложной (рисунок 2.11c), однако с дальнейшим увеличением D колебания вновь становятся более регулярными (рисунок 2.11d).

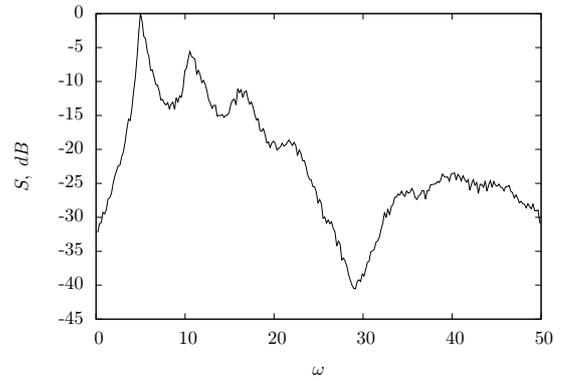
Когерентный резонанс наблюдался ранее в моделях возбудимых сред (например, в [80]), однако в среде с периодическими граничными условиями, где колебания возникают без шумового воздействия, существование КР не является очевидным и ранее не фиксировалось. Таким образом, по наличию когерентного резонанса в эксперименте можно судить о характере (автоколебательном или возбудимом) активной среды, уравнения которой неизвестны. Однако вблизи порога возникновения автоколебаний описанный метод диагностики может не работать, о чем свидетельствуют результаты, приводимые далее.

2.3.3 Переключение режимов вблизи точки бифуркации

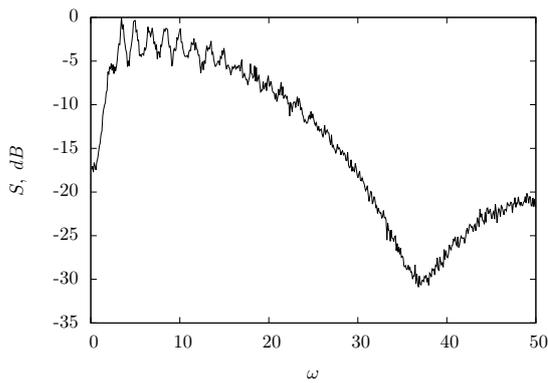
Рассмотрим поведение моды $n = 2$ при $\beta = 3.05$. Зафиксируем два значения коэффициента диффузии $d = 0.13$ и $d = 0.14$. В обоих случаях при выбранных значениях параметров отдельный осциллятор ФитцХью – Нагумо находится в возбудимом режиме, однако характер зависимости $R(D)$ для значений $d = 0.13$ и $d = 0.14$ качественно различен (рисунок 2.12а). При $d = 0.13$ зависимость является немонотонной и демонстрирует локальный минимум вблизи значения



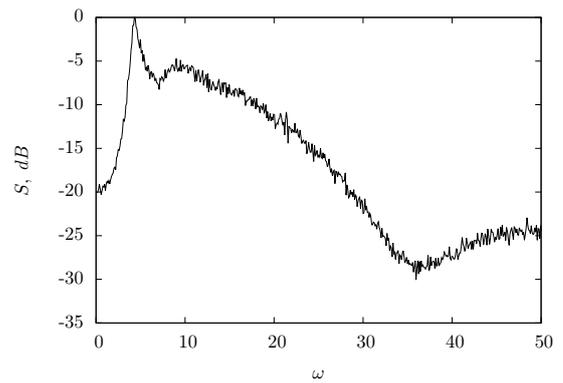
(a)



(b)



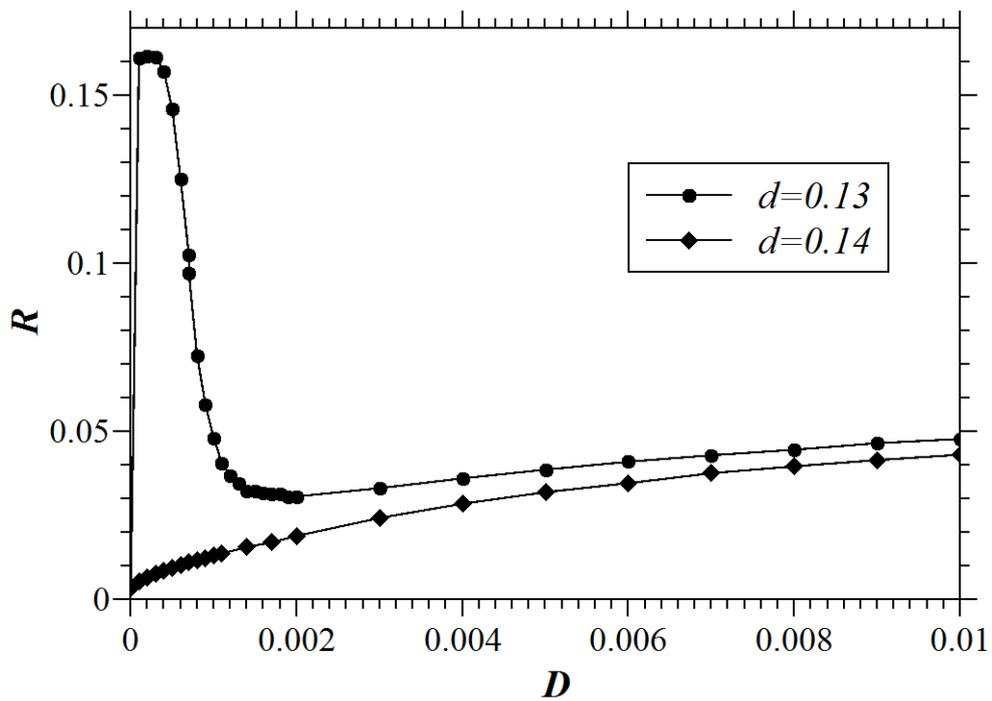
(c)



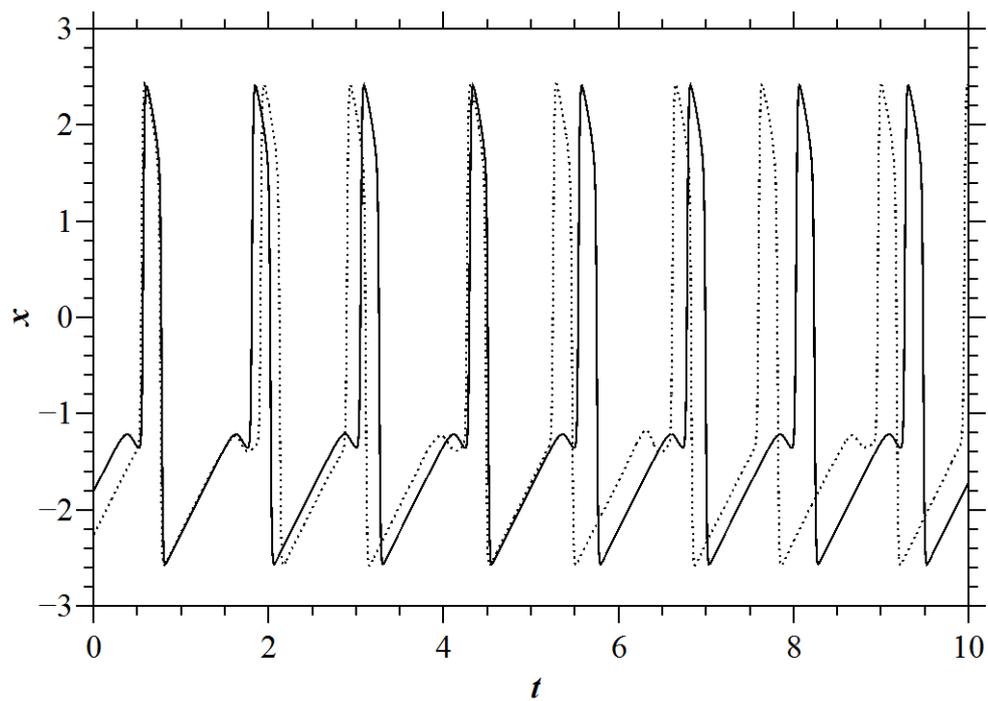
(d)

Рисунок 2.11: Зависимость нормированной девиации интерспайковых интервалов R от интенсивности шума D в автоколебательном ($\beta = 2$) и возбудимом ($\beta = 4$) режимах (a) и характерные спектры колебаний во времени при $\beta = 4$ (b — $D = 0.001$, c — $D = 0.03$, d — $D = 0.07$) для моды $n = 1$ при $d = 0.1$.

$D = 0.002$, что характерно для возбудимой среды. При $d = 0.14$ величина R монотонно растет с ростом интенсивности шума, как это имеет место в случае автоколебательного режима. Монотонный рост R с увеличением шума при $d = 0.14$, по-видимому, обусловлен близостью значения управляющего параметра к бифуркационному. Немонотонный характер зависимости $R(D)$ при $d = 0.13$ связан не с эффектом КР, а с вызванным шумом переключением на другой тип колебаний. Исходные колебания при $D = 0$ и колебания, появившиеся в результате действия шума, показаны на рисунке 2.12b. На пунктирной зависимости можно видеть, что небольшой «горбик» появляется не перед каждым спайком, как было при $D = 0$, а через один. Данный тип колебаний наблюдается при слабом шуме и в отсутствие шума, по-видимому, сосуществует с колебаниями, представленными сплошной линией. Величина R для этого режима уже при $D = 0$ отлична от нуля и не является адекватным критерием степени неупорядоченности колебаний.



(a)



(b)

Рисунок 2.12: Зависимость нормированной девиации интерспайковых интервалов R от интенсивности шума D при $\beta = 3.05$ и двух значениях коэффициента диффузии $d = 0.13$ и $d = 0.14$ (a) и вид колебаний во времени при $d = 0.13$ в случае $D = 0$ (сплошная линия) и $D = 0.0001$ (пунктирная линия) моды $n = 2$ (b).

2.4 Выводы по второй главе

По результатам исследования влияния внешнего случайного воздействия на динамику исследуемых активных сред можно сделать следующие выводы. Для модели автоколебательной среды со сложной динамикой элементарной ячейки:

- Воздействие пространственно однородной случайной силы на участок среды или на всю среду приводит к переключению системы из режимов с большими номерами n в режимы с меньшими n и, в конечном счете, к установлению «в среднем однородного» режима ($n = 0$). Подобные эффекты были известны ранее для пространственно дискретных моделей, что подтверждает их общий характер.
- При слабом шуме, не вызывающем переключения мод на временах наблюдения, в режиме колебаний удвоенного периода имеют место стохастические бифуркации связанности в полной аналогии с сосредоточенными системами. Для бегущих волн ($n \neq 0$) шумовое воздействие может приводить к возникновению случайной модуляции колебаний, медленной по сравнению с периодом.
- Слабый пространственно однородный шум на длительных временах наблюдения не оказывает существенного влияния на переход к хаосу, лишь слегка смещая границу возникновения экспоненциальной неустойчивости. Для однородной моды поведение максимального ляпуновского показателя полностью соответствует случаю отдельно взятого генератора хаоса, используемого в качестве модели ячейки среды.

Для модели активной среды с переменной динамикой элементарной ячейки:

- Результаты шумового воздействия на автоколебательную и возбудимую среды сильно отличаются. Шум в обоих случаях приводит к переключениям на другие волновые моды, что для возбудимой среды ведет к резкому изме-

нению среднего периода колебаний. Для автоколебательной среды зависимость среднего периода от интенсивности шума оказывается гораздо более плавной.

- Анализ влияния шума на активную среду, в которой в отсутствие внешних воздействий наблюдаются незатухающие колебания, даёт возможность выявить характер этой среды: является ли она автоколебательной или возбудимой. Однако при этом значения параметров исследуемой среды не должны быть слишком близки к бифуркационным.
- Показано, что шум оказывает существенное влияние на поведение возбудимой среды и может быть использован в качестве управляющего фактора, изменяющего статистические характеристики колебаний и вызывающего переключения между сосуществующими режимами.

Также можно говорить об общем для исследуемых активных сред эффекте шумового воздействия: присутствие внешней случайной силы приводит к разрушению волновых режимов в средах и установлению пространственно однородного режима в автоколебательной среде и «режима случайных возбуждений» в возбудимой.

Глава 3

Синхронизация активных сред внешним локальным гармоническим воздействием

Как известно, синхронизация является одним из фундаментальных свойств автоколебательных систем, как сосредоточенных, так и распределённых [85]. Синхронизация пространственно-временной динамики в распределённых автоколебательных системах и средах исследуется достаточно давно и этой проблеме посвящено большое количество работ [35–37, 109, 119, 124–137]. В этих работах рассматриваются различные проявления взаимной синхронизации автоколебательных элементов системы, которые могут быть как периодическими, так и хаотическими генераторами: частотно-фазовая, полная и обобщённая синхронизация. Исследуется как глобальная синхронизация всех элементов, так и частичная (кластерная) синхронизация. Кроме того, имеются работы, в которых исследуется взаимная синхронизация двух автоколебательных распределённых систем или сред [138–142]. В меньшей степени освещена проблема вынужденной синхронизации распределённых автоколебательных систем, здесь можно назвать работы [119, 135, 143–146].

Синхронизация в возбудимых распределённых системах и средах также широко отражена в научной литературе, однако это касается синхронизации колебаний, возбуждаемых действием шума, т.е. стохастической синхронизации [80–82, 118]. При этом эффекты синхронизации колебаний, возникающих, при некоторых условиях, в детерминированных возбудимых распределённых системах и средах, например при периодических граничных условиях или в двумерных средах при реализации спиральных волн, остаются значительно менее изученными. Известен эффект синхронного возбуждения спиральных волн в связанных идентичных двумерных решетках, состоящих из возбудимых элементов [147], а также эффект подавления спирально-волновой турбулентности с помощью внешнего воздействия [148, 149]. Однако данные эффекты не связаны с захватом частот, т.е. их нельзя отнести к частотно-фазовой синхронизации. Имеется ряд работ, посвящённых управлению колебаниями с помощью внешних импульсов в моделях сердечной мышцы, представляющих собой распределённые возбудимые системы с периодическими граничными условиями [87–89]. Из приведённых в них результатов видно, что локальное внешнее воздействие может изменять фазу колебаний и частоту следования импульсов возбуждения. Указанные работы не были направлены конкретно на изучение свойств синхронизации. В частности, не рассматривалось существование области синхронизации при вариации параметров воздействия. Неисследованным остается вопрос о том, имеются ли какие-либо особенности синхронизации колебаний в детерминированных возбудимых распределённых системах по сравнению с синхронизацией автоколебательных сред, и может ли реакция на внешний периодический сигнал служить средством диагностики характера исследуемой системы.

В третьей главе рассматривается воздействие внешней локальной гармонической силы на модели активных сред, описанные в главе 1. Кроме того, исследуется вынужденная синхронизация осциллятора ФитцХью – Нагумо с запаздывающей обратной связью, который можно рассматривать как качественный аналог активной среды, составленной из этих осцилляторов. Демонстрируются

особенности и различия эффектов синхронизации в автоколебательных средах и в возбудимой среде. Представленные в третьей главе диссертации результаты отражены в работе [101].

3.1 Модели и методы их исследования

Добавив в модели (1.4) и (1.14) источники внешней гармонической силы, приложенной к одному элементу среды (т.е. в одной точке пространства), получим следующие уравнения для автоколебательной среды со сложной динамикой элементарной ячейки:

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = mx + y - xz + \gamma \frac{\partial^2(x - y)}{\partial s^2} + C_0 \delta(s - s_0) \cos(\omega_{ext} t), \\ \frac{\partial y}{\partial t} = -x, \\ \frac{\partial z}{\partial t} = g(\Phi(x) - z) \end{cases} \quad (3.1)$$

и

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} = x - y - \alpha x^3 + d \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma x - y + \beta + C_0 \delta(s - s_0) \cos(\omega_{ext} t), \end{cases} \quad (3.2)$$

для активной среды с переходом от автоколебательного характера элементов к возбудимому. Здесь C_0 и ω_{ext} — амплитуда и частота гармонической силы, приложенной в точке s_0 . При численном моделировании функция Дирака заменяется на величину, обратную шагу Δs по пространству. Обозначим далее $C = C_0/\Delta s$. В силу симметрии системы результаты не зависят от выбора точки s_0 . В проведённых расчетах полагалось $s_0 = 50$. Измерения средней частоты колебаний проводились в точке $s = 0$, что также не является принципиальным.

3.1.1 Методы диагностики синхронизации

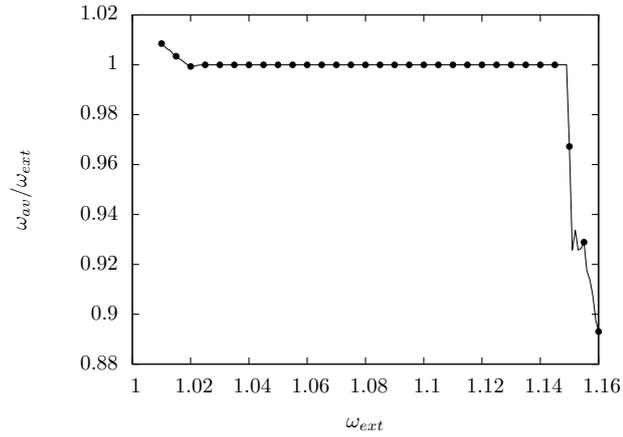
Эффект синхронизации колебаний среды внешним воздействием диагностировался с помощью соотношения частот $\frac{\omega_{av}}{\omega_{ext}}$, где $\omega_{av} = 2\pi/\langle T \rangle$ — средняя частота колебаний среды во времени, $\langle T \rangle$ — средний интерспайковый интервал

(период колебаний во времени). Очевидно, что если это соотношение равно 1, это означает совпадение частоты внешнего воздействия со средней частотой колебаний среды во времени.

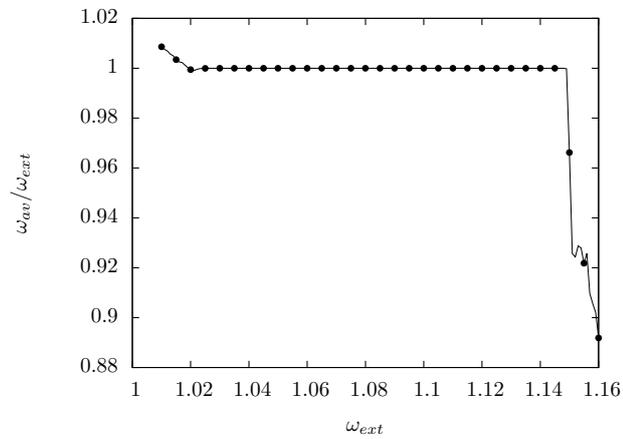
3.2 Синхронизация автоколебательной среды со сложной динамикой элементов

Рассмотрим синхронизацию автоколебательной среды (3.1), находящейся в квазигармоническом режиме ($m = 0.96$), внешним локальным гармоническим воздействием. Как показали проведённые исследования, с увеличением частоты внешнего воздействия происходит разрушение всех сосуществующих волновых мод и переход к некоему особому режиму. Поэтому области синхронизации для всех сосуществующих мод оказываются практически идентичными (рисунок 3.1). Захват частоты колебаний в области синхронизации подтверждается проекциями фазовых траекторий, приведёнными на рисунке 3.2, из которого можно видеть, что колебания во времени в области синхронизации являются периодическими.

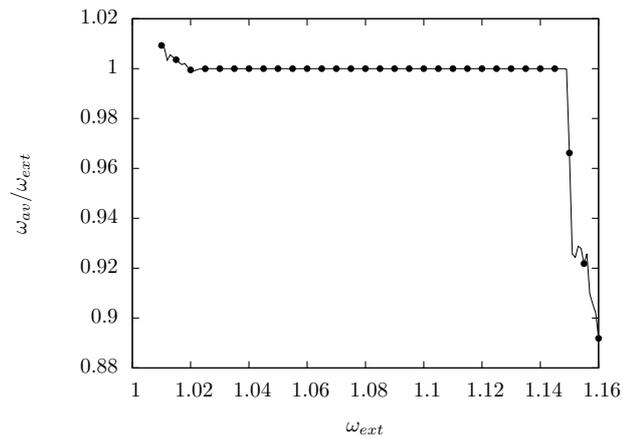
Проследим за поведением этого особого режима с увеличением частоты внешнего воздействия на примере эволюции моды $n = 1$. На рисунках 3.3 и 3.4 представлены пространственные профили и пространственно-временные диаграммы для различных частот внешнего воздействия. Как видно из рисунка 3.3, при входе в область синхронизации при $\omega_{ext} = 1.02$ с увеличением ω_{ext} происходит усложнение пространственного профиля, состоящее в увеличении частоты пространственных флуктуаций. Это усложнение происходит вплоть до правой границы области синхронизации, достигая максимума при $\omega_{ext} = 1.148$. С дальнейшим увеличением ω_{ext} начинается обратная эволюция — частота пространственных флуктуаций уменьшается. Данные эффекты также иллюстриру-



(a)

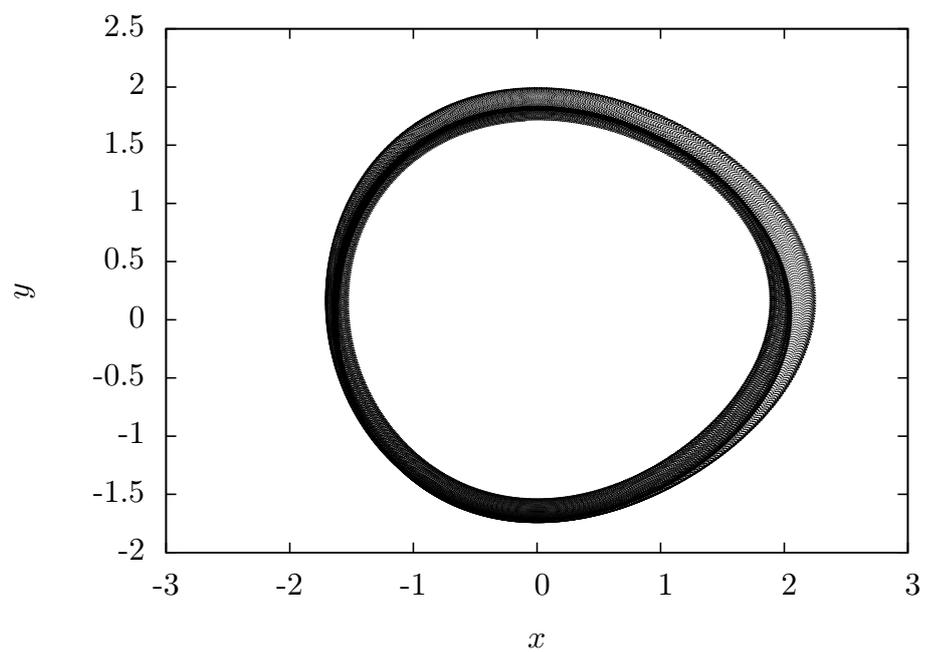


(b)

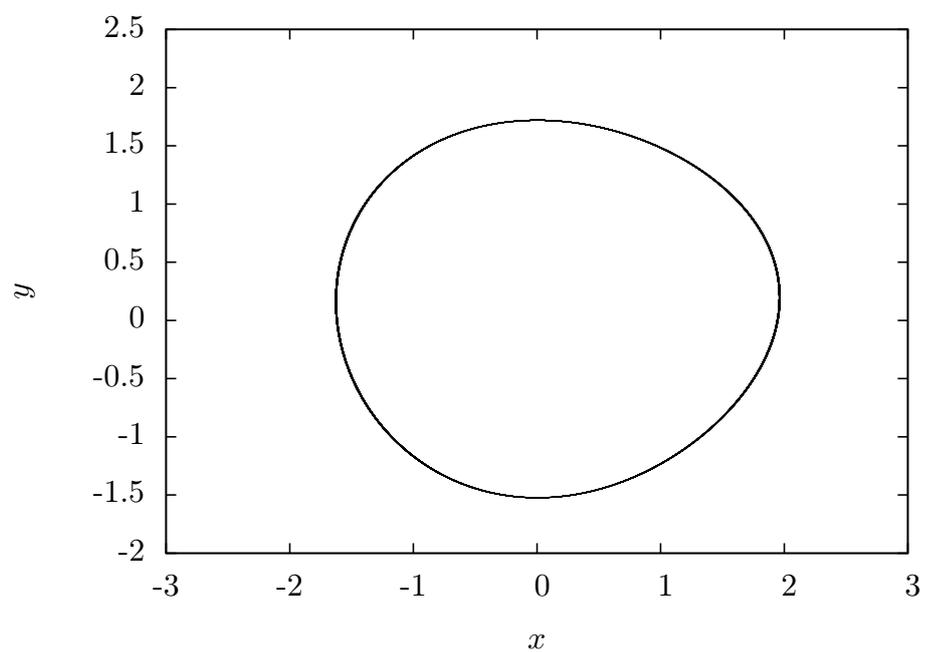


(c)

Рисунок 3.1: Зависимости отношения частот ω_{av}/ω_{ext} от частоты воздействия ω_{ext} в автоколебательной среде (3.1), полученные при $m = 0.96$ и $C = 3$ для различных мод: $n = 1$ (a), $n = 2$ (b) и $n = 3$ (c).



(a)



(b)

Рисунок 3.2: Характерные проекции фазового пространства среды (3.1) при $m = 0.96$ и $C = 3$ вне (a) и внутри (b) области синхронизации.

ются пространственно-временными диаграммами режимов исследуемой среды (рисунок 3.4).

Нужно отметить, что описанное поведение среды при вынужденной синхронизации напоминает поведение пространственных профилей волновых мод при увеличении управляющего параметра m , рассмотренное в главе 1. Можно предположить, что в основе этих явлений лежит некая общая причина, и данный эффект требует дальнейшего изучения.

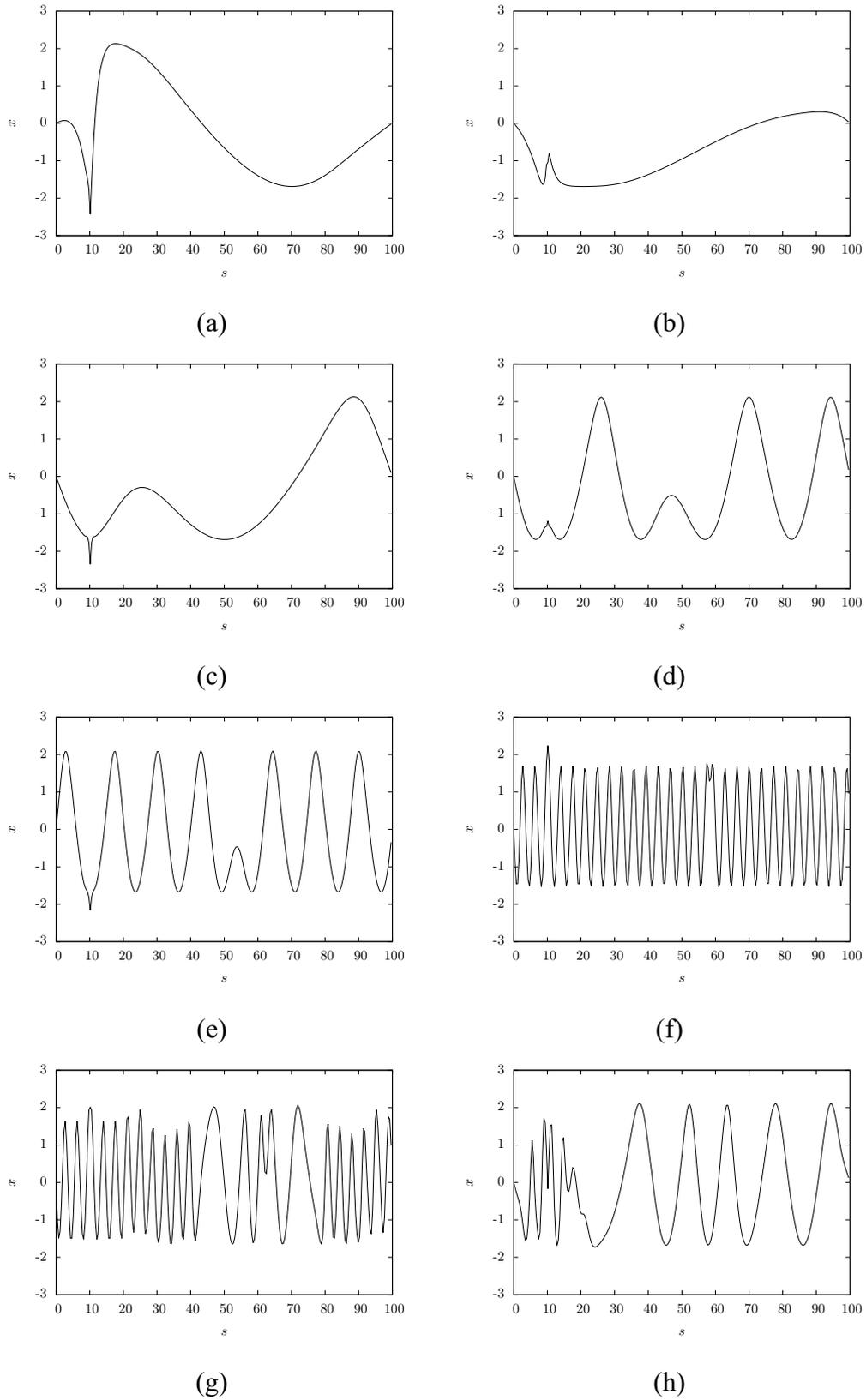


Рисунок 3.3: Эволюция формы пространственного профиля моды $n = 1$ с ростом частоты внешнего воздействия ω_{ext} (a — $\omega_{ext} = 1.01$, b — $\omega_{ext} = 1.015$, c — $\omega_{ext} = 1.02$, d — $\omega_{ext} = 1.022$, e — $\omega_{ext} = 1.03$, f — $\omega_{ext} = 1.148$, g — $\omega_{ext} = 1.15$, h — $\omega_{ext} = 1.16$).

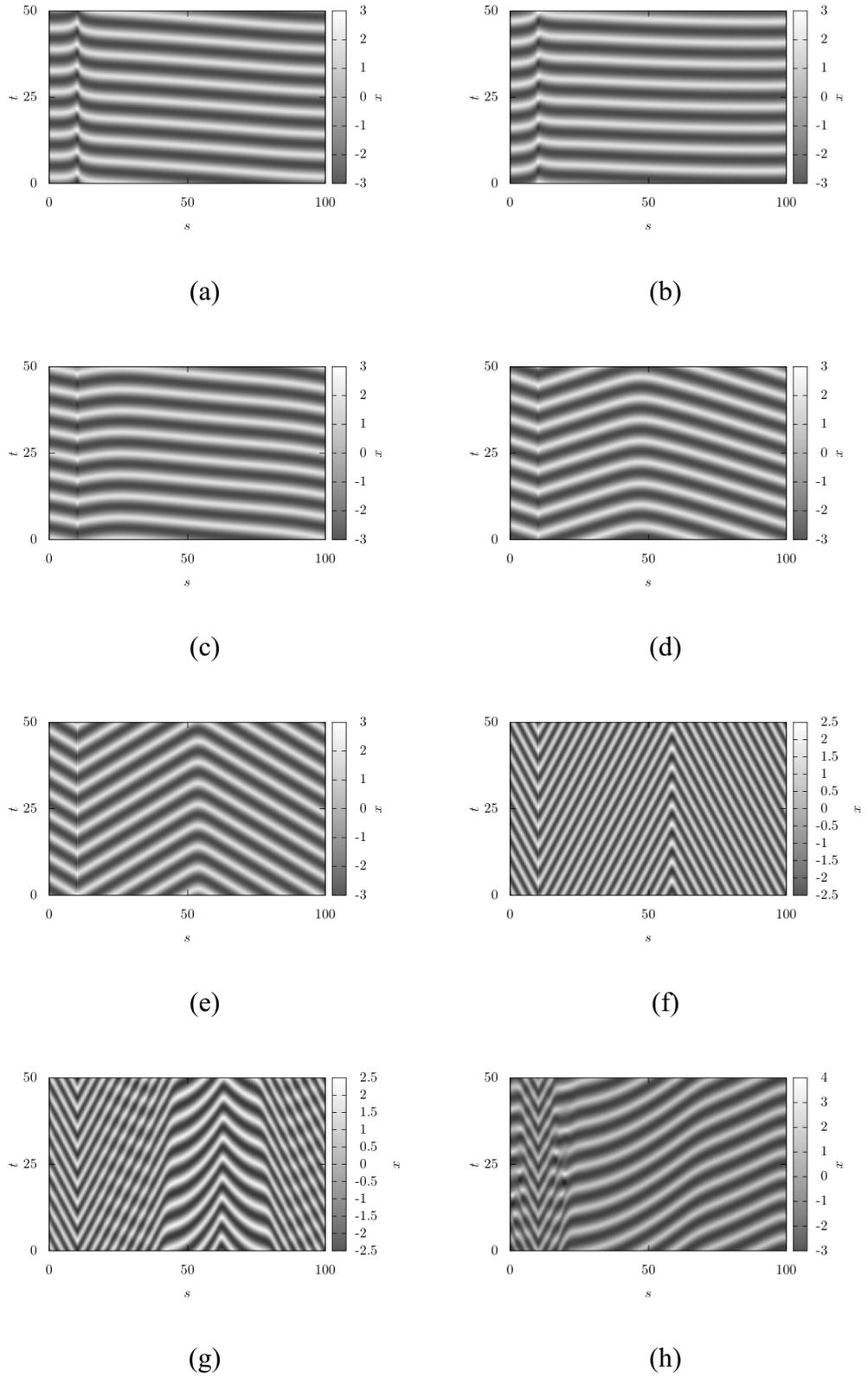


Рисунок 3.4: Эволюция формы пространственно-временной диаграммы моды

$n = 1$ с ростом частоты внешнего воздействия ω_{ext} (a — $\omega_{ext} = 1.01$,
b — $\omega_{ext} = 1.015$, c — $\omega_{ext} = 1.02$, d — $\omega_{ext} = 1.022$, e — $\omega_{ext} = 1.03$, f —
 $\omega_{ext} = 1.148$, g — $\omega_{ext} = 1.15$, h — $\omega_{ext} = 1.16$).

3.3 Синхронизация в активной среде с изменяемым характером элементарной ячейки

3.3.1 Особенности синхронизации в различных режимах активной среды

Рассмотрим сначала случай возбуждаемого режима среды (3.2). Численное моделирование показало возможность захвата частоты для всех трёх исследуемых мод в конечной области значений частоты воздействия. Области синхронизации были хорошо заметны только при достаточно большом значении амплитуды ($C = 12$), что объясняется локальным характером воздействия. Однако при этом воздействие оставалось подпороговым, т.е. не приводило к переходу элемента среды в точку s_0 в состояние возбуждения (см. рисунок 3.5).

На рисунке 3.6 приведены зависимости отношения частот от ω_{ext} , полученные для различных мод в различных режимах. Горизонтальные участки графиков, для которых отношение частот в пределах численной ошибки равно единице, соответствуют области захвата на основной частоте. Захват частоты колебаний в области синхронизации, также как и для модели (3.1), подтверждается проекциями фазовых траекторий, приведёнными на рисунке 3.7. Ширина области синхронизации в возбуждаемом режиме увеличивается с номером моды, в то время как в автоколебательном режиме она убывает, и наиболее широкая область соответствует $n = 1$, а не $n = 3$, как было в возбуждаемой среде. При этом ширина областей синхронизации в автоколебательном случае в целом на порядок больше, чем для возбуждаемой среды.

Установленные особенности эффектов синхронизации связаны с принципиально различным поведением элементов среды. В случае автоколебательной среды каждый элемент является автоколебательной системой (автогенератором) и обладает собственной частотой. Синхронизация системы в целом означает синхронизацию всех элементарных автогенераторов. При этом их фазы могут иметь

достаточно сложное распределение и меняться вдоль кольца немонотонным образом. На пространственно-временной диаграмме колебаний в области синхронизации (рисунок 3.8а) можно наблюдать искажение фронта волны. Возникает участок, где волна движется в обратном направлении (меняется наклон светлой полосы, соответствующей бегущему импульсу). Изменения движения фронта волны позволяют автоколебательным элементам среды подстраиваться и менять частоту в соответствии с частотой воздействия в сравнительно широких пределах. В возбудимой среде отдельные элементы не являются автогенераторами, и говорить об их синхронизации нельзя. Синхронизация связана с системой в целом. Частота колебаний элементов возбудимой среды определяется временем, в течение которого импульс возбуждения пробегает по кольцу. Это время связано со скоростью движения импульса (фазовой скоростью бегущей волны). Вынужденная синхронизация означает, что под действием внешней силы изменяется скорость движения импульса. Такие изменения оказываются возможны только в незначительных пределах. Причём, несмотря на локальный характер воздействия, скорость импульса остается одинаковой во всех точках пространства, о чём свидетельствуют прямые наклонные полосы на пространственно-временной диаграмме (рисунок 3.8b). В этом случае поведение волнового фронта в области синхронизации и вне её на диаграмме практически неразличимы.

Из тех же соображений можно объяснить и различную тенденцию в поведении мод при синхронизации автоколебательной и возбудимой среды. В автоколебательной среде колебания любой моды характеризуются практически одним и тем же периодом T_0 . Соответственно, при синхронизации на основном тоне, локальное возмущение для всех мод имеет период, близкий к T_0 , несмотря на то, что число волн (импульсов) в пространственном профиле растёт с ростом номера моды n . В возбудимой среде частота колебаний пропорциональна номеру n и синхронное возмущение производится в n раз чаще. Таким образом, синхронизация коротковолновых мод в автоколебательной среде оказывается менее эффективной по сравнению с основной модой. Напротив, в возбудимой среде, в

связи с ростом частоты синхронного воздействия, синхронизовать коротковолновые моды становится проще, чем моду $n = 1$.

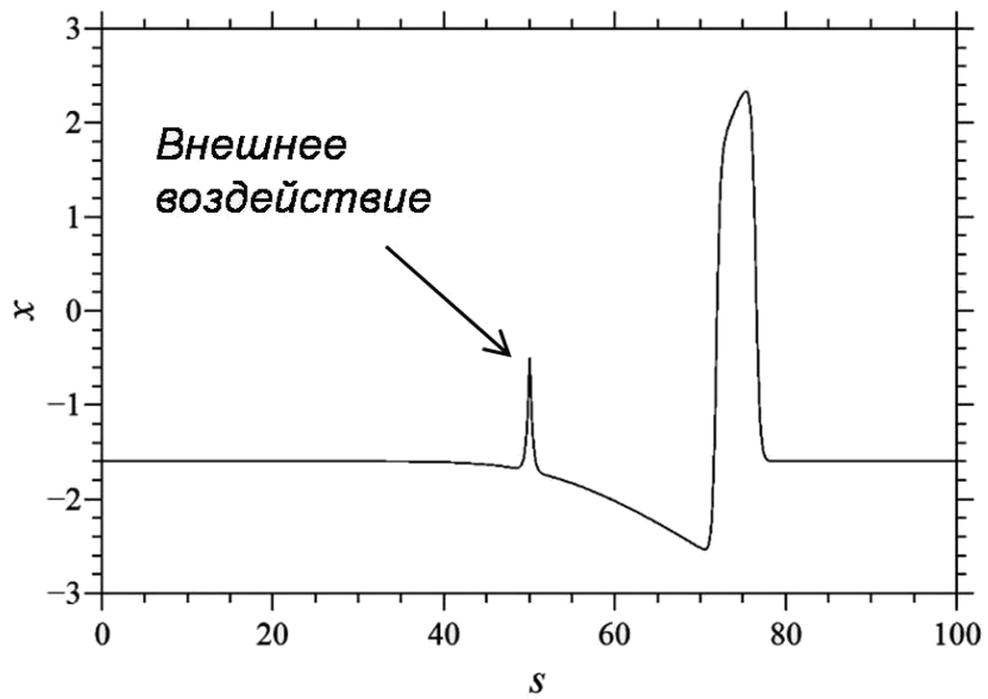
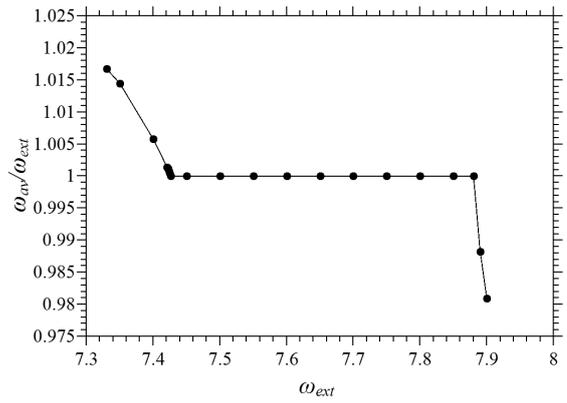
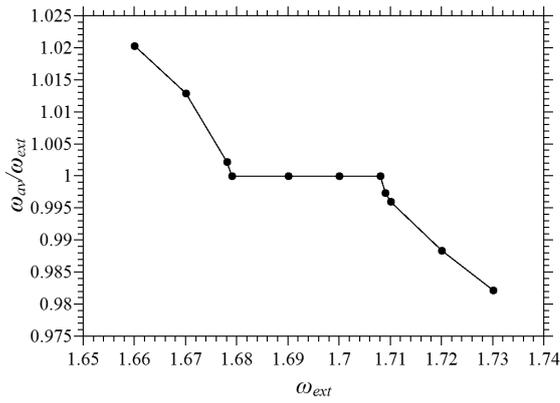
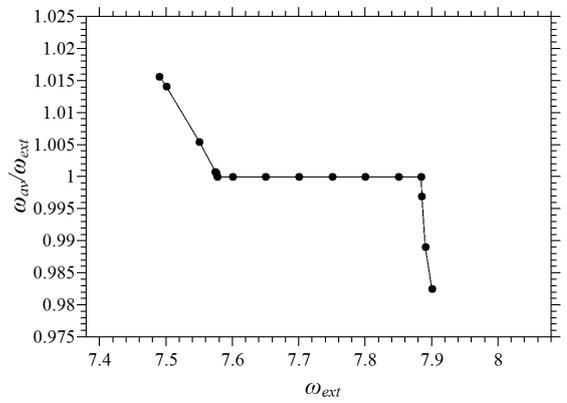
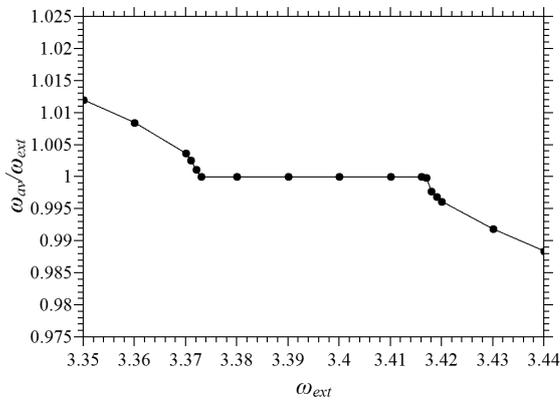


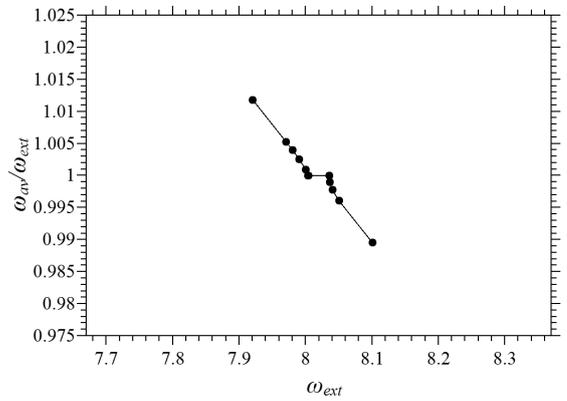
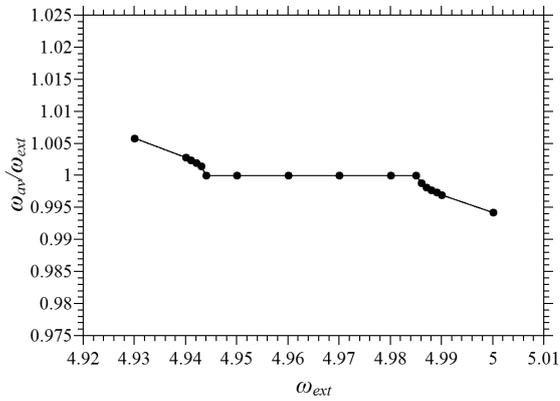
Рисунок 3.5: Пространственный профиль волны $n = 1$ в возбудимой среде (3.2) при амплитуде воздействия $C = 12$, иллюстрирующий подпороговый характер воздействия.



(a)

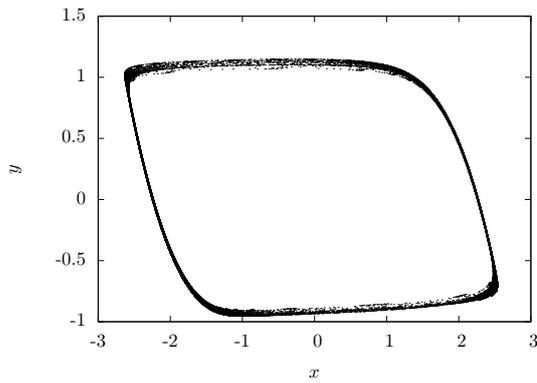


(b)

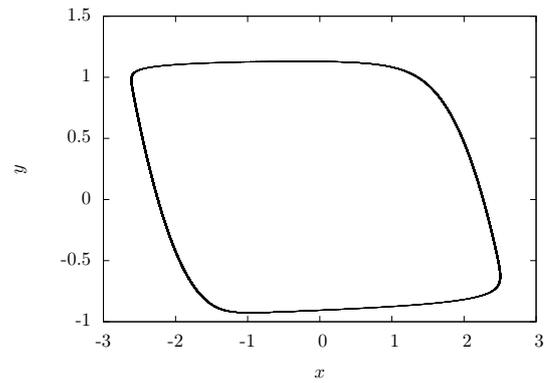


(c)

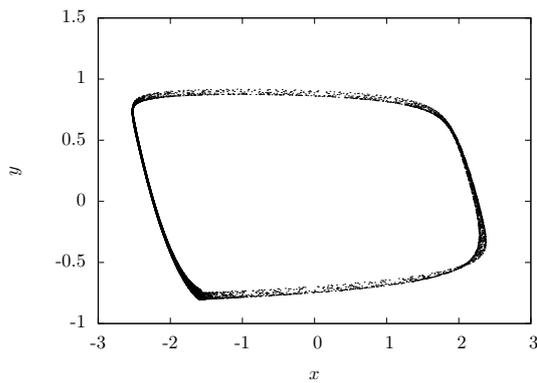
Рисунок 3.6: Зависимости отношения частот ω_{av}/ω_{ext} от частоты воздействия ω_{ext} в активной среде (3.2) в возбуждимом (слева, $\beta = 4$) и автоколебательном (справа, $\beta = 2$) режимах, полученные при $C = 12$ для различных мод: $n = 1$ (a), $n = 2$ (b) и $n = 3$ (c).



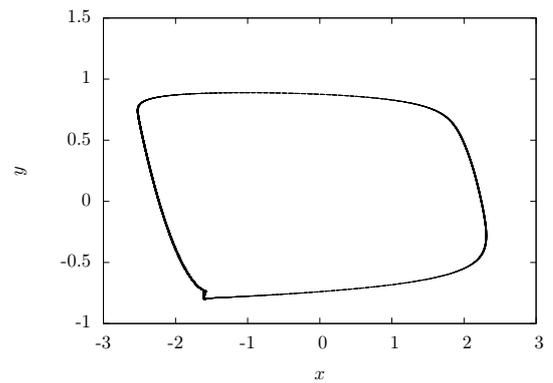
(a)



(b)



(c)



(d)

Рисунок 3.7: Характерные проекции фазового пространства среды (3.2) при $\beta = 2$ (сверху) и $\beta = 4$ (снизу) и $C = 12$ вне (слева) и внутри (справа) области синхронизации.

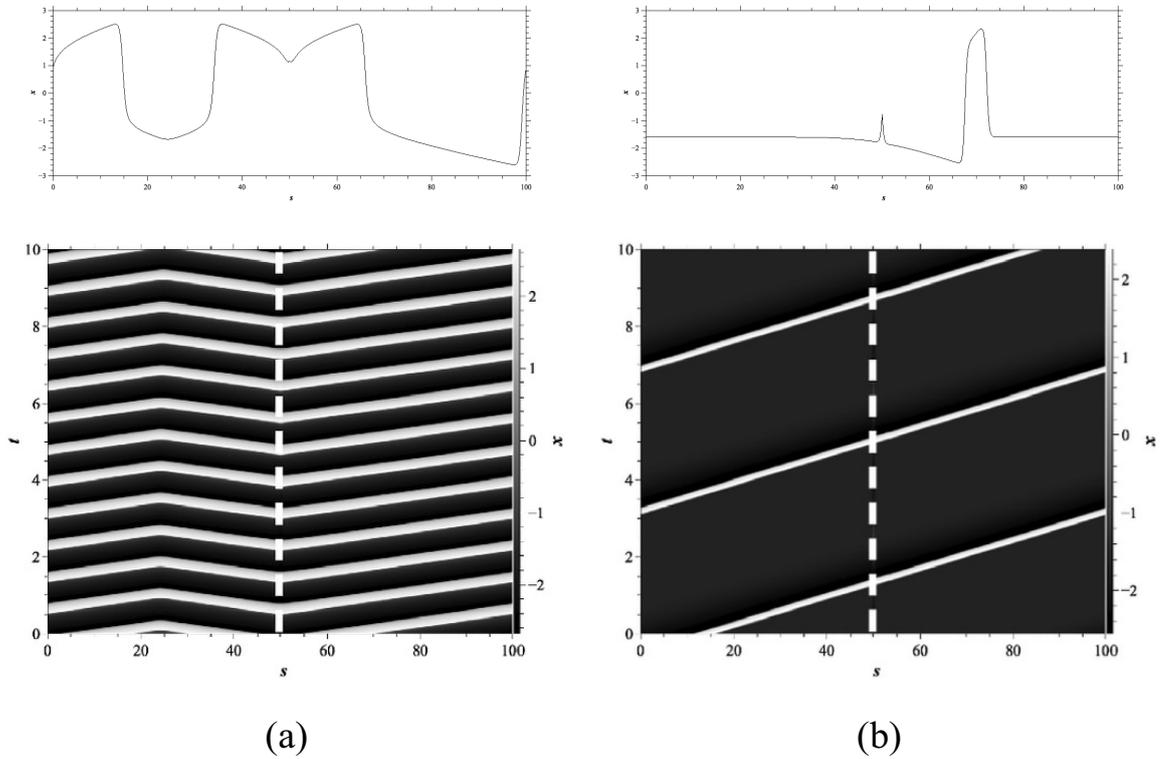


Рисунок 3.8: Мгновенные пространственные профили (сверху) и пространственно-временные диаграммы (снизу) колебаний моды $n = 1$, полученные для системы (3.2) в области синхронизации при автоколебательном (a) и возбудимом (b) режимах. Значения параметров соответствуют рисунку 3.6. Значение переменной x показано градациями тона (белый цвет соответствует максимуму, черный минимуму). Пунктирной линией отмечена точка пространства, к которой приложено внешнее воздействие.

3.3.2 Синхронизация колебаний в модели «осциллятор с запаздывающей обратной связью»

В качестве простого аналога активной среды в некоторых случаях удобно взять единичный осциллятор ФитцХью – Нагумо с цепью обратной связи, содержащей задержку во времени. Уравнения такой системы имеют вид:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - y - \alpha x^3 + d[x(t - t_d) - x(t)], \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x - y + \beta, \end{cases} \quad (3.3)$$

где t_d — время задержки.

Модель (3.3) является полным аналогом однородной среды (1.14) при соответствующих значениях параметров, если время задержки выбрано равным времени, в течении которого импульс возбуждения в (1.14) совершает полный оборот по кольцу:

$$t_d = \frac{L}{v_{ph}} = nT, \quad (3.4)$$

где v_{ph} — фазовая скорость моды с номером n , а T — период колебаний данной моды во времени. Подбирая соответствующие начальные условия (соответствующую форму колебаний интервале времени, равном t_d) можно получить различные сосуществующие колебательные моды, которые очень хорошо соответствуют колебаниям, наблюдаемым в среде (1.14). Так, на рисунке 3.9 приводится сравнение формы колебаний во времени для первой моды. Незначительные расхождения объясняются неточностью задания времени задержки, которое в численной схеме должно составлять целое число шагов интегрирования по времени. Важно также отметить, что в возбудимой среде различные волновые моды имеют одну и ту же фазовую скорость и, соответственно, время задержки будет для них одинаково. В автоколебательном режиме фазовая скорость бегущих волн различна, и значение t_d будет зависеть от номера моды.

Помимо уравнений среды (3.2) была исследована частотная синхронизация в модели осциллятора с задержкой (3.3), которая при внешнем гармоническом

воздействию принимает вид

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = x - y - \alpha x^3 + d[x(t - t_d) - x(t)], \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x - y + \beta + C \cos(\omega_{ext} t), \end{cases} \quad (3.5)$$

Значения параметров модели (3.5) выбирались такими же как в (3.2) (за исключением амплитуды воздействия), а время задержки t_d рассчитывалось в соответствии с соотношением (3.4) на основании данных, полученных из численного интегрирования (1.14). Для трёх колебательных мод в модели (3.5), соответствующих модам $n = 1, 2, 3$ в среде в возбудимом режиме осциллятора ($\beta = 4$) время задержки было одним и тем же: $t_d \approx 3.72$. В автоколебательном режиме ($\beta = 2$) время задержки для различных мод несколько различалось и составляло $t_d \approx 0.844; 1.656; 2.350$, соответственно, для первой, второй и третьей моды.

Для трёх мод в модели (3.5) были построены области синхронизации на плоскости параметров воздействия (ω_{ext}, C). Результаты, полученные в возбудимом и автоколебательном режиме, представлены на рисунке 3.10. Необходимо отметить тот факт, что при наличии локального воздействия среда перестаёт быть однородной и модель (3.5) уже не является полным аналогом (3.2). Однако, как можно видеть из представленных результатов, качественное соответствие поведения двух моделей полностью сохраняется. Наблюдаются те же закономерности синхронизации: области синхронизации в возбудимом режиме значительно уже, чем в автоколебательном, причём с ростом номера моды в возбудимом режиме они становятся шире, в то время как в автоколебательном режиме — сужаются.

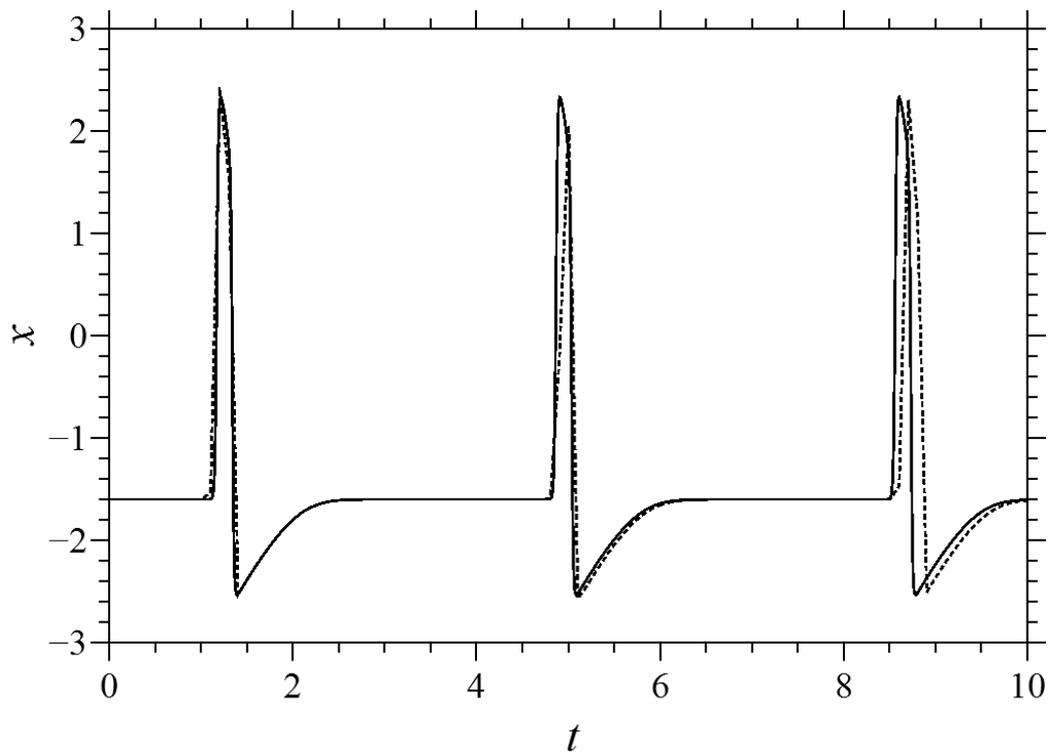


Рисунок 3.9: Форма колебаний $x(t)$ моды $n = 1$ в среде (1.14) (сплошная линия) и в модели (3.3) (пунктирная линия) в возбуждимом режиме при $\beta = 4$, $d = 0.1$

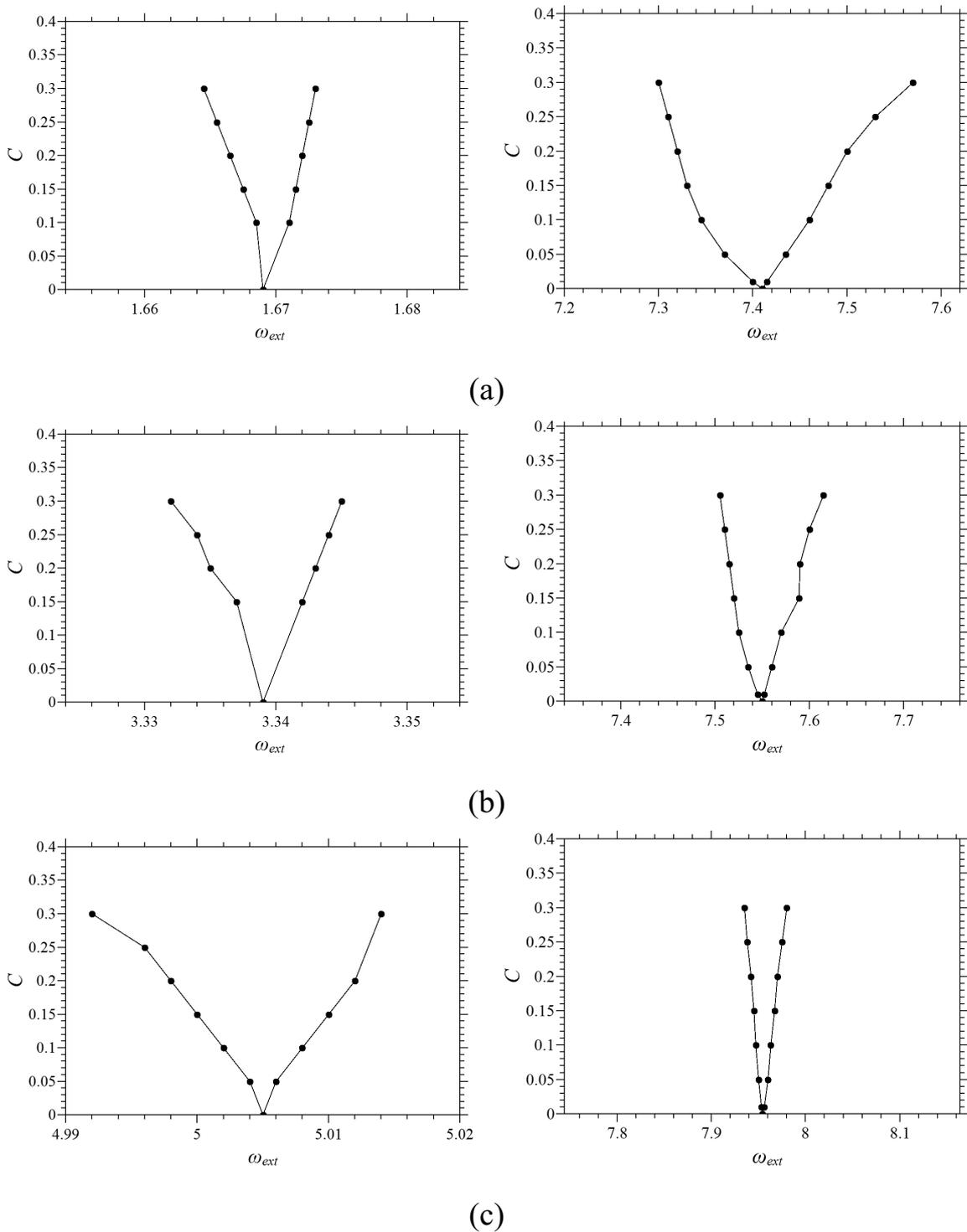


Рисунок 3.10: Области синхронизации на плоскости параметров ω_{ext} , C для мод $n = 1$ (a), $n = 2$ (b) и $n = 3$ (c) в модели (3.5) при $\beta = 4$ (возбудимый режим, слева) и $\beta = 2$ (автоколебательный режим, справа)

3.4 Выводы по третьей главе

Проведённые исследования показали, что колебания, возникающие в детерминированной среде, составленной из возбудимых элементов, могут быть синхронизированы внешним воздействием в некоторой области частотных расстройек и, в этом смысле, могут рассматриваться как особый автоколебательный режим. То же самое, по-видимому, относится к другим возбудимым системам, в которых колебания возникают не в результате шумового (или иного) внешнего воздействия, а вследствие дополнительных обратных связей (как, например, в модели (3.3)).

Были выявлены существенные отличия частотной синхронизации в возбудимой среде по сравнению с автоколебательной средой. Во-первых, области синхронизации в возбудимой среде значительно (в целом на порядок) уже, чем в автоколебательной. Во-вторых, ширина областей синхронизации по-разному зависит от номера колебательной моды n : в возбудимой среде она растёт с ростом n , а в автоколебательной, напротив, уменьшается. Данная особенность могла бы оказаться полезной при установлении характера элементов среды в реальных экспериментах.

Для модели автоколебательной среды со сложной динамикой элементарной ячейки в режиме периодических колебаний также была показана возможность синхронизации бегущих волн внешним локальным воздействием. В то же время, помимо эффекта синхронизации при внешнем воздействии для всех сосуществующих волновых мод наблюдалось усложнение пространственного профиля, состоящее в возникновении мелкомасштабных пространственных осцилляций.

Заключение

В работе были проведены исследования двух моделей активной среды с периодическими граничными условиями, направленные на выявление сходных черт и различий в поведении автоколебательных и возбудимых сред. Первая модель активной среды, предложенная в работе, создана на основе элементов со сложной динамикой, представляющих собой генераторы с инерционной нелинейностью Анищенко – Астахова. Данная модель позволила проанализировать эволюцию пространственно-временных режимов в среде с ростом управляющего параметра, контролирующего степень нелинейности элементов среды. Вторая модель среды была составлена из осцилляторов ФитцХью – Нагумо. Данная модель, в зависимости от значений параметров, демонстрирует как автоколебательное, так и возбудимое поведение каждого элемента и может служить удобным объектом для сравнения характеристик динамических режимов в том и другом случае, а также для исследования перехода от одного типа динамики к другому. При периодических граничных условиях в среде без внешних воздействий, как в автоколебательном, так и в возбудимом режиме, наблюдаются бегущие волны, и имеет место явление мультистабильности. В работе исследовались бифуркационные переходы в указанных моделях среды и эффекты, связанные со случайными и регулярными воздействиями. Был получен ряд новых научных результатов, среди которых можно выделить следующие основные результаты:

1. Для первой модели активной среды было установлено, что при переходе от квазигармонических колебаний к колебаниям более сложной формы воз-

никает сложное поведение волнового фронта бегущих волн, который может менять направление движения. Были выявлены два различных механизма удвоения периода колебаний во времени для однородной моды и для бегущих волн. Если для однородной моды удвоение периода колебаний происходит аналогично бифуркациям удвоения периода в конечномерных системах, то для бегущих волн имеет место сложная перестройка колебаний, включающая возникновение квазипериодического режима и его эволюцию. Аналогичные результаты были получены в работах других авторов для пространственно-дискретных моделей автоколебательной среды (цепочек автогенераторов) и, по-видимому, носит общий характер. Однако, в отличие от пространственно дискретных моделей, в непрерывной среде с ростом управляющего параметра при отсутствии бифуркаций колебаний во времени наблюдается постепенное усложнение мгновенного пространственного профиля бегущих волн. Возникают все более мелкомасштабные пространственные осцилляции, что ведет к пространственной неупорядоченности (то есть, к турбулентности).

2. Для бегущих волн переход к хаосу происходит в результате возникновения и разрушения квазипериодического режима, что также соответствует результатам, полученным ранее для пространственно дискретных моделей. В области слабого хаоса мультистабильность сохраняется. Однако при достижении управляющим параметром некоторого значения наблюдается кризис всех неоднородных мод и возникновение глобально устойчивого режима, для которого средний сдвиг фазы на длине системы является нулевым, но различные точки среды при этом совершают хаотические колебания с разными фазами.
3. В результате анализа второй модели среды выявлены существенные различия в поведении среды в автоколебательном и возбуждаемом режимах. Так, в случае автоколебательной среды, период колебаний слабо зависел от па-

раметра β , управляющего поведением элемента среды и практически не зависел от коэффициента диффузии. В то же время, для возбудимой среды зависимость периода колебаний от этих параметров была весьма существенной. Кроме того, период колебаний в случае автоколебательной среды не зависит от номера волновой моды, а фазовая скорость для различных мод существенно различается. В возбудимой среде, напротив, фазовая скорость практически одинакова для всех мод, а периоды колебаний различны.

4. Переход управляющего параметра через критическое значение, соответствующее смене характера элемента среды, для большинства волновых мод сопровождается заметным изменением периода и фазовой скорости, что позволяет говорить о бифуркационном переходе.
5. Во всех рассмотренных случаях шум приводил к разрушению бегущих волн и установлению режима однородных в статистическом смысле колебаний. Для первой модели среды в режиме квазигармонических колебаний в среде воздействие шума приводит к переходам от коротковолновых мод к более длинноволновым. Подобный эффект наблюдался ранее для пространственно дискретных моделей, что подтверждает его общий характер. При слабом шуме, не вызывающем переключения мод на временах наблюдения, в режиме колебаний удвоенного периода были обнаружены стохастические бифуркации связанности в полной аналогии с сосредоточенными системами. Слабый пространственно однородный шум на длительных временах наблюдения не оказывает существенного влияния на переход к хаосу, лишь слегка смещая границу возникновения экспоненциальной неустойчивости.
6. В результате сравнения двух режимов, реализуемых во второй модели среды было установлено, что в возбудимом режиме среда демонстрирует существенно большую чувствительность к шуму, чем в автоколебательном. Так, для автоколебательной среды зависимость среднего периода от интен-

сивности шума оказывается гораздо более плавной, чем для возбудимого. Кроме того, для среды в возбудимом режиме с ростом интенсивности шума наблюдается эффект когерентного резонанса, отсутствующий в автоколебательном режиме.

7. Колебания, возникающие в детерминированной среде, составленной из возбудимых элементов, могут быть синхронизированы внешним воздействием в некоторой области частотных расстройек и, в этом смысле, могут рассматриваться как особый автоколебательный режим. При этом были выявлены существенные отличия частотной синхронизации в возбудимой среде по сравнению с автоколебательной средой. Во-первых, области синхронизации в возбудимой среде значительно (в целом на порядок) уже, чем в автоколебательной. Во-вторых, ширина областей синхронизации по-разному зависит от номера колебательной моды n , определяемому длиной волны: в возбудимой среде она растет с ростом n , а в автоколебательной, напротив, уменьшается.
8. С точки зрения классического определения автоколебаний, данного А.А. Андроновым, незатухающие колебания в возбудимой среде с периодически граничными условиями, также как и в автоколебательной среде, являются автоколебательными режимами. Однако, в силу перечисленных выше различий между ними, их имеет смысл различать как два вида автоколебаний, характерных для активных сред. Установленные различия могут быть использованы при определении характера элемента среды по результатам натуральных экспериментов, что может быть существенно при построении математических моделей реальных сред.

Таким образом, поставленная цель диссертационной работы достигнута и основные задачи решены. В то же время, многие из рассмотренных проблем носят весьма сложный и многосторонний характер и требуют дальнейшего изучения. К

таким проблемам можно отнести, например, анализ эффектов шумового воздействия на распределенные системы и возможность использования этих эффектов в целях диагностики характера среды и управления ее характеристиками. Проблема синхронизации волновых процессов в детерминированных возбудимых средах также предполагает проведение дальнейших исследований. Данная работа может служить основой для таких исследований.

Литература

1. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. — Москва: Физматгиз, 1959. — 918 с.
2. Gollub, J. P. Many routes to turbulent convection / J. P. Gollub, S. V. Benson // *Journal of Fluid Mechanics*. — 1980. — Vol. 100, no. 3. — Pp. 449–470.
3. Tagg, R. Convective versus absolute instability in flow between counterrotating cylinders / R. Tagg, W.S. Edwards, H.L. Swinney // *Physical Review A*. — 1990. — Vol. 42, no. 2. — Pp. 831–837.
4. Self-Sustained Divertor Plasma Oscillations in the JET Tokamak / A. Loarte, R.D. Monk, A.S. Kukushkin et al. // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 83, no. 18. — Pp. 3657–3660.
5. Highly resolved self-excited density waves in a complex plasma / M. Schwabe, M. Rubin-Zuzic, S. Zhdanov et al. // *Physical Review Letters*. — 2007. — Vol. 99, no. 9. — P. 095002.
6. Полак, Л.С. Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах / Л.С. Полак, А.С. Михайлов. — Москва: Наука, 1983. — 283 с.
7. Kuramoto, Y. Chemical oscillations, waves, and turbulence / Y. Kuramoto. Springer series in synergetics. — Berlin: Springer-Verlag, 1984. — 156 pp.

8. *Epstein, I.R.* An introduction to nonlinear chemical dynamics: oscillations, waves, patterns, and chaos / I.R. Epstein, J.A. Pojman. — New York: Oxford University Press, 1998. — 392 pp.
9. *Yashin, V.V.* Pattern formation and shape changes in self-oscillating polymer gels / V.V. Yashin, A.C. Balazs // *Science*. — 2006. — Vol. 314, no. 5800. — Pp. 798–801.
10. *Malchow, H.* Spatiotemporal patterns in ecology and epidemiology: theory, models, and simulation / H. Malchow, S.V. Petrovskii, E. Venturino. — London: Chapman & Hall/CRC Press, 2007. — 464 pp.
11. *Brauer, F.* Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology / F. Brauer, C. Castillo-Chavez. — Springer, 2012. — 508 pp.
12. *Ermentrout, B.* Neurophysiology and Waves / B. Ermentrout, D. Pinto // *SIAM News*. — 2007. — Vol. 40, no. 2.
13. *Елькин, Ю.Е.* Автоволновые процессы / Ю.Е. Елькин // *Математическая биология и биоинформатика*. — 2006. — Т. 1, № 1-2. — С. 27–40.
14. *Жаботинский, А.М.* Концентрационные автоколебания / А.М. Жаботинский. — Москва: Наука, 1974. — 178 pp.
15. *Ланда, П.С.* Автоколебания в распределенных системах / П.С. Ланда. — Москва: Наука, 1982. — 320 с.
16. *Дмитриев, А.Ю.* Нестационарные процессы при взаимодействии винтового электронного пучка со встречной волной в волноводе / А.Ю. Дмитриев, Д.И. Трубецков, А.П. Четвериков // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. — 1991. — Т. 34, № 9. — С. 595.
17. *Трубецков, Д.И.* Автоколебания в распределённых системах “электронный поток - встречная (обратная) электромагнитная волна” / Д.И. Трубецков,

- А.П. Четвериков // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 1994. — Т. 2, № 5. — С. 3.
18. Рабинович, М.И. Введение в теорию колебаний и волн / М.И. Рабинович, Д.И. Трубецков. — Москва: Наука, 1984. — 432 с.
 19. Лоскутов, А.Ю. Основы теории сложных систем / А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов. — Москва-Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2007. — 620 с.
 20. Кринский, В.И. Автоволны / В.И. Кринский, А.С. Михайлов. — Москва: Знание, 1984. — 64 с.
 21. Васильев, В.А. Автоволновые процессы / В.А. Васильев, Ю.П. Романовский, В.Г. Яхно. — Москва: Наука, 1987. — 240 с.
 22. Гапонов-Грехов, А.В. Уравнение Гинзбурга-Ландау и нелинейная динамика неравновесных сред / А.В. Гапонов-Грехов, М.И. Рабинович // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. — 1987. — Т. 32, № 2. — С. 131–143.
 23. Aranson, Igor. The World of the Complex Ginzburg-Landau Equation / Igor Aranson, Lorenz Kramer // *Reviews of Modern Physics*. — 2002. — Vol. 74, no. 1. — Pp. 99–143.
 24. Spatiotemporal chaos in the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation / B.I. Shraiman, A. Pumir, W. Van Saarloos et al. // *Physica D*. — 1992. — Vol. 57. — Pp. 241–248.
 25. Cross, M.C. Pattern formation outside of equilibrium / M.C. Cross, P.C. Hohenberg // *Reviews of Modern Physics*. — 1993. — Vol. 65. — Pp. 851–1112.

26. *Chaté, H.* Spatiotemporal intermittency regimes of the one-dimensional complex Ginzburg-Landau equation / H. Chaté // *Nonlinearity*. — 1994. — Vol. 7. — Pp. 185–204.
27. *Shabunin, A.V.* Developing Chaos on Base of Traveling Waves in a Chain of Coupled oscillators with Period-Doubling: Synchronization and Hierarchy of Multistability Formation / A.V. Shabunin, V.V. Astakhov, V.S. Anishchenko // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2002. — Vol. 12, no. 8. — Pp. 1895–1907.
28. Бегущие волны в дискретной ангармонической автоколебательной среде / А.В. Шабунин, А.А. Акопов, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2005. — Т. 13, № 4. — С. 37–55.
29. *Shabunin, A.V.* Phase multistability and phase synchronization in an array of locally coupled period-doubling oscillators / A.V. Shabunin, U. Feudel, V.V. Astakhov // *Physical Review E*. — 2009. — Vol. 80, no. 2. — P. 026211.
30. *Bragard, J.* Characterization of synchronized spatiotemporal states in coupled nonidentical complex Ginzburg-Landau equations / J. Bragard, F.T. Arecchi, S. Boccaletti // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2000. — Vol. 10, no. 10. — Pp. 2381–2389.
31. *Короновский, А.А.* Обобщенная хаотическая синхронизация в связанных уравнениях Гинзбурга-Ландау / А.А. Короновский, П.В. Попов, А.Е. Храмов // *ЖЭТФ*. — 2006. — Т. 130, № 4. — С. 748–764.
32. *Zhou, C.T.* Synchronization in nonidentical complex Ginzburg-Landau equations / C.T. Zhou // *Chaos*. — 2006. — Vol. 16, no. 1. — P. 013124.
33. К вопросу о спектре пространственных ляпуновских показателей нелинейной активной среды, описываемой комплексным уравнением

- Гинзбурга-Ландау / А.А. Короновский, О.И. Москаленко, Н.С. Фролов, А.Е. Храмов // *Письма в ЖТФ*. — 2010. — Vol. 36, no. 14. — Pp. 19–25.
34. *Kuptsov, P.V.* Strict and fussy mode splitting in the tangent space of the Ginzburg-Landau equation / P.V. Kuptsov, U. Parlitz // *Physical Review E*. — 2010. — Vol. 81. — P. 036214.
35. Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators / G.V. Osipov, A.S. Pikovsky, M.G. Rosenblum, J. Kurths // *Physical Review E*. — 1997. — Vol. 55, no. 3. — Pp. 2353–2361.
36. On Chaotic Synchronization in a Linear Array of Chua's Circuits / V.N. Belykh, N.N. Verichev, L. Kocarev, L.O. Chua // *Journal of Circuits, Systems, and Computers*. — 1993. — Vol. 3, no. 2. — Pp. 579–589.
37. Пространственная синхронизация и бифуркации развития хаоса в цепочке связанных генераторов / В.С. Анищенко, И.С. Арансон, Д.Э. Постнов, М.И. Рабинович // *Доклады Академии наук СССР*. — 1986. — Т. 286, № 5. — С. 1120–1124.
38. *Kaneko, K.* Spatiotemporal Chaos in One- and Two-Dimensional Coupled Map Lattices / K. Kaneko // *Physica D*. — 1989. — Vol. 37, no. 1-3. — Pp. 60–82.
39. *Кузнецов, А.П.* Критическая динамика решеток связанных отображений у порога хаоса / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. — 1991. — Т. 34, № 10-12. — С. 1079–1115.
40. *Belykh, V.N.* One-dimensional map lattice: Synchronization, bifurcations, and chaotic structures / V.N. Belykh, E. Mosekilde // *Physical Review E*. — 1996. — Vol. 54, no. 4. — Pp. 3196–3203.

41. Invariant Manifolds and Cluster Synchronization in a Family of Locally Coupled Map Lattices / V. Belykh, I. Belykh, N. Komrakov, E. Mosekilde // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. — 2000. — Vol. 4, no. 3. — Pp. 245–256.
42. Купцов, П.В. Синхронизация и коллективное поведение цепочки однонаправленно связанных отображений с периодическими граничными условиями / П.В. Купцов, С.П. Кузнецов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2004. — Т. 12, № 3. — С. 3–22.
43. Winfree, A.T. Varieties of spiral wave behavior: An experimentalist's approach to the theory of excitable media / A.T. Winfree // *Chaos*. — 1991. — Vol. 1, no. 3. — Pp. 303–334.
44. Vulnerability in an excitable medium: Analytical and numerical studies of initiating unidirectional propagation / C.F. Starmer, V.N. Biktashev, D.N. Romashko et al. // *Biophysical Journal*. — 1993. — Vol. 65, no. 5. — Pp. 1775–1787.
45. Starobin, J.M. Vulnerability in one-dimensional excitable media / J.M. Starobin, Y.I. Zilberter, C.F. Starmer // *Physica D*. — 1994. — Vol. 70. — Pp. 321–341.
46. Alford, J.G. Rotating wave solutions of the FitzHugh–Nagumo equations / J.G. Alford, G. Auchmuty // *Journal of Mathematical Biology*. — 2006. — Vol. 53, no. 5. — Pp. 797–819.
47. Pertsov, A.M. Rotating spiral waves in a modified FitzHugh–Nagumo model / A.M. Pertsov, E.A. Ermakova, A.V. Panfilov // *Physica D*. — 1984. — Vol. 14. — Pp. 117–124.
48. Zaritsky, R.M. Stable Spiral structures and their interaction in two-dimensional excitable media / R.M. Zaritsky, A.M. Pertsov // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 66. — P. 066120.

49. *Gorelova, N.A.* Spiral waves of spreading depression in the isolated chicken retina / N.A. Gorelova, J. Bures // *Journal of Neurobiology*. — 1983. — Vol. 14, no. 5. — Pp. 353–363.
50. *Gray, R.A.* Spiral waves and the heart / R.A. Gray, J. Jalife // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 1996. — Vol. 6, no. 3. — Pp. 415–435.
51. *Petrov, V.S.* Fibroblasts alter spiral wave stability / V.S. Petrov, G.V. Osipov, J. Kurths // *Chaos*. — 2010. — Vol. 20, no. 4. — P. 045103.
52. *Winfree, A.T.* The Geometry of Biological Time / A.T. Winfree. — New York: Springer, 1980. — 530 pp.
53. *Jones, K.R.T.* Stability of the traveling wave solution of the FitzHugh-Nagumo system / K.R.T. Jones // *Transactions of the American Mathematical Society*. — 1984. — Vol. 286. — Pp. 431–469.
54. *Neu, J.C.* Initiation of propagation in a one-dimensional excitable medium / J.C. Neu, R.S. Preissig, W. Krassowska // *Physica D*. — 1997. — Vol. 102. — Pp. 285–299.
55. Paroxysmal starting and stopping of circulating waves in excitable media / Y. Nagai, H. Gonzalez, A. Shrier, L. Glass // *Physical Review Letters*. — 2000. — Vol. 84. — Pp. 4248–4251.
56. *Cytrynbaum, E.* Stability conditions for the traveling pulse: Modifying the restitution hypothesis / E. Cytrynbaum, J.P. Keener // *Chaos*. — 2002. — Vol. 12. — Pp. 788–799.
57. *Wiener, N.* The mathematical formulation of the problem of conduction of impulses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle / N. Wiener, A. Rosenblueth // *Archives of the Institute of Cardiology of Mexico*. — 1946. — Vol. 16. — Pp. 205–265.

58. *Rinzel, J.* Traveling wave solutions of a nerve conduction equation / J. Rinzel, J.B. Keller // *Biophysical Journal*. — 1973. — Vol. 13. — Pp. 1313–1337.
59. *Романовский, Ю.П.* Математическое моделирование в биофизике / Ю.П. Романовский, Н.В. Степанова, Д.С. Чернавский. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 402 с.
60. *Keener, J.P.* Mathematical physiology / J.P. Keener, J. Sneyd. — New York: Springer, 1998. — 766 pp.
61. *Крюков, А.К.* Влияние свойств осцилляторной среды на распространение возбуждения / А.К. Крюков, Г.В. Осипов // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2013. — Т. 21, № 2. — С. 188–200.
62. *FitzHugh, R.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / R. FitzHugh // *Biophysical Journal*. — 1961. — Vol. 1, no. 6. — Pp. 445–466.
63. *Nagumo, J.S.* An active pulse transmission line simulating nerve axon / J.S. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*. — 1962. — Vol. 50. — Pp. 2061–2071.
64. *Pikovsky, A.S.* Coherence resonance in a noise-driven excitable system / A.S. Pikovsky, J. Kurths // *Physical Review Letters*. — 1997. — Vol. 78. — Pp. 755–778.
65. Experimental observation of coherence resonance in cascaded excitable systems / D.E. Postnov, S.K. Han, T.G. Yim, O.V. Sosnovtseva // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 59. — Pp. R3791–R3794.
66. Experimental evidence of coherence resonance in an optical system / G. Giacomelli, M. Giudici, S. Balle, J.R. Tredicce // *Physical Review Letters*. — 2000. — Vol. 84. — Pp. 32–3301.

67. *Miyakawa, K.* Experimental observation of coherence resonance in an excitable chemical reaction system / K. Miyakawa, H. Isikawa // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 66. — P. 046204.
68. Experimental observation of the stochastic bursting caused by coherence resonance in a neural pacemaker / H. Gu, M. Yang, L. Li et al. // *Neuroreport*. — 2002. — Vol. 13. — Pp. 1657–1660.
69. *Рабинович, М.И.* Стохастические автоколебания и турбулентность / М.И. Рабинович // *УФН*. — 1978. — Т. 125. — С. 123–168.
70. *Вьюн, В.А.* Стохастические акустоэлектрические автоколебания в слоистых структурах пьезоэлектрик-полупроводник / В.А. Вьюн // *Акустический журнал*. — 1998. — Т. 44, № 3. — С. 349–353.
71. Регулярные и стохастические автоколебания в модели реологического осциллятора / И.А. Башкирцева, А.Ю. Зубарев, Л.Ю. Исакова, Л.Б. Ряшко // *Нелинейная динамика*. — 2009. — Т. 5, № 4. — С. 603–620.
72. Spiralwaves in disinhibited mammalian neocortex / X. Huang, W.C. Troy, Q. Yang et al. // *Journal of Neuroscience*. — 2004. — Vol. 24. — Pp. 9897–9902.
73. *Lancaster, J.L.* Modeling excitable systems: Reentrant tachycardia / J.L. Lancaster, E.H. Hellen, E.M. Leise // *American Journal of Physics*. — 2010. — Vol. 78, no. 1. — Pp. 56–63.
74. *Garcia-Ojalvo, J.* Noise in spatially extended systems / J. Garcia-Ojalvo, J. M. Sancho. — New York: Springer-Verlag, 1999. — 307 pp.
75. *Garcia-Ojalvo, J.* Effects of External Noise on the Swift-Hohenberg Equation / J. Garcia-Ojalvo, A. Hernandez-Machado, J. M. Sancho // *Physical Review Letters*. — 1993. — Vol. 71, no. 10. — Pp. 1442–1545.

76. Numerical study of the dynamical aspects of pattern selection in the stochastic Swift-Hohenberg equation in one dimension / Jorge Vinals, Emilio Hernandez-Garcia, Maxi San Miguel, Raul Toral // *Physical Review A*. — 1991. — Vol. 44, no. 2. — Pp. 1123–1133.
77. *Kuznetsov, S.P.* Noise-induced absolute instability / S.P. Kuznetsov // *Mathematics and Computers in Simulation*. — 2002. — Vol. 58. — Pp. 435–442.
78. Mechanisms of chaos onset in an inhomogeneous medium under cluster synchronization destruction / V.S. Anishchenko, A.A. Akopov, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova // *New Journal of Physics*. — 2006. — Vol. 8. — P. 84.
79. *Hramov, A.E.* Incomplete noise-induced synchronization of spatially extended systems / A.E. Hramov, A.A. Koronovskii, P.V. Popov // *Physical Review E*. — 2008. — Vol. 77. — P. 036215.
80. Noise-enhanced phase synchronization in excitable media / A. Neiman, L. Schimansky-Geier, A. Cornell-Bell, F. Moss // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 83. — Pp. 4896–4899.
81. *Hu, B.* Phase synchronization in coupled nonidentical excitable systems and array-enhanced coherence resonance / B. Hu, Ch. Zhou // *Physical Review E*. — 2000. — Vol. 61. — P. R1001.
82. *Lindner, J.F.* Array enhanced stochastic resonance and spatiotemporal synchronization / J.F. Lindner, B.K. Meadows, W.L. Ditto // *Physical Review Letters*. — 1995. — Vol. 75. — Pp. 3–6.
83. *Pei, X.* Noise-mediated spike timing precision from aperiodic stimuli in an array of Hodgkin-Huxley-type neurons / X. Pei, L. Wilkens, F. Moss // *Physical Review Letters*. — 1996. — Vol. 77, no. 2. — Pp. 4679–4682.

84. Effects of noise in excitable systems / B. Lindner, J. Garcia-Ojalvo, A. Neiman, L. Schimansky-Geier // *Physics Reports*. — 2004. — Vol. 392. — Pp. 321–424.
85. *Rosenblum, M.G.* Synchronization — a Universal Concept in Nonlinear Sciences / M.G. Rosenblum, A.S. Pikovsky, J. Kurths. — Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2001. — 432 pp.
86. Interacting coherence resonance oscillators / S.K. Han, T.G. Yim, D.E. Postnov, O.V. Sosnovtseva // *Physical Review Letters*. — 1999. — Vol. 83. — Pp. 1771–1774.
87. *Nomura, T.* Entrainment and termination of reentrant wave propagation in a periodically stimulated ring of excitable media / T. Nomura, L. Glass // *Physical Review E*. — 1996. — Vol. 53. — Pp. 6353–6360.
88. Resetting and annihilating reentrant waves in a ring of cardiac tissue: theory and experiment / H. Gonzalez, Y. Nagai, G. Bub, L. Glass // *Progress of Theoretical Physics Supplement*. — 2000. — no. 139. — Pp. 83–89.
89. Predicting the entrainment of reentrant cardiac waves using phase resetting curves / L. Glass, Y. Nagai, K. Hall et al. // *Physical Review E*. — 2002. — Vol. 65. — P. 021908.
90. *Слепнев, А.В.* Бифуркации удвоения периода и эволюция пространственных структур в модели автоколебательной среды / А.В. Слепнев // Статистическая физика и информационные технологии (StatInfo-2009): материалы международной школы-семинара. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2009. — С. 34–38.
91. *Слепнев, А.В.* Мультистабильность, удвоения периода и подавление бегущих волн шумовым воздействием в сильно нелинейной автоколебательной среде с периодическими граничными условиями / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова // *Нелинейная динамика*. — 2010. — Т. 6, № 4. — С. 755–767.

92. Слепнев, А.В. Фазовая мультистабильность и влияние локального источника шума в модели автоколебательной среды / А.В. Слепнев // *Нелинейные дни в Саратове для молодых – 2009* (Саратов, 16-18 ноября 2009): сборник материалов научной школы-конференции. — Саратов: ООО ИЦ «Наука», 2010. — С. 94–97.
93. Слепнев, А.В. Бифуркации удвоения периода и эффекты шумового воздействия в мультистабильной автоколебательной среде / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2011. — Т. 19, № 4. — С. 53–67.
94. Слепнев, А.В. Сценарии перехода к хаосу в автоколебательной среде со сложной динамикой элементарной ячейки / А.В. Слепнев // *Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика: тезисы докладов VI Всероссийской конференции молодых ученых*. — Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2011. — С. 154–155.
95. Слепнев, А.В. Автоколебательная среда со сложной динамикой элементарной ячейки. Мультистабильность и сценарии перехода к хаосу. / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова. — Germany: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. — 64 с.
96. Слепнев, А.В. Два вида автоколебаний в активной среде с периодически граничными условиями / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова // *Нелинейная динамика*. — 2012. — Т. 8, № 3. — С. 497–505.
97. Слепнев, А.В. Два типа автоколебаний в активной среде с периодически граничными условиями / А.В. Слепнев, Т.Е. Вадивасова // XVI научная школа «Нелинейные волны — 2012» (Нижний Новгород, 29 февраля – 6 марта 2012 г.): тезисы докладов молодых ученых. — Н. Новгород: Типография ИПФ РАН, 2012. — С. 122–123.

98. *Слепнев, А.В.* Бегущие волны, мультистабильность и синхронизация в кольцевой возбудимой среде / А.В. Слепнев, И.А. Шепелев, Т.Е. Вадивасова // Материалы X Международной школы-конференции “Хаотический автоколебания и образование структур” (ХАОС-2013). — Саратов: ООО "Издательский центр "Наука 2013. — С. 25.
99. *Шепелев, И.* Эффекты шумового воздействия на волновые режимы активной среды / И. Шепелев, А.В. Слепнев // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2013» / Под ред. А.И. Андреев, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов, М.В. Чистякова. — Москва: МАКС Пресс, 2013.
100. *Slepnev, A.V.* Coherence resonance and traveling waves regimes destruction in model of an active medium with periodic boundary conditions / A.V. Slepnev, T.E. Vadivasova, I.A. Shepelev // International conference "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors" dedicated to the memory of L.P. Shil'nikov: Book of abstracts. — N. Novgorod: Publishing house of UNN, 2013. — P. 105.
101. *Слепнев, А.В.* Эффекты шумового воздействия на активную среду с периодическими граничными условиями / А.В. Слепнев, И.А. Шепелев, Т.Е. Вадивасова // *Письма в ЖТФ*. — 2014. — Т. 40, № 2. — С. 30–36.
102. *Слепнев, А.В.* Вынужденная синхронизация бегущих волн в активной среде в автоколебательном и возбудимом режимах / А.В. Слепнев, И.А. Шепелев, Т.Е. Вадивасова // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2014. — Т. 22, № 2. — С. 50–61.
103. *Slepnev, A.V.* Two types of oscillatory regimes in an active medium with periodic boundary conditions / A.V. Slepnev, T.E. Vadivasova // International Conference «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity» dedicated to 70th birthday of Prof. Dr. Vadim S. Anishchenko. — Saratov: 2014. — Pp. 45–46.

104. Кузнецов, С.П. О критическом поведении одномерных цепочек / С.П. Кузнецов // *Письма в ЖТФ*. — 1983. — Т. 9, № 2. — С. 94–98.
105. Астахов, В.В. Формирование мультистабильности, классификация изомеров и их эволюция в связанных фейгенбаумовских системах / В.В. Астахов, Б.П. Безручко, В.И. Пономаренко // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. — 1991. — Т. 34, № 1. — С. 35–39.
106. Rudzick, O. Unidirectionally coupled map lattice as a model for open flow systems / O. Rudzick, A. Pikovsky // *Physical Review E*. — 1996. — Vol. 54, no. 5. — Pp. 5107–5115.
107. Stability, Structures, and Chaos in Nonlinear Synchronization Networks / V.S. Afraimovich, V.I. Nekorkin, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev. — Singapore: World Scientific, 1995. — 260 pp.
108. Size instabilities in rings of chaotic synchronized systems / M.A. Matías, J. Güémez, V. Pérez-Muñuzuri et al. // *Europhysics Letters*. — 1997. — Vol. 37, no. 6. — P. 379.
109. Pecora, L.M. Synchronization conditions and desynchronizing patterns in coupled limit-cycle and chaotic systems / L.M. Pecora // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 58, no. 1. — Pp. 347–360.
110. Interaction of chaotic rotating waves in coupled rings of chaotic cells / I.P. Mariño, V. Pérez-Muñuzuri, V. Pérez-Villar et al. // *Physica D*. — 1999. — Vol. 128. — Pp. 224–235.
111. Анищенко, В.С. Сложные колебания в простых системах / В.С. Анищенко. — Москва: Наука, 1990. — 312 с.

112. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах / В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова и др.; Под ред. В.С. Анищенко. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. — 544 с.
113. Анищенко, В.С. Экспериментальное исследование механизма возникновения и структуры странного аттрактора в генераторе с инерционной нелинейностью / В.С. Анищенко, В.В. Астахов // *Радиотехника и электроника*. — 1983. — Т. 28, № 6. — С. 1109–1115.
114. Benettin, G. Kolmogorov entropy and numerical experiments / G. Benettin, L. Galgani, J.-M. Strelcyn // *Physical Review A*. — 1976. — Vol. 14, no. 6. — Pp. 2338–2345.
115. Мультистабильные состояния диссипативно-связанных фейгенбаумовских систем / В.В. Астахов, Б.П. Безручко, Ю.В. Гуляев, Е.П. Селезнев // *Письма в Журнал Технической Физики*. — 1988. — Т. 15, № 3. — С. 60–64.
116. Zhang, Y. Signal transmission in one-way coupled bistable systems: Noise effect / Y. Zhang, G. Hu, L. Gammaitoni // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 58, no. 3. — Pp. 2952–2956.
117. Noise Induced Pattern Transition and Spatiotemporal Stochastic Resonance / Z. Hou, L. Yang, Z. Xiaobin, H. Xin // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 81, no. 14. — Pp. 2854–2857.
118. Noise Enhanced Propagation / J.F. Lindner, S. Chandramouli, A.R. Bulsara et al. // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 81, no. 23. — Pp. 5048–5051.
119. Vadivasova, T.E. Phase-frequency synchronization in a chain of periodic oscillators in the presence of noise and harmonic forcings / T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 63. — P. 036225.

120. Хорстнемке, В. Индуцированные шумом переходы / В. Хорстнемке, Р. Лефевр. — Москва: Мир, 1987. — 400 с.
121. Arnold, L. Random Dynamical Systems / L. Arnold. — Berlin: Springer, 2003. — 586 pp.
122. Вадивасова, Т.Е. Исследование возникновения автоколебаний в квазигармонической модели автоколебательной среды, находящейся под действием мультипликативного шума / Т.Е. Вадивасова, А.В. Слепнев // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2012. — Т. 20, № 6. — С. 3–13.
123. Svensmark, H. Perturbed period-doubling bifurcation. I. Theory / H. Svensmark, M.R. Samuelsen // *Physical Review B*. — 1990. — Vol. 41, no. 7. — Pp. 4181–4188.
124. Малафеев, В.М. О процессе синхронизации в цепочке автогенераторов, связанных через проводимость / В.М. Малафеев, М.С. Поляков, Ю.П. Романовский // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. — 1970. — Т. 13, № 6. — С. 936–940.
125. Костин, И.К. Флуктуации в системах многих связанных генераторов / И.К. Костин, Ю.П. Романовский // *Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия*. — 1972. — Т. 13, № 6. — С. 698–705.
126. Aizawa, Y. Synergetic approach to the phenomena of mode-locking in nonlinear systems / Y. Aizawa // *Progress of Theoretical Physics*. — 1976. — Vol. 56, no. 3. — Pp. 703–716.
127. Ermentrout, G.B. Frequency plateaus in a chain of weakly coupled oscillators / G.B. Ermentrout, N. Kopell // *SIAM Journal of Mathematical Analysis*. — 1984. — Vol. 15. — Pp. 215–237.

128. *Ermentrout, G.B.* Phaselocking in a reaction-diffusion system with a linear frequency gradient / G.B. Ermentrout, W.C. Troy // *SIAM Journal of Applied Mathematics*. — 1986. — Vol. 39. — Pp. 623–660.
129. *Sakaguchi, H.* Local and global self-entrainments in oscillator lattices / H. Sakaguchi, S. Shinomoto, Y. Kuramoto // *Progress of Theoretical Physics*. — 1987. — Vol. 77. — Pp. 1005–1010.
130. *Strogatz, S.H.* Collective synchronisation in lattices of nonlinear oscillators with randomness / S.H. Strogatz, R.E. Mirollo // *Journal of Physics A*. — 1988. — Vol. 21. — Pp. L699–L705.
131. *Strogatz, S.H.* Phase-locking and critical phenomena in lattices of coupled nonlinear oscillators with random intrinsic frequencies / S.H. Strogatz, R.E. Mirollo // *Physica D*. — 1988. — Vol. 31. — Pp. 143–168.
132. Disorder-enhanced synchronization / Y. Braiman, W.L. Ditto, K. Wiesenfeld, M.L. Spano // *Physical Letters A*. — 1995. — Vol. 206. — Pp. 54–60.
133. *Осипов, Г.В.* Синхронизация и управление в цепочках связанных автогенераторов / Г.В. Осипов, М.М. Суццик // *Вестник ННГУ. Нелинейная динамика, синхронизация и хаос*. — 1997. — Т. 2. — С. 5–23.
134. *Nekorkin, V.I.* Clustering in a chain of bistable nonisochronous oscillators / V.I. Nekorkin, V.A. Makarov, M.G. Velarde // *Physical Review E*. — 1998. — Vol. 58, no. 5. — Pp. 5742–5747.
135. Cluster and global synchronization in a quasi-harmonic self-oscillatory chain in a presence of noise / T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko, G.I. Strelkova, A.I. Fomin // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2002. — Т. 10, № 3. — С. 110–123.

136. Частичная синхронизация в неоднородной автоколебательной среде / А.А. Акопов, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов, Д.Д. Матюшкин // *Письма в Журнал Технической Физики*. — 2003. — Т. 29, № 15. — С. 29–34.
137. Chaotic dynamics of a spatio-inhomogeneous medium / V.S. Anishchenko, T.E. Vadivasova, G.A. Okrokvertskhov et al. // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2005. — Vol. 15, no. 11. — Pp. 1–13.
138. *Nekorkin, V.I.* Mutual synchronization of patterns and wave fronts in two coupled chains of Chua's circuits / V.I. Nekorkin, V.B. Kazantsev, D.V. Aktyuhin // *Proceedings of the 1st International Conference on Control of Oscillations and Chaos*. — Vol. 1. — St. Petersburg: 1997. — Pp. 54–57.
139. *Grassberger, P.* Synchronization of coupled systems with spatiotemporal chaos / P. Grassberger // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 59, no. 3. — Pp. R2520–R2522.
140. *Boccaletti, S.* Controlling and synchronizing space time chaos / S. Boccaletti, J. Bragard, F.T. Arecchi // *Physical Review E*. — 1999. — Vol. 59, no. 6. — Pp. 6574–6578.
141. *Junge, L.* Synchronization and control of coupled Ginzburg-Landau equations using local coupling / L. Junge, U. Parlitz // *Physical Review E*. — 2000. — Vol. 61, no. 4. — Pp. 3736–3742.
142. Frequency synchronization of clusters in coupled extended systems / A.A. Akopov, V.V. Astakhov, T.E. Vadivasova et al. // *Physical Letters A*. — 2005. — Vol. 334. — Pp. 169–172.
143. *Elphick, Ch.* Phase front instability in periodically forced oscillatory systems / Ch. Elphick, A. Hagberg, E. Meron // *Physical Review Letters*. — 1998. — Vol. 80, no. 22. — Pp. 5007–5010.

144. Вынужденная фазовая синхронизация цепочки хаотических осцилляторов / А.И. Фомин, Т.Е. Вадивасова, О.В. Сосновцева, В.С. Анищенко // *Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика*. — 2000. — Vol. 8, no. 4. — Pp. 103–112.
145. Трубецков, Д.И. Синхронизация колебаний в распределенной активной среде «винтовой электронный пучок — встречная электромагнитная волна / Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов // *Известия Академии наук. Серия физическая*. — 2002. — Т. 66, № 12. — С. 1761–1767.
146. Короновский, А.А. Влияние внешнего сигнала на автоколебания в распределенной системе винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна / А.А. Короновский, Д.И. Трубецков, А.Е. Храмов // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. — 2002. — Т. 45, № 9. — С. 773–791.
147. Synchronization, re-entry, and failure of spiral waves in a two-layer discrete excitable system / V.B. Kazantsev, V.I. Nekorkin, D.V. Artyuhin, M.G. Velarde // *Physical Review E*. — 2000. — Vol. 63. — P. 016212.
148. Лоскутов, А.Ю. Стабилизация турбулентной динамики возбудимых сред внешним точечным воздействием / А.Ю. Лоскутов, Р.В. Черемин, С.А. Высоцкий // *Доклады Академии наук СССР*. — 2005. — Vol. 404, no. 4. — Pp. 1–4.
149. Лоскутов, А.Ю. Новый подход к проблеме дефибрилляции: подавление спирально-волновой активности сердечной ткани / А.Ю. Лоскутов, С.А. Высоцкий // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики*. — 2006. — Т. 84, № 9. — С. 616–621.