

ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет
имени Н.Г. Чернышевского”

На правах рукописи

Журавлев Максим Олегович

Перебегающее поведение хаотических осцилляторов
вблизи границ синхронных режимов

01.04.03 – Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
А.А. Короновский

Саратов — 2014

Содержание

Содержание	2
Введение	4
1 Перемежающееся поведение вблизи границы фазовой хаотической синхронизации на различных временных масштабах	22
1.1 Общие понятия о перемежающемся поведении	22
1.1.1 Перемежаемости типа I — III	25
1.1.2 Перемежаемость типа On–Off	27
1.1.3 Перемежаемость типа игольного ушка	27
1.1.4 Перемежаемость типа кольцо	29
1.2 Разработка методов по выделению участков синхронной и асинхронной динамики (ламинарных и турбулентных фаз) в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы синхронного режима	30
1.2.1 Метод выделения участков синхронной и асинхронной динамики	33
1.2.2 Аprobация предложенного метода	38
1.3 Изучение поведения хаотических систем, при малых расстройках частот, на граничных временных масштабах	41
1.3.1 Синхронизация временных масштабов	42
1.3.2 Система двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера	46
1.3.3 Перемежаемость кольца для различных временных масштабов	48
1.4 Изучение поведения хаотических систем при больших расстройках частот на граничных временных масштабах	56
1.4.1 Исследуемая система двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера в случае большой расстройки частоты	57
1.4.2 Перемежаемость кольца для различных временных масштабов при большой расстройке частот в исследуемой хаотической системе	59
1.5 Выводы по первой главе	62

2	Сосуществование двух типов перемежающегося поведения	64
2.1	Возможность одновременного сосуществования двух различных типов перемежающегося поведения	64
2.2	Вывод общих теоретических соотношений, описывающих одновременное сосуществование двух типов перемежающегося поведения	66
2.3	Сосуществование двух различных типов перемежаемости . .	74
2.3.1	Сосуществование перемежаемостей игольного ушка и кольца	74
2.3.2	Сосуществование перемежаемостей кольца	76
2.4	Модельная система с дискретным временем, демонстрирующая одновременно два различных типа перемежаемости .	80
2.5	Выводы по второй главе	87
3	Модельные системы с непрерывным временем	89
3.1	Метод определения статистических характеристик для каждого из сосуществующих типов перемежающегося поведения	89
3.2	Сосуществование двух типов перемежающегося поведения в эталонных системах с потоковым временем	97
3.2.1	Сосуществование двух типов перемежаемости в системе однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера	98
3.2.2	Сосуществование двух типов перемежаемости в неавтономном генераторе Ван дер Поля с шумом	102
3.3	Перемежающееся поведение при взаимодействии кардиоваскулярной и респираторной систем человека	107
3.4	Выводы по третьей главе	111
	Заключение	113
	Благодарности	116
	Список литературы	117

Введение

Актуальность исследуемой проблемы

В ходе проведенных многочисленных исследований на настоящий момент установлено [1–7], что перемежающееся поведение характерно для большого количества процессов, протекающих в системах различной природы. В этом случае во временной реализации изучаемой системы попеременно сосуществуют два различных динамических режима (примером такого состояния может служить внезапный переход от периодических колебаний к хаотическим и дальнейшая смена хаотических колебаний на периодические и т.д.), при этом значения управляющих параметров остаются фиксированными. Таким образом, говоря о перемежаемости, можно в полной мере говорить об универсальности данного явления и его фундаментальном характере [8, 9], так как оно проявляется весьма разнообразно и охватывает широкий круг систем. В настоящее время существует определенная классификация типов перемежаемости: перемежаемость типов I–III [6, 10], on-off перемежаемость [4, 11], перемежаемость типа “игольное ушко” [5] и некоторые другие. Все эти типы перемежающегося поведения можно наблюдать в различных системах, например, перемежающаяся структура течения возникает в гидродинамике в ряде случаев при больших числах Рейнольдса [6], перемежающееся поведение наблюдается также в радиофизических системах [2]. Кроме этого, перемежаемость можно наблюдать вблизи границы

возникновения режимов хаотической синхронизации связанных осцилляторов [3, 4, 12]; перемежающееся поведение проявляется в чередовании судорожной активности и нормального функционирования мозга у животных, генетически предрасположенных к абсанс эпилепсии [7]; различные приборы и устройства (например, оптические генераторы) также могут работать в перемежающихся режимах [13].

Таким образом, с учетом фундаментального характера и универсальности, изучение перемежающегося поведения в настоящее время является актуальной задачей не только для радиофизики, но и для других областей науки, поскольку выявление общих закономерностей, присущих различным типам перемежающегося поведения, позволяет как продвинуться в понимании поведения отдельных систем, представляющих по тем или иным соображениям интерес для исследователей, так и использовать полученные знания в практических приложениях (например, в медицине, в диагностических целях [14]).

Тем не менее, несмотря на большой интерес к изучению перемежающегося поведения со стороны исследователей, в настоящее время остается открытым ряд вопросов, связанных с данным явлением. Одним из таких вопросов является изучение перемежающегося поведения, которое возникает при переходе от синхронизации временных масштабов [15–17] к асинхронной динамике в нелинейных системах. Необходимо отметить, что исследование именно данного типа поведения до настоящего момента не проводилось, и его изучение представляет значительный интерес, так как синхронизация временных масштабов позволяет рассматривать с единой позиции все остальные типы хаотической синхронизации. В связи с этим выявление причин, приводящих к разрушению (установлению) синхронизации временных масштабов, а также исследование характеристик перемежающегося поведения через которое осуществляется переход от синхронной дина-

мики к асинхронной (и наоборот), имеет важное научное значение. Именно поэтому одной из задач, решенных в рамках настоящей диссертационной работы, стало изучение перемежающегося поведения, которое наблюдается при переходе от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике поведения.

Известно, что в рамках исследований любого типа перемежаемости важную роль играют статистические характеристики, такие как распределение длительностей ламинарных фаз в зависимости от значений управляющих параметров изучаемой системы и зависимость средней длительности ламинарной фазы от параметра надкритичности. Таким образом, при изучении перемежаемости возникает необходимость в решении задачи по выделению длительности ламинарных фаз в исследуемой системе. В настоящее время существует большое количество методов выделения участков синхронного и асинхронного поведения. Как правило, данные методы используют различные преобразования временной реализации, например непрерывное вейвлетное преобразование [15–17]. Это позволяет достаточно точно выделять участки синхронного и асинхронного поведения, но общим недостатком этих методов является сильное увеличение времени, необходимого для обработки временной реализации и получения необходимых данных. Особенно это заметно на длительных временных реализациях. В то же самое время, именно длительные временные реализации необходимы для анализа статистических характеристик перемежающегося поведения. В связи с этим, в рамках настоящей диссертационной работы был разработан новый метод выделения ламинарных и турбулентных фаз во временных реализациях взаимодействующих осцилляторов, находящихся вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. Особенностью метода является его простота реализации и значительное уменьшение времени выполнения

процедуры выделения ламинарных и турбулентных участков поведения в рассматриваемых системах.

Особо следует подчеркнуть, что все исследования различных типов перемежающегося поведения в сложных нелинейных системах до настоящего времени были сконцентрированы на случае, когда в исследуемой системе при фиксированных значениях управляющих параметров сосуществуют и последовательно сменяют друг друга два типа различных режимов (“стационарное состояние — колебания”, “периодическая динамика — хаотическая динамика”, “синхронное поведение — асинхронная динамика” и т.п.). Однако необходимо заметить, что теоретически не исключена ситуация, когда в нелинейной системе одновременно сосуществуют два различных типа перемежающегося поведения. В этом случае во временной реализации будут наблюдаться “переключения” между двумя различными динамическими режимами в рамках одного типа перемежающегося поведения, после чего может произойти переход к другому типу перемежаемости, при котором переходы между режимами будут подчиняться другим закономерностям, причем и сменяющие друг друга режимы тоже могут быть другими, а по истечении некоторого интервала времени система снова вернется к первому типу перемежаемости, после чего все подобные переходы от одного типа перемежаемости к другому будут повторяться. Очевидно, что такая ситуация, вполне возможная с теоретической точки зрения, приведет к усложнению (или, по крайней мере, к модификации) характеристик режима, наблюдающегося в анализируемой системе. К сожалению, до настоящего момента не существовало никаких исследований подобного типа поведения, в рамках которого в системе одновременно сосуществует два различных типа перемежаемости. Тем не менее, такая ситуация вполне возможна, и одним из возможных примеров является случай, когда сигнал системы, находящейся вблизи границы фазовой хаотической синхронизации, проходит

через фильтр (который может быть естественным образом встроен в анализируемую систему или являться составляющей частью измерительной аппаратуры). В таких случаях наблюдающиеся режимы не удастся классифицировать и описать в рамках существующих теоретических представлений о перемежающемся поведении, что может существенно усложнять, например, работу с приборами и устройствами или осуществление медицинской диагностики. Именно поэтому в диссертационной работе большое внимание уделено изучению возможного сосуществования двух различных типов перемежающегося поведения в нелинейных динамических системах. В силу масштабности рассматриваемой проблемы, ее изучению посвящены вторая и третья главы диссертационной работы. В рамках изучения данной проблемы была разработана и апробирована теоретическая модель, которая описывает поведение систем, в которых одновременно реализуются два типа перемежаемости, а также изучено несколько систем, в которых наблюдается данное явление.

Таким образом, на основании вышеизложенного можно сделать вывод о том, что круг вопросов, требующих дальнейших исследований в области перемежающегося поведения, достаточно широк, а тема диссертационной работы является актуальной и важной для радиофизики, нелинейной динамики и современной теории нелинейных колебаний и волн.

Цель диссертационной работы

Настоящая работа посвящена исследованию перемежающегося поведения, которое возникает при переходе от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике, а также изучению одновременного сосуществования двух типов перемежаемости в нелинейных системах.

Основными вопросами, подробно рассмотренными в диссертационной работе, являются следующие:

- создание метода выделения ламинарных и турбулентных фаз во временных реализациях взаимодействующих осцилляторов, находящихся вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации;
- изучение перемежающегося поведения, через которое осуществляется переход от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике;
- создание теоретической модели, описывающей поведение нелинейных систем, находящихся в режиме, в котором они одновременно демонстрируют два различных типа перемежающегося поведения;
- изучение поведения дискретных систем и систем с потоковым временем, которые способны демонстрировать сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения;
- создание модифицированного метода выделения ламинарных и турбулентных участков поведения, позволяющего соотносить каждый участок с конкретным типом перемежаемости, который в текущий момент реализуется в системе;

Изучение данных вопросов в рамках настоящей диссертационной работы позволяет продвинуться в понимании того, каким образом и через какие типы поведения может осуществляться переход от синхронной динамики поведения к асинхронной для нелинейных систем.

Научная новизна

Научная новизна результатов, представленных в диссертационной работе, заключается в изучении перемежающегося поведения, возникающего на границе синхронизации временных масштабов, а также в определении общих закономерностей, характерных для нелинейных систем, демонстрирующих одновременное сосуществование двух типов перемежающегося поведения.

В рамках настоящей работы впервые получены следующие результаты:

- предложен новый метод выделения ламинарных и турбулентных фаз во временных реализациях взаимодействующих осцилляторов, находящихся вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. Особенностью метода является его простота реализации и значительное уменьшение времени выполнения процедуры выделения ламинарных и турбулентных участков поведения в рассматриваемых системах [18–20];
- исследованы статистические характеристики перемежающегося поведения при переходе от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике поведения. Полученные результаты позволяют сделать вывод о том, что при малой и большой расстройках управляющих параметров настоящий переход осуществляется через перемежаемость кольца [21–23];
- разработана теоретическая модель, описывающая одновременное сосуществование двух типов перемежающегося поведения в нелинейных системах. В рамках разработанной теории был получен общий вид теоретических соотношений, описывающих одновременное сосуществование двух типов перемежаемости (распределение длительностей лами-

нарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров и зависимость средней длительности участка ламинарного поведения от параметров надкритичности) [24];

- предложен модифицированный метод выделения ламинарных и турбулентных участков поведения для нелинейных систем, в которых одновременно сосуществуют два различных типа перемежающегося поведения. Отличительной особенностью метода является то, что он позволяет соотносить каждый участок турбулентного поведения с конкретным типом перемежаемости, который в данный момент реализуется в системе [25];
- изучено поведение дискретных систем и систем с потоковым временем, в которых одновременно реализуются два различных типа перемежаемости. Для этих систем получены статистические характеристики (распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров и зависимость средней длительности участка ламинарного поведения от параметров надкритичности), проведено их сопоставление с теоретическими зависимостями [24, 26–28];
- на примере взаимодействия сердечно-сосудистой и респираторной систем человека показано, что в физиологических системах возможно сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения [24].

Основная часть представленных в диссертации результатов получена лично автором. В большинстве совместных работ автором выполнены все численные и аналитические расчеты. Постановка задач, разработка методов их решения, объяснение и интерпретация результатов были осуществ-

лены либо лично автором, либо совместно с научным руководителем и другими соавторами научных работ, опубликованных соискателем. Необходимо также отметить, что в рамках настоящей диссертационной работы были использованы записи сигналов ЭКГ и дыхания человека, которые были получены и любезно предоставлены научной группой под руководством д.ф.-м.н. М.Д. Прохорова и д.ф.-м.н. В.И. Пономаренко.

Практическая значимость

Диссертационная работа решает научную задачу, имеющую существенное значение для радиофизики, нелинейной динамики и современной теории колебаний и волн, связанную с изучением перемежающегося поведения, предшествующего синхронизации в хаотических системах. Можно ожидать, что результаты, полученные в настоящей диссертационной работе, имеют общий характер и могут быть распространены на большое количество систем различной природы — радиофизические, биологические, физиологические и т.д. Это связано с тем, что большая часть исследований проводилась на примере эталонных нелинейных динамических систем, таких как система Ресслера или автогенератор Ван Дер Поля. Полученные результаты позволяют продвинуться в понимании особенностей поведения и получить общие закономерности, характерные для нелинейных систем, способных демонстрировать два типа перемежающегося поведения.

В частности, предложен новый метод выделения ламинарных и турбулентных фаз во временных реализациях взаимодействующих осцилляторов, находящихся вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. Метод основан на использовании непосредственной разности мгновенных фаз хаотических сигналов взаимодействующих осцилляторов, что позволяет значительно упростить данную процедуру, а это, в свою очередь,

значительно уменьшает продолжительность времени обработки данных. Еще одним неоспоримым преимуществом предложенного метода является возможность выделения не только ламинарных фаз, но и турбулентных.

В диссертационной работе предложен модифицированный метод выделения ламинарных и турбулентных участков поведения для нелинейных систем, в которых одновременно реализуются два различных типа перемежаемости. Отличительной особенностью разработанного метода является то, что он позволяет соотносить каждый участок турбулентного поведения с конкретным типом перемежаемости, который в данный момент реализуется в анализируемой системе.

Разработана новая теоретическая модель, описывающая поведение нелинейной системы, в которой одновременно сосуществуют два типа перемежаемости. В рамках предложенной теории был впервые получен общий вид теоретических соотношений, описывающих одновременное сосуществование двух типов перемежаемости: распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров и зависимость средней длительности участка ламинарного поведения от параметров надкритичности.

Полученные результаты и разработанные методы могут широко использоваться при анализе экспериментальных данных, относящихся к динамике взаимодействующих нелинейных систем, для диагностики наблюдаемых динамических режимов и определения их характеристик в различных областях человеческой деятельности, таких как техника, медицина и др.

Основные научные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Для нелинейных систем переход от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике осуществляется через перемежаемость кольца, как для случая малой расстройки управляющих параметров, так и для случая большой расстройки.
2. Различные нелинейные системы способны одновременно демонстрировать два различных типа перемежающегося поведения, при этом такое состояние характерно как для систем с дискретным временем, так и для систем с потоковым временем. Поведение таких систем, описывается с использованием одной теоретической модели, которая позволяет получить для них теоретические соотношения (распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров и зависимость средней длительности участка ламинарного поведения от управляющих параметров) в зависимости от того, какие два типа перемежающегося поведения реализуются.
3. Использование при определении длительностей турбулентных и ламинарных участков поведения мгновенных фаз, лежащих в диапазоне $[0; 2\pi]$ и наблюдение за движением фазовой траектории на вращающейся плоскости в момент турбулентной фазы для случая одновременного существования двух типов перемежаемости, позволяет определять длительность таких участков и соотносить каждую турбулентную фазу с конкретным механизмом перемежаемости.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и заключения. Она содержит 132 страницы текста, включая 29 иллюстраций. Список литературы содержит 120 наименований.

Логика изложения материала в диссертационной работе построена так, что результаты, полученные в рамках первой главы являются основой для постановки задач, рассматриваемых в последующих главах. Так, полученные результаты при исследовании перемежающегося поведения при переходе от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике, позволили сделать предположение о возможности одновременного сосуществования в нелинейных системах двух различных типов перемежающегося поведения. Изучению такой возможности посвящены две последующие главы, причем теоретическая модель, предложенная во второй главе, является основой для дальнейшего исследования нелинейных систем, способных демонстрировать два типа перемежаемости, проведенного в третьей главе диссертационной работы. Логика же каждой главы диссертационной работы построена следующим образом: в начале главы кратко описывается современное состояние проблемы, которой посвящена глава. Далее, на основании вышеизложенного, ставятся вопросы и проблемы, на решение которых направлены остальные разделы главы диссертационной работы.

Во **Введении** обоснована актуальность выбранной темы диссертационной работы, сформулирована цель работы, описаны научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Введение содержит основные положения и результаты, выносимые на защиту, сведения о достоверности и апробации результатов.

Первая глава диссертационной работы посвящена изучению перемежающегося поведения, наблюдаемого в нелинейных системах с малой и

большой расстройкой управляющих параметров при переходе от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике. Начало этой главы посвящено обсуждению общих понятий перемежающегося поведения, в первом разделе приведены основные сведения о типах перемежаемостей, которые затем используются на протяжении всей диссертационной работы и которые необходимы для понимания и логичного изложения всего материала.

Дальнейшее изложение материала первой главы посвящено всестороннему изучению перемежающегося поведения, через которое осуществляется переход от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике. В рамках этого изложения предлагается новый метод выделения ламинарных и турбулентных фаз поведения во временных реализациях взаимодействующих осцилляторов, находящихся вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. Предложенный метод прошел апробацию на примере системы однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера. Результаты, полученные с помощью предложенного метода, находятся в очень хорошем соответствии с теоретическими оценками [18–20].

При помощи предложенного метода выделения ламинарных фаз проведено изучение перемежающегося поведения, наблюдаемого в нелинейных системах с малой расстройкой управляющих параметров, при переходе от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике. С этой целью приведена концепция синхронизация временных масштабов, которая основана на введении в рассмотрение непрерывного множества фаз исследуемых сигналов связанных хаотических систем. Исследование перемежающегося поведения на границе синхронизации временных масштабов проводилось для системы однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера, при этом значение расстройки управляющих параметров было выбрано малым. Для данной системы были получены статистические характери-

стики (распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров и зависимость средней длительности участка ламинарного поведения от параметра надкритичности), на основе полученных результатов было установлено, что переход от синхронизации временных масштабов к асинхронному поведению осуществляется через перемежаемость кольца [21–23].

Кроме этого, приведены результаты по изучению перемежаемости, которая реализуется в нелинейных системах с большой расстройкой управляющих параметров на границе синхронизации временных масштабов. С этой целью для системы однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера были рассмотрены статистические характеристики такого поведения. Показано, что, как и в случае малой расстройки управляющих параметров, для большой расстройки значений управляющих параметров переход от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике осуществляется через перемежаемость кольца.

Во **второй главе** диссертационной работы обсуждается вопрос возможности одновременного сосуществования двух различных типов перемежающегося поведения. В этой главе приводятся доводы о возможности одновременного сосуществования двух различных типов перемежающегося поведения в нелинейных системах. В рамках этого рассмотрения разработана теоретическая модель, которая описывает нелинейные системы, в которых одновременно реализуются два различных типа перемежающегося поведения. Данная теоретическая модель позволила получить для данного поведения нелинейной системы такие статистические характеристики, как распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированных управляющих параметрах и зависимость средней длительности ламинарного поведения от параметра надкритичности.

Для понимания поведения нелинейной системы, в которой одновременно реализуются два различных типа перемежаемости, было проведено численное моделирование того, как ведет себя зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от двух управляющих параметров для различных сочетаний типов перемежающегося поведения.

В ходе рассмотрения было проведено исследование системы с дискретным временем, которая при определенных значениях управляющих параметров демонстрирует одновременное сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения. В результате показано, что предложенная теория корректно описывает поведение системы, которое характеризуется одновременным сосуществованием двух различных типов перемежаемостей.

В **третьей главе** диссертационной работы обсуждаются нелинейные системы с потоковым временем, в которых одновременно реализуются два различных типа перемежающегося поведения. В настоящей главе предложен модифицированный метод выделения ламинарных и турбулентных участков поведения для нелинейных систем, в которых одновременно сосуществуют два различных типа перемежающегося поведения. Отличительной особенностью метода является то, что он позволяет соотносить каждый участок турбулентного поведения с конкретным типом перемежаемости, который в данный момент реализуется в системе.

В дальнейшем с использованием предложенного модифицированного метода выделения ламинарных участков поведения было проведено исследование нелинейных потоковых систем, способных одновременно демонстрировать два различных типа перемежаемости. Данное исследование проводилось на примере системы однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера и неавтономного генератора Ван дер Поля с шумом. В результате для этих систем были получены статистические характеристики, для

случая, когда в них одновременно реализуются два типа перемежаемости. Полученные статистические характеристики позволили показать, что предложенный во второй главе настоящей диссертационной работы теоретический подход к описанию сосуществования двух типов перемежающегося поведения корректно описывает динамику систем с потоковым временем. Кроме этого, в рамках данной главы была продемонстрирована возможность сосуществования двух типов перемежающегося поведения в реальных физиологических системах.

В **Заключении** подведены итоги диссертационной работы, сформулированы основные результаты и намечены направления дальнейших исследований в данном направлении.

Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов обеспечивается использованием строгих математических процедур, общеизвестных уравнений, методов и подходов, которые строго обоснованы в научной литературе, апробированных и хорошо себя зарекомендовавших при проведении научных исследований. При этом о достоверности результатов говорит их воспроизводимость, сопоставление аналитических зависимостей с численными результатами, сопоставление результатов при использовании различных методов выделения ламинарных фаз. Кроме этого, в приведенных результатах отсутствуют противоречия с известными в научной литературе достоверными общепризнанными результатами.

Апробация результатов и публикации

Настоящая диссертационная работа выполнена на кафедре физики открытых систем ФГБОУ ВПО “Саратовский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского”.

Материалы диссертационной работы использовались при выполнении научно-исследовательских работ по грантам Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 12–02–00221, 14–02–31088–мол_а), Федеральной целевой программы “Научные и научно педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (соглашения соглашения № 14.В37.21.0751 от 27 августа 2012 г., № 14.В37.21.1289 от 21 сентября 2012 г., №14.В37.21.1426 от 12 октября 2012 г., ГК № П586 от 18 мая 2010 г., П2492 от 20 ноября 2009 г., П1136 от 27 августа 2009 г., П451 от 31 июля 2009 г.), Президентской Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (2010–2011, 2012–2013, 2014–2015 гг., руководитель ведущей научной школы — чл.-корр. РАН, профессор Д.И. Трубецков), Президентской Программы поддержки молодых ученых — кандидатов наук (проект № МК–807.2014.2, руководитель проекта — к.ф.-м.н., доцент О.И. Москаленко, 2014–2015 гг.), фонда некоммерческих программ “Династия”.

Представленные результаты неоднократно докладывались на различных научных конференциях и семинарах и отражены в тезисах докладов: Всероссийской научной школы-конференции “Нелинейные феномены, хаос, критические явления и методы их исследования с помощью вейвлетного, кластерного и спектрального анализа в геоэкологических процессах” (Саратов, октябрь 2009) [29], XV научной школы “Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики — Нелинейные волны-2010” (Нижний Новгород, март 2010) [30], IX Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС-2010)” (Саратов, октябрь

2010) [31], XIII Всероссийской школы-семинара “Волновые явления в неоднородных средах (Волны–2012)” (Звенигород, май 2012) [32], VII Всероссийской конференции молодых ученых “Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика” (Саратов, сентябрь 2012) [33], III Всероссийского научно-практического форума “Экология: синтез естественнонаучного, технического и гуманитарного знания” (Саратов, октябрь 2012) [34], IX Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка “Нелинейные колебания механических систем” (Нижний Новгород, сентябрь 2012) [35], XIV Всероссийской школы-семинара “Физика и применение микроволн (Волны–2013)” (Звенигород, май 2013) [36], X Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС-2013)” (Саратов, октябрь 2013) [37], 21th IEEE Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (NDES2013) (Бари, Италия, 2013) [38]. Всего 10 публикаций в трудах конференций. Результаты, изложенные в диссертационной работе, неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры электроники, колебаний и волн и кафедры физики открытых систем факультета нелинейных процессов СГУ.

Результаты работы опубликованы в центральных реферируемых научных журналах, таких как “Журнал технической физики” [21], “Письма в журнал технической физики” [18, 26], “Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика” [22, 28], “Известия РАН. Серия физическая” [27], “Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского” [25], “СНАОС: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science ” [24], “Physical Review E” [23] (всего 9 статей в журналах, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук). По материалам диссертации получен 1 патент Российской Федерации на изобретение [19] и 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ [20, 39].

Глава 1

Перемежающееся поведение вблизи границы фазовой хаотической синхронизации на различных временных масштабах

[18–21, 23, 29–31]

1.1 Общие понятия о перемежающемся поведении

Изначально перемежаемость была обнаружена в задачах гидродинамики [6], где перемежающуюся структуру течения можно наблюдать в ряде случаев при больших числах Рейнольдса. Несколько позднее явление перемежаемости было обнаружено в нелинейных динамических системах, демонстрирующих хаотическое поведение, причем было установлено, что перемежаемость является одним из классических сценариев перехода от периодических колебаний к хаотическим [6, 9]. В этом случае наблюдаемый сигнал представляет собой чередующуюся последовательность регулярных (ламинарных) фаз и хаотических всплесков (турбулентных фаз). При увеличении управляющего параметра турбулентные всплески становятся все

более частыми до тех пор, пока движение полностью не хаотизируется. В зависимости от характера потери устойчивости периодическим режимом (определяемого мультипликаторами предельного цикла) различают перемежаемость типов I-III [9]. Интересная модификация перемежаемости типа I при наличии квазипериодического внешнего воздействия описана в [40].

Схожая ситуация имеет место также и вблизи границ различных режимов хаотической синхронизации (при этом, под ламинарной фазой понимается фаза синхронного поведения, под турбулентной - фаза асинхронного поведения), в связи с чем выделяют перемежающуюся фазовую синхронизацию [3, 41], перемежающуюся обобщенную синхронизацию [12], перемежающуюся синхронизацию с запаздыванием [4] и перемежающуюся синхронизацию, индуцированную шумом [42]. Иными словами, перемежающееся поведение предшествует установлению практически всех известных типов хаотической синхронизации, однако типы перемежаемостей, наблюдающиеся вблизи границ разных типов хаотических синхронных режимов, в общем случае являются также различными. В частности, известно, что на границах полной синхронизации, синхронизации с запаздыванием, обобщенной синхронизации и синхронизации, индуцированной шумом, наблюдается перемежаемость типа “on-off” [4, 11, 12, 42], на границе фазовой синхронизации в зависимости от величины расстройки управляющих параметров имеет место либо перемежаемость “игольного ушка” [5], либо перемежаемость “кольца” [41]. Таким образом, можно говорить о тесной связи хаотической синхронизации и перемежающегося поведения, поэтому, очевидно, более подробное исследование перемежаемости позволит продвинуться также в изучении хаотической синхронизации. Стоит отметить, что хаотическая синхронизация представляется в настоящее время одним из фундаментальных феноменов нелинейной динамики, радиофизики и электроники в целом. Интерес к этой проблеме связан как с боль-

шим фундаментальным значением ее исследования [43–45], так и широкими практическими приложениями, например, при скрытой передаче информации [46–58], в биологических [59–65], физиологических [66–75] и химических задачах [76–80], при управлении хаосом [81–85], в том числе в системах СВЧ электроники [86–90] и т.д.

К вышесказанному необходимо добавить, что до настоящего момента оставался неизученным переход от синхронизации временных масштабов [15–17] к асинхронному поведению. Этот вопрос является достаточно интересным для изучения, так как данный тип синхронной хаотической динамики позволяет рассматривать с единых позиций все остальные типы хаотической синхронизации. Тем не менее, предварительные результаты исследований позволяют сделать предположение, что данный переход также осуществляется через перемежающееся поведение, но при этом было не известно, через какой именно тип перемежаемости происходит этот переход.

Первая глава данной диссертационной работы посвящена результатам исследования перемежающегося поведения, которое реализуется вблизи границы возникновения синхронизации временных масштабов. В ходе проведенных исследований было установлено, каким закономерностям подчиняется перемежающееся поведение в исследуемой системе, в которой осуществляется переход от синхронной динамики к асинхронной для случая синхронизации временных масштабов, и также был определен тип данной перемежаемости, исходя из статистических характеристик каждого типа перемежаемости. В связи с этим, в начале настоящей главы диссертационной работы возникает необходимость в более детальном рассмотрении каждого известного типа перемежаемости, для понимания того, какие механизмы приводят к возникновению различных типов перемежающегося поведения и какие статистические характеристики имеет тот или иной тип.

Начнем рассмотрение с перемежаемостей типа I-III, являющихся классическими с точки зрения перехода от периодических колебаний к хаотическим [6]. В основе классификации перемежаемостей типов I-III лежат три типа потери устойчивости неподвижной точкой [6, 9]. Тип I соответствует прохождению мультипликатора неподвижной точки в результате изменения параметров через значение $+1$; тип III – прохождение через значение -1 ; тип II соответствует тому, что два комплексно-сопряженных мультипликатора покидают единичную окружность на единичной плоскости.

1.1.1 Перемежаемости типа I — III

При последовательном изучении классических видов перемежаемости логично начать с самого простого типа, которым является тип I; следующим по сложности типом перемежаемости является перемежаемость типа III.

Как уже было сказано выше – явление перемежаемости I типа наблюдается при потере устойчивости аттрактора, когда его мультипликатор становится равным 1 , и затем больше $+1$. Простейшим случаем, когда наблюдается перемежаемость типа I, является одномерное отображение, при этом в качестве аттрактора выступает неподвижная точка. В то же самое время, круг систем, в которых наблюдается данный тип перемежаемости, оказывается существенно шире (в частности, он включает в себя системы с потоковым временем). Под мультипликатором неподвижной точки отображения $x_{n+1} = f(x_n)$ понимается значение производной $f'(x_n)$, вычисленной в точке x_0 , где x_0 находится из уравнения $x_0 = f(x_0)$, другими словами, x_0 – неподвижная точка данного отображения. Неподвижных точек может быть несколько, и у них могут быть разные мультипликаторы. Можно сказать, что мультипликатор — коэффициент при x_n при разложении функции,

стоящей в правой части, в ряд Тейлора. Он показывает, как в линейном режиме эволюционирует некоторое возмущение вблизи неподвижной точки.

Для перемежаемости типа I главной статистической характеристикой является зависимость средней длительности ламинарной фазы $\langle T \rangle$ от параметра надкритичности:

$$\langle T \rangle \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1/2}, \quad (1.1)$$

где ε_c - значение параметра, при котором происходит седло-узловая бифуркация. Отметим, что более детальное описание перемежаемостей типа I-III, а также подробный вывод статистических характеристик для данных типов поведения, приведено в работах [6, 9].

Явлению перемежаемости типа III соответствует потеря устойчивости аттрактором в результате того, что его мультипликатор становится равным (и затем, меньше) значения -1 [6, 9]. Опять-таки, простейшей системой, демонстрирующей данный тип перемежающегося поведения, является одномерная система с дискретным временем, а аттрактором, вносящим вклад в возникновение режима перемежаемости, — неподвижная точка. Для данного типа перемежающегося поведения зависимость средней длины ламинарной фазы $\langle T \rangle$ от параметра ε выглядит следующим образом:

$$\langle T \rangle \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1}. \quad (1.2)$$

Перемежаемости типа II соответствует потеря устойчивости аттрактора путем выхода двух комплексно-сопряженных мультипликаторов за единичную окружность на комплексной плоскости [6]. Неустойчивое возмущение в данном случае экспоненциально нарастает (в линейном приближении), поворачиваясь при этом на некоторый угол. Для описания данного типа перемежающегося поведения используют комплексные числа [6]. Необходи-

димо отметить, что статистические характеристики перемежаемости типов II и III являются практически одинаковыми.

1.1.2 Перемежаемость типа On–Off

Перемежаемость типа “On–Off” может возникать в системах, в которых управляющий параметр является либо случайной величиной, либо хаотической. При этом динамика системы выглядит как длительные периоды регулярного движения, прерываемые быстрыми всплесками. Более детальные исследования перемежаемости типа “On–Off”, выполненные в работе [11], показывают, что распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется степенному закону

$$N(L) \sim L^{-3/2}, \quad (1.3)$$

а зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от параметра надкритичности δ удовлетворяет степенной зависимости

$$\langle L \rangle \sim (\delta)^{-1}. \quad (1.4)$$

1.1.3 Перемежаемость типа игольного ушка

В научной литературе описано существование двух типов перемежающегося поведения для хаотических систем, наблюдающихся при разрушении режима фазовой синхронизации в случае, когда собственные частоты осциллятора и внешнего сигнала отличаются мало [5, 91, 92], и, соответственно, выделяют два значения параметра связи $\sigma_1 < \sigma_2$, являющиеся характерными точками, разграничивающими различные типы динамики. Ниже границы режима фазовой синхронизации динамика разности фаз $\Delta\varphi(t)$ содержит участки синхронной динамики (ламинарные фазы), постоянно прерываемые внезапными фазовыми проскоками (турбулентные фазы),

в течение которых значение $|\Delta\varphi(t)|$ изменяется на 2π . Проанализировав статистику ламинарных фаз, можно заключить, что ниже величины связи σ_1 (то есть достаточно далеко от границы установления/разрушения режима хаотической фазовой синхронизации σ_2) наблюдается перемежаемость типа I, для которой имеет место степенной закон (1.1) для средней длительности ламинарных фаз, в то время как выше критической точки σ_2 обнаруживается режим фазовой синхронизации. Для величины связи $\sigma \in (\sigma_1; \sigma_2)$ наблюдается сверхдлинное ламинарное поведение (так называемая перемежаемость игольного ушка), характеристики которого существенно отличаются от хорошо известных характеристик перемежаемости типа-I. Теоретическое объяснение явления перемежаемости игольного ушка основано на граничном кризисе синхронных аттракторов, вызванном бифуркацией слияния неустойчивых орбит, одни из которых являются седловыми, а другие – неустойчивы по всем направлениям [5,91], вблизи этого слияния и наблюдается этот тип перемежаемости.

В ходе исследования данного типа поведения [5,92] показано, что для перемежаемости игольного ушка зависимость средней длительности T ламинарных фаз от параметра надкритичности $(\sigma_2 - \sigma)$ выражается законом

$$T \sim \exp(k|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2}), \quad (1.5)$$

или

$$-\ln(1/T) = c_0 - c_1|\sigma_2 - \sigma|^{-1/2}, \quad (1.6)$$

(c_0 , c_1 и k – константы), приведенным впервые в [93] для статистики переходного процесса, предшествующего точке бифуркации слияния пары неустойчивых орбит. Аналитический вид распределения длительностей ламинарных фаз для перемежаемости игольного ушка был получен в рабо-

те [94, 95] и имеет следующий вид:

$$p(t) = T^{-1} \exp(-t/T). \quad (1.7)$$

1.1.4 Перемежаемость типа кольцо

Перемежаемость типа “кольцо” наблюдается при синхронизации двух одинаково связанных хаотических осцилляторов с существенной расстройкой по собственным частотам. Впервые данный тип перемежаемости был описан на примере модельной системы одинаково связанных хаотических осцилляторов Ресслера [41].

В ходе изучения перемежаемости “кольца”, проведенного в работе [41], показано что для фазовой синхронизации синхронный режим при больших частотных расстройках разрушается именно тогда, когда предельный цикл на фазовой плоскости пересекает начало координат (при малых расстройках разрушение фазовой синхронизации совпадает с моментом, когда происходит седло-узловая бифуркация). В тот момент, когда предельный цикл на плоскости комплексных амплитуд пересекает начало координат, аттрактор, соответствующий поведению системы, перестает быть фазово-когерентным.

Для данного типа перемежаемости показано, что распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется экспоненциальному закону [41]:

$$N(\tau) \sim \exp k\tau, \quad (1.8)$$

где k – некоторая константа.

В свою очередь, зависимость средней длины ламинарной фазы от параметра выглядит следующим образом:

$$\langle \tau(\varepsilon) \rangle = T \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right), \quad (1.9)$$

где ε_t - сила связи, соответствующая переходу к асинхронной динамике, ε_c - граница фазовой синхронизации (при этом перемежаемость типа “кольцо” наблюдается внутри интервала $[\varepsilon_t, \varepsilon_c]$).

Таким образом, в настоящем разделе был приведен краткий обзор различных типов перемежаемости. Среди них были как и классические типы перемежаемости - типы I-III, так и более специфические, которые возникают в системах, подверженных явлению синхронизации. Для всех рассмотренных типов перемежаемости были приведены их основные статистические характеристики.

1.2 Разработка методов по выделению участков синхронной и асинхронной динамики (ламинарных и турбулентных фаз) в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы синхронного режима

При исследовании перемежаемости важной проблемой является задача о выделении в сигналах временных интервалов, соответствующих различным типам динамики систем, демонстрирующей перемежающееся поведение (задача о выделении ламинарных и турбулентных фаз). Как известно, участки временной реализации, на которых наблюдается поведение, близкое к регулярному (так называемые ламинарные фазы) выделяются легче, нежели участки с нерегулярным (турбулентным) поведением. Классическими методами выделения регулярных фаз движения являются методы, основанные на анализе “текущего” периода колебаний или “текущей” амплитуды системы. Первый метод может работать лишь тогда, когда ламинарная фаза представляет сигнал, очень близкий к строго регулярному, что

имеет место далеко не всегда. Второй метод может быть применен только в том случае, когда турбулентная фаза характеризуется существенно большей амплитудой колебаний по сравнению с ламинарной фазой. В этом случае обычно поступают следующим образом: задается определенное пороговое значение Δ и пока состояние системы характеризуется значением, по абсолютной величине превышающим этот порог, считается, что в системе реализуется турбулентная фаза, а когда значение, описывающее состояние системы оказывается ниже порогового — ламинарная. Подобный подход применялся, например, при анализе перемежающегося поведения на границе синхронизации с запаздыванием (см., например, [96]). В этом случае анализируемый сигнал $u(t)$ представлял собой разность состояний двух взаимодействующих систем, сдвинутых друг относительно друга на время запаздывания τ : $u(t) = x_1(t) - x_2(t - \tau)$. В те моменты времени, когда поведение систем было синхронизовано, величина $u(t)$ была близка к нулю (ламинарная фаза), а когда синхронизация разрушалась (турбулентная фаза), величина $u(t)$ изменялась в достаточно широких пределах. Однако в данном случае недостаток метода заключается в том, что в течение турбулентной фазы движения величина $u(t)$ может пересекать нулевое значение, т.е. оказываться как выше, так и ниже порога Δ . В свою очередь, это приводит к погрешности выделения турбулентных фаз, так как каждая турбулентная фаза оказывается разделенной на несколько частей и, плюс ко всему, появляются ошибочно диагностированные короткие ламинарные фазы. Таким образом, получается погрешность при анализе статистических свойств перемежающегося поведения (определение средней длительности, законов распределения ламинарных и турбулентных фаз).

В ряде случаев для исследования перемежающегося поведения предлагается использовать непрерывное вейвлетное преобразование, которое является эффективным средством анализа временных реализаций, характе-

ристики которых изменяются с течением времени [72–74, 97–101]. Тем не менее, и методы, основанные на вейвлетном преобразовании, также имеют свои ограничения. В частности, метод, предложенный в [102], хорошо работает только в том случае, если поведение системы в ламинарной фазе является регулярным и имеет одну и ту же структуру в любой момент времени ламинарной фазы системы. Суть метода заключается в следующем: определяется число максимумов вейвлетной поверхности в каждый момент времени t , и интервалы времени, в течение которых число максимумов на вейвлетной поверхности не изменяется, считаются ламинарными фазами, другие, соответственно, — турбулентными. Однако, данный метод оказывается неприменим для систем, у которых амплитуда сигнала изменяется в широком диапазоне, а ламинарная фаза непериодична (в этом случае число максимумов в течение ламинарной фазы для любого момента времени различно). В частности, такой режим наблюдается при анализе перехода к синхронному поведению хаотических осцилляторов [96].

Для данного класса связанных хаотических систем также существует другой метод анализа, изложенный в [103], однако и он имеет жесткие ограничения — для его применения необходимо, чтобы во время турбулентной фазы (асинхронная динамика связанных осцилляторов) основная энергия вейвлетного спектра $E(s, t)$ колебаний приходилась на два основных характерных временных масштаба $s_{1,2}$, что также оказывается неприменимым для широкого круга систем.

Общим недостатком многих методов является значительное время счета, особенно при обработке длительных временных реализаций. В то же самое время, именно длительные временные реализации необходимы для анализа статистических характеристик перемежающегося поведения.

В ходе проведенных исследований в рамках диссертационной работы был предложен новый метод для выделения турбулентных и ламинарных

фаз временных реализаций связанных хаотических систем, находящихся вблизи границы режима фазовой синхронизации. Данный метод позволяет определять продолжительность фаз (как синхронных, так и асинхронных), что, в свою очередь, дает возможность проанализировать статистические характеристики поведения систем. Предложенный метод использует непосредственно мгновенные фазы хаотических сигналов систем и позволяет точно определять длину турбулентной и ламинарной фазы поведения.

1.2.1 Метод выделения участков синхронной и асинхронной динамики

Одним из важных и интересных типов перемежающегося поведения является перемежаемость игольного ушка [5,104], наблюдаемая вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. В ходе проведения исследований был предложен новый метод для выделения участков синхронного и асинхронного поведения для данного типа перемежаемости. Достоинством данного метода является то, что он работает непосредственно с разностью мгновенных фаз и не использует дополнительных преобразований, что значительно уменьшает продолжительность времени расчета.

Рассмотрим применение данного метода для выделения участков синхронной и асинхронной динамики на примере системы однонаправлено связанных осцилляторов Рёсслера:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\omega_d y_d - z_d, \\ \dot{y}_d &= \omega_d x_d + a y_d, \\ \dot{z}_d &= p + z_d(x_d - c), \end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= -\omega_r y_r - z_r + \varepsilon(x_d - x_r), \\ \dot{y}_r &= \omega_r x_r + a y_r, \\ \dot{z}_r &= p + z_r(x_r - c), \end{aligned} \tag{1.11}$$

где (x_d, y_d, z_d) $[(x_r, y_r, z_r)]$ — декартовы координаты ведущего [ведомого] осциллятора, ε — параметр, отвечающий за интенсивность связи. Система (1.10) является ведущей, а система (1.11) — ведомой. Значения управляющих параметров, по аналогии с предыдущими исследованиями [105], были выбраны следующими: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметры $\omega_d = 0.93$ и $\omega_r = 0.95$ отвечают собственным частотам ведущей и ведомой подсистем, соответственно. Следует отметить, что при указанных значениях управляющих параметров оба осциллятора в автономном режиме демонстрируют хаотические колебания.

Фазовая хаотическая синхронизация соответствует случаю, когда разность мгновенных фаз

$$\Delta\varphi(t) = \varphi_1(t) - \varphi_2(t), \quad (1.12)$$

для исследуемых взаимодействующих хаотических систем оказывается ограниченной и не нарастает с течением времени:

$$|\Delta\varphi(t)| = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| < \text{const}, \quad (1.13)$$

где $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — мгновенные фазы рассматриваемых хаотических систем, соответственно.

Фазы $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ могут быть введены в рассмотрение различными способами. Во-первых, мгновенная фаза $\varphi(t)$ хаотического сигнала может быть введена как угол в полярной системе координат на плоскости (x, y) [3, 106]

$$\varphi = \text{arctg} \frac{y}{x}. \quad (1.14)$$

Другим способом определения фазы для хаотической динамической системы является введение в рассмотрение аналитического сигнала [107, 108]

$$\zeta(t) = x(t) + jH[x] = A(t)e^{j\varphi(t)}, \quad (1.15)$$

где функция $H[x]$ является преобразованием Гильберта временной реализации $x(t)$

$$H[x] = \frac{1}{\pi} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad (1.16)$$

(v.p. в соотношении (1.16) означает, что интеграл вычисляется в смысле главного значения). Соответственно, фаза $\varphi(t)$ хаотического сигнала $x(t)$ определяется из соотношений (1.15) и (1.16). Третьим способом, традиционно используемым для определения фазы хаотического сигнала, является поверхность сечения Пуанкаре [107, 108], так что фаза определяется как

$$\varphi(t) = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t \leq t_{n+1}, \quad (1.17)$$

где t_n — момент времени, соответствующий n -му пересечению поверхности сечения Пуанкаре фазовой траекторией.

Установлению синхронного режима в связанных хаотических системах, при выборе значений управляющих параметров вблизи области (но вне ее) фазовой синхронизации, предшествует перемежающееся поведение, когда во временной реализации существуют участки синхронной динамики (ламинарные фазы), прерываемые внезапными проскоками (турбулентные фазы), во время которых значение разности фаз изменяется на величину 2π .

При введении фазы хаотического сигнала одним из вышеупомянутых традиционных способов, её считают монотонно возрастающей от $-\infty$ до $+\infty$. Для выявления участков синхронного/асинхронного поведения обычно рассматривают зависимость разности фаз $\Delta\varphi(t)$ от времени. Типичная зависимость такой разности фаз для двух однонаправлено связанных систем Ресслера (1.10)–(1.11) представлена на рисунке 1.1, *a*. Участки, где разность фаз $\Delta\varphi(t)$ изменяется в пределах 2π , соответствуют ламинарно-

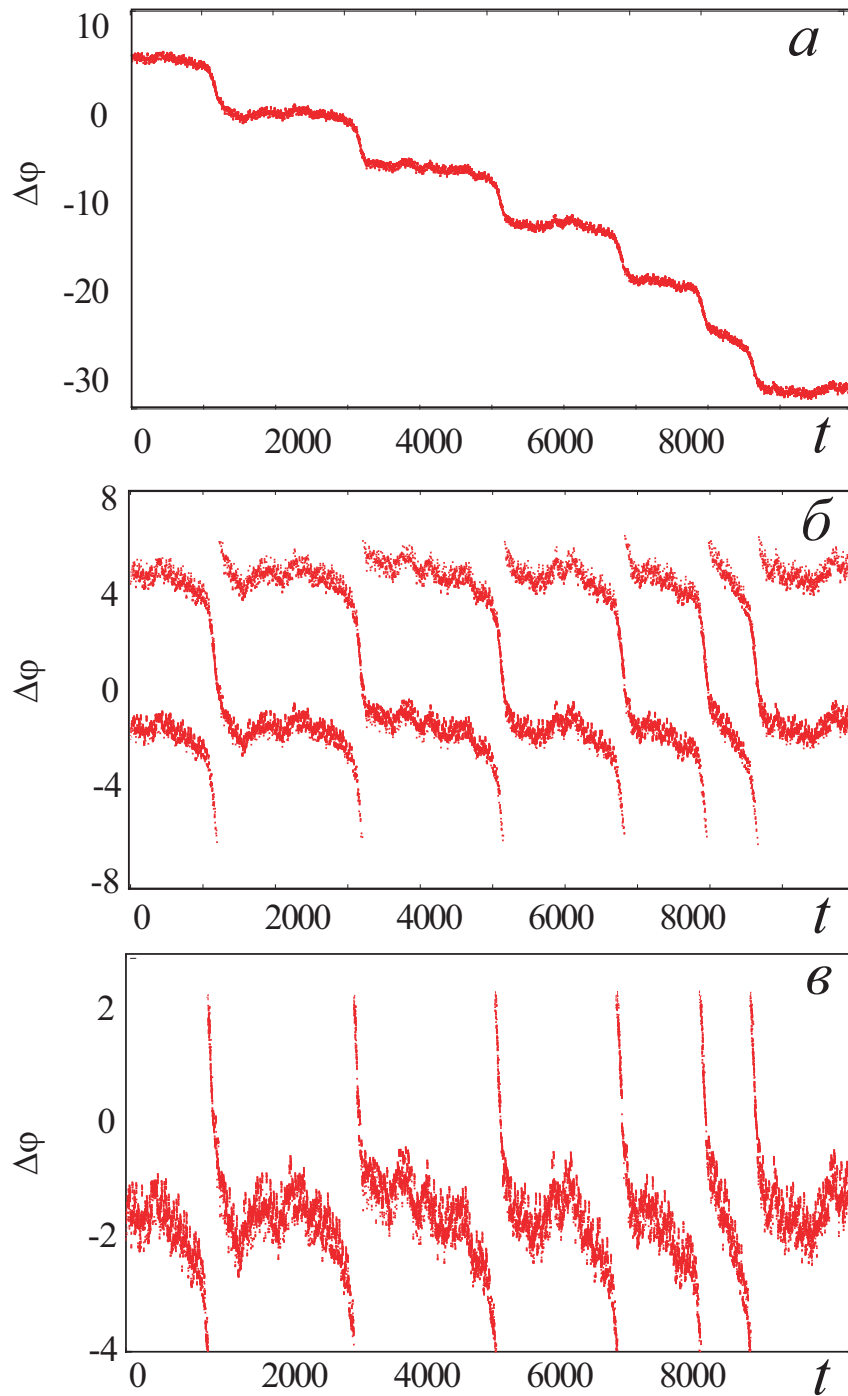


Рис. 1.1: Разности фаз $\Delta\varphi(t)$ для случаев: (а) когда мгновенные фазы монотонно возрастают $-\infty$ до $+\infty$; (б) когда мгновенные фазы лежат в диапазоне $[-2\pi; 2\pi]$; (в) когда диапазон изменения разности мгновенных фаз составляет 2π . Параметр связи во всех случаях выбран равным $\varepsilon = 0.036$

му поведению, когда наблюдается захват фазы. Остальные участки соответствуют турбулентному поведению, где захват фазы не наблюдается.

Несмотря на то, что участки ламинарного и турбулентного поведения на временной зависимости $\Delta\varphi(t)$ легко определяются визуально, при численном выделении этих фаз возникает ряд проблем, связанных с хаотическими флуктуациями, которые приводят к ложному детектированию возникновения ламинарных или турбулентных фаз.

Для того, чтобы избавиться от сложностей, которые возникают при численном выделении участков турбулентного и ламинарного поведения, будем считать мгновенные фазы $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ не монотонно возрастающими от $-\infty$ до $+\infty$, а лежащими в пределах $[0; 2\pi]$. В этом случае разность фаз $\Delta\varphi(t)$ будет изменяться в диапазоне $[-2\pi; 2\pi]$ и иметь вид, показанный на рисунке 1.1, б.

Из сопоставления рисунков 1.1, а и 1.1, б видно, что на рисунке 1.1, б существует некоторый диапазон значений разности фаз $[\Delta\varphi_{min}; \Delta\varphi_{max}]$ (в рассматриваемом случае $\Delta\varphi_{min} \approx -\pi$, $\Delta\varphi_{max} \approx 2\pi$), выход значения $\Delta\varphi(t)$ за пределы которого соответствует началу турбулентной фазы. При этом важно отметить, что все флуктуации величины $\Delta\varphi(t)$, обусловленные хаотическим характером колебаний взаимодействующих систем, оказываются локализованными в области ламинарных участков поведения систем, в то время как изменение разности фаз во время турбулентной фазы практически не демонстрирует флуктуаций. Это позволяет во время численного анализа временных реализаций однозначно и очень точно диагностировать начало и конец турбулентной фазы по значению величины $\Delta\varphi(t)$.

Очевидно, что если величины $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ изменяются в диапазоне $[0; 2\pi]$, то разность фаз $\Delta\varphi(t)$ будет лежать в интервале $[-2\pi; 2\pi]$. При этом зависимость будет являться многозначной, что не очень удобно для анализа поведения изучаемых систем. Чтобы избавиться от этого недостат-

ка метода, можно использовать факт 2π -периодичности фазы, и перевести величину разности фаз из диапазона значений шириной 4π к аналогичному диапазону шириной 2π . При этом нужно стремиться к тому, чтобы значения разности фаз, соответствующие ламинарному участку поведения системы, приходились примерно на середину диапазона значений (рисунок 1.1, в). В этом случае диагностировать начало и конец участка турбулентной динамики можно по пересечению величиной $\Delta\varphi(t)$ некоторых установленных пороговых значений $\Delta\varphi_{min}$ и $\Delta\varphi_{max}$ (в рассматриваемом случае $\Delta\varphi_{min} \approx -3$, $\Delta\varphi_{max} \approx 0$). Важно отметить, что и в этом случае все флуктуации, обычно препятствующие точному детектированию начала и конца ламинарных и турбулентных фаз, оказываются сосредоточенными в области значений $[\Delta\varphi_{min}; \Delta\varphi_{max}]$, соответствующей ламинарному характеру поведения систем, что позволяет избавиться от сложностей нахождения границ участков синхронной и асинхронной динамики.

Важно еще раз подчеркнуть, что используемый подход опирается непосредственно на мгновенные фазы, что позволяет не использовать дополнительные преобразования (такие как усреднение по скользящему окну, непрерывное вейвлетное преобразование и т.п.) для разности фаз $\Delta\varphi(t)$, которые, в свою очередь, могут значительно увеличить время вычислений.

1.2.2 Апробация предложенного метода

Для верификации предложенного метода были получены распределения длительностей ламинарных фаз для системы (1.10)–(1.11) при различных значениях параметра связи ε (рисунок 1.2). Из приведенных рисунков отчетливо видно, что распределение длительностей ламинарных фаз, выделенных предложенным методом, подчиняется экспоненциальному закону,

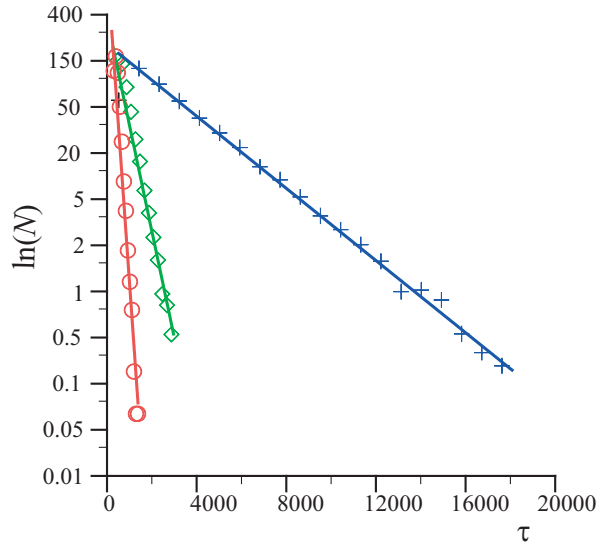


Рис. 1.2: Распределения длительностей ламинарных фаз $N(\tau)$ при различных значениях параметра связи и соответствующие аппроксимации (показаны сплошными линиями): 1 — $\varepsilon = 0.036$ (+), $N(\tau) = 213.6\exp(-4 \times 10^{-4}\tau)$; 2 — $\varepsilon = 0.032$ (\diamond), $N(\tau) = 368.8 \times \exp(-2 \times 10^{-3}\tau)$; 3 — $\varepsilon = 0.028$ (\circ), $N(\tau) = 1211.3\exp(-7 \times 10^{-3}\tau)$. Ось ординат приведена в логарифмическом масштабе

в полном соответствии с известной закономерностью, приведенной в работе [95].

Предложенный метод применен также для выделения турбулентных фаз для системы (1.10)–(1.11) при тех же значениях параметра связи. Полученные распределения приведены на рисунке 1.3. Видно, что во всех рассмотренных случаях распределения длительностей турбулентных фаз оказываются близкими к гауссовым.

Важно отметить, что, как уже отмечалось ранее, многие из существующих методов анализа участков временных реализаций, порожденных динамическими системами, демонстрирующими перемежающееся поведение, оказываются работоспособными только для выделения ламинарных фаз, когда динамика системы обладает большей степенью регулярности. Для анализа же турбулентных участков поведения такие методы оказываются неприменимыми (например, метод, описанный в работе [96], когда при

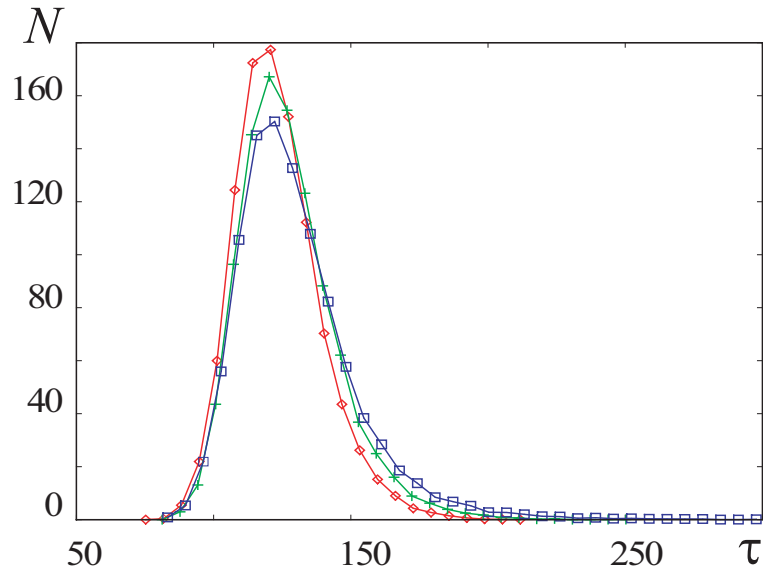


Рис. 1.3: Распределения длительностей турбулентных фаз $N(\tau)$ при различных значениях параметра связи: $\varepsilon = 0.036$ (\square); $\varepsilon = 0.032$ ($+$); $\varepsilon = 0.028$ (\diamond). Видно, что во всех случаях распределения оказываются близкими к гауссовым

использовании этого метода каждая истинная турбулентная фаза при детектировании оказывается разделенной на несколько частей, что дополнительно приводит к появлению ошибочно диагностируемых коротких ламинарных фаз). Тот факт, что предложенный метод оказывается применимым для выделения и ламинарных, и турбулентных участков поведения систем, может рассматриваться как дополнительная положительная особенность данного метода.

Таким образом, в диссертационной работе предложен новый метод для выделения турбулентных и ламинарных фаз во временных реализациях взаимодействующих осцилляторов, находящихся вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. Предложенный метод не требует дополнительных преобразований анализируемых величин, что позволяет существенно упростить и ускорить процедуру выделения ламинарных и турбулентных участков поведения рассматриваемых систем. Результаты, полученные с помощью предложенного метода, находятся в очень хорошем

соответствии с теоретическими оценками. Разработанный метод был использован при проведении исследований и получении результатов, описанных далее.

1.3 Изучение поведения хаотических систем, при малых расстройках частот, на граничных временных масштабах

Как уже упоминалось ранее, из всех известных типов синхронного поведения особый интерес для изучения представляет синхронизация временных масштабов [15–17], так как этот тип синхронной хаотической динамики позволяет рассматривать с единых позиций все типы хаотической синхронизации. Более того, он может быть диагностирован даже в тех случаях, когда детектирование других типов синхронного поведения оказывается проблематичным (например, диагностирование режима хаотической синхронизации в случае фазово-некогерентного аттрактора [109]), что делает его широко распространенным и важным в различных практических приложениях. Важно также отметить широкие возможности диагностики хаотической синхронизации с помощью метода синхронизации временных масштабов в случае многомасштабного хаоса [16].

В настоящем разделе рассматривается поведение однонаправленно связанных систем Ресслера на границе синхронных и асинхронных временных масштабов. Как известно [15, 16], в режиме синхронизации временных масштабов (при фиксированном наборе значений управляющих параметров) на разных временных масштабах может наблюдаться как синхронная, так и асинхронная динамика. При изменении масштаба наблюдения в этом случае происходит смена наблюдаемого типа поведения с синхронного на

асинхронный, или наоборот. Отметим, что смена одного типа поведения на другой происходит не сразу, а в определенном интервале значений временных масштабов, где исследуемая система попеременно демонстрирует то синхронную, то асинхронную динамику; иными словами, в системе реализуется перемежающееся поведение. В ходе проведенных исследований в рамках диссертационной работы был рассмотрен вопрос о том, каким закономерностям подчиняется перемежающееся поведение в исследуемой системе и был определен тип данной перемежаемости, что позволило более глубоко понять механизмы перехода от синхронного поведения к асинхронному в режиме синхронизации временных масштабов. Начнем изложение полученных результатов с краткого описания режима синхронизации временных масштабов, поскольку это необходимо для дальнейшего изложения.

1.3.1 Синхронизация временных масштабов

Концепция синхронизация временных масштабов [15, 16] основана на введении в рассмотрение непрерывного множества фаз исследуемых сигналов связанных хаотических систем. Синхронизация временных масштабов означает, что на определенном интервале временных масштабов $[s_l; s_h]$, вводимых в рассмотрение с помощью непрерывного вейвлетного преобразования

$$W(s, t_0) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t - t_0}{s} \right) dt, \quad (1.18)$$

с материнским вейвлетом Морле

$$\psi(\eta) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp(j\Omega_0\eta) \exp\left(\frac{-\eta^2}{2}\right), \quad (1.19)$$

$\Omega_0 = 2\pi$, наблюдается синхронная динамика. Все другие типы синхронного поведения хаотических осцилляторов (такие как фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, синхронизация с запаздыванием) могут

рассматриваться как частные случаи синхронизации временных масштабов [15, 16, 110, 111].

Вейвлетная поверхность

$$W(s, t_0) = |W(s, t_0)|e^{j\varphi_s(t_0)}, \quad (1.20)$$

характеризует поведение системы на каждом временном масштабе s в любой момент времени t_0 . Величина $|W(s, t_0)|$ характеризует наличие и интенсивность соответствующего временного масштаба s в момент времени t_0 . Как правило, в рассмотрение также вводят мгновенное

$$E(s, t_0) = |W(s, t_0)|^2, \quad (1.21)$$

и интегральное

$$\langle E(s) \rangle = \int |W(s, t_0)|^2 dt_0, \quad (1.22)$$

распределения энергии по временным масштабам.

Следует отметить, что при использовании вейвлетного преобразования (1.18) для каждого временного масштаба s оказывается естественным образом определена непрерывная фаза $\varphi(s, t) = \arg W(s, t)$. Иными словами, оказывается возможным характеризовать поведение каждого временного масштаба s с помощью ассоциированной с ним фазы $\varphi(s, t)$, являющейся непрерывной функцией временного масштаба s и времени t . Введенное в рассмотрение таким образом семейство фаз наиболее полным образом характеризует поведение связанных систем: возможно описать поведение каждого временного масштаба с помощью ассоциированной с ним фазы $\varphi(s, t)$.

Для двух связанных хаотических осцилляторов $\mathbf{x}_{1,2}(t)$ имеет место режим синхронизации временных масштабов, если существует такой интервал временных масштабов $s_l \leq s \leq s_h$, для которого выполняется условие

захвата фаз

$$|\varphi_1(s, t) - \varphi_2(s, t)| < \text{const}, \quad (1.23)$$

и условие ненулевой энергии (доля энергии вейвлетного спектра, приходящаяся на данный интервал временных масштабов, оказывается отличной от нуля)

$$E_{snhr} = \int_{s_l}^{s_h} \langle |W(s, t)|^2 \rangle ds > 0, \quad (1.24)$$

где $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по времени.

Как уже отмечалось выше, все остальные известные типы синхронного поведения (фазовая синхронизация, обобщенная синхронизация, синхронизация с запаздыванием, полная синхронизация) могут быть рассмотрены как частные проявления синхронизации временных масштабов. Действительно, в случае классической синхронизации периодических осцилляторов синхронное поведение будет наблюдаться на всех временных масштабах (в силу определения вейвлетного преобразования (1.18), временного масштаба s , ассоциированной с ним непрерывной фазы $\varphi(s, t)$ и самого определения режима синхронизации временных масштабов). В случае хаотических колебаний ситуация оказывается сложнее. Тем не менее, если два хаотических осциллятора находятся в одном из вышеперечисленных режимов хаотической синхронизации, то в этом случае, для временных реализаций $x_{1,2}(t)$, порождаемых этими осцилляторами, обязательно существует диапазон синхронных временных масштабов (см. подробнее [15, 16, 110, 111]). Для данного диапазона будет выполняться условие захвата фаз (1.23) и ненулевой энергии (1.24), и соответственно, реализовываться режим синхронизации временных масштабов. Иными словами, режимы фазовой синхронизации, обобщенной синхронизации, синхронизации с запаздыванием и полной синхронизации являются частными случаями синхронизации

временных масштабов. Для того, чтобы диагностировать режим синхронизации временных масштабов, необходимо проверить выполнение условий (1.23) и (1.24) для некоторого диапазона временных масштабов.

В то же самое время, на временных масштабах s , лежащих вне указанного диапазона $[s_l; s_h]$, условие захвата фаз (1.23) выполняться не будет. На этих масштабах наблюдения интервалы времени, характеризующиеся синхронной динамикой, будут прерываться участками, где разность фаз достаточно резко изменяется на величину порядка 2π . Иными словами, на таких временных масштабах будет наблюдаться перемежающееся поведение, причем временной масштаб s , на котором осуществляется наблюдение, выступает в качестве критического параметра, от которого зависят характеристики перемежаемости. По мере приближения масштаба наблюдения s к диапазону синхронных временных масштабов $[s_l; s_h]$ длительность участков ламинарного поведения будет увеличиваться (и стремиться к бесконечности при $s \rightarrow s_l - 0$ и $s \rightarrow s_h + 0$), в то время как количество турбулентных участков будет уменьшаться (и, соответственно, стремиться к нулю при $s \rightarrow s_l - 0$ и $s \rightarrow s_h + 0$).

Наличие перемежающегося поведения на границе синхронных временных масштабов связанных хаотических осцилляторов в научной литературе ранее не описывалось. В ходе проведенных исследований впервые был рассмотрен вопрос о том, к какому типу перемежаемости следует отнести данный тип динамики, и, на основании численного моделирования поведения двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера, было установлено, что в этом случае в системе реализуется перемежаемость “кольца” [41].

1.3.2 Система двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера

В качестве модельного объекта исследований была выбрана система связанных осцилляторов Ресслера (1.10)–(1.11). Как и ранее (раздел 1.2.1, стр. 33), система (1.10) является ведущей, а система (1.11) — ведомой. Значения управляющих параметров были выбраны $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметры $\omega_d = 0.93$ и $\omega_r = 0.95$ отвечают собственным частотам ведущей и ведомой подсистем, при указанных значениях управляющих параметров оба осциллятора в автономном режиме демонстрируют хаотические колебания.

При заданных значениях управляющих параметров и величине связи $\varepsilon_{PS} = 0.042$ возникает режим фазовой хаотической синхронизации. Как уже было отмечено выше, фазовая хаотическая синхронизация является одним из частных случаев синхронизации временных масштабов, поэтому, в случае режима фазовой синхронизации в рассматриваемой системе также будет диагностироваться режим синхронизации временных масштабов. При этом, наряду с синхронными, будут существовать и асинхронные временные масштабы, для которых не выполняются условия (1.23) и (1.24). При уменьшении параметра связи между осцилляторами ширина диапазона синхронных временных масштабов уменьшается, и, при значениях параметра связи меньше критического ε_{PS} , соответствующего границе режима фазовой хаотической синхронизации, на всех временных масштабах наблюдается асинхронная динамика.

На рисунке 1.4 показано поведение разности мгновенных фаз

$$\Delta\varphi(s, t) = \varphi_1(s, t) - \varphi_2(s, t), \quad (1.25)$$

исследуемых хаотических систем для разных временных масштабов при фиксированном параметре связи $\varepsilon = 0.085$, соответствующем режиму син-

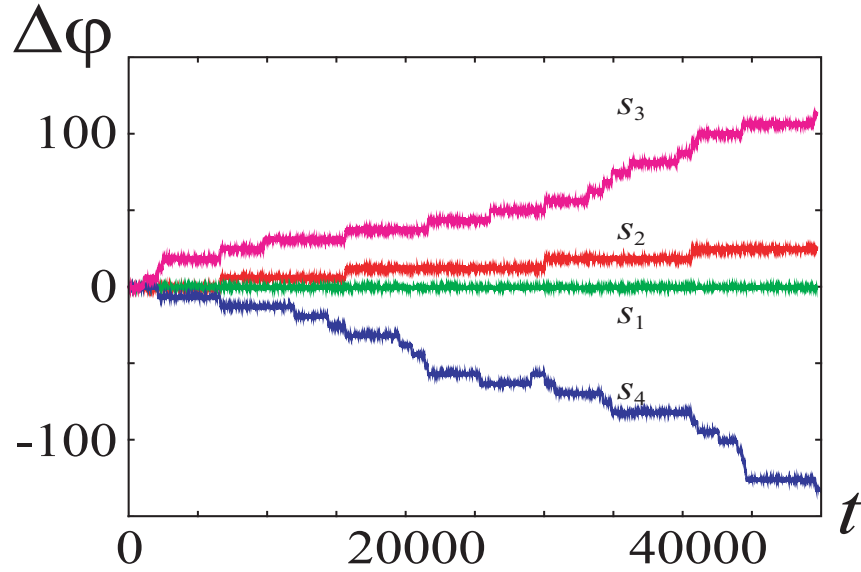


Рис. 1.4: Зависимость разности фаз исследуемой системы от времени на различных временных масштабах при фиксированном значении параметра связи $\varepsilon = 0.085$, соответствующем режиму синхронизации временных масштабов, где значения временных масштабов равны: $s_1 = 5.0000$, $s_2 = 4.9915$, $s_3 = 4.9918$, $s_4 = 8.2475$.

хронизации временных масштабов. Из рисунка видно, что для временного масштаба $s_1 = 5.0000$, находящегося в диапазоне синхронных масштабов $[s_l; s_h]$ ($s_l = 4.9919$, $s_h = 8.2460$), разность фаз $\Delta\varphi(s_1, t)$ с течением временем почти не изменяется и остается ограниченной. С другой стороны, для временных масштабов $s_2 = 4.9915$, $s_3 = 4.9918$ и $s_4 = 8.2475$, находящихся за пределами синхронного диапазона, разность фаз неограниченно возрастает (убывает), что свидетельствует об отсутствии синхронизма на данных масштабах. Для этих асинхронных временных масштабов зависимость $\Delta\varphi(s, t)$ можно разделить на участки, где разность фаз оказывается ограниченной в пределах 2π (синхронная или ламинарная динамика), и участки, на которых наблюдается скачок фазы (асинхронная или турбулентная динамика). Подобный тип поведения, при котором в различные моменты времени система демонстрирует чередующиеся между собой режимы, называется перемежаемостью. Как уже отмечалось выше (раздел 1.1,

стр. 22), каждый тип перемежающегося поведения характеризуется своими законами распределения длительностей ламинарных фаз и зависимости средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности. Как правило, на основании анализа данных характеристик можно делать вывод о типе перемежающегося поведения, наблюдающегося в том или ином случае.

1.3.3 Перемежаемость кольца для различных временных масштабов

Изучим теперь количественные характеристики перехода от синхронной динамики к асинхронной при изменении временного масштаба. В ходе исследований этого перехода в качестве критического параметра выступает временной масштаб s .

Для определения типа перемежающегося поведения, реализуемого в исследуемой системе при переходе от синхронной динамики к асинхронной (или наоборот), рассматривались зависимость средней длительности ламинарных участков поведения $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности и распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении параметра надкритичности. В качестве параметра надкритичности использовалась величина $(s_c - s)$, где s_c — значение временного масштаба, разграничивающего синхронные и асинхронные временные масштабы. Для выделения участков ламинарного и турбулентного поведения в анализируемых временных реализациях, использовался подход, разработанный в рамках диссертационной работы (раздел 1.2.1) и описанный в [18].

Изучив характеристики перемежающегося поведения, такие как распределение длительностей ламинарных фаз, зависимость средней длительности ламинарных фаз от параметра надкритичности, вероятность детекти-

рования турбулентной фазы на конечном временном интервале наблюдения, можно сделать вывод о том, что наблюдаемый тип перемежающегося поведения, реализующегося вблизи границы синхронных временных масштабов хаотических осцилляторов, находящихся в режиме синхронизации временных масштабов, классифицируется как перемежаемость “кольца” [21, 23]. Действительно, перемежаемость “кольца” характеризуется экспоненциальным распределением длительностей ламинарных фаз

$$N(l) \sim \exp(-kl), \quad k = \text{const}, \quad (1.26)$$

причем зависимость средней длительности $\langle l \rangle$ ламинарных фаз от критического параметра s подчиняется закону

$$\langle l(s) \rangle = T - \frac{T}{\ln(1 - p(s))}, \quad (1.27)$$

где $T = \langle l(s_t) \rangle$ является средней длительностью ламинарной фазы для временного масштаба наблюдения s_t , ограничивающего область перемежаемости “кольца”, $p(s)$ — вероятность детектировать фазовый проскок на временном интервале наблюдения длиной T на временном масштабе s . Как правило, зависимость вероятности p от критического параметра близка к линейной, и, соответственно, в этом случае, для $s < s_l$ соотношение (1.27) может быть переписано в виде

$$\langle l(s) \rangle \simeq T \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{s - s_t}{s_l - s_t} \right) \right). \quad (1.28)$$

Временной масштаб s_t соответствует нижней границе линейной зависимости $p(s)$ и может быть определен из условия $p(s_t) = 1$, при этом теоретическое соотношение (1.28) является справедливым только в диапазоне временных масштабов $s_t < s < s_l$. Аналогичное соотношение может быть легко получено для $s > s_h$, в этом случае

$$\langle l(s) \rangle \simeq T \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{s_t - s}{s_t - s_h} \right) \right). \quad (1.29)$$

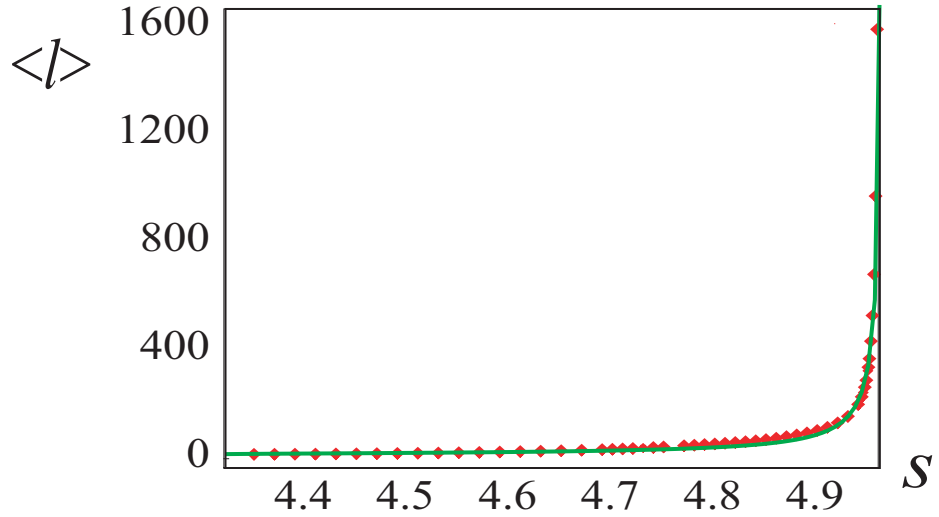


Рис. 1.5: Зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от параметра надкритичности $(s_c - s)$ (показана точками) и аппроксимирующая ее кривая (1.28) (показана сплошной линией), $s_c = 4.9919$, $s_t = 4.34$, $T = 8.0$

На рисунке 1.5 показана найденная зависимость средней длительности ламинарных участков поведения $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности $(s_c - s)$ при фиксированном значении параметра связи $\varepsilon = 0.085$. На этом же рисунке приведена теоретическая зависимость средней длительности ламинарных участков $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности (1.28), характерная для перемежаемости “кольца”. Из рисунка 1.5 видно, что численные данные, показанные точками, находятся в очень хорошем соответствии с теоретической зависимостью (1.28).

Еще одной важной характеристикой перемежающегося поведения, позволяющей в ряде случаев установить тип перемежаемости, является распределение длительностей участков ламинарного поведения при фиксированных значениях управляющих параметров. В ходе исследований было установлено, что распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированном значении параметра связи на разных временных масштабах является экспоненциальным (рисунок 1.6), что также позволяет говорить о наличии перемежающегося поведения типа “кольцо”. Нако-

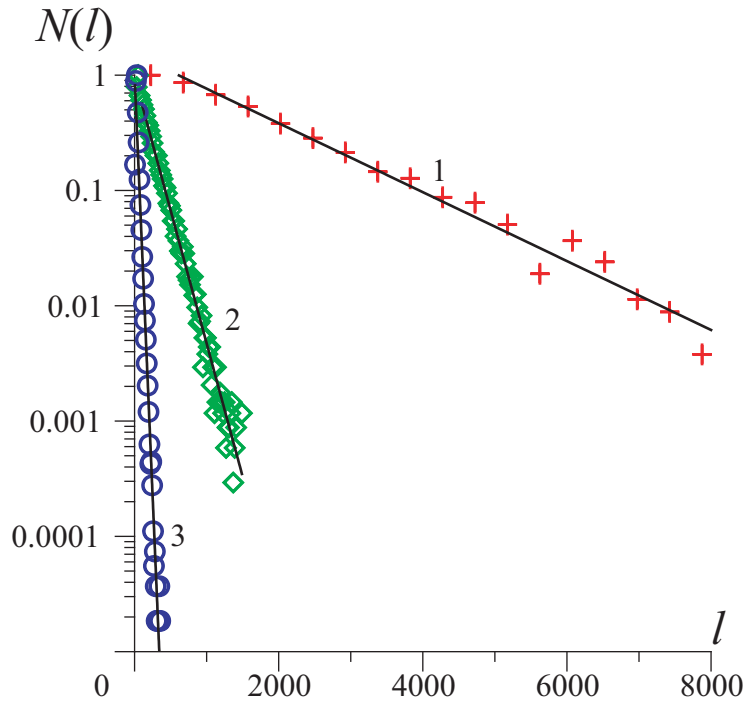


Рис. 1.6: Распределения длительностей ламинарных участков поведения $N(l)$ при различных значениях временного масштаба s , нормированные на максимальное значение, и соответствующие им экспоненциальные аппроксимации (1.26), показанные сплошными линиями: 1 — временной масштаб $s = 4.9885$, численно полученные точки показаны символами "+"; 2 — $s = 4.9700$ (\diamond); 3 — $s = 4.7200$ (\circ). Ось ординат приведена в логарифмическом масштабе. Значение параметра связи $\varepsilon = 0.085$

нец, кроме вышеописанных характеристик, для описания перемежаемости “кольца” можно использовать также такую характеристику, как вероятность детектирования турбулентного участка поведения на временном интервале длительностью T , в зависимости от параметра надкритичности. Данная вероятность может быть оценена по временной реализации длины L для любого временного масштаба по формуле

$$p = \frac{NT}{L}, \quad (1.30)$$

где L — длина временного ряда, на котором производится исследование, N — общее число участков ламинарного поведения на всей длине L . На рисунке 1.7 представлена зависимость вероятности p от параметра над-

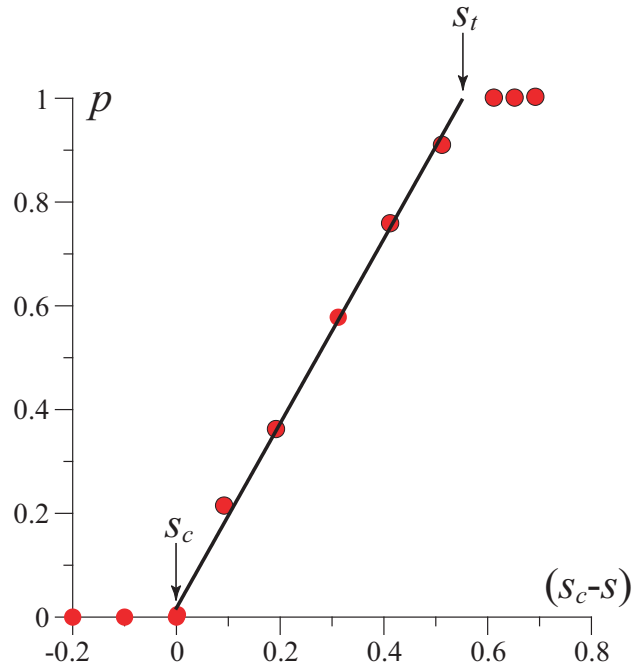


Рис. 1.7: Вероятность детектирования турбулентного участка поведения на временном интервале длительностью T , в зависимости от параметра надкритичности.

критичности $(s_c - s)$. Видно, что данная зависимость близка к линейной, что, опять-таки, свойственно для перемежаемости кольца, и хорошо согласуется с известными результатами [41].

Таким образом, на основании проведенных исследований можно сделать вывод о том, что наблюдаемый тип перемежающегося поведения, реализующегося вблизи границы синхронных временных масштабов однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера (1.10)–(1.11), находящихся в режиме синхронизации временных масштабов, классифицируется как перемежаемость “кольца”.

Неопровержимым доказательством того, что в данном случае наблюдается именно перемежаемость “кольца”, является также тот факт, что механизм, приводящий к возникновению фазовых проскоков на асинхронных временных масштабах s , для рассматриваемых систем Ресслера (1.10)–

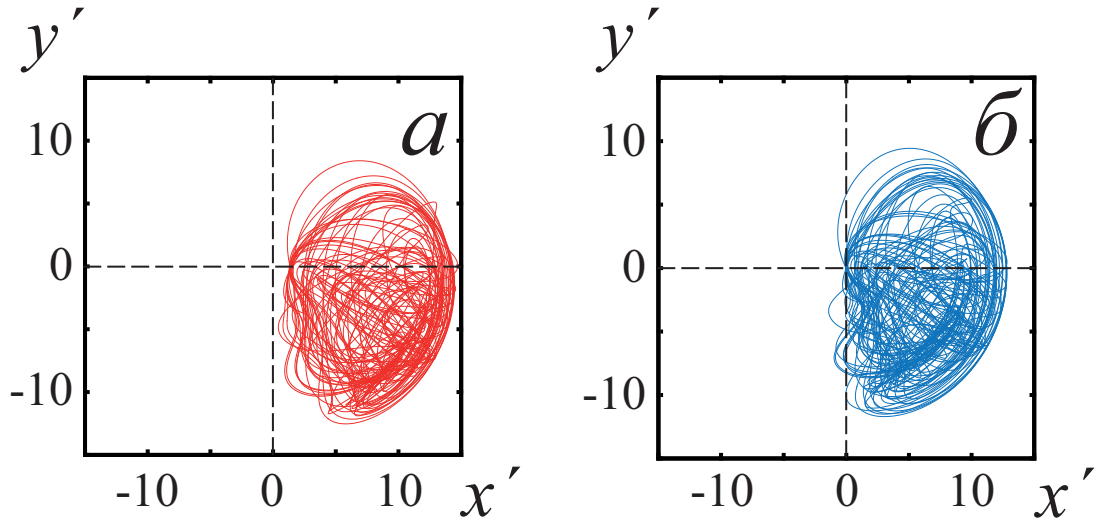


Рис. 1.8: Траектория второй системы на вращающейся плоскости (x', y') для однонаправленно связанных систем Ресслера, когда временной масштаб, на котором осуществляется наблюдение, выбран (а) $s = 5.2$ — синхронная динамика, (б) $s = 4.985$ — перемежающееся поведение. Значение параметра связи $\varepsilon = 0.085$

(1.11) оказывается в точности таким же, что и для перемежаемости “кольца” [41].

Граница возникновения перемежающегося поведения в случае перемежаемости “кольца” связана с тем, что в определенные моменты времени проекция фазовой траектории, соответствующая ведомой системе, рассматриваемая на фазовой плоскости, вращающейся вокруг начала координат в соответствии с состоянием ведущей системы, охватывает начало координат (см. более подробно [41]). В этом случае фазовые проскоки для зависимости разности фаз хаотических сигналов от времени (1.12) наблюдаются всякий раз, когда происходит охват фазовой траекторией начала координат. При этом, как уже отмечалось выше, фаза хаотического сигнала $\varphi(t)$ может быть введена в рассмотрение разными способами [107, 108, 112]. Однако, независимо от способа введения в рассмотрение фазы хаотического сигнала, механизм возникновения фазового проскока на зависимости

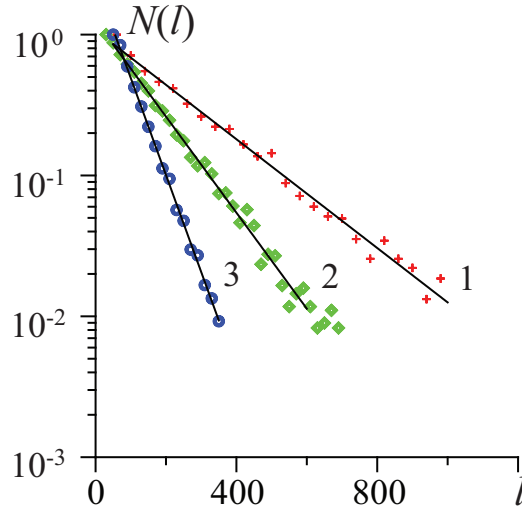


Рис. 1.9: Распределение длительностей ламинарных фаз при $\varepsilon = 0.045$ для трех различных значений временных масштабов наблюдения s (линия 1 и точки $+$ соответствуют временному масштабу $s_1 = 4.98$, линия 2 и точки \diamond — $s_2 = 4.94$, линия 3 и точки \circ — $s_3 = 4.92$) и соответствующие им экспоненциальные зависимости (1.26), показанные сплошными линиями. Ось ординат выбрана в логарифмическом масштабе, все распределения нормированы на максимальное значение

разности фаз от времени (1.12) связан с охватом фазовой траектории начала координат вращающейся плоскости.

Тот же самый механизм имеет место и в случае перемежаемости вблизи границы синхронных временных масштабов для хаотических осцилляторов, находящихся в режиме синхронизации временных масштабов. Если в качестве переменных, характеризующих состояние систем, рассматривать

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \operatorname{Re} W_{1,2}(s, t), \\ y_{1,2} &= \operatorname{Im} W_{1,2}(s, t), \end{aligned} \tag{1.31}$$

то на вращающейся плоскости, введенной в рассмотрение в соответствии с [41],

$$\begin{aligned} x' &= x_2 \cos \varphi_1(s, t) + y_2 \sin \varphi_1(s, t), \\ y' &= -x_2 \sin \varphi_1(s, t) + y_2 \cos \varphi_1(s, t), \end{aligned} \tag{1.32}$$

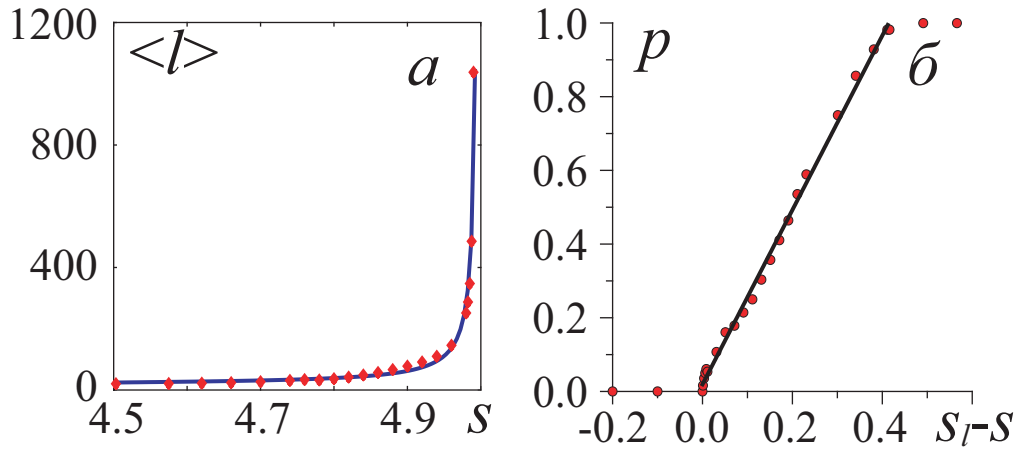


Рис. 1.10: (а) Зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle l \rangle$ от временного масштаба наблюдения s , полученная численно для двух однонаправленно связанных систем Ресслера и соответствующая ей теоретическая кривая (1.28), показанная сплошной линией ($s_t = 4.45$, $T = 8.00$); (б) зависимость вероятности детектировать фазовый прорыв на интервале наблюдения длительностью T для временного масштаба s

отчетливо виден механизм, приводящий к возникновению перемежающегося поведения. В диапазоне временных масштабов, соответствующих перемежающемуся поведению, траектория на вращающейся плоскости охватывает начало координат (рисунок 1.8), причем граница синхронных временных масштабов s_l соответствует ситуации, когда траектория второй системы на плоскости $(x'; y')$ начинает охватывать точку $(0; 0)$.

Для того, чтобы проверить корректность сделанных выводов, аналогичное исследование было проведено для другого значения параметра связи, $\varepsilon = 0.045$, диапазон синхронных временных масштабов при этом был ограничен временными масштабами $s_l = 4.99$ и $s_h = 8.25$. Распределение длительностей ламинарных фаз для этого значения параметра связи показано на рисунке 1.9. Точно также, как и в предыдущем случае (при значении параметра связи $\varepsilon = 0.085$), видно, что распределение длительностей участков ламинарного поведения подчиняется экспоненциальному закону (1.26), характерному для перемежаемости “кольца”, при этом имеет место очень

хорошее соответствие численно полученных данных и теоретических кривых. Зависимость средней длительности участков ламинарного поведения в зависимости от критического параметра, также находится в очень хорошем соответствии с теоретической кривой (1.28), характеризующей перемежаемость кольца (рисунок 1.10, *а*). Более того, вероятность обнаружить турбулентный участок поведения (проскок фазы) на интервале наблюдения длительностью T для временного масштаба s тоже оказывается близка к линейной (рисунок 1.10, *б*).

Таким образом, суммируя все вышеизложенное, можно сделать вывод, что для однонаправлено связанных систем Рёсслера, находящихся в режиме синхронизации временных масштабов, тип поведения, наблюдающийся вблизи границы синхронных временных масштабов, является перемежаемостью “кольца”. Основываясь на полученных результатах, можно ожидать, что данный тип поведения будет характерен для широкого круга хаотических систем, демонстрирующих режим синхронизации временных масштабов.

1.4 Изучение поведения хаотических систем при больших расстройках частот на граничных временных масштабах

Известно, что в случае фазовой хаотической синхронизации исследуемая система может демонстрировать два различных типа перехода от синхронной динамики к асинхронной [113], в зависимости от расстройки частоты. Ранее было уже отмечено, что фазовая хаотическая синхронизация является частным случаем синхронизации временных масштабов, исходя из этого, можно сделать предположение, что и для синхронизации временных мас-

штабов будет реализоваться два различных типа перехода от синхронной динамики поведения к асинхронной в зависимости от расстройки частот.

Отметим, что результаты исследований, описанные в разделе 1.3.3, проводились для взаимодействующих систем с малой расстройкой по частоте. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть вопрос о том, какой тип перемежаемости будет демонстрировать исследуемая система связанных хаотических осцилляторов при переходе от синхронных временных масштабов к асинхронным, когда в ней реализуется большая расстройка частот.

В этом разделе диссертационной работы рассматривается поведение однонаправленно связанных систем Ресслера на границе синхронных и асинхронных временных масштабов при большой расстройке частот. В ходе проведения исследований был рассмотрен вопрос о том, каким закономерностям подчиняется перемежающееся поведение при переходе от синхронной динамики к асинхронной в случае больших расстроек по частоте, что в свою очередь позволяет понять, как влияет на синхронизацию временных масштабов изменение расстройки частот исследуемой системы взаимодействующих осцилляторов, а также более детально изучить механизмы возникновения синхронизации временных масштабов.

1.4.1 Исследуемая система двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера в случае большой расстройки частоты

Для исследования динамики поведения хаотической системы в случае большой расстройки частот, снова была выбрана модельная система однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (1.10)–(1.11). Как и ранее (раздел 1.1.4, стр. 29 и раздел 1.3.2, стр. 46), значения управляющих парамет-

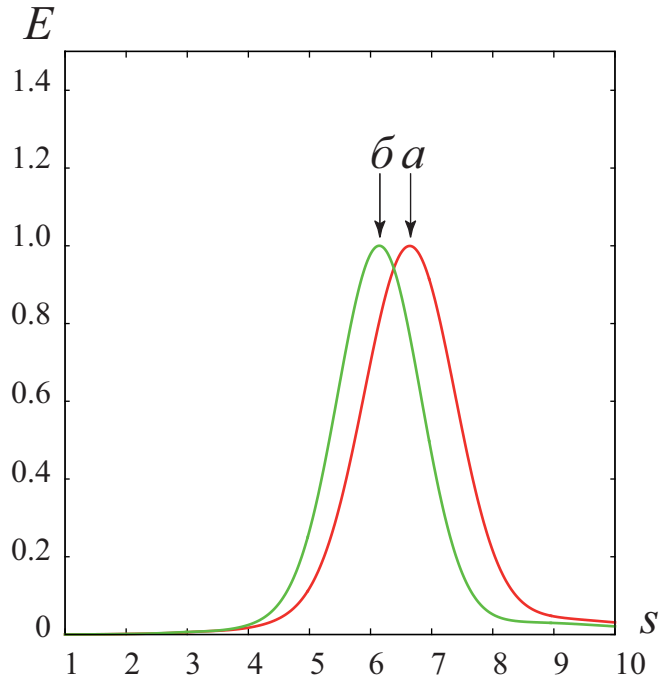


Рис. 1.11: Зависимость интегрального распределения энергии вейвлетного преобразования от временного масштаба для различных значений параметра, отвечающего собственной частоте ведущей системы: (а) $\omega_d = 0.93$ — малая расстройка, (б) $\omega_d = 1.0$ — большая расстройка. Значение параметра связи $\varepsilon = 0.2$

ров были выбраны $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Параметр $\omega_r = 0.95$, отвечающий собственной частоте ведомой подсистемы, остался неизменным, в то время как параметр, отвечающий собственной частоте ведущей системы, был выбран равным $\omega_d = 1.0$. Отметим, что при таких значениях управляющих параметров оба осциллятора в автономном режиме демонстрируют хаотические колебания, при этом в системе реализуется большая расстройка по частоте, в отличие от случаев, рассмотренных ранее. Следует добавить, что, как и в случае малой расстройки частот (раздел 1.3.2, стр. 46), исследуемая система может находиться в режиме синхронизации временных масштабов.

Отметим, что изменение параметра, отвечающего собственной частоте ведущей системы, приводит к смещению интегрального распределения

энергии вейвлетного преобразования, что в свою очередь, ведет к сдвигу диапазона синхронных масштабов $[s_l; s_h]$. Данное интегральное распределение показано на рисунке 1.11. Из рисунка видно, что распределение энергии вейвлетного спектра для случая большой расстройки частот ($\omega_d = 1.0$) сместилось в сторону меньших значений временных масштабов относительно случая малой расстройки по частоте $\omega_d = 0.93$. Точно такую же ситуацию можно наблюдать и для диапазона синхронных масштабов $[s_l; s_h]$ ($s_l = 4.445$, $s_h = 7.73$), который также сместился в сторону меньших значений временных масштабов (см. раздел 1.3.2, стр. 46).

1.4.2 Перемежаемость кольца для различных временных масштабов при большой расстройке частот в исследуемой хаотической системе

Для определения типа перемежающегося поведения, которое реализуется в исследуемой системе при переходе от синхронной динамики поведения к асинхронной, была использована та же статистическая характеристика, что и ранее (раздел 1.3.3, стр. 48), а именно, зависимость средней длительности ламинарных участков поведения $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности. В качестве параметра надкритичности снова использован временной масштаб s , точнее, $(s_c - s)$, где s_c — значение временного масштаба, разграничивающего синхронные и асинхронные временные масштабы. Для выделения участков ламинарного и турбулентного поведения в анализируемых временных реализациях использовался подход, разработанный в рамках диссертационной работы и описанный в разделе 1.2.1).

Как уже отмечалось, каждый тип перемежаемости обладает своими собственными характеристиками, такими как зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от параметра надкритичности, рас-

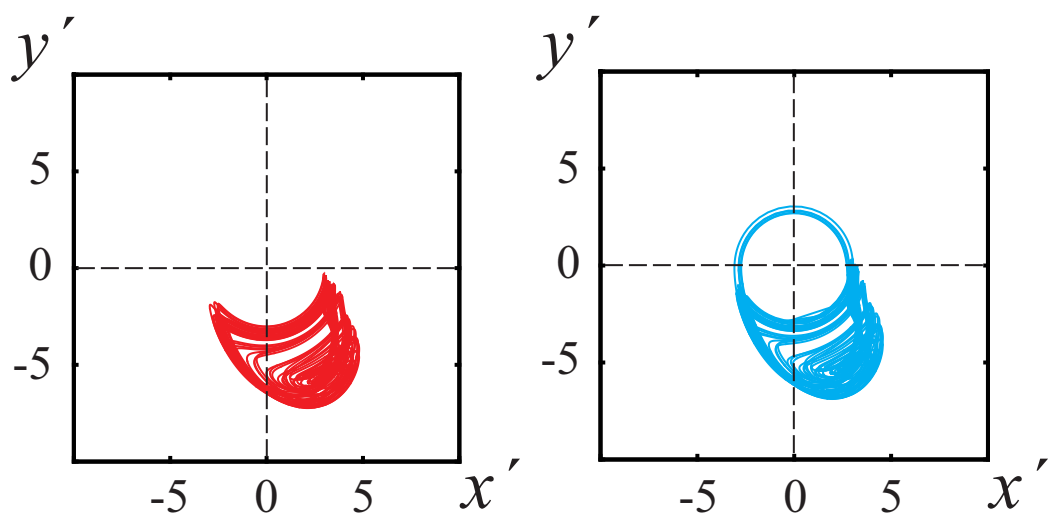


Рис. 1.12: Траектория второй системы на вращающейся плоскости (x', y') для односторонне связанных систем Ресслера при большой расстройке частот, когда временной масштаб, на котором осуществляется наблюдение, выбран (а) $s = 4.46$ — синхронная динамика, (б) $s = 4.42$ — перемежающееся поведение. Значение параметра связи $\varepsilon = 0.2$

пределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении параметра надкритичности, однако определяющим фактором является механизм, приводящий к возникновению перемежаемости. В разделе 1.3.3 было установлено, что для хаотических систем с малой расстройкой частот разрушение синхронизации в временных масштабах осуществляется через перемежаемость “кольца”. Механизм, приводящий к данному типу поведения, связан с тем, что проекция фазовой траектории, соответствующая ведомой системе, рассматриваемая на фазовой плоскости, вращающейся вокруг начала координат в соответствии с состоянием ведущей системы, охватывает начало координат. Исходя из вышесказанного, при определении типа перемежаемости, реализующегося в хаотических системах при больших расстройках частот, необходимо в первую очередь пронаблюдать за движением проекции фазовой траектории, соответствующей ведомой системе, рассматриваемой на фазовой плоскости, для случая синхронной и асинхронной динамики поведения.

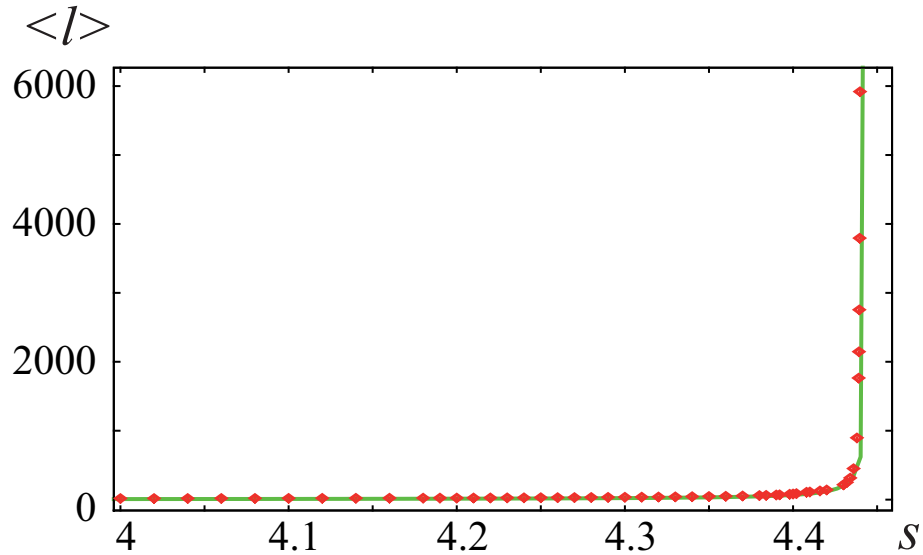


Рис. 1.13: Зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от параметра надкритичности $(s_c - s)$ (показана точками) и аппроксимирующая ее кривая (1.28) (показана сплошной линией), $s_c = 4.445$, $s_t = 3.9$, $T = 4.0$

Уравнения (1.31)–(1.32) будут описывать состояние системы. На рисунке 1.12 отчетливо видно, что траектория на вращающейся плоскости охватывает начало координат для асинхронных временных масштабов, в то время как для синхронных временных масштабов охват начала координат не происходит. Данное поведение исследуемой системы в точности повторяет результаты, полученные для систем с малой расстройкой по частоте (см. раздел 1.3.3, стр. 48). Однако на основании только этих данных нельзя окончательно делать выводы о наличии в исследуемой системе перемежаемости типа “кольца”. Для подтверждения полученных результатов необходимо построить зависимость средней длительности ламинарных участков поведения $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности.

На рисунке 1.13 представлена зависимость средней длительности ламинарных участков поведения $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности $(s_c - s)$, полученная при фиксированном значении параметра связи $\varepsilon = 0.2$. Также на рисунке приведена теоретическая зависимость средней длительности лами-

нарных участков $\langle l \rangle$ от параметра надкритичности (1.28), характерная для перемежаемости “кольца”. На рисунке 1.5 отчетливо видно, что численные данные (точки) и теоретическая зависимость (линия), находятся в очень хорошем соответствии друг с другом.

Исходя из выше приведенных результатов можно сделать вывод о том, что для однонаправлено связанных систем Рёсслера при большой расстройке по частоте переход от синхронизации временных масштабов к асинхронному типу поведению осуществляется также через перемежаемость “кольца”. Основываясь на полученных результатах, можно ожидать, что данный тип поведения будет характерен для широкого круга хаотических систем, демонстрирующих режим синхронизации временных масштабов.

1.5 Выводы по первой главе

В первой главе диссертационной работы описан новый метод выделения ламинарных и турбулентных фаз во временных реализациях взаимодействующих осцилляторов, находящихся вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. Необходимо отметить, что данный метод не требует дополнительных преобразований анализируемых величин, что, в свою очередь, позволяет существенно упростить и ускорить процедуру выделения ламинарных и турбулентных участков поведения рассматриваемых систем. В дальнейшем, с помощью данного метода, был рассмотрен вопрос о том, каким закономерностям подчиняется перемежающееся поведение при переходе от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике. Было показано, что данный переход для малой и большой расстройки частот в системе хаотических осцилляторов осуществляется через перемежаемость “кольца”. Данные результаты позволяют более детально изучить механизмы возникновения синхронизации временных масштабов.

Основываясь на полученных результатах, можно ожидать, что данный тип поведения будет характерен для широкого круга хаотических систем, демонстрирующих режим синхронизации временных масштабов.

Полученные в рамках первой главы диссертационной работы результаты исследования перемежающегося поведения, возникающего на границе синхронизации временных масштабов, приводят к возникновению новых вопросов, связанных с перемежающимся поведением. Можно ожидать, что если рассматривать систему однонаправлено связанных хаотических осциллятора в области асинхронных временных масштабов (точнее, в области параметров, где наблюдается перемежаемость “кольца”) и при этом находиться по параметру связи в области значений, лежащих ниже границы возникновения режима фазовой хаотической ситуации, то в исследуемой системе может одновременно реализовываться два различных по своим характеристикам типа перемежающегося поведения. Теоретического описания и численного моделирования такого типа поведения до настоящего время не существовало, поэтому дальнейшие исследования в рамках настоящей диссертационной работы направлены на изучение этого нового типа перемежающегося поведения.

Глава 2

Сосуществование двух типов перемежающегося поведения

[24, 28, 34, 37, 38]

2.1 Возможность одновременного сосуществования двух различных типов перемежающегося поведения

В предыдущей главе диссертационной работы были подробно рассмотрены все наиболее известные типы перемежающегося поведения. Важно отметить, что все исследования различных типов перемежающегося поведения в сложных нелинейных системах до настоящего времени были сконцентрированы на относительно простых случаях, когда в исследуемой системе при фиксированных значениях управляющих параметров сосуществуют и последовательно сменяют друг друга два различных динамических режима (например, “стационарное состояние — колебания”, “периодическая динамика — хаотическая динамика”, “синхронное поведение — асинхронная динамика” и т.п.). Однако, с теоретической точки зрения, не исключена ситуация, когда в нелинейной системе одновременно сосуществуют два различ-

ных типа перемежающегося поведения. В частности, такой тип поведения может возникнуть в результате различных шумовых эффектов, которые характерны для реальных систем, что в свою очередь может приводить к изменению основных характеристик перемежаемости [114]. В этом случае во временной реализации будут наблюдаться “переключения” между двумя различными динамическими режимами в рамках одного типа перемежающегося поведения, после чего может произойти переход к другому типу перемежаемости, при котором переходы между режимами будут подчиняться другим закономерностям, причем и сменяющие друг друга режимы тоже могут быть другими, а по истечении некоторого интервала времени система снова вернется к первому типу перемежаемости, после чего все подобные переходы от одного типа перемежаемости к другому будут повторяться. Очевидно, что такая ситуация, вполне возможная с теоретической точки зрения, приведет к усложнению (или, по крайней мере, к модификации) характеристик режима, наблюдающегося в анализируемой системе. Следует отметить, что до настоящего момента не существовало теории, описывающей поведение системы в случае сосуществования различных типов перемежаемости, хотя результаты, приведенные в разделах 1.3 и 1.4 настоящей диссертационной работы свидетельствуют о том, что подобная ситуация вполне возможна, например, в случае, когда сигнал системы, находящейся вблизи границы фазовой хаотической синхронизации, проходит через фильтр (который может быть естественным образом встроен в анализируемую систему или являться составляющей частью измерительной аппаратуры). В таких случаях наблюдающиеся режимы не удастся отклассифицировать и описать в рамках существующих классических теоретических представлений о перемежающемся поведении, что может существенно усложнить, например, работу с приборами и устройствами или осуществление медицинской диагностики. Таким образом, задача

исследования динамики систем, в которых при фиксированных значениях управляющих параметров сосуществуют различные типы перемежающегося поведения является интересной и важной, как с фундаментальной, так и прикладной точки зрения. С учетом фундаментального характера и универсальности явления перемежаемости, затрагивающего широкий круг самых различных систем, а также учитывая важность данной проблемы с точки зрения практического использования при диагностике и классификации сложного поведения систем, актуальность данного исследования не вызывает никаких сомнений.

Настоящая глава диссертационной работы посвящена рассмотрению одновременного сосуществования двух различных типов перемежающегося поведения. Исходя из общих предположений, можно ожидать, что для случая, когда в изучаемой системе будут одновременно сосуществовать два типа перемежающегося поведения, эти два типа поведения можно будет отнести к уже известным на настоящий момент. Основываясь на данном предположении, в диссертационной работе выведены общие теоретические соотношения, которые описывают одновременное сосуществование двух типов перемежающегося поведения. Вывод данных соотношений приведен в настоящей главе.

2.2 Вывод общих теоретических соотношений, описывающих одновременное сосуществование двух типов перемежающегося поведения

В настоящем разделе приведены результаты теоретического исследования основных характеристик поведения нелинейных систем в случае, когда одновременно сосуществуют два различных типа перемежаемости. В целях

обеспечения максимальной общности результатов, на данный момент не будем конкретизировать каждый из этих типов перемежаемости, называя их как “перемежающееся поведение первого типа” и “перемежающееся поведение второго типа”. Особо следует обратить внимание, что речь не идет о перемежаемостях типа I и II, которые наблюдаются при переходе от периодических колебаний к хаотическим.

Ситуация, которая реализуется в таком случае, схематично изображена на рисунке 2.1. Предположим, что для случая, когда в исследуемой системе реализуется только один тип перемежающегося поведения из двух возможных (рис. 2.1, *а, б*), на рассматриваемом интервале времени полностью будет наблюдаться только один участок ламинарного поведения (длительностью $t_2 - t_1$ для перемежающегося поведения первого типа, рис. 2.1, *а* и $t_4 - t_3$ для перемежающегося поведения второго типа, рис. 2.1, *б*). Однако, когда управляющие параметры системы будут выбраны таким образом, что в системе будут одновременно сосуществовать оба этих типа перемежаемости, и полагая, что возникновение турбулентных фаз происходит независимо для каждого из рассматриваемых типов перемежаемости, на этом же интервале времени будут наблюдаться несколько участков ламинарного поведения (рис. 2.1, *в*). Очевидно, количество ламинарных фаз увеличится, а их длительность будет меньше. Данную особенность поведения систем, демонстрирующих два различных типа перемежаемости, можно использовать для построения теории, описывающей основные характеристики такого режима. Данная теория может быть построена на основе вероятности наблюдения в исследуемой системе в тот или иной момент времени турбулентного всплеска, вне зависимости от того, какой механизм привел к возникновению турбулентной фазы.

Будем считать, что существует такая область значений управляющих параметров, где одновременно наблюдаются два различных типа переме-

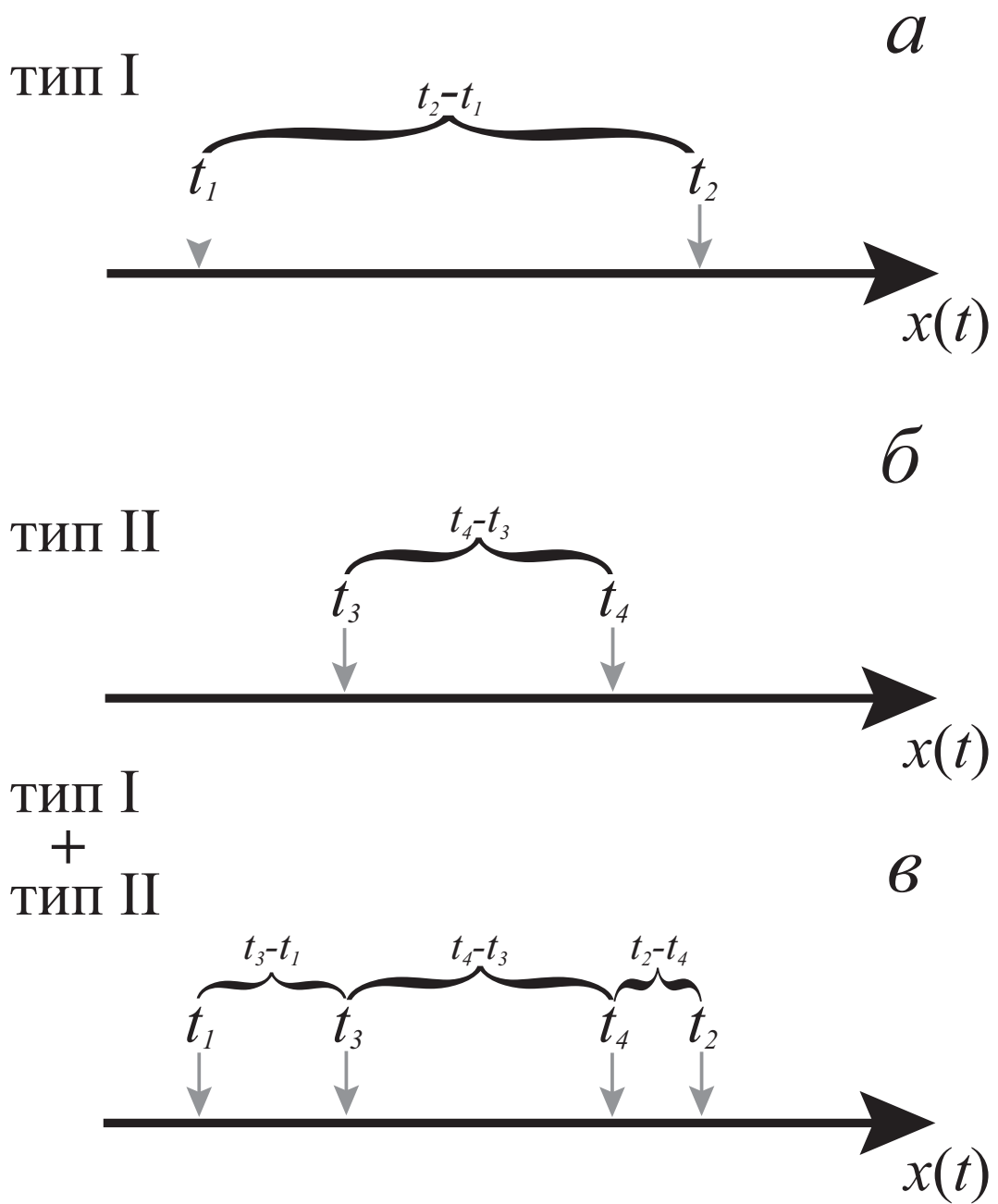


Рис. 2.1: Схематичное изображение ситуации, когда в системе одновременно могут существовать два различных типа перемежаемости: (а) в системе реализуется только один (первый) тип перемежаемости, показан ламинарный участок длительностью $t_2 - t_1$; (б) в системе реализуется второй тип перемежаемости, показан ламинарный участок длительностью $t_4 - t_3$; (в) в системе реализуются одновременно два различных типа перемежаемости. Моменты времени t_1, t_2, t_3, t_4 соответствуют турбулентным фазам.

жающегося поведения. В этом случае, в анализируемой временной реализации наблюдаются турбулентные фазы, соответствующие либо одному, либо другому типу перемежаемости. Можно говорить, что в этом случае оба процесса перемежающегося поведения протекают одновременно (параллельно), при этом реализуются турбулентные фазы, отвечающие то одному, то другому типу перемежаемости. Распределение длительностей ламинарных фаз в этом случае будет определяться плотностью вероятности $p(\tau)$ наблюдать ламинарную фазу длительностью τ .

Проведем аналитический вывод плотности вероятности для рассматриваемого случая. Выберем произвольно один из турбулентных участков в анализируемой временной реализации системы, демонстрирующей при выбранных значениях управляющих параметров на выбранном временном масштабе оба типа перемежающегося поведения. Без ограничения общности можно предположить, что выбранный таким образом турбулентный участок поведения соответствует перемежаемости первого рассматриваемого типа. Тогда вероятность наблюдать ламинарную фазу длительностью, попадающую в интервал $[\tau; \tau + d\tau)$, будет определяться суммой вероятностей событий (которые можно считать независимыми друг от друга) наблюдения через интервал времени $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ турбулентной фазы либо первого типа перемежаемости, либо второго. Чтобы через интервал времени $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ наблюдался участок турбулентного поведения, отвечающий перемежаемости второго типа, необходимо, чтобы для перемежаемости первого типа реализовалась ламинарная фаза длительностью $l > \tau$, для перемежаемости второго типа в момент времени, соответствующий началу рассмотрения, реализовывалась ламинарная фаза длительностью $s > \tau$, причем эта фаза должна закончиться точно через время $t \in [\tau; \tau + d\tau)$. Вероятность того, что в рассматриваемый момент времени для перемежаемости первого типа начинает реализовываться ламинарная

фаза длительностью $l > \tau$ и, одновременно, для перемежаемости второго типа наблюдается ламинарная фаза длительностью $s > \tau$, и эта фаза заканчивается точно через время $t \in [\tau; \tau + d\tau)$, определяется соотношением

$$P_1 = \frac{d\tau}{s} p_1(l) p_2(s) dl ds. \quad (2.1)$$

С учетом того, что длительности s и l рассматриваемых ламинарных фаз, отвечающих режимам перемежаемости первого и второго типов, соответственно, могут быть любыми (превышающими τ), для того, чтобы в системе реализовалась ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, вероятность того, что после турбулентной фазы, обусловленной механизмами перемежаемости первого типа, будет наблюдаться ламинарная фаза, длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и заканчивающаяся турбулентной фазой, обусловленной механизмом перемежаемости второго типа, будет равна

$$P_{12}(\tau) = d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{p_2(s)}{s} ds \int_{\tau}^{\infty} p_1(l) dl. \quad (2.2)$$

Аналогично, в рассматриваемой системе будет наблюдаться ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и начинающийся с турбулентной фазы, обусловленной перемежаемостью первого типа, если через время $t \in [\tau; \tau + d\tau)$ произойдет турбулентная фаза, обусловленная также перемежаемостью первого типа. Для этого необходимо, чтобы для перемежаемости первого типа реализовалась ламинарная фаза длительностью из диапазона $[\tau; \tau + d\tau)$, для перемежаемости второго типа в момент времени, соответствующий началу рассмотрения, реализовывалась ламинарная фаза длительностью $s > \tau$, причем эта фаза не должна закончиться в течение времени $t \in [\tau; \tau + d\tau)$.

Вероятность того, что в рассматриваемый момент времени для перемежаемости первого типа начинает реализовываться ламинарная фаза дли-

тельностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и, одновременно, для перемежаемости второго типа наблюдается ламинарная фаза длительностью $s > \tau$ и эта фаза не заканчивается в течении времени $t \in [\tau; \tau + d\tau)$, определяется соотношением

$$P_2 = \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) p_1(\tau)p_2(s) d\tau ds. \quad (2.3)$$

С учетом того, что длительность s рассматриваемой ламинарной фазы, отвечающей режиму перемежаемости второго типа, может быть любой (превышающей τ) для того, чтобы реализовалась ламинарная фаза длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, вероятность того, что после турбулентной фазы, обусловленной механизмами перемежаемости первого типа, будет наблюдаться ламинарная фаза, длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и заканчивающаяся турбулентной фазой, обусловленной также механизмом перемежаемости первого типа, будет равна

$$P_{11}(\tau) = p_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) p_2(s) ds. \quad (2.4)$$

Полученные соотношения (2.2) и (2.4) описывают вероятность возникновения ламинарной фазы длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, при условии, что турбулентный участок поведения, с которого начато рассмотрение, обуславливается механизмом перемежаемости первого типа. В то же самое время, возможна ситуация, что начальный участок турбулентного поведения был обусловлен перемежаемостью второго типа. Если средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости первого типа будет T_1 , а перемежаемости второго типа — T_2 , то на достаточно длительном интервале наблюдения L будет зафиксировано $N_1 = L/T_1$ турбулентных фаз, обусловленных перемежаемостью первого типа, и $N_2 = L/T_2$ участков турбулентного поведения, обусловленных перемежаемостью второго типа.

Тогда вероятность того, что произвольно выбранный для начального рассмотрения участок турбулентного поведения определяется механизмами перемежаемости первого типа, будет

$$P_{01} = \frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{T_2}{T_1 + T_2}, \quad (2.5)$$

и, аналогично, вероятность того, что произвольно выбранная для начального рассмотрения турбулентная фаза определяется механизмами перемежаемости второго типа, будет определяться соотношением

$$P_{02} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \quad (2.6)$$

Совершенно аналогично, вероятность того, что после участка турбулентного поведения, обусловленного механизмами перемежаемости второго типа, будет наблюдаться ламинарная фаза, длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и заканчивающаяся турбулентной фазой, обусловленной механизмом перемежаемости первого типа, будет равна

$$P_{21}(\tau) = d\tau \int_{\tau}^{\infty} \frac{p_1(l)}{l} dl \int_{\tau}^{\infty} p_2(s) ds, \quad (2.7)$$

а вероятность того, что после турбулентной фазы, обусловленной механизмами перемежаемости второго типа, будет наблюдаться ламинарная фаза, длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, и заканчивающаяся участком турбулентного поведения, обусловленным также механизмом перемежаемости второго типа, будет равна

$$P_{22}(\tau) = p_2(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{l}\right) p_1(l) dl. \quad (2.8)$$

Очевидно, с учетом всего вышеизложенного, вероятность наблюдать в рассматриваемой системе ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$, будет определяться соотношением

$$P(\tau) = p(\tau) d\tau = P_{01} [P_{12}(\tau) + P_{11}(\tau)] + P_{02} [P_{21}(\tau) + P_{22}(\tau)], \quad (2.9)$$

где $p(\tau)$ — плотность вероятности наблюдать в рассматриваемой системе ламинарный участок поведения длительностью, попадающей в диапазон $[\tau; \tau + d\tau)$.

После достаточно очевидных математических преобразований и некоторых переобозначений переменных интегрирования, с учетом соотношений (2.2), (2.4), (2.5) – (2.9) плотность вероятности $p(\tau)$, определяющая распределение длительностей ламинарных фаз, может быть окончательно записана в виде

$$p(\tau) = \frac{1}{T_1 + T_2} \left[\int_{\tau}^{\infty} \frac{ds}{s} \int_{\tau}^{\infty} [p_1(l)p_2(s)T_2 + p_1(s)p_2(l)T_1] dl + \int_{\tau}^{\infty} \left(1 - \frac{\tau}{s}\right) [p_1(\tau)p_2(s)T_2 + p_1(s)p_2(\tau)T_1] ds \right]. \quad (2.10)$$

Как было отмечено ранее, одной из важнейших характеристик перемежающегося поведения является зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющих параметров, при этом в качестве параметра часто рассматривается “параметр надкритичности”, характеризующий отклонение значения управляющего параметра от бифуркационной точки. В рассматриваемом случае, когда во временной реализации хаотической системы одновременно наблюдаются два различных типа перемежающегося поведения, и при этом распределение длительностей ламинарных фаз определяется плотностью вероятности (2.10), средняя длительность ламинарных участков поведения имеет вид

$$\langle \tau \rangle = \int_0^{\infty} \tau p(\tau) d\tau, \quad (2.11)$$

где плотность вероятности $p(\tau)$ определяется соотношением (2.10).

2.3 Сосуществование двух различных типов перемежаемости

Основываясь на результатах, полученных в рамках построения теории (раздел 2.2) поведения нелинейных систем, находящихся в режиме, в котором они одновременно демонстрируют два различных типа перемежающегося поведения, можно получить аналитический вид как распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров, так и зависимость средней длительности участка ламинарного поведения от параметров надкритичности для сочетания различных типов перемежающегося поведения. Для получения распределения длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров необходимо в соотношение (2.10) подставить выражения, описывающие распределения длительностей ламинарных фаз для каждого из сосуществующих типов перемежающегося поведения, при этом полученное выражение можно использовать в (2.11) для нахождения зависимости средней длительности участка ламинарного поведения от параметров надкритичности для рассматриваемых конкретных типов перемежаемости, которые сосуществуют в исследуемой системе. Основываясь на вышеизложенной схеме проведения исследований, были получены аналитические соотношения для различных сочетаний перемежающегося поведения в нелинейных системах.

2.3.1 Сосуществование перемежаемостей игольного ушка и кольца

В качестве примера такой ситуации, когда в хаотической системе одновременно реализуется два различных типа перемежающегося поведения, был рассмотрен случай совместного сосуществования перемежаемости кольца

и игольного ушка. В данном случае распределения длительностей ламинарных фаз $p_1(l)$ и $p_2(l)$ будут определяться соотношениями (1.7) и (1.8), соответственно, а величины T_1 и T_2 будут заданы как (1.9) и (1.6). Соответственно, для сосуществования типов перемежающегося поведения игольного ушка и кольца был получен следующий вид аналитической зависимости для средней длительности ламинарного поведения от параметров надкритичности

$$\begin{aligned}
\langle \tau \rangle = & - \frac{\left(T_c \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) \right)^2}{T_c \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) + \exp \left(k |\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \right)} \times \\
& \times \log \left(\frac{T_c \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) + \exp \left(k |\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \right)}{T_c \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right)} \right) - \\
& - 2 \frac{T_c \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) \exp \left(k |\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \right)}{T_c \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) + \exp \left(k |\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \right)} + \\
& + \frac{\left(\exp \left(k |\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \right) \right)^2}{T_c \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) + \exp \left(k |\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \right)} \times \\
& \times \log \left(\frac{T_c \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) + \exp \left(k |\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \right)}{\exp \left(k |\sigma_2 - \sigma|^{-1/2} \right)} \right). \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Используя полученное выражение (2.12), была построена зависимость средней длительности ламинарного поведения от двух параметров надкритичности

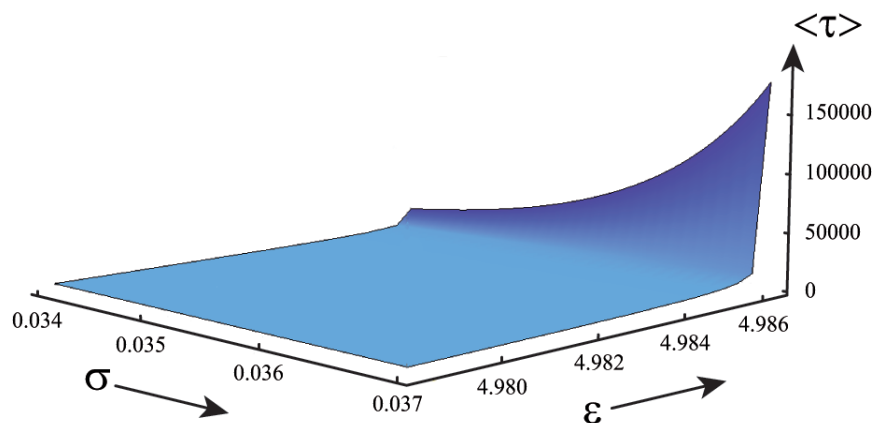


Рис. 2.2: Зависимость средней длительности ламинарного поведения от двух параметров надкритичности (ε и σ) для системы, демонстрирующей одновременно два типа перемежающегося поведения: тип “кольцо” и тип игольного ушка

тичности ε и σ , которая представлена на рисунке 2.2. На данном рисунке видно, что имеются области значений параметров надкритичности, при которых влияние одного из типов перемежающегося поведения оказывается минимальным, и, соответственно, можно говорить о том, что зависимость средней длительности от параметров надкритичности в большей части подчиняется закону, характерному одному конкретному типу перемежаемости, который, в данном случае, превалирует над другим. В то же самое время, имеются области значений параметров надкритичности, в которых средняя длительность ламинарного поведения становится практически постоянной и почти не меняется с изменением значений этих параметров. Данный рисунок дает наглядное представление о том, как будет себя вести средняя длительность ламинарного поведения в хаотической системе, демонстрирующей одновременно два различных типа перемежающегося поведения.

2.3.2 Сосуществование перемежаемостей кольца

В предыдущем разделе диссертационной работы было рассмотрено сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения, однако,

теоретически возможна ситуация, когда сосуществуют два режима перемежаемости, относящихся к одному и тому же типу, но различающиеся характеристиками поведения, что, в свою очередь, может быть обусловлено значениями управляющих параметров.

В качестве подобного примера рассмотрен случай одновременного сосуществования двух типов перемежаемости кольца с различными параметрами надкритичности σ и ε . Аналогично тому, как это было сделано для режима сосуществования перемежаемостей игольного ушка и кольца, была получена аналогичная зависимость средней длительности ламинарного поведения от параметров надкритичности для случая одновременного сосуществования двух типов перемежаемости кольца.

$$\begin{aligned}
\langle \tau \rangle = & - \frac{\left(T_{c_1} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) \right)^2}{T_{c_1} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) + T_{c_2} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \right)} \times \\
& \times \log \left(\frac{T_{c_1} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) T_{c_2} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \right)}{T_{c_1} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right)} \right) - \\
& - 2 \frac{T_{c_1} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) T_{c_2} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \right)}{T_{c_1} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) + T_{c_2} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \right)} + \\
& + \frac{\left(T_{c_2} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \right) \right)^2}{T_{c_1} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) + T_{c_2} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \right)} \times \\
& \log \left(\frac{T_{c_1} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right) + T_{c_2} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \right)}{T_{c_2} \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\sigma - \sigma_t}{\sigma_c - \sigma_t} \right) \right)} \right). \tag{2.13}
\end{aligned}$$

На рисунке 2.3 представлена зависимость средней длительности участков ламинарного поведения для одновременного сосуществования двух типов перемежаемости кольца с различными значениями параметров надкритичности σ и ε . (При этом в роли параметров надкритичности выступают величины $(\sigma - \sigma_t)$ и $(\varepsilon - \varepsilon_t)$). Следует также отметить, что полученная зависимость имеет вид, аналогичный зависимости (2.12), представленной на рисунке 2.2.

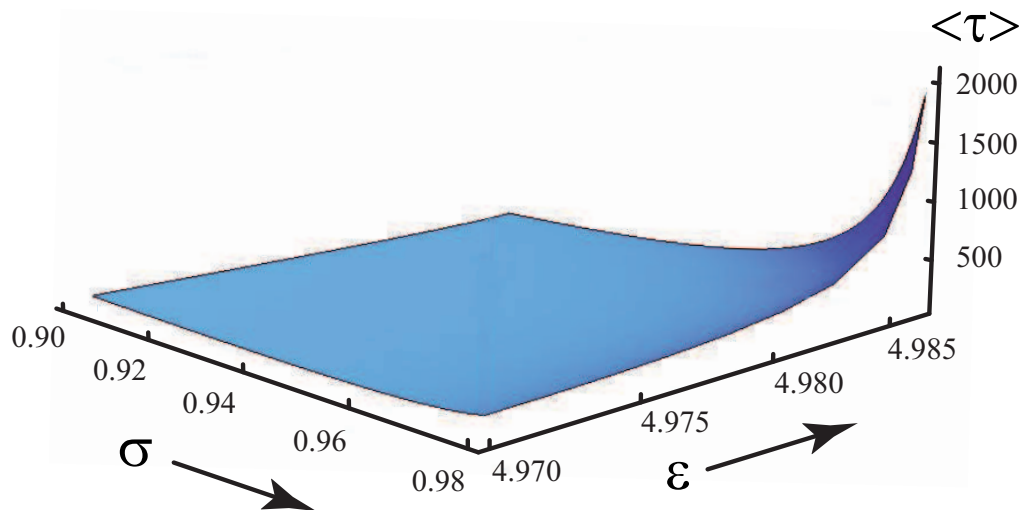


Рис. 2.3: Зависимость средней длительности участков ламинарного поведения от двух параметров надкритичности (ε и σ) для системы, демонстрирующей одновременное сосуществование двух типов перемежаемости кольца

Исходя из представленных результатов, можно сделать вывод о том, что общий характер зависимости средней длительности участков ламинарного поведения от параметров надкритичности для хаотических систем, одновременно демонстрирующих два типа перемежающегося поведения, будет иметь вид, представленный на рисунках 2.2 и 2.3. При этом, в зависимости от того, какие типы перемежаемости реализуются в хаотической системе, а также от того, в каком диапазоне меняются управляющие параметры (и, соответственно, параметры надкритичности), может меняться наклон поверхности на рисунках 2.2 и 2.3, также как и область, в которой зависимость средней длительности является практически неизменной.

2.4 Модельная система с дискретным временем, демонстрирующая одновременно два различных типа перемежаемости

В рамках настоящей главы диссертационной работы (раздел 2.2) была построена теоретическая модель, описывающая одновременное сосуществование двух типов перемежающегося поведения в нелинейной системе, и приведены основные теоретические законы, описывающие распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров, а также зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от параметров надкритичности. В разделе 2.3 визуально проиллюстрировано, как ведет себя зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от двух параметров надкритичности для различных сочетаний известных типов перемежающегося поведения. В то же самое время, приведенные зависимости средней длительности ламинарных участков поведения от параметров надкритичности носят сугубо теоретический характер, без привязки к каким бы то ни было реальным или модельным системам. Очевидно, что следующим шагом на пути изучения рассматриваемого феномена должен быть анализ конкретных систем, в которых наблюдается явление сосуществования двух типов перемежаемости. Иными словами, необходимо проведение изучения нелинейных систем, в которых одновременно реализуются два различных типа перемежающегося поведения, после чего полученные результаты можно будет сопоставить с теоретическими зависимостями, что позволит говорить о корректности и верифицируемости построенной теории.

Таким образом, для проведения апробации теории, описывающей одновременное сосуществование двух различных типов перемежающегося по-

ведения в нелинейной системе, рассмотренное ранее (раздел 2.2), нужно подобрать системы, в которых заведомо будет известно, какие типы перемежающегося поведения одновременно сосуществуют. Поэтому, в первую очередь, необходимо осуществить поиск системы, которая способна демонстрировать одновременно два типа перемежающегося поведения. Одним из возможных способов решения этой задачи является искусственное конструирование такой системы, обладающей требуемыми характеристиками. Именно такой подход и был использован в рамках диссертационной работы. При этом, крайне желательно, чтобы рассматриваемая система была достаточно простой, чтобы анализируемое явление и наблюдающиеся закономерности были понятными и наглядными. Данный аспект привел к тому, что в качестве такой модельной системы было выбрано отображение, а не потоковая система. Соответственно, настоящий раздел диссертационной работы посвящен описанию и изучению системы с дискретным временем, которая демонстрирует одновременно два различных типа перемежающегося поведения.

Для построения системы, демонстрирующей сосуществование двух типов перемежающегося поведения, рассмотрим два связанных между собой отображения окружности

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + 2\Omega(1 - \cos x_n) - \varepsilon, \quad \text{mod } 2\pi \\y_{n+1} &= y_n + 2\Omega(1 - \cos y_n) - \gamma - k \cos(1/x_n), \quad \text{mod } 2\pi\end{aligned}\tag{2.14}$$

где ε , γ , Ω , k — управляющие параметры. Отметим, что связь между отображениями окружности реализуется посредством слагаемого $\cos(1/x_n)$. Для того, чтобы одновременно наблюдать в исследуемой системе два типа перемежающегося поведения, необходимо ввести в рассмотрение новую комплексную переменную z_n , которая определяется следующим образом

$$z_n = x_n + iy_n.\tag{2.15}$$

Введенная таким образом комплексная величина z_n позволяет рассматривать систему уравнений (2.14), как динамическую систему с дискретным временем, одновременно демонстрирующую два типа перемежающегося поведения. Это связано с тем, что если рассматривать отдельно переменную x_n , то, при определенных значениях управляющего параметра ε , она может демонстрировать перемежающееся поведение типа I. Рассматривая отдельно переменную y_n и варьируя параметры γ и k , можно обнаружить, что данная переменная может демонстрировать другой тип перемежающегося поведения (демонстрирующий свойства перемежаемости типа I с шумом в закритической области), так как на нее еще воздействует дополнительный сигнал $k \cos(1/x_n)$. Таким образом, переменная z_n , определяемая соотношением (2.15), и представляющая собой, фактически, комплекс двух переменных x_{n+1} и y_{n+1} , будет демонстрировать одновременно два различных типа перемежающегося поведения (при определенных значениях управляющих параметров ε , γ , Ω , k , разумеется). Исходя из вышеизложенного, можно говорить, что полученная система (2.14) с дискретным временем, способна одновременно демонстрировать сосуществование двух типов перемежающегося поведения.

В ходе исследований, проведенных в рамках диссертационной работы, управляющие параметры $\Omega = 0.1$ и $k = 0.025$ были выбраны фиксированными, и, таким образом, в качестве параметров надкритичности в данной системе (2.14) выступали ε и γ . Варьируя эти параметры, влияющие на характеристики “парциальных” перемежаемостей, можно изменять преобладание одного типа перемежающегося поведения над другим (или вообще, “выключать” тот или иной тип перемежаемости). Отметим также, что при рассмотрении такой системы не требуется использования специальных методов выделения ламинарных и турбулентных участков поведения (по-

скольку в данном случае достаточно следить за абсолютными величинами переменных x_n , y_n или z_n), что значительно упрощает ее изучение.

В ходе рассмотрения системы (2.14) были построены временные реализации для переменных x_n и y_n , которые представлены на рис. 2.4. На рис. 2.4 для переменных x_n и y_n можно выделить два характерных типа поведения: первый, когда значение переменной близко к нулю и второй, когда значение переменной резко возрастает. Таким образом, можно говорить о том, что переменные x_n и y_n демонстрируют парциальные типы перемежающегося поведения, где ламинарные участки соответствуют значениям переменной, близким к нулю, а турбулентные — это моменты резкого возрастания значений переменных. Качественно из рис. 2.4 видно, что типы перемежающегося поведения, которые демонстрируют переменные x_n и y_n являются разными. Проведя статистический анализ характеристик данных типов перемежающегося поведения, было установлено, что поведение переменной x_n соответствует перемежаемости типа I [6], а для переменной y_n реализуется поведение, соответствующее перемежаемости типа I с шумом, которое можно также рассматривать как перемежаемость “игольного ушка” [115, 116].

Используя введенную в рассмотрение с помощью соотношения (2.15) комплексную величину z_n , будем рассматривать систему (2.14) в целом. В итоге получаем модельную систему, способную демонстрировать одновременно два различных типа перемежающегося поведения, так как z_n представляет собой, фактически, комплекс двух переменных x_n и y_n . Поведение величины z_n представлено на рис. 2.5, для нее, также, как и для переменных x_n и y_n , ламинарная фаза поведения реализуется при значениях абсолютной величины, близких к нулю, а момент резкого возрастания модуля $|z_n|$ соответствует турбулентному участку динамики.

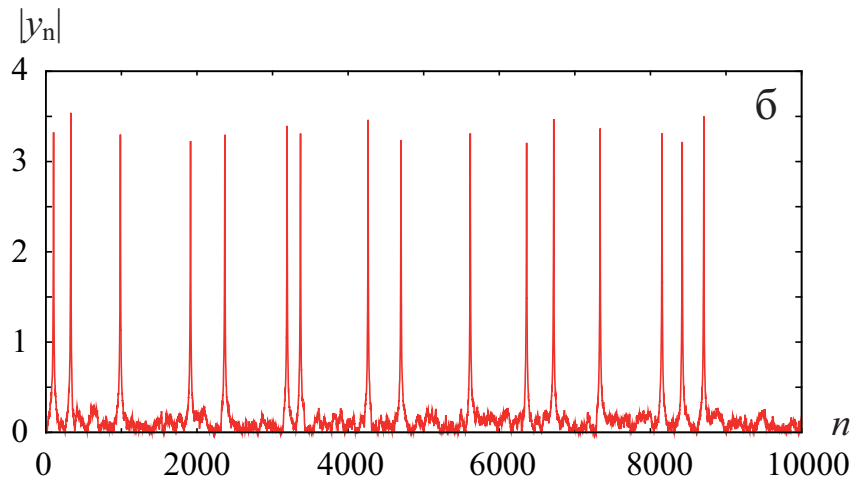
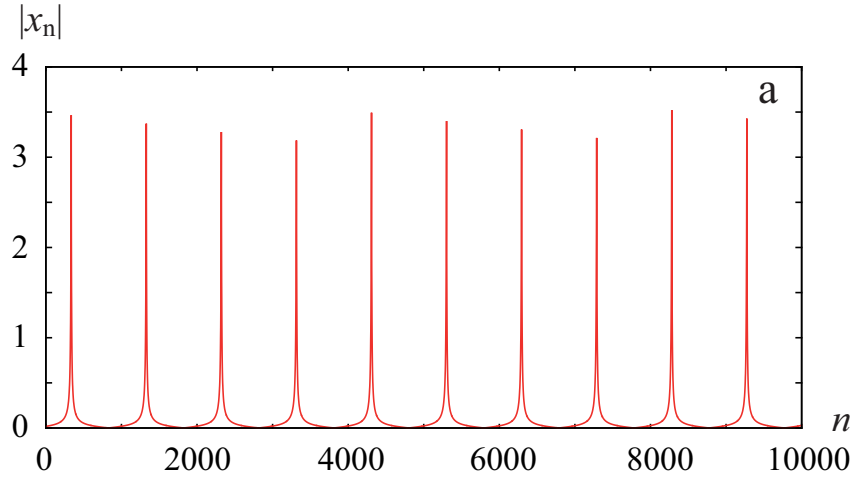


Рис. 2.4: (а) — временная реализация $|x_n|$ для системы (2.14); (б) — временная реализация $|y_n|$ для системы (2.14)

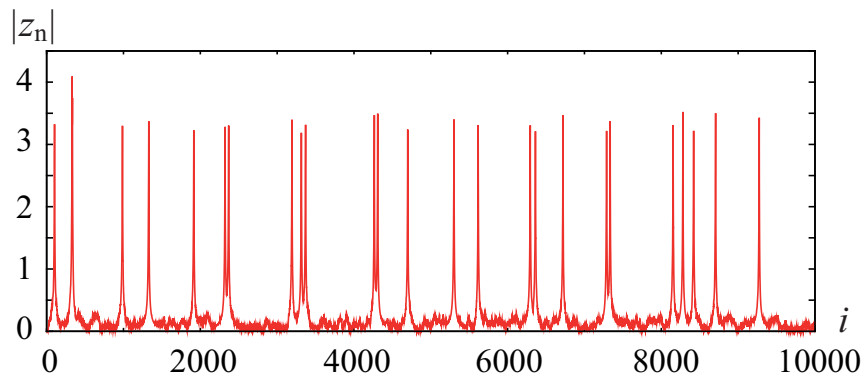


Рис. 2.5: Временная реализация $|z_n|$ для системы (2.14)

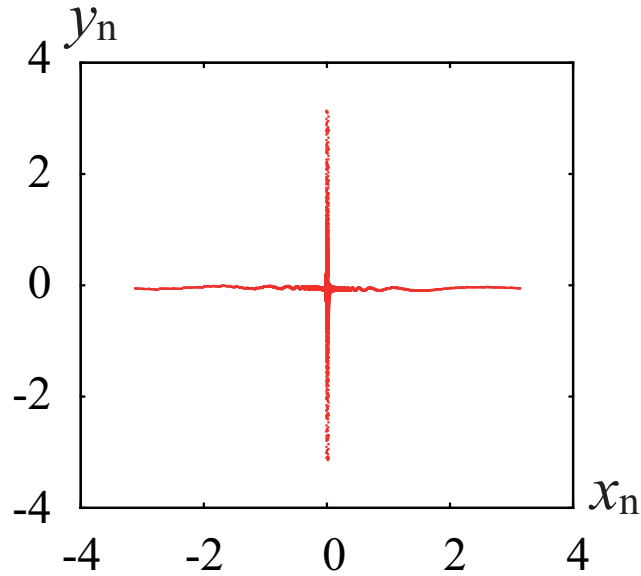


Рис. 2.6: Иллюстрация сосуществования двух типов перемежающегося поведения на комплексной плоскости. $\Omega = 0.1$, $\varepsilon = -0.0001$, $\gamma = 0.0005$, $k = 0.025$

Особенно удобно рассматривать сосуществование двух типов перемежающегося поведения на комплексной плоскости Z (рис. 2.6), поскольку точки, соответствующие ламинарным участкам поведения, лежат в окрестности начала координат, тогда как во время турбулентных фаз изображающие точки располагаются вдоль действительной и мнимой осей, при этом легко отождествить каждый из сосуществующих типов перемежаемости — точки, соответствующие турбулентной фазе перемежаемости типа I, располагаются вдоль действительной оси, тогда как турбулентный участок поведения перемежаемости “игольного ушка” характеризуется точками, лежащими вдоль мнимой оси комплексной плоскости Z .

Проведя численное моделирование системы (2.14), были получены статистические характеристики (распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров), которые представлены на рис. 2.7. Управляющие параметры были выбраны следующими: $\Omega = 0.1$, $\varepsilon = -0.0001$, $\gamma = 0.0005$, $k = 0.025$. Данные

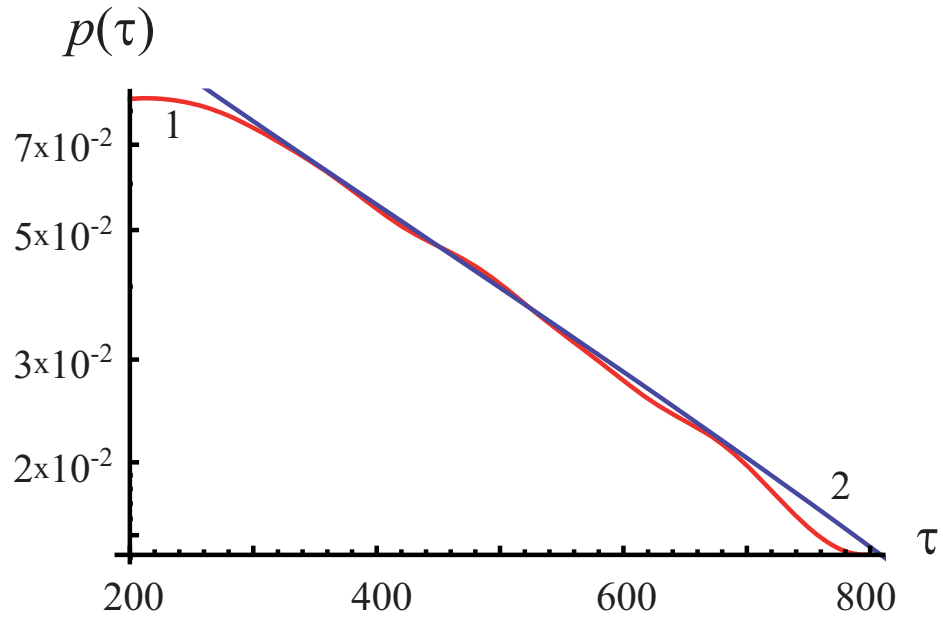


Рис. 2.7: Распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров для системы (2.14) (кривая 1) и соответствующая этому распределению теоретическая зависимость (кривая 2). Управляющие параметры системы имели следующие значения: $\Omega = 0.1$, $\varepsilon = -0.0001$, $\gamma = 0.0005$, $k = 0.025$

статистические характеристики были сопоставлены с теоретической зависимостью (2.10), полученной в разделе 2.2, которая, с учетом того, что в системе реализуется перемежаемость типа I и перемежаемость “игольного ушка”, примет следующий вид

$$p(\tau) = \frac{1}{T_1 + T_2} \left[\Gamma \left(0, \frac{\tau}{T_2} \right) + \frac{T_1 + T_2}{T_2} \exp \left(-\frac{\tau}{T_2} \right) \right]. \quad (2.16)$$

Для указанных значений управляющих параметров $T_1 = 965$ и $T_2 = 465$.

Из рис. 2.7 видно, что теоретическая зависимость хорошо соотносится с численными результатами, что говорит о корректности предложенной в разделе 2.2 теории, описывающей поведение систем, которые демонстрируют одновременно два типа перемежающегося поведения.

2.5 Выводы по второй главе

Во второй главе диссертационной работы была построена общая теоретическая модель, описывающая поведение нелинейных систем, находящихся в режиме, в котором они одновременно демонстрируют два различных типа перемежающегося поведения. В рамках разработанной теории был получен общий вид теоретических соотношений, описывающих одновременное сосуществование двух типов перемежаемости: распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров и зависимость средней длительности участка ламинарного поведения от параметров надкритичности. Было проиллюстрировано, как ведет себя зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от двух параметров надкритичности для различных сочетаний типов перемежающегося поведения. В ходе апробации предложенной теоретической модели, было проведено исследование системы с дискретным временем, которая при определенных значениях управляющих параметров демонстрирует одновременное сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения. Показано, что предложенная теория корректно описывает поведение системы, которое характеризуется одновременным сосуществованием двух различных типов перемежающегося поведения. Основываясь на полученных результатах, можно ожидать, что данная теория будет справедлива для широкого круга хаотических систем (в том числе и для систем с непрерывным временем), в которых одновременно сосуществуют два различных типа перемежающегося поведения.

Тем не менее, для построения целостной и непротиворечивой картины полученные в рамках второй главы диссертационной работы результаты требуют дальнейшего распространения на нелинейные системы с потоковым временем. Именно поэтому третья глава настоящей диссертационной

работы посвящена детальному изучению нелинейных систем с потоковым временем, способных одновременно демонстрировать два различных типа перемежаемости.

Глава 3

Модельные системы с непрерывным временем

[24–26, 28, 32–36]

3.1 Метод определения статистических характеристик для каждого из сосуществующих типов перемежающегося поведения

В рамках предыдущей главы настоящей диссертационной работы была построена теоретическая модель, описывающая поведение системы, в которой одновременно реализуются два различных типа перемежаемости. Возможность такого типа поведения косвенно подтверждают результаты, приведенные в разделах 1.3 и 1.4 данной диссертационной работы. Подобная ситуация вполне возможна, например, в случае, когда сигнал системы, находящейся вблизи границы фазовой хаотической синхронизации, проходит через фильтр (который может быть естественным образом встроен в анализируемую систему или являться составляющей частью измерительной аппаратуры). Предложенная теоретическая модель, описывающая одновременное сосуществование двух типов перемежающегося поведения, под-

тверждена с помощью модельного дискретного отображения (раздел 2.4 настоящей диссертационной работы). При этом необходимо отметить, что имеет место хорошее соответствие между теоретическими зависимостями и численно полученными результатами, что свидетельствует о корректности предложенной теоретической модели. Тем не менее, результаты, полученные в разделе 2.4, не позволяют в полной мере обобщить предложенную теоретическую модель для описания широкого круга хаотических систем. Таким образом, возникает необходимость в дальнейшем изучении нелинейных систем, прежде всего, систем с непрерывным временем, способных демонстрировать два различных типа перемежаемости. Именно поэтому данная глава диссертационной работы посвящена детальному изучению нелинейных систем с потоковым временем, в которых одновременно реализуются два различных типа перемежающегося поведения.

Ранее в разделе 1.2 настоящей диссертационной работы было отмечено, что при исследованиях перемежающегося поведения в хаотических системах основную роль играют такие статистические характеристики, как распределение длительностей ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров изучаемой системы, а также зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от параметра надкритичности. Таким образом, одной из важнейших задач при изучении перемежающегося поведения становится выделение ламинарных и турбулентных участков поведения во временной реализации исследуемой системы. Это означает, что необходимо выделять в исследуемом сигнале моменты времени, которые соответствуют началу и концу участков ламинарного и турбулентного поведения, а также соотносить соответствующие участки с тем или иным типом перемежаемости. Отметим, что в настоящий момент существует большое количество методов для выделения ламинарных участков поведения в хаотических системах (один из таких методов

предложен в разделе 1.2.1 диссертационной работы), тем не менее, ни один из существующий методов не может быть непосредственно применен для детектирования различных типов перемежающегося поведения при исследовании систем, в которых одновременно наблюдается не один тип перемежаемости, а два.

Исходя из вышеизложенного, для изучения нелинейных систем с потоковым временем, находящихся в режиме, когда они одновременно демонстрируют два различных типа перемежающегося поведения, необходимо разработать метод определения длительностей ламинарных и турбулентных участков поведения. Отметим, что при этом новый метод выделения характерных участков поведения изучаемой системы (ламинарных и турбулентных участков поведения) должен соотносить каждый участок с конкретным типом перемежаемости, который в данный момент реализуется в системе. Для решения поставленной задачи наиболее рациональным способом является модификация уже существующего метода выделения характерных участков перемежающегося поведения. Отметим, что к методу выделения ламинарных и турбулентных участков поведения, предъявляется ряд требований, которым он должен удовлетворять, в частности, простота реализации, точность детектирования моментов смены типа поведения в системе.

При реализации метода выделения характерных участков перемежающегося поведения для потоковых систем, демонстрирующих сосуществование двух различных типов перемежаемости, в качестве основы был выбран метод, разработанный в рамках данной диссертационной работы (раздел 1.2.1) и описанный в [18]. Это связано с тем, что данный метод достаточно прост в реализации и позволяет с высокой точностью определять длительность ламинарных и турбулентных участков поведения. Хорошие характеристики данного метода связаны с тем, что в нем используют

ся значения мгновенных фаз исследуемых систем, лежащие в диапазоне $[0, 2\pi]$. Однако, при всех положительных качествах метод, описанный в разделе 1.2.1 диссертационной работы, не позволяет соотносить каждый характерный участок поведения с конкретным типом перемежаемости.

Исходя из этого, для модификации метода выделения ламинарных и турбулентных участков поведения, помимо разности мгновенных фаз хаотического сигнала в рассмотрение была введена также проекция фазовой траектории, соответствующей ведомой системе, рассматриваемой на фазовой плоскости, вращающейся вокруг начала координат в соответствии с состоянием ведущей системы (см. более подробно [95]). Это позволяет определить, какому конкретному типу перемежаемости следует поставить в соответствие режим, реализующийся в исследуемой системе в рассматриваемый момент времени.

Проверка корректности предложенного модернизированного метода выделения участков ламинарного и турбулентного поведения была проведена на примере системы однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера (1.10)–(1.11), которая описана в разделе 1.2.1 настоящей диссертационной работы (стр. 33). Необходимо отметить, что одновременное сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения у данной хаотической системы наблюдается при рассмотрении ее поведения на асинхронных временных масштабах (см. раздел 1.3.2) при значении параметра интенсивности связи $\varepsilon < \varepsilon_c$ (где $\varepsilon_c = 0.042$ — значение параметра интенсивности связи, при котором в системе однонаправлено связанных хаотических осцилляторов Ресслера (1.10)–(1.11) устанавливается режим фазовой хаотической синхронизации), то в данном случае, помимо перемежаемости “игольного ушка”, которая возникает на границе фазовой хаотической синхронизации [5], к ней еще добавляется перемежаемость кольца [41]. Таким

образом, данную систему можно использовать для рассмотрения явления сосуществования двух типов перемежающегося поведения.

Основываясь на вышеизложенном, как и ранее (раздел 1.3.2 настоящей диссертационной работы), рассмотрение совместного поведения системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера на различных временных масштабах проводилось с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [15, 16]. Таким образом, для каждого временного масштаба естественным образом оказывается определена непрерывная фаза $\varphi_s(t)$ и для системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (1.10) – (1.11) может быть введена в рассмотрение разность мгновенных фаз¹

$$\Delta\varphi = \varphi_{s,d}(t) - \varphi_{s,r}(t) \quad (3.1)$$

где $\varphi_{s,d}(t)$ — мгновенная фаза, соответствующая ведущей системе на временном масштабе s , $\varphi_{s,r}(t)$ — мгновенная фаза, соответствующая ведомой системе на том же самом временном масштабе.

Разность фаз для системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера, демонстрирующей сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения, приведена на рис. 3.1. Необходимо отметить, что разность фаз, показанная на рис. 3.1, приведена к диапазону значений шириной 2π в соответствии с рассуждениями, изложенными в рамках раздела 1.2.1 настоящей диссертационной работы.

Основываясь на рассуждениях, приведенных в разделе 1.2.1, для разности фаз были выделены участки турбулентных всплесков (общее число таких турбулентных участков поведения на данном рисунке равно четырем), каждый из них обозначен римской цифрой, соответствующей номеру турбулентного всплеска. Таким образом, использование метода, описанного в

¹Следует также отметить, что непрерывные фазы ведущей и ведомой системы лежат в области $[0, 2\pi]$

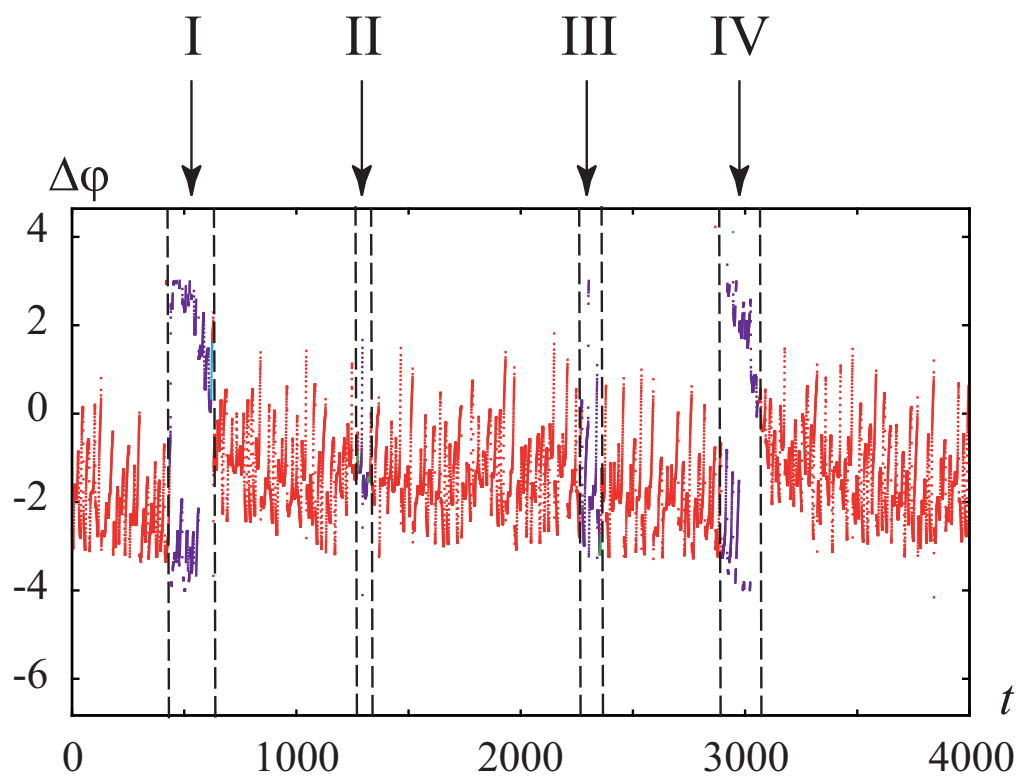


Рис. 3.1: Зависимость разности фаз от времени для однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера, демонстрирующая сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения; каждый участок турбулентного поведения выделен и обозначен римской цифрой. Разность фаз приведена в диапазоне значений шириной 2π

разделе 1.2.1 данной диссертационной работы, позволяет достаточно точно выделять моменты начала и конца ламинарных и турбулентных участков поведения, но при этом невозможно определить, какому именно типу перемежаемости они соответствуют. Для того, чтобы поставить в соответствие друг другу турбулентные фазы и тип перемежающегося поведения, следует дополнительно рассматривать поведение проекции траектории (характеризующей динамику системы на рассматриваемом временном масштабе) на вращающейся плоскости в момент начала турбулентного участка поведения (как это было отмечено ранее). Используя такой подход, можно легко сопоставить фазовый проскок с конкретным типом перемежаемости.

Если в качестве переменных, характеризующих состояние систем, рассматривать

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \operatorname{Re}W_{1,2}(s, t) \\ y_{1,2} &= \operatorname{Im}W_{1,2}(s, t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $W(s, t)$ — результат непрерывного вейвлетного преобразования (1.18) анализируемого временного ряда, то тогда на вращающейся плоскости, введенной в рассмотрение в соответствии с работой [41]

$$\begin{aligned} x' &= x_2 \cos(\varphi_1(s, t)) + y_2 \sin(\varphi_1(s, t)), \\ y' &= -x_2 \sin(\varphi_1(s, t)) + y_2 \cos(\varphi_1(s, t)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Используя соотношение (3.3), был построен рис. 3.2, на котором изображена проекция траектории (x_2, y_2) на вращающейся плоскости (x', y') для системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера в моменты возникновения турбулентных всплесков. На данном рисунке приведено два характерных типа поведения рассматриваемой траектории: первый представлен на рис. 3.2, *a, б*, то есть для первого случая траектория (x_2, y_2) вращается вокруг начала координат в момент возникновения турбулентного всплеска (данный тип поведения траектории соответствует перемежае-

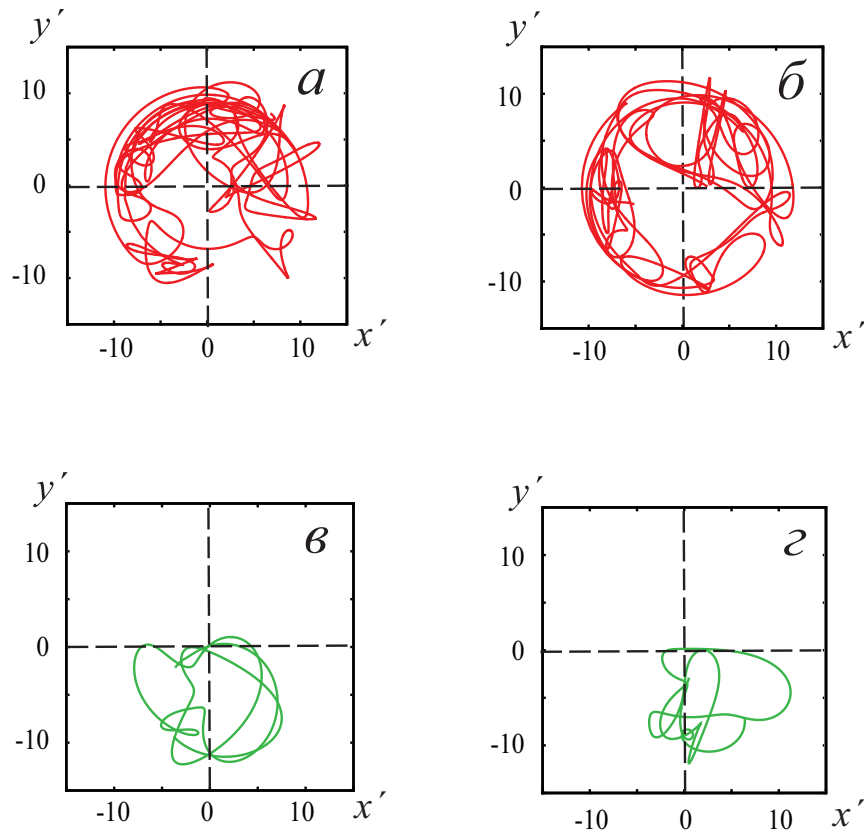


Рис. 3.2: Проекция траектории (x_2, y_2) , соответствующей ведомой системе, рассматриваемая на плоскости, вращающейся вокруг начала координат в соответствии с состоянием ведущей системы: (а) проекция траектории соответствует моменту времени турбулентного всплеска I; (б) проекция траектории соответствует моменту времени турбулентного всплеска III; (в) проекция траектории соответствует моменту времени турбулентного всплеска II; (г) проекция траектории соответствует моменту времени турбулентного всплеска IV;

мости типа игольного ушка [5]). Второй тип поведения траектории (x_2, y_2) проиллюстрирован на рис. 3.2, в, г, для него характерен охват траекторией начала координат в момент возникновения турбулентного всплеска (данный тип поведения соответствует перемежаемости типа “кольца” [41]).

Исходя из вышеизложенного, при выделении ламинарных и турбулентных участков поведения для хаотических систем, демонстрирующих сосуществование двух типов перемежающегося поведения, с помощью метода, разработанного в рамках диссертационной работы (раздел 1.2.1), необходимо также дополнительно рассматривать проекцию траектории, соответствующей ведомой системе, на вращающейся плоскости, что позволяет однозначно определить, к какому типу перемежаемости относится тот или иной участок поведения. Необходимо также отметить, что модифицированный метод по-прежнему сохранил преимущества своего предшественника — простоту реализации и малое время вычислений.

3.2 Сосуществование двух типов перемежающегося поведения в эталонных системах с потоковым временем

Основываясь на методе выделения ламинарных и турбулентных участков поведения, предложенном в разделе 3.1, в рамках настоящего раздела диссертационной работы, было проведено численное моделирование поведения эталонных систем с непрерывным потоковым временем, которые способны демонстрировать сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения.

3.2.1 Сосуществование двух типов перемежаемости в системе однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера

В качестве первой эталонной системы были выбраны два однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (1.10) – (1.11), подробно описанные в разделе 1.2.1 настоящей диссертационной работы (стр. 33). Управляющие параметры систем остались без изменения и, как и ранее, были выбраны следующими: $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$. Необходимо отметить, что в рамках проводимых исследований рассматривался случай малой расстройки по частоте в исследуемой системе, то есть $\omega_d = 0.93$ и $\omega_r = 0.95$, где параметры ω_d и ω_r отвечают собственным частотам ведущей и ведомой подсистем, соответственно.

В разделе 3.1 настоящей диссертационной работы было показано, что для системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (1.10) – (1.11), в том случае, если ее рассматривать на различных временных масштабах [15, 16], в области, близкой к границе фазовой хаотической синхронизации, одновременно наблюдаются два различных типа перемежающегося поведения, а именно перемежаемость “игольного ушка” [5] и перемежаемость “кольца” [23, 41]. В этом случае в качестве управляющих параметров для данной хаотической системы будут выступать временной масштаб s и параметр интенсивности связи ε .

Основываясь на подходе, описанном в рамках раздела 3.1 настоящей диссертационной работы, а также применяя для выделения ламинарных и турбулентных участков поведения модифицированный метод, описанный в разделе 3.1, была получена зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от управляющих параметров. Зависимость средней длительности ламинарного поведения от временного масштаба s для системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера (1.10)–(1.11)

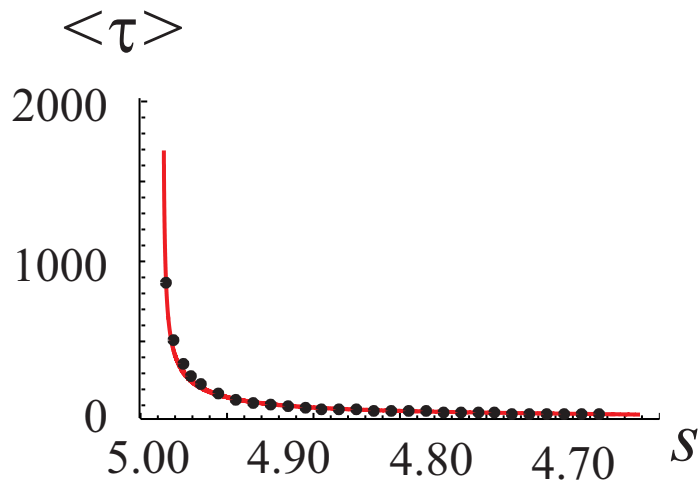


Рис. 3.3: Зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от временного масштаба s для модельной системы однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера; точками показаны результаты численного моделирования ($\varepsilon = 0.037$), линией — аппроксимирующая кривая (3.4)

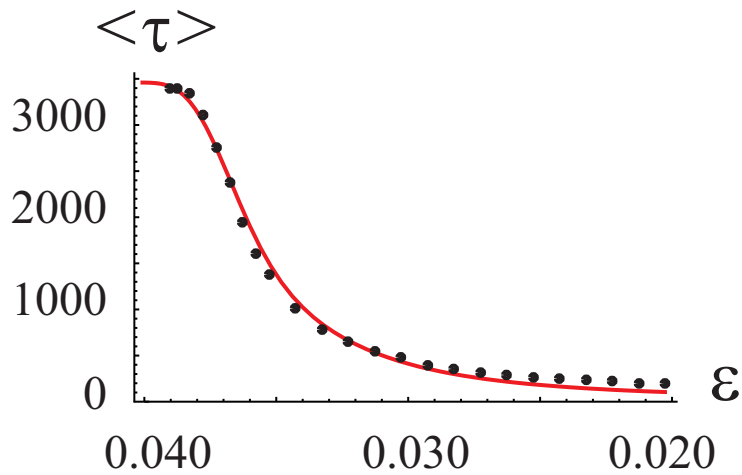


Рис. 3.4: Зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от параметра связи ε для модельной системы однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера. Точками показаны результаты численного моделирования ($s = 4.98$), линией — аппроксимирующая кривая (3.4)

представлена на рис. 3.3, при этом параметр интенсивности связи ε имел фиксированное значение ($\varepsilon = 0.037$). Также была построена зависимость средней длительности ламинарного поведения от параметра интенсивности связи ε , которая в свою очередь представлена на рис. 3.4, при этом был фиксирован временной масштаб s , ($s = 4.98$). На рис. 3.3 и рис. 3.4 численные результаты представлены в виде точек, теоретические зависимости показаны сплошной линией. Теоретические значения для средней длительности ламинарных фаз при фиксированных значениях управляющих параметров

$$\langle \tau \rangle = - \frac{T_e^2 \log\left(\frac{T_e+T_r}{T_e}\right) - 2T_e T_r + T_r^2 \log\left(\frac{T_e+T_r}{T_r}\right)}{T_e + T_r} \quad (3.4)$$

были получены из теоретического соотношения для средней длительности ламинарного участка поведения (2.11), приведенного в разделе 2.2, с учетом того, что в системе реализуется перемежаемость типа “кольца” и перемежаемость “игольного ушка”.

В соотношении (3.4) T_e — средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости “игольного ушка”, T_r — средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости “кольца” при фиксированных значениях управляющих параметров. Из рис. 3.3 и рис. 3.4 отчетливо видно, что теоретическая зависимость (3.4) хорошо соотносится с численными результатами, полученными для системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера. Кроме зависимости средней длительности ламинарных участков поведения от управляющих параметров для исследуемой системы были построены распределения длительностей ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров. Данные распределения приведены на рис. 3.5, точками показаны результаты, полученные числен-

но, соответствующие им теоретические зависимости

$$\begin{aligned}
 p(\tau) = & \frac{\exp(-\tau/T_e)}{(T_e + T_r)} \left(1 - \frac{\tau}{T_e}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_e}\right) + \\
 & + \frac{T_e^2 + T_r^2}{T_e T_r (T_e + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_e} - \frac{\tau}{T_r}\right) + \\
 & + \frac{\exp(-\tau/T_r)}{(T_e + T_r)} \left(1 - \frac{\tau}{T_r}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right),
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

(где $\Gamma(a, z)$ — неполная гамма функция, T_e — средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости “игольного ушка”, T_r — средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости “кольца”) показаны сплошными линиями. Соотношение (3.5), получено из (2.10) (см. раздел 2.2) с учетом того, что в системе реализуется перемежаемость типа “кольца” и перемежаемость “игольного ушка”. Из рис. 3.5 отчетливо видно, что теоретические кривые хорошо соотносятся с результатами численного моделирования для всех наборов значений управляющих параметров.

Таким образом, исходя из вышеизложенного, можно говорить о том, что теоретическая модель, предложенная в рамках настоящей диссертационной работы (раздел 2.2) корректно описывает явление сосуществования двух типов перемежающегося поведения в нелинейных динамических системах с потоковым временем. Тем не менее, проведя дополнительное рассмотрение данного вопроса на примере еще одной эталонной системы с потоковым временем, можно будет с полной уверенностью говорить о корректности полученных результатов.

3.2.2 Сосуществование двух типов перемежаемости в неавтономном генераторе Ван дер Поля с шумом

В качестве второй модельной системы с потоковым временем для изучения сосуществования двух типов перемежающегося поведения был выбран неавтономный генератор Ван дер Поля, находящийся также под воздействием шума.

Рассмотрим неавтономный генератор Ван дер Поля, на который оказывается некоторое случайное воздействие $D\xi(t)$, где $D\xi(t)$ — дельта-коррелированный белый шум [$\langle \xi(t) \rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(\tau) \rangle = \delta(t - \tau)$]. Уравнение, описывающее динамику такой системы, имеет следующий вид:

$$\ddot{x} - (\lambda - x^2)\dot{x} + x = A \sin(\omega_e t) + D\xi(t) \quad (3.6)$$

где A — амплитуда внешнего гармонического воздействия и ω_e — его частота. Значения управляющих параметров были выбраны следующими: $\lambda = 0.1$, $\omega_e = 0.98$. При таком наборе значений управляющих параметров и нулевом уровне шума ($D = 0$) динамика неавтономного генератора Ван дер Поля становится синхронной, когда $A = A_c = 0.0238$, что соответствует седло-узловой бифуркации на плоскости комплексных амплитуд [15], сопряженной с рождением предельного цикла из общей сепаратрисы седла и узла. Отметим, что исследования проводились для значений амплитуды $A > A_c$ и $D = 1$, при которых система демонстрирует перемежаемость типа I с шумом в закритической области значений параметров.

Рассматривая неавтономный генератор Ван дер Поля с шумом (3.6) на различных временных масштабах аналогично тому, как это было сделано в разделах 1.3.3 и 3.1, можно выделить асинхронные временные масштабы, на которых в исследуемой системе будет наблюдаться перемежаемость “кольца”.

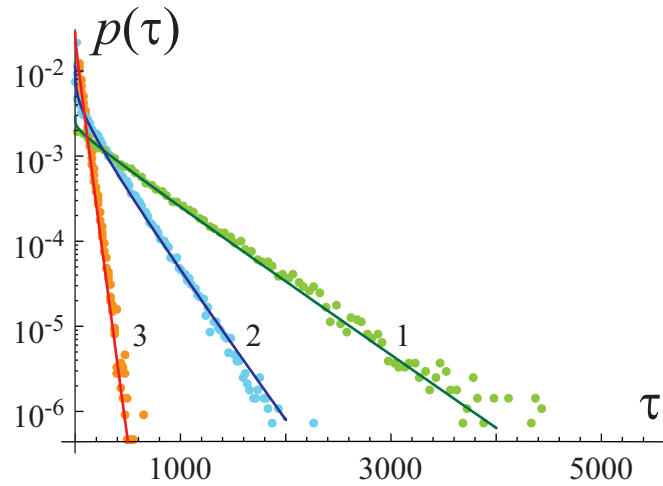


Рис. 3.5: Распределения длительностей ламинарных фаз для системы однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера и аналитические кривые (3.5), соответствующие этим распределениям (сплошные линии). Кривая 1 — $\varepsilon = 0.036$, $s = 4.870$, $T_r = 50.0$, $T_e = 1666.7$; кривая 2 — $\varepsilon = 0.036$, $s = 4.965$, $T_r = 322.6$, $T_e = 1666.7$; кривая 3 — $\varepsilon = 0.038$, $s = 4.980$, $T_r = 540.5$, $T_e = 17921.1$

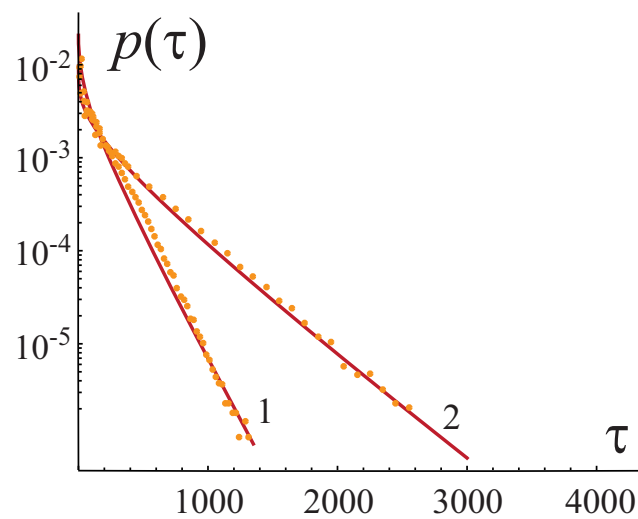


Рис. 3.6: Распределения длительностей ламинарных фаз для режима сосуществования перемежаемости типа I с шумом и перемежаемости кольца для неавтономного генератора Ван дер Поля под внешним воздействием и аналитические зависимости (3.7), соответствующие этим распределениям (сплошные линии). Кривая 1 — $A = 0.02308$, $s = 3.50$, $T_r = 148.1$, $T_i = 56.0$; кривая 2 — $A = 0.02497$, $s = 3.57$, $T_r = 6002.9$, $T_i = 120.0$

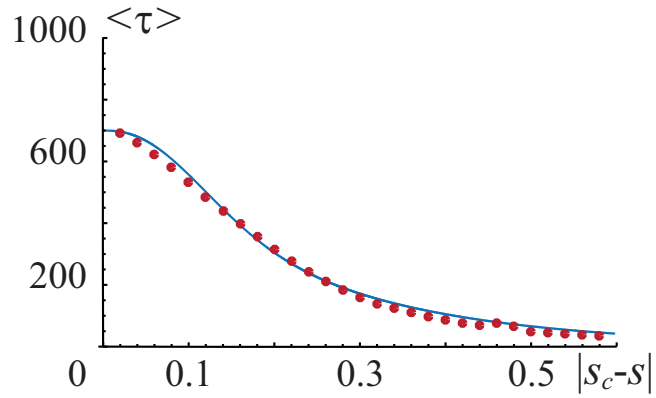


Рис. 3.7: Зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от параметра надкритичности. Точками показаны результаты численного моделирования, линией — аналитическое соотношение (3.8); в качестве параметра надкритичности выступает $|s - s_c|$, амплитуда внешнего воздействия $A = 0.02308$, критический временной масштаб $s_c = s_h = 8.62$.

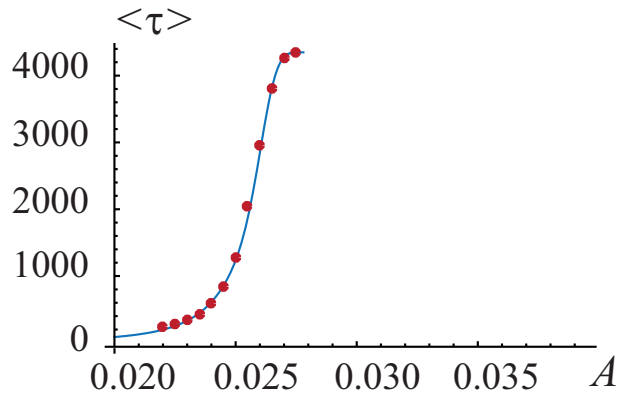


Рис. 3.8: Зависимость средней длительности ламинарных участков поведения от амплитуды внешнего воздействия A . Точками показаны результаты численного моделирования, линией — аналитическое соотношение (3.8), временной масштаб $s = 3.97$.

Для выбранных значений управляющих параметров в неавтономном генераторе Ван дер Поля, находящемся под воздействием шума, синхронный режим устанавливается при значении параметра амплитуды внешнего гармонического воздействия $A_s \approx 0.028$, при этом значения синхронных временных масштабов лежат в диапазоне $s \in [s_l; s_h]$, $s_l = 3.98$, $s_h = 8.62$. Отметим, что исследования проводились в области значений амплитуды внешнего воздействия $A < A_s$, то есть при значениях, когда в системе можно диагностировать перемежаемость типа I с шумом. Таким образом, если рассматривать неавтономный генератор Ван дер Поля с шумом на асинхронных временных масштабах s , то можно наблюдать сосуществование двух типов перемежающегося поведения: перемежаемость типа I с шумом и перемежаемость “кольца”.

Как и ранее, используя разработанный в разделе 3.1 настоящей диссертационной работы модифицированный метод выделения ламинарных и турбулентных участков поведения, были получены распределения длительностей ламинарных участков поведения при фиксированных управляющих параметрах для неавтономного генератора Ван дер Поля, находящегося также под воздействием шума. Данные распределения представлены на рис. 3.5, где точками показаны численные результаты, а линией — теоретическая зависимость, которая была получена из соотношения (2.10) (см. раздел 2.2), и с учетом того, что в системе реализуется перемежаемость

типа I с шумом и перемежаемость “кольца”:

$$\begin{aligned}
 p(\tau) = & \frac{\exp(-\tau/T_i)}{(T_i + T_r)} \left(1 - \frac{\tau}{T_i}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_r}\right) + \\
 & + \frac{T_i^2 + T_r^2}{T_i T_r (T_i + T_r)} \exp\left(-\frac{\tau}{T_i} - \frac{\tau}{T_r}\right) + \\
 & + \frac{\exp(-\tau/T_r)}{(T_i + T_r)} \left(1 - \frac{\tau}{T_r}\right) \Gamma\left(0, \frac{\tau}{T_i}\right),
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\Gamma(a, z)$ — неполная гамма функция, T_i — средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости типа I с шумом, T_r — средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости “кольца”. Из рис. 3.6 отчетливо видно, что теоретические кривые хорошо соотносятся с результатами численного моделирования. Следует также отметить, что соотношение (3.7) совпадает с (3.5) в силу того, что перемежаемость типа I с шумом в закритической области подчиняется закономерностям, характерным для перемежаемости игольного ушка [115].

Кроме распределения длительностей ламинарных участков поведения для неавтономного генератора Ван дер Поля с шумом (3.6) были получены зависимости средней длительности участков ламинарного поведения от параметра надкритичности $s - s_c$ (рис. 3.7) и от амплитуды внешнего гармонического воздействия A (рис. 3.8). Результаты численного моделирования были сопоставлены с теоретической зависимостью средней длительности ламинарного поведения от управляющих параметров, полученной из соотношения (2.11), с учетом того, что в исследуемой системе реализуется перемежаемость типа I с шумом и перемежаемость “кольца”. Данная теоретическая зависимость имеет вид

$$\langle \tau \rangle = - \frac{T_i^2 \log\left(\frac{T_i + T_r}{T_i}\right) - 2T_i T_r + T_r^2 \log\left(\frac{T_i + T_r}{T_r}\right)}{T_i + T_r}, \tag{3.8}$$

где T_i — средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости типа I, T_r — средняя длительность ламинарной фазы перемежаемости “кольца” и, в силу уже упоминавшихся причин, совпадает с соотношением (3.4).

Таким образом, из рис. 3.7 и рис. 3.8 отчетливо видно, что теоретическая зависимость (3.8) хорошо соотносится с результатами численного моделирования, полученными для неавтономного генератора Ван дер Поля с шумом.

3.3 Перемежающееся поведение при взаимодействии кардиоваскулярной и респираторной систем человека

В разделе 3.2 настоящей диссертационной работы была показана возможность одновременного сосуществования двух типов перемежающегося поведения на примере эталонных систем с потоковым временем. В то же самое время представляется интересным и важным понять, насколько типичен данный тип поведения для реальных систем. В связи с этим, в настоящем разделе диссертации приведены результаты исследования перемежаемости в физиологической системе, на примере взаимодействия кардиоваскулярной и респираторной систем человека.

В настоящее время известно, что основные ритмы кардиоваскулярной (сердечно-сосудистой) системы человека могут быть синхронизованы между собой. При этом, системы, задающие основной сердечный ритм и ритм медленной регуляции кровяного давления, могут быть рассмотрены как автогенераторы под внешним воздействием, в качестве которого выступает дыхание [117, 118]. Понятно, что при определенных значениях частоты дыхания, находящихся ниже границы синхронизации, возможно существо-

вание перемежаемости, а если рассматривать такую систему на различных временных масштабах с помощью непрерывного вейвлетного преобразования [15, 16], аналогично тому как это было сделано в разделе 1.3.2, то в этом случае в ней одновременно можно обнаружить два различных типа перемежающегося поведения.

Для подтверждения наличия возможности одновременного сосуществования двух типов перемежаемости в физиологических системах были исследованы записи сигналов ЭКГ и дыхания восьми здоровых молодых мужчин со средним уровнем физической активности. Физиологические данные были получены и любезно предоставлены для анализа научной группой под руководством д.ф.-м.н. М.Д. Прохорова и д.ф.-м.н. В.И. Пономаренко. Запись сигналов ЭКГ и дыхания производилась одновременно в положении “сидя” с частотой дискретизации 250 Гц и 16-битным разрешением. Продолжительность каждого из экспериментов, проведенных научной группой под руководством д.ф.-м.н. М.Д. Прохорова и д.ф.-м.н. В.И. Пономаренко, составляла 10 минут. Частота дыхания устанавливалась звуковыми сигналами. С учетом того, что процесс медленной регуляции кровяного давления человека характеризуется основной частотой, близкой к 0.1 Гц [119], эксперименты осуществлялись при вынужденном дыхании с частотой 0.2 Гц для того, чтобы избежать ложной синхронизации, обусловленной наличием компонент дыхания в вариабельности сердечного ритма [120]. Поэтому перемежающееся поведение изучалось вблизи языка синхронизации 1 : 2, а разность фаз определялась как

$$\Delta\varphi_s(t) = \varphi_b(s, t) - 2\varphi_{RR}(2s, t), \quad (3.9)$$

где $\varphi_b(s, t)$ — фаза сигнала дыхания на временном масштабе s , а $\varphi_{RR}(2s, t)$ — фаза сердечного ритма, определенная на двойном временном масштабе $2s$. Фазы вводились в рассмотрение при помощи непрерывного вейвлетного

преобразования с материнским вейвлетом Морле (более подробно см. раздел 1.3.1 настоящей диссертационной работы). Временной масштаб $s = 5$ с соответствует частоте дыхания $f_b = 0.2$ Гц, а временной масштаб $2s = 10$ с однозначно связан с частотой медленных осцилляций сердечного ритма, равной $f = 0.1$ Гц.

На рисунке 3.9, *а*, кривая 1 приведена зависимость разности фаз $\Delta\varphi_s(t)$ от времени для исследуемой системы. Нетрудно заметить, что она содержит как участки синхронного поведения, так и фазовые проскоки. К сожалению, в связи с объективными ограничениями получить записи большой длины, содержащие достаточное количество фазовых проскоков, чтобы получить большой набор данных, не представляется возможным. Однако, применение метода вращающейся плоскости (1.32) к записанным данным в том же виде, как это было сделано в разделе 3.1, позволяет разделить фазовые проскоки, соответствующие различным типам перемежаемости (см. рисунок 3.9, *б, в*). Как видно из рисунка 3.9, в кардиоваскулярной системе человека возможно возникновение как перемежаемости “игольного ушка” (*б*), так и перемежаемости перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца” (*в*). Перемежаемость “игольного ушка” проявляет себя во вращении фазовой траектории вокруг начала координат, в то время как при перемежаемости “кольца” начало координат оказывается замазанным участками фазовой траектории. В режиме сосуществования двух типов перемежаемости оба этих механизма проявляют себя одновременно. Для сравнения на рисунке 3.9, *а, г, д* приведены также разность фаз (*а* — кривая 2) и вращающиеся плоскости (*г, д*) для системы однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера (1.10) – (1.11) с теми же значениями управляющих параметров, вычисленные также вблизи языка синхронизации 1 : 2. Нетрудно заметить, что как разности фаз, так и вращающиеся плоскости в модельной системе и при взаимодействии кардиоваскулярной и респираторной систем челове-

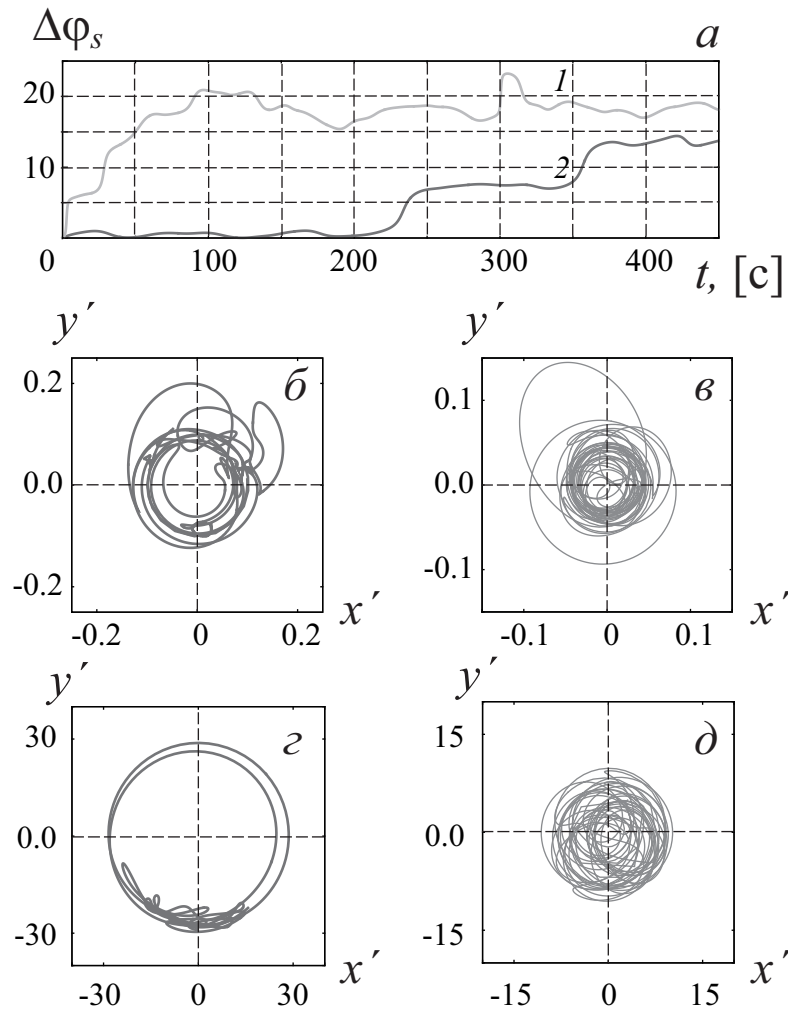


Рис. 3.9: Одновременное сосуществование двух типов перемежающегося поведения в кардиоваскулярной системе человека: (а) зависимость $\Delta\varphi_s(s = 5, t)$, кривая 1, (б) траектория на вращающейся плоскости (x', y') , содержащая фазовые проскоки, соответствующие перемежаемости “игольного ушка”, $s = 5.0$ с, и (в) траектория на вращающейся плоскости (x', y') , где наблюдается перемежаемость перемежаемостей “игольного ушка” и “кольца”, $s = 4.0$ с. Одновременное сосуществование двух типов перемежающегося поведения в системе однонаправлено связанных осцилляторов Ресслера (1.10) – (1.11) при $\varepsilon = 0.035$: (а) зависимость $\Delta\varphi_s(s = 6.3, t)$, кривая 2, (г) траектория на вращающейся плоскости (x', y') , содержащая фазовые проскоки, соответствующие перемежаемости “игольного ушка”, $s = 6.3$, и (д) траектория на вращающейся плоскости, где сосуществуют оба типа перемежаемости, $s = 4.4$

ка качественно аналогичны друг другу, что подтверждает одновременное наличие двух типов перемежающегося поведения в реальной физиологической системе.

3.4 Выводы по третьей главе

В третьей главе диссертационной работы был предложен модифицированный метод выделения ламинарных и турбулентных участков поведения. Разработанный метод позволяет не только с высокой точностью определять длительность участков ламинарного и турбулентного поведения, но и соотносить каждый участок с конкретным типом перемежаемости, который в данный момент реализуется в системе. С использованием предложенного метода выделения ламинарных и турбулентных участков поведения было проведено исследование эталонных систем с потоковым временем, которые способны демонстрировать сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения. Были получены статистические характеристики (распределение длительности ламинарных участков поведения при фиксированных значениях управляющих параметров, зависимость средней длительности участков ламинарного поведения от управляющих параметров). В рамках третьей главы показано, что предложенный во второй главе настоящей диссертационной работы теоретический подход к описанию сосуществования двух типов перемежающегося поведения, корректно описывает динамику систем с потоковым временем. Таким образом, можно в полной мере ожидать, что данная теория справедлива для широкого круга хаотических систем. Кроме этого, в третьей главе диссертационной работы показано, что в реальных физиологических системах возможно сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения. Основываясь на вышеизложенных результатах, можно ожидать, что одновремен-

ное сосуществование двух типов перемежаемости характерно для широкого круга нелинейных систем различной природы.

Заключение

В настоящей диссертационной работе проведено изучение перемежающегося поведения, которое возникает на границе синхронизации временных масштабов. Определены общие закономерности для нелинейных систем, демонстрирующих одновременное сосуществование двух типов перемежаемости. В диссертационной работе получены следующие основные результаты.

1. Разработан новый метод, позволяющий выделять ламинарные и турбулентные фазы во временных реализациях взаимодействующих хаотических осцилляторов, которые находятся вблизи границы режима фазовой хаотической синхронизации. Отличительной особенностью предложенного метода является то, что для выделения ламинарных и турбулентных фаз не требуется дополнительных преобразований, это позволяет существенно упростить и ускорить процедуру выделения характерных участков поведения в исследуемых системах.
2. Исследовано перемежающееся поведение, которое реализуется при переходе от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике в хаотических осцилляторах при малой и большой расстройке управляющих параметров. Для данного типа перемежающегося поведения были получены статистические характеристики: распределение длительности ламинарных участков поведения при фиксированных управляющих параметрах и зависимость средней длительности

ламинарного поведения от параметра надкритичности. На основе полученных статистических характеристик было установлено, что переход от синхронизации временных масштабов к асинхронной динамике для хаотических осцилляторов при малой и большой расстройке управляющих параметров осуществляется через перемежаемость “кольца”. Данные результаты позволяют более детально изучить механизмы возникновения синхронизации временных масштабов. Основываясь на полученных результатах, можно ожидать, что данный тип поведения будет характерен для широкого круга хаотических систем, демонстрирующих режим синхронизации временных масштабов.

3. В диссертационной работе впервые разработана теоретическая модель, которая описывает одновременное сосуществование двух различных типов перемежающегося поведения в нелинейных осцилляторах. Предложенная теоретическая модель позволяет получить статистические характеристики (распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров и зависимость средней длительности участка ламинарного поведения от управляющих параметров), описывающие поведение нелинейной системы, в которой одновременно сосуществует два различных типа перемежаемости.
4. В рамках диссертационной работы была проведена апробация предложенной теоретической модели одновременного сосуществования двух типов перемежаемости. В результате численно были получены статистические характеристики (распределение длительностей ламинарных фаз при фиксированном значении управляющих параметров и зависимость средней длительности участка ламинарного поведения от управляющих параметров) для модельных систем с дискретным временем

и систем с потоковым временем, в которых одновременно сосуществовало два различных типа перемежающегося поведения. Численно полученные зависимости были сопоставлены с теоретическими закономерностями, было получено хорошее соответствие между численными результатами и теорией. Основываясь на полученных результатах, можно ожидать, что данная теория будет справедлива для широкого круга хаотических систем, в которых одновременно сосуществуют два различных типа перемежающегося поведения.

5. Показано, что в физиологических системах (на примере взаимодействия кардиоваскулярной и респираторной систем человека) существует возможность возникновения ситуации, когда в исследуемой системе поочередно реализуется два различных типа перемежающегося поведения. Таким образом, можно ожидать, что одновременное сосуществование двух типов перемежаемости характерно для широкого круга нелинейных систем различной природы.

Благодарности

В завершение настоящей диссертационной работы хочу выразить искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору, д.ф.-м.н. Короновскому Алексею Александровичу за многолетнюю плодотворную работу и всестороннюю помощь в подготовке данной диссертации. Не могу не поблагодарить профессоров Храмова Александра Евгеньевича, Трубецкого Дмитрия Ивановича и доцентов Москаленко Ольгу Игоревну, Куровскую Марию Константиновну за поддержку настоящей работы. Отдельно хочу поблагодарить д.ф.-м.н. Пономаренко Владимира Ивановича и д.ф.-м.н. Прохорова Михаила Дмитриевича за предоставленные экспериментальные данные, помощь и ценные советы во время подготовки настоящей диссертационной работы. Благодарю профессора Юрия Ивановича Левина и зам. главного редактора журнала “Прикладная нелинейная динамика” к.ф.-м.н. Наталью Николаевну Левину за помощь в подготовке диссертации к изданию, а также всех товарищей и коллег по работе за помощь и поддержку на различных этапах выполнения данной работы.

Список литературы

- [1] В. А. Кац, Д. И. Трубецков, *Возникновение хаоса при разрушении квазипериодических режимов и переходе через перемежаемость в распределенном генераторе с запаздыванием*, Письма в ЖЭТФ **39** (1983), No. 3, 116–119.
- [2] В. С. Анищенко, *Сложные колебания в простых системах*, М.: Наука, 1990.
- [3] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, *From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators*, Phys. Rev. Lett. **78** (1997), No. 22, 4193–4196.
- [4] S. Boccaletti, D. L. Valladares, *Characterization of intermittent lag synchronization*, Phys. Rev. E **62** (2000), No. 5, 7497–7500.
- [5] A. S. Pikovsky, G. V. Osipov, M. G. Rosenblum, M. Zaks, J. Kurths, *Attractor–repeller collision and eyelet intermittency at the transition to phase synchronization*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), No. 1, 47–50.
- [6] P. Bergé, Y. Pomeau, Ch. Vidal, *L'ordre dans le chaos*, Hermann, Paris, 1988.
- [7] А. А. Короновский, Г. Д. Кузнецова, И. С. Мидзяновская, Е. Ю. Ситникова, Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, *Закономерности перемежа-*

ющего поведения в спонтанной неконвульсивной судорожной активности у крыс, ДАН (2006).

- [8] П. Берже, И. Помо, К. Видаль, *Порядок в хаосе*, М.: Мир, 1991.
- [9] Г. Шустер, *Детерминированный хаос*, М.: Мир, 1988.
- [10] M. Dubois, M. Rubio, P. Bergé, *Experimental evidence of intermiasttencies associated with a subharmonic bifurcation*, Phys. Rev. Lett. **51** (1983), 1446–1449.
- [11] J. F. Heagy, N. Platt, S. M. Hammel, *Characterization of on-off intermittency*, Phys. Rev. E **49** (1994), No. 2, 1140–1150.
- [12] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, *Intermittent generalized synchronization in unidirectionally coupled chaotic oscillators*, Europhysics Lett. **70** (2005), No. 2, 169–175.
- [13] S. Boccaletti, E. Allaria, R. Meucci, F. T. Arecchi, *Experimental characterization of the transition to phase synchronization of chaotic CO₂ laser systems*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), No. 19, 194101.
- [14] J. L. Perez Velazquez, H. Khosravani, A. Lozano, B. L. Bardakjian, P. L. Carlen, R. A. Wennberg, *Type III inermittency in human partial epilepsy*, European Journal of Neuroscience **11** (1999), 2571–2576.
- [15] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, *An approach to chaotic synchronization*, Chaos **14** (2004), No. 3, 603–610.
- [16] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, *Time scale synchronization of chaotic oscillators*, Physica D **206** (2005), No. 3–4, 252–264.

- [17] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, O. I. Moskalenko, *Synchronization of spectral components and its regularities in chaotic dynamical systems*, Phys. Rev. E **71** (2005), No. 5, 056204.
- [18] М. О. Журавлев, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, *Метод выделения ламинарных и турбулентных фаз в перемежающихся временных реализациях систем, находящихся вблизи границы фазовой синхронизации*, Письма в ЖТФ **36** (2010), No. 10, 31–38.
- [19] М. О. Журавлев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, *Способ определения моментов синхронного и асинхронного поведения двух связанных систем. Патент на изобретение № 2431857*, Tech. report, Официальный бюллетень Федеральной службы по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Москва: ФИПС. 20.10.2011. Бюллетень № 29., 2011.
- [20] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, *Программа для определения длительностей турбулентных и ламинарных фаз поведения систем, находящихся вблизи границы хаотической фазовой синхронизации. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012613432*, Tech. report, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 11.04.2012., 2012.
- [21] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Перемежающееся поведение на границе синхронизации временных масштабов*, ЖТФ **81** (2011), No. 7, 7–12.
- [22] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Перемежаемость кольца вблизи границы синхронизации вре-*

- менных масштабов*, Изв. Вузов. Прикладная нелинейная динамика. **19** (2011), No. 4, 12–24.
- [23] Maxim O. Zhuravlev, Alexey A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, A. A. Ovchinnikov, Alexander E. Hramov, *Ring intermittency near the boundary of the synchronous time scales of chaotic oscillators*, Phys. Rev. E **83** (2011), 027201.
- [24] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, O. I. Moskalenko, M. O. Zhuravlev, V. I. Ponomarenko, and M. D. Prokhorov, *Intermittency of intermittencies*, CHAOS **23** (2013), No. 3, 033129.
- [25] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Метод выделения ламинарных участков поведения в хаотических системах, в которых одновременно реализуется два различных типа перемежаемости*, Вестник ННГУ **1** (2013), No. 3, 196–200.
- [26] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Теоретическое и численное исследование "перемежаемости перемежаемостей" в связанных хаотических системах*, Письма в ЖТФ **39** (2013), No. 14, 1–7.
- [27] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Исследование на различных временных масштабах поведения неавтономного осциллятора Ван-дер-Поля в присутствии шума вблизи границы синхронизации.*, Изв. РАН. Сер. физическая **76** (2012), No. 12, 1503–1506.
- [28] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Перемежающееся поведение вблизи границы фазовой хаотической синхронизации на различных временных масштабах*, Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика **19** (2011), No. 1, 109–121.

- [29] М. О. Журавлев, *Выделение ламинарных и турбулентных фаз в однонаправленных связанных систем*, Труды Всероссийской научной школы-конференции “Нелинейные феномены, хаос, критические явления и методы их исследования с помощью вейвлетного, кластерного и спектрального анализа в геоэкологических процессах”, Саратов, 6-12 октября 2009 года, 2009, 17–19.
- [30] М. О. Журавлев, *Метод выделения турбулентных и ламинарных фаз и его апробация на примере однонаправленных связанных систем Рёсслера*, Материалы XV научной школы “Фундаментальные и прикладные задачи нелинейной физики - Нелинейные волны - 2010”, Нижний Новгород, 6-12 марта 2010 года, 2010, 39–40.
- [31] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Переключаемость “кольца” вблизи границы синхронизации временных масштабов*, Материалы IX Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” ХАОС-2010, Саратов, 4-9 октября 2010 года, 2010, 59–60.
- [32] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Исследование на различных временных масштабах поведения однонаправлено связанных хаотических систем вблизи границы фазовой синхронизации*, Труды XIII школы-семинара «Волны-2012». Секция 10. Нелинейная динамика, Москва, 21 - 26 мая, 2012, 15–16.
- [33] М. О. Журавлев, *Исследование основных характеристик поведения неавтономного осциллятора Ван дер Поля, демонстрирующего одновременно два различных типа переключаемости*, Тезисы докладов VII Всероссийской конференции молодых ученых «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», Саратов, 24 – 26 сентября, 2012.

- [34] М. О. Журавлев, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, А. В. Иванов, А. Е. Храмов, *Переменяемость переменяемостей на границе синхронизации временных масштабов: суррогатные данные и биомедицинские системы*, Материалы III Всерос. науч.-практ. форума Экология: синтез естественнонаучного, технического и гуманитарного знания, Саратов, 10-12 октября, 2012, 322–323.
- [35] М. О. Журавлев, *Переменяющееся поведение при разрушении синхронизации временных масштабов*, Труды IX Всероссийской научной конференции им. Ю.И. Неймарка "Нелинейные колебания механических систем Нижний Новгород, 24-29 сентября 2012 года, 2012, 409–410.
- [36] М. О. Журавлев, О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Переменяющееся поведение на границе фазовой синхронизации в присутствии шума*, Труды школы-семинара «Волны-2013». Секция 5. Нелинейная динамика и информационные системы, Москва, 20 - 25 мая, 2013, 23–24.
- [37] М. О. Журавлев, А. Е. Храмов, А. А. Короновский, О. И. Москаленко, *Теория переменяемости переменяемостей в нелинейных системах*, Материалы X Международной школы “Хаотические автоколебания и образование структур” ХАОС-2013, Саратов, 7-12 октября 2013 года, 2013, 129–130.
- [38] М. О. Zhuravlev, А. Е. Hramov, А. А. Koronovskii, О. I. Moskalenko, *General theoretical model describing coexistence of two types of intermittency in nonlinear dynamical systems.*, Proceedings of 21th edition of the Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, Bari (Italy), 10-12 July, 2013, 9P.

- [39] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, М. О. Журавлев, *Программа для ЭВМ, позволяющая производить непрерывное вейвлетное преобразование для экспериментальных данных с неэквидистантным шагом по времени. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2013661094*, Tech. report, Официальный бюллетень Реестра программ для ЭВМ. Москва. 28.11.2013., 2013.
- [40] S. P. Kuznetsov, *Torus fractalization and intermittency*, Phys. Rev. E **65** (2002), No. 6, 066209.
- [41] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, М. К. Куровская, S. Boccaletti, *Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006), 114101.
- [42] О. И. Москаленко, А. А. Короновский, С. А. Шурыгина, *Поведение нелинейных систем на границе синхронизации, индуцированной шумом*, Нелинейная динамика **7** (2011), No. 2, 197–208.
- [43] И. И. Блехман, *Синхронизация в природе и технике*, М.: Наука, 1981.
- [44] В. С. Анищенко, В. В. Астахов, Т. Е. Вадивасова, и др., *Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах*, М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [45] А. С. Пиковский, М. Г. Розенблум, Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление*, М.: Техносфера, 2003.
- [46] U. Parlitz, L. O. Chua, Lj. Kocarev, K. S. Halle, A. Shang, *Transmission of digital signal by chaotic synchronization*, Int. J. Bifurcation and Chaos **2** (1992), No. 4, 973–977.

- [47] K. Murali, M. Lakshmanan, *Transmission of signals by synchronization in a chaotic van der Pol–Duffing oscillator*, Phys. Rev. E **48** (1993), No. 3, R1624–R1626.
- [48] M. K. Cuomo, A. V. Oppenheim, S. H. Strogatz, *Synchronization of Lorenz-based chaotic circuits with application to communications*, IEEE Trans. Circuits and Syst. **40** (1993), No. 10, 626.
- [49] Lj. Kocarev, U. Parlitz, *General approach for chaotic synchronization with application to communication*, Phys. Rev. Lett. **74** (1995), No. 25, 5028–5031.
- [50] V. S. Anishchenko, A. N. Pavlov, *Global reconstruction in application to multichannel communication*, Phys. Rev. E **57** (1998), 2455–2457.
- [51] В. С. Анищенко, А. Н. Павлов, Н. Б. Янсон, *Реконструкция динамических систем в приложении к решению задачи защиты информации*, Журнал Технической Физики **68** (1998), No. 12, 1–8.
- [52] M. C. Eguia, M. I. Rabinovich, H. D.I. Abarbanel, *Information transmission and recovery in neural communications channels*, Phys. Rev. E **62** (2000), No. 5, 7111–7122.
- [53] I. Fischer, Y. Liu, P. Davis, *Synchronization of chaotic semiconductor laser dynamics on subnanosecond time scales and its potential for chaotic communication*, Phys. Rev. A **62** (2000), 011801(R).
- [54] N. F. Rulkov, M. A. Vorontsov, L. Illing, *Chaotic free-space laser communication over a turbulent channel*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), No. 27, 277905.
- [55] А. С. Дмитриев, А. И. Панас, *Динамический хаос: новые носители информации для систем связи*, М.: Физматлит, 2002.

- [56] Z. L. Yuan, A. J. Shields, *Comment on secure communication using mesoscopic coherent states*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), 048901.
- [57] Q. S. Li, Y. Liu, *Enhancement and sustainment of internal stochastic resonance in unidirectional coupled neural system*, Phys. Rev. E **73** (2006), 016218.
- [58] A. L. Fradkov, B. Andrievsky, R. J. Evans, *Chaotic observer-based synchronization under information constraints*, Phys. Rev. E **73** (2006), 066209.
- [59] R. C. Elson and et al., *Synchronous behavior of two coupled biological neurons*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), No. 25, 5692.
- [60] P. S. Landa, A. Rabinovitch, *Exhibition of intrinsic properties of certain systems in response to external disturbances*, Phys. Rev. E **61** (2000), No. 2, 1829–1838.
- [61] R. Porcher, G. Thomas, *Estimating lyapunov exponents in biomedical time series*, Phys. Rev. E **64** (2001), No. 1, 010902(R).
- [62] L. Glass, *Synchronization and rhythmic processes in physiology*, Nature (London) **410** (2001), 277–284.
- [63] A. N. Pavlov, O. V. Sosnovtseva, A. R. Ziganshin, N.-H. Holstein-Rathlou, E. Mosekilde, *Multiscality in the dynamics of coupled chaotic systems*, Physica A **316** (2002), 233–249.
- [64] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, *Bimodal oscillations in nephron autoregulation*, Phys. Rev. E **66** (2002), No. 6, 061909.

- [65] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Synchronization approach to analysis of biological systems*, Fluctuation and Noise Letters **4** (2004), No. 1, L53–L62.
- [66] Д. Э. Постнов, С. К. Хан, *Механизм противофазной синхронизации в моделях нейронов*, Письма в ЖТФ **25** (1999), No. 4, 11–18.
- [67] V. S. Anishchenko, A. G. Balanov, N. B. Janson, N. B. Igosheva, G. V. Bordyugov, *Entrainment between heart rate and weak nonlinear forcing*, Int. J. Bifurcation and Chaos **10** (2000), No. 10, 2339–2348.
- [68] E. Mosekilde, Yu. Maistrenko, D. E. Postnov, *Chaotic synchronization, applications to living systems. series a, vol. 42*, World Scientific, Singapore, 2002.
- [69] M. D. Prokhorov, V. I. Ponomarenko, V. I. Gridnev, M. B. Bodrov, A. B. Bespyatov, *Synchronization between main rhythmic processes in the human cardiovascular system*, Phys. Rev. E **68** (2003), 041913.
- [70] N. F. Rulkov, *Modeling of spiking-bursting neural behavior using two-dimensional map*, Phys. Rev. E **65** (2002), 041922.
- [71] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, *Synchronization phenomena in multimode dynamics of coupled nephrons*, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика **11** (2003), No. 3, 133–147.
- [72] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, D. J. Marsh, *Double-wavelet approach to study frequency and amplitude modulation in renal autoregulation*, Phys. Rev. E **70** (2004), No. 031915.
- [73] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, N.-H. Holstein-Rathlou, D. J. Marsh, *Double-wavelet approach to studying the modulation*

- properties of nonstationary multimode dynamics*, Physiological Measurement **26** (2005), 351–362.
- [74] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, N. A. Brazhe, A. R. Brazhe, L. A. Erokhova, G. V. Maksimov, E. Mosekilde, *Interference microscopy under double-wavelet analysis: A new tool to studying cell dynamics*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), 218103.
- [75] O. V. Sosnovtseva, A. N. Pavlov, E. Mosekilde, K.-P. Yip, N.-H. Holstein-Rathlou, D. J. Marsh, *Synchronization among mechanisms of renal autoregulation is reduced in hypertensive rats*, American Journal of Physiology (Renal Physiology) **293** (2007), F1545–F1555.
- [76] P. Parmananda, *Generalized synchronization of spatiotemporal chemical chaos*, Phys. Rev. E **56** (1997), 1595–1598.
- [77] I. Z. Kiss, J. L. Hudson, *Phase synchronization and suppression of chaos through intermittency in forcing of an electrochemical oscillator*, Phys. Rev. E **64** (2001), No. 4, 046215.
- [78] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, *Synchronization: from pendulum clocks to chaotic lasers and chemical oscillators*, Contemporary Physics **44** (2003), No. 5, 401–416.
- [79] I. Z. Kiss, J. L. Hudson, J. Escalona, P. Parmananda, *Noise-aided synchronization of coupled chaotic electrochemical oscillators*, Phys. Rev. E **70** (2004), No. 2, 026210.
- [80] M. Yoshioka, *Cluster synchronization in an ensemble of neurons interacting through chemical synapses*, Phys. Rev. E **71** (2005), 061914.
- [81] W. L. Ditto, S. N. Rauseo, M. L. Spano, *Experimental control of chaos*, Phys. Rev. Lett. **65** (1990), No. 26, 3211–3214.

- [82] R. Meucci, W. Gadomski, M. Ciofini, F. T. Arecchi, *Experimental control of chaos by means of weak parametric perturbations*, Phys. Rev. E **49** (1994), No. 4, R2528–R2531.
- [83] A. Kittel, J. Parisi, K. Pyragas, *Delayed feedback control of chaos by self-adapted delay time*, Phys. Lett. A **198** (1995), 433–436.
- [84] В. Д. Шалфеев, Г. В. Осипов, А. К. Козлов, А. Р. Волковский, *Хаотические колебания — генерация, синхронизация, управление*, За рубежомная радиоэлектроника. Успехи современной радиоэлектроники (1997), No. 10, 27–49.
- [85] S. Boccaletti, C. Grebogi, Y.-C. Lai, H. Mancini, D. Maza, *The control of chaos: theory and applications*, Physics Reports **329** (2000), 103–197.
- [86] C. M. Ticos, E. Rosa, W. B. Pardo, J. A. Walkenstein, M. Monti, *Experimental real-time phase synchronization of a paced chaotic plasma discharge*, Phys. Rev. Lett. **85** (2000), No. 14, 2929.
- [87] E. Rosa, W. B. Pardo, C. M. Ticos, J. A. Walkenstein, M. Monti, *Phase synchronization of chaos in a plasma discharge tube*, Int. J. Bifurcation and Chaos **10** (2000), No. 11, 2551–2563.
- [88] Д. И. Трубецков, А. Е. Храмов, *О синхронизации хаотических автоколебаний в распределённой системе “винтовой электронный поток — встречная электромагнитная волна”*, Радиотехника и электроника **48** (2003), No. 1, 116–124.
- [89] Д. И. Трубецков, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Синхронизация распределённых автоколебательных систем электронно-волновой природы с обратной волной*, Изв. вузов. Радиофизика **XLVII** (2004), No. 5–6, 343–372.

- [90] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, P. V. Popov, I. S. Rempen, *Chaotic synchronization of coupled electron-wave systems with backward waves*, Chaos **15** (2005), No. 1, 013705.
- [91] E. Rosa, E. Ott, M. H. Hess, *Transition to phase synchronization of chaos*, Phys. Rev. Lett. **80** (1998), No. 8, 1642–1645.
- [92] K. J. Lee, Y. Kwak, T. K. Lim, *Phase jumps near a phase synchronization transition in systems of two coupled chaotic oscillators*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), No. 2, 321–324.
- [93] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, *Fractal basin boundaries, long lived chaotic transients, and unstable–unstable pair bifurcation*, Phys. Rev. Lett. **50** (1983), No. 13, 935–938.
- [94] О. И. Москаленко, *Переход к фазовой синхронизации в случае воздействия внешнего хаотического сигнала на систему с периодической динамикой*, Письма в ЖТФ **33** (2007), No. 19, 72–79.
- [95] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, A. A. Ovchinnikov, S. Boccaletti, *Length distribution of laminar phases for type-I intermittency in the presence of noise*, Phys. Rev. E **76** (2007), No. 2, 026206.
- [96] M. Zhan, G. W. Wei, and C.-H. Lai, *Transition from intermittency to periodicity in lag synchronization in coupled Rössler oscillators*, Phys. Rev. E **65** (2002), 036202.
- [97] А. А. Короновский and А. Е. Храмов, *Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения*, М.: Физматлит, 2003.
- [98] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, Ю. И. Левин, *Исследование процессов структурообразования в электронном пучке с виртуальным*

- катодом с помощью вейвлетной бикогерентности, Письма в ЖТФ **28** (2002), No. 13, 57–66.
- [99] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
- [100] B. Torresani, *Continuous wavelet transform*, Paris: Savoie, 1995.
- [101] В. А. Гусев, А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Применение адаптивных вейвлетных базисов к анализу нелинейных систем с хаотической динамикой*, Письма в ЖТФ **29** (2003), No. 18, 61–69.
- [102] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Об эффективном анализе перехода к хаосу через перемежаемость с помощью вейвлетного преобразования*, Письма в ЖТФ **27** (2001), No. 1, 3–11.
- [103] А. А. Короновский, А. А. Тыщенко, А. Е. Храмов, *Исследование распределения турбулентных фаз при разрушении синхронизации с запаздыванием*, Письма в ЖТФ **31** (2005), No. 21, 1–8.
- [104] A. S. Pikovsky, M. Zaks, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, J. Kurths, *Phase synchronization of chaotic oscillators in terms of periodic orbits*, Chaos **7** (1997), No. 4, 680–687.
- [105] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, М. К. Куровская, *Two types of phase synchronization destruction*, Phys. Rev. E **75** (2007), No. 3, 036205.
- [106] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, G. V. Osipov, J. Kurths, *Phase synchronization of chaotic oscillators by external driving*, Physica D **104** (1997), No. 4, 219–238.
- [107] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, *Phase synchronisation in regular and chaotic systems*, Int. J. Bifurcation and Chaos **10** (2000), No. 10, 2291–2305.

- [108] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, *Phase synchronization of chaotic oscillators*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996), No. 11, 1804–1807.
- [109] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, J. Kurths, *Locking-based frequency measurement and synchronization of chaotic oscillators with complex dynamics*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), No. 26, 264102.
- [110] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, Ю. И. Левин, *Синхронизация временных масштабов хаотических осцилляторов*, ЖЭТФ **127** (2005), No. 4, 886–897.
- [111] А. А. Короновский, А. Е. Храмов, *Обобщенная синхронизация хаотических осцилляторов как частный случай синхронизации временных масштабов*, Письма в ЖТФ **30** (2004), No. 23, 54–61.
- [112] G. V. Osipov, A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, J. Kurths, *Phase synchronization effect in a lattice of nonidentical Rössler oscillators*, Phys. Rev. E **55** (1997), No. 3, 2353–2361.
- [113] А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Два сценария разрушения режима хаотической фазовой синхронизации*, ЖТФ **77** (2007), No. 1, 21–29.
- [114] J. P. Eckmann, L. Thomas, P. Wittwer, *Intermittency in the presence of noise*, J. Phys. A: Math. Gen. **14** (1981), 3153–3168.
- [115] А. Е. Храмов, А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, *Type- i intermittency with noise versus eyelet intermittency*, Phys. Lett. A **375** (2011), 1646–1652.
- [116] А. А. Короновский, М. К. Куровская, О. И. Москаленко, А. Е. Храмов, *Переменяемость типа I в присутствии шума и перемежае-*

- мость угольного ушка*, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика **18** (2010), No. 1, 24–36.
- [117] S. Rzezinski, N. B. Janson, A. G. Balanov, P. V.E. McClintock, *Regions of cardiorespiratory synchronization in humans under paced respiration*, Phys. Rev. E **66** (2002), 051909.
- [118] Alexander E. Hramov, Alexey A. Koronovskii, Vladimir I. Ponomarenko, Mikhail D. Prokhorov, *Detection of synchronization from univariate data using wavelet transform*, Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics) **75** (2007), No. 5, 056207.
- [119] S. Malpas, *Neural influences on cardiovascular variability: possibilities and pitfalls*, Am. J. Physiol. Heart Circ. Physiol. **282** (2002), No. 1, H6–20.
- [120] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, V. I. Ponomarenko, M. D. Prokhorov, *Detecting synchronization of self-sustained oscillators by external driving with varying frequency*, Phys. Rev. E **73** (2006), No. 2, 026208.