ЗАДАЧИ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ СГУ ПО МАТЕМАТИКЕ. 3-4 КУРС

1. Доказать, что во всяком тетраэдре ABCD найдется ребро, которое образует острые углы со всеми смежными с ним ребрами.

Решение. Как известно, в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. Рассмотрим самое длинное ребро тетраэдра. Прилегающие к нему углы не являются наибольшими в соответствующих треугольниках, поэтому они острые.

2. Доказать неравенство $\ln x/(x-1) < x^{-1/2}$ при $x > 0$, $x \neq 1$.

Решение. Сделаем замену $y = x^{1/2}$. Тогда при $y > 1$ неравенство имеет вид $2\ln y < (y^2-1)/y$. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(y) = y - 1/y - 2\ln y$, $y > 0$. Тогда $f'(y) = 1 + 1/y^2 - 2/y = (1-1/y)^2$. Значит, $f(y)$ возрастает при $y > 0$. В частности, $f(y) > 0$ при $y > 1$, что равносильно первоначальному неравенству при $x > 1$. С другой стороны, $f(y) < 0$ при $0 < y < 1$. Деля это неравенство на $y^2 - 1 < 0$ получаем неравенство, равносильное первоначальному при $0 < x < 1$.

3. В таблице 4×4 записаны натуральные числа. Может ли быть так, что в каждой следующей строке сумма чисел на два больше, чем в предыдущей, а в каждом следующем столбце сумма на три больше, чем в предыдущем?

Решение. Пусть это возможно и A — сумма чисел в первой строке, B — сумма чисел в первом столбце. Тогда сумма чисел во всей таблице равна с одной стороны $A+A+2+A+4+A+6 = 4A+12$, а с другой стороны она же равна $B+B+3+B+6+B+9 = 4B+18$. Первое из этих чисел делится на четыре, а второе нет. Противоречие.

Ответ: не может быть.

4. Имеется 3 ящика и 5 призов. Каждый приз независимо от других помещается в произвольный ящик. Какова вероятность того, что хотя бы один ящик окажется пустым?

Решение. Приз может попасть в любой ящик с вероятностью 1/3. Обозначим через A_{ij} событие, состоящее в том, что все призы попали в ящики i и j. Вероятность каждого такого события равна $(2/3)^5$. События A_{ij} не являются несовместными. Например, $A_{12} \cdot A_{23} = A_2$ состоит в том, что все призы находятся в ящике 2. Вероятность этого составляет $(1/3)^5$. По формуле суммы вероятностей (отметим, что $A_{12} \cdot A_{23} \cdot A_{13} = \emptyset$)

$$P(A_{12} + A_{13} + A_{23}) = P(A_{12}) + P(A_{13}) + P(A_{23}) - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) =$$

$$= 3(2/3)^5 - 3(1/3)^5 = 31/81.$$

Ответ: $31/61$.

5. Найти интеграл $\int_0^1 (x^b - x^a)/\ln x\, dx$, $a, b > 0$.

Решение. Пусть $a > 0$ фиксировано и рассмотрим функцию $\Phi(b) = \int_0^1 (x^b - x^a)/\ln x\, dx$. Тогда

$$\Phi'(b) = \int_0^1 \frac{x^b \ln x}{\ln x}\, dx = \frac{1}{b+1},$$

откуда $\Phi(b) = \ln(b+1) + C$. Но при $b = a$ значение $\Phi(b)$ равно нулю, поэтому $C = -\ln(a+1)$ и $\Phi(b) = \ln[(b+1)/(a+1)]$. Здесь важно, что доопределяя функцию $f(x,b) = (x^b - x^a)/\ln x$ нулем в $x = 0$ и $x = 1$, можно считать ее непрерывной по x, b на $[0,1] \times [b_0 - \delta, b_0 + \delta]$, как и $f'_b(x,b) = x^b$.

Ответ: $\ln \frac{a+1}{b+1}$.

6. Корни многочлена $p(z)$ степени $n \geq 2$ лежат в верхней полуплоскости $Im(z) > 0$. Доказать, что корни производной $p'(z)$ также лежат в этой полуплоскости.

Решение. Пусть $p(z) = a_0 \prod_{i=1}^{n}(z - b_i)$, $a_0 \neq 0$, $Im(b_i > 0)$, $1 \leq i \leq n$. Тогда

$$p'(z) = a_0 \sum_{i=1}^{n} \prod_{1 \leq j \leq n, j \neq i} (z - b_j) = p(z) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - b_i}, \quad z \neq b_i, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{1}$$

Если $Im(z_0) \leq 0$, то $z_0 \neq b_i$, $1 \leq i \leq n$, и $p(z_0) \neq 0$. Ясно, что $Im(z_0 - b_i) < 0$, $1 \leq i \leq n$, и по правилу деления комплексных чисел $Im((z - b_i)^{-1}) > 0$, тогда в силу (1) $p'(z_0) \neq 0$.