ЗАДАЧИ СТУДЕНЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ СГУ ПО МАТЕМАТИКЕ. 1-2 КУРС

1. Найти $A = \arcsin(\cos\frac{29\pi}{5})$.

Решение. В силу 2π-периодичности функции $\cos x$ и формул приведения имеем

$$\cos 29\pi/5 = \cos(6\pi - \pi/5) = \cos(-\pi/5) = \cos(\pi/5) = \sin(\pi/2 - \pi/5) = \sin(3\pi/10).$$

Так как $3\pi/10 \in [-\pi/2, \pi/2]$, то $A = 3\pi/10$.

Ответ: $A = 3\pi/10$.

2. Пусть A — матрица размера 3×2, B — матрица размера 2×3. Чему равен определитель матрицы AB размера 3×3?

Решение. Добавим к матрице A справа нулевой столбец, а к матрице B снизу произвольную строку. Новые матрицы назовем A_1 и B_1 соответственно. Тогда $AB = A_1B_1$ и .

$$\det A_1B_1 = \det A_1 \det B_1 = 0 \det B_1 = 0.$$

Ответ: определитель равен нулю.

3. Доказать, что если длина отрезка, соединяющего середины M и N сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, равен полусумме длин сторон BC и AD, то $ABCD$ является трапецией.

Решение. По условию

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}, \quad \overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN},$$

причем $\overline{MB} + \overline{MA} = \overline{CN} + \overline{DN} = 0$. Складывая, получаем $2\overline{MN} = \overline{BC} + \overline{AD}$. Рассмотрим проекции членов последнего равенства на прямую MN. Если BC или AD не параллельны MN, то сумма длин проекций BC и AD строго меньше суммы длин BC и AD, равной $2MN$. Но по свойствам проекции у равных векторов должны быть одинаковые проекции и проекция суммы векторов равна сумме проекций. Противоречие. Значит, BC и AD параллельны и $ABCD$ — трапеция.

4. Найдется ли $x \in \mathbb{R}$, такое что $x + \sqrt{5}$ и $x^3 + \sqrt{5}$ рациональны?

Решение. Пусть $x + \sqrt{5} = a \in \mathbb{Q}$. Тогда $x = a - \sqrt{5}$ и

$$x^3 + \sqrt{5} + a^3 - 3a^2\sqrt{5} + 15a - 5\sqrt{5} + \sqrt{5} = a^3 + 15a - (3a^2 + 4)\sqrt{5}.$$

Если последнее выражение рационально, то $(3a^2 + 4)\sqrt{5} = 0$. Но $3a^2 + 4$ положительно и рационально при всех $a \in \mathbb{Q}$. Противоречие.

Ответ: таких x не существует.

5. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$. Доказать, что $f(x)$ ограничена на $\mathbb{R}_+$.

Решение. По условию существует $A > 0$, такое что для любого $x > A$ верно неравенство $|f(x) - c| < 1$, т.е.

$$|f(x)| \leq |f(x) - c| + |c| \leq |c| + 1.$$

С другой стороны, на отрезке $[0, A]$ по первой теореме Вейерштрасса $f(x)$ ограничена по модулю константой M. В итоге для всех $x \in \mathbb{R}_+$ имеем $|f(x)| \leq \max(M, |c| + 1)$, что и требовалось доказать.

6. В таблице 4×4 записаны натуральные числа. Может ли быть так, что в каждой следующей строке сумма чисел на два больше, чем в предыдущей, а в каждом следующем столбце сумма на три больше, чем в предыдущем?

Решение. Пусть это возможно и A — сумма чисел в первой строке, B — сумма чисел в первом столбце. Тогда сумма чисел во всей таблице равна с одной стороны $A+A+2+A+4+A+6=4A+12$, а с другой стороны она же равна $B+B+3+B+6+B+9=4B+18$. Первое из этих чисел делится на четыре, а второе нет. Противоречие.

Ответ: нет.