

ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского»

На правах рукописи



ЕЛИЗАРОВ Евгений Михайлович

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ТОПОЛОГИИ СВЯЗИ НА ДИНАМИКУ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

1.3.4. – Радиофизика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
доцент Стрелкова Г.И.

Саратов – 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ФОРМИРОВАНИЯ БИСТАБИЛЬНОСТИ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ГЕ- НЕРАТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ДИС- СИПАТИВНОЙ СВЯЗЬЮ	23
1.1 Введение	23
1.2 Бистабильность синхронных и асинхронных состояний во взаи- модействующих осцилляторах Ван дер Поля с запаздывающей диссипативной связью	27
1.2.1 Уравнения исследуемой системы	27
1.3 Бифуркационный анализ возникновения бистабильности в конеч- номерной модели	32
1.3.1 Вывод системы уравнений модели	32
1.3.2 Динамика системы в отсутствие запаздывания в канале связи	34
1.3.3 Режимы динамики в конечномерной модели при увели- чении времени запаздывания. Бифуркационный механизм формирования бистабильности синхронных и асинхронных состояний.	42
1.4 Анализ бифуркационных переходов в системе укороченных урав- нений для амплитуд и фаз	52
1.4.1 Вывод системы укороченных уравнений	52
1.4.2 Анализ бифуркаций, приводящих к формированию биста- бильности синхронных и асинхронных состояний	55
1.5 Выводы по главе 1	57

Глава 2. ЭФФЕКТЫ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ, ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ И СИНХРОНИЗАЦИИ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СВЯЗЬЮ . . . 59

2.1	Введение	59
2.2	Влияние ангармоничности на мультистабильность в генераторе Релея с дополнительным линейным колебательным контуром . .	62
2.2.1	Уравнения исследуемой системы	62
2.2.2	Явление затягивания частоты	65
2.2.3	Бифуркационный анализ формирования мультистабильности	70
2.3	Эффекты синхронизации и гашения колебаний в системе двух генераторов Ван дер Поля с распределённой связью	80
2.3.1	Уравнения исследуемой системы	80
2.3.2	Случай одного пассивного колебательного контура в канале связи	82
2.3.3	Взаимодействие генераторов Ван дер Поля посредством цепочки высокочастотных пассивных колебательных контуров	95
2.3.4	Случай распределенной связи в виде цепочки низкочастотных пассивных колебательных контуров	107
2.4	Выводы по главе 2	110

Глава 3. ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ТОПОЛОГИИ СВЯЗИ НА ДИНАМИКУ АНСАМБЛЕЙ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ФИТЦХЬЮ-НАГУМО 113

3.1	Введение	113
3.2	Связь уравнений Ван дер Поля, Бонхоффера–Ван дер Поля и ФитцХью–Нагумо	115
3.3	Влияние запаздывания в слагаемом связи на динамику ансамбля осцилляторов ФитцХью–Нагумо	118
3.3.1	Уравнения исследуемой системы	118

3.3.2	Возникновение синхронных колебаний в системе двух взаимодействующих осцилляторов ФитцХью-Нагумо с запаздывающей связью	122
3.3.3	Переход к полной синхронизации в кольце осцилляторов ФитцХью-Нагумо с запаздывающей связью	135
3.4	Влияние типа межслойных связей на бегущие волны в двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо	151
3.4.1	Уравнения исследуемой системы	151
3.4.2	Динамика сети в отсутствие межслойной связи	154
3.4.3	Динамика сети с притягивающей межслойной связью	156
3.4.4	Динамика сети с отталкивающей межслойной связью	158
3.4.5	Динамика сети с периодически модулированной межслойной связью	160
3.5	Выводы по третьей главе	163
ЗАКЛЮЧЕНИЕ		167
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ		172

ВВЕДЕНИЕ

Проблема коллективного поведения взаимодействующих осцилляторов, несмотря на свою долгую историю и большое количество полученных результатов, опубликованных в статьях, монографиях и учебниках (см., например, [1–5]), остается актуальной и в настоящее время. В настоящее время наибольший интерес вызывают системы со сложными типами связи. Влияние различных типов взаимодействия на синхронную динамику не только в больших ансамблях, но и в минимальных моделях одних и тех же элементов остается важной и актуальной проблемой, привлекающей внимание исследователей.

Использование мгновенной связи (под мгновенной связью будем понимать связь, которая определяется единовременными мгновенными состояниями и не содержит запаздывания) в математических моделях вполне допустимо, когда время распространения сигнала по каналу связи значительно меньше естественного временного масштаба автоколебательной системы. Однако во многих случаях, например, для взаимодействующих радиофизических осцилляторов в микроволновом диапазоне частот, в связанных лазерных системах, в некоторых медицинских и биологических системах, такая идеализация неуместна. Здесь необходимо учитывать конечную скорость распространения сигнала, что приводит к запаздывающей связи между взаимодействующими автоколебательными системами и соответствующими дифференциальными уравнениями с запаздывающим аргументом [2, 6–8].

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом (DDE – Delay Differential Equations) подробно описаны в нескольких монографиях [9–11] и, в настоящее время широко применяются в исследованиях (физика, химия, биология, медицина, машиностроение, экономика).

Простейший способ проиллюстрировать, чем DDE отличается от обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), — это рассмотреть линейное ОДУ первого порядка. С физической точки зрения, знание настоящего позволяет нам предсказывать будущее в любой момент времени. Прошлое в данном решении не задействовано. Фундаментальное отличие дифференциальных уравнений с запаздыванием состоит в их бесконечномерной природе: для определения эволюции решения необходимо знать не просто его текущее значение, а всю предысторию на интервале, равном величине временной задержки. Таким образом, прошлое перестает быть лишь начальным условием, превращаясь в постоянно действующий, активный фактор, напрямую формирующий настоящее и будущее системы. Эта парадигма предопределила возникновение качественно новых, зачастую не поддающихся интуиции динамических эффектов, ключевым среди которых является эффект устойчивости.

Влияние различных типов взаимодействия на синхронную динамику не только в больших ансамблях, но и в минимальных моделях одних и тех же элементов остается важной и актуальной проблемой, привлекающей внимание исследователей. С помощью минимальных ансамблей можно наглядно продемонстрировать механизмы возникновения удаленной синхронизации [12], выявить корреляции между взаимодействием высокого порядка и мультистабильностью [13]. Также стоит уделить внимание явлениям синхронизации и мультистабильности в двух осцилляторах с задержкой связи [14]. В работе [15] подробно изучается поведение симметричных и антисимметричных мод в двух линейно связанных бистабильных осцилляторах типа осциллятора Ван дер Поля с целью выяснения механизма возникновения модальной (нетрадиционной) и волновой синхронизации в кольце связанных автоколебательных систем. Определение слабых химер приведено в работе [16] для минимальных ансамблей связанных осцилляторов с одинаковой фазой. Отмечается, что эти структуры могут быть ответственны за формирование более общих (основных) химерных состояний.

Наиболее простым является случай двух квазигармонических автоколебательных систем с мгновенной связью. Как следует из теории синхронизации периодических автоколебаний, в окрестности порога возбуждения квазипериодических колебаний (в окрестности линии рождения тора в плоскости параметров управления) получен ряд важных результатов. Эти результаты носят универсальный характер, и картина синхронизации одинакова для систем самой разнообразной природы и с различными типами связи.

Мультистабильность является фундаментальным нелинейным явлением, которое широко наблюдается и активно исследуется в системах различной природы [17–29]. Мультистабильность имеет важное, зачастую определяющее значение для формирования свойств и функциональных возможностей различных систем. Например, мультистабильность синхронных состояний возникает в системе из двух осцилляторов Ван дер Поля с консервативной связью [30]. В зависимости от начальных условий могут наблюдаться как синфазные, так и противофазные режимы синхронизации. Бистабильность синхронных режимов приводит к более сложным последовательностям бифуркаций при движении вдоль плоскости параметров управления [31]. Когда автоколебательные системы диссипативно связаны, происходит не только взаимная синхронизация, но и подавление автоколебаний [32–35]. Эффект подавления колебаний впервые был описан Рэлеем и опубликован в его знаменитой книге «Теория звука» [36]. В настоящее время интерес к этому явлению был инициирован работой [37]. В таких системах переход от состояния равновесия к квазипериодическим и синхронным состояниям наблюдается как при слабой, так и при сильной связи. Существуют определенные особенности в переходах к синхронизации и в структуре бифуркации в плоскости параметров управления в связанных системах с подавлением колебаний [38]. Следует отметить, что область самоподдерживающегося подавления колебаний в литературе часто классифицируется более тонким образом: различают эффекты амплитудного подавления и затухания колебаний. Дело в том, что в ансамбле связанных осцилляторов подавление колебаний может

привести либо к однородному, либо к неоднородному состоянию равновесия. В первом случае явление подавления колебаний рассматривается как эффект амплитудного подавления, а во втором случае — как эффект затухания колебаний [39].

Последние исследования в области нелинейной динамики были посвящены явлениям, вызванным задержкой [40–46], а также влиянию временных задержек на синхронизацию, мультистабильность и подавление колебаний в малых и больших ансамблях взаимодействующих осцилляторов [14, 47–53]. Более того, было показано, что одна переменная с задержкой может вызывать множество различных бифуркаций и проявление мультистабильности в динамической системе, как показано в работе [31]. Также было установлено, что запаздывающая обратная связь может быть использована в качестве эффективного инструмента для контроля хаоса и колебаний, вызванных шумом [31, 40, 41, 54]. С открытием паттернов частичной синхронизации, называемых химерными состояниями, в сетях нелокально связанных систем, значительная часть исследований была посвящена влиянию временных задержек в слагаемом связи между осцилляторами на возникновение, устойчивость и управление химерными структурами в различных сложных сетях [55–66]. *В этом контексте исследование влияния задержки в канале связи взаимодействующих осцилляторов становится важным, поскольку оно позволило бы выявить типичные неустойчивости, фазовые переходы и новые структуры, которые могут быть вызваны задержками. Отметим, что изучаемые системы и сети связанных осцилляторов, демонстрирующие нерегулярные динамические режимы и пространственные структуры, являются довольно сложными, и проведение бифуркационного анализа оказывается для них практически невозможным. В этой связи целесообразно использовать малые ансамбли связанных осцилляторов для выявления бифуркационного механизма формирования мультистабильности и анализа влияния запаздывания в канале связи на реализуемые*

динамические режимы. В данной диссертационной работе проводится обобщенный и последовательный бифуркационный анализ.

Одним из наиболее актуальных направлений исследований влияния запаздывающей связи на динамику связанных систем нелинейных осцилляторов является анализ динамики нейроноподобных (возбудимых) систем и нейронных сетей. Возбудимые системы играют важную роль в понимании и моделировании различных природных явлений, таких как, например, передача импульсов между нейронами в головном мозге, сердечная аритмия, появление организованных структур в коре яйцеклеток и т. д. [67–69] Задержки во времени являются фундаментальной особенностью почти всех биологических явлений. Конечная скорость распространения потенциала действия вдоль аксонов нейронов и временные промежутки в передаче информации (синаптический процесс) и приеме (дендритный процесс) между нейронами создают задержки во времени в реальных нейронах и их сетях [70]. Влияние временных задержек на динамику и эффекты синхронизации нейронных сетей было рассмотрено в работах [71–82]. Установлено, что синхронизация, усиленная задержкой, может быть необходима для передачи информации в нейронных сетях [83, 84]. Также было выявлено, что задержки связи, присутствующие в электрических или химических синаптических соединениях, могут влиять на синхронизацию нейронной активности [85, 86]. В работе [87] исследовалось явление синхронизации в хаотической системе с временной задержкой и неизвестными и неопределенными параметрами, а также была разработана схема прерывистого адаптивного управления для обеспечения синхронизации между нейронами. Было исследовано, как фазовая синхронизация между нейронами разных областей мозга регулируется пространственно-временной организацией мозга с использованием самоподдерживающихся хаотических осцилляторов с временной задержкой [88]. *Стоит отметить, что вопрос о роли диссипации в нейронных моделях в процессе генерации автоколебаний при изменении времени запаздывания в канале связи не был отражен в литературе по динамике нейронных ансамблей. Проведение*

исследований в данном направлении является одной из основных задач настоящей диссертационной работы.

С открытием особых паттернов частичной синхронизации, называемых химерными состояниями [89, 90], в сетях нелокально связанных систем, значительная часть исследований была посвящена влиянию временных задержек на возникновение, стабильность и управление химерными структурами в различных сложных сетях [91–101]. Было показано, что в сетях с фрактальной связностью желаемые пространственно-временные паттерны могут быть стабилизированы путем изменения временной задержки связи между узлами [97, 101]. Было показано, что задержка позволяет управлять амплитудными химерами [95] и химерами когерентного резонанса путем регулирования времени задержки и силы обратной связи [96]. Межслойная задержка в многослойных сетях может выступать в качестве общей организующей силы для синхронизации пространственно-временных паттернов между слоями. Недавно было показано, что синхронизация химер в мультиплексных (триплексных) сетях может контролироваться с помощью внутри- и межслойной связи с временной задержкой [98, 99].

В последнее время взаимодействие биологически значимых моделей нейронов привлекает особое внимание исследователей в связи с развитием импульсных нейронных сетей [102]. Импульсные нейронные сети функционально близки к биологическим нейронным сетям, поскольку они реализуют временное кодирование [103]. Наиболее распространенными биологически значимыми моделями нейронов являются осцилляторы Ходжкина-Хаксли [104], Хиндмарша-Роуза [105], Морриса-Лекара [106], Ижикевича [107] и Фицхью-Нагумо. Последний является самым простым и был предложен независимо в работах [108] и [109]. Но даже простейшая осциллирующая модель нейрона Фицхью-Нагумо достаточно сложна, и следует обратить внимание на динамику отдельного нейрона [110], включая влияние внешних сигналов [111], шума [112] и обратной связи с задержкой [113], на особенности взаимодействия двух связанных

нейронов с задержкой [114] или связанных нейронов, возбуждаемых внешним шумом [115], а также на коллективное поведение нейронов в малых [116] и больших ансамблях [117]. Авторы [118] показали, что изменяющаяся во времени задержка связи может влиять на эффект синхронизации. Кроме того, оптимальное управление коллективным поведением нейронов ансамбля может быть достигнуто посредством внешнего воздействия [119].

Сети связанных нейронов ФитцХью-Нагумо могут демонстрировать различные пространственно-временные структуры, такие как химерные состояния [120], которые характеризуются сосуществованием когерентных и некогерентных кластеров [121], и вращающиеся волны [122]. Межслойная связь между сетями нейронов ФитцХью-Нагумо может вызывать конкурентное поведение между уединенными состояниями и химерами при переходе к синхронному режиму [117]. Авторы статьи [123] показывают, что задержка контролирует синхронизацию химерных ретрансляторов в мультиплексных нейронных сетях. Кроме того, исследуется влияние топологии межслойной связи на эффект синхронизации ретрансляторов [124]. Однако проблема противофазной синхронизации, возникающей из-за отталкивающей межслойной связи, изучена недостаточно подробно. *Практически отсутствуют данные о влиянии межслойной связи различных типов на режимы бегущих волн в мультиплексных нейронных сетях. Эта задача систематически решается в данной диссертационной работе.*

Связь между нейронами ФитцХью-Нагумо может быть двух типов: электрической (щелевые соединения) или химической [125]. Кроме того, рассматривалась обобщенная связь в сетях нейронов ФитцХью-Нагумо, включающая связи по активаторным переменным, по ингибиторным переменным и по обоим переменным одновременно [126]. Электрическая связь между нейронами может быть притягивающей или отталкивающей, в зависимости от знака значения коэффициента связи. Притягивающая связь является общей для биохимических систем, тогда как отталкивающая связь встречается относительно редко [127].

Например, в кардиомиоцитах использовалась связь возбуждения и сокращения [128]. Отталкивающая связь играет решающую роль в динамике связанных нейронов Фицхью-Нагумо, и значительно усложняет поведение этих нейронов [129].

На основании приведенных данных можно заключить, что анализ влияния времени запаздывания и характера связей на формирование мультистабильности, синхронизацию, возбуждение и гашение колебаний, на возникновение и устойчивость кластерных и волновых структур в малых и больших ансамблях связанных нелинейных осцилляторов, включая возбудимые, представляет интерес для радиофизики и теории колебаний и волн, что обосновывает важность и актуальность темы диссертационной работы.

Целью диссертационной работы является проведение бифуркационного анализа формирования границ областей различных динамических режимов (синхронизации, бистабильности, возникновения и гашения колебаний) и анализ их изменений в системах взаимодействующих автоколебательных элементов при вариации времени запаздывания в канале связи и значений управляющих параметров, а также оценка влияния запаздывания и топологии и характера связи на динамику малых и больших ансамблей, включая многослойные сети, связанных возбудимых осцилляторов.

Для достижения поставленной цели определены и сформулированы **основные задачи** диссертационного исследования:

1. выявление бифуркационного механизма формирования областей синхронизации и бистабильности в системе двух диссипативно связанных генераторов Ван дер Поля с запаздыванием в канале связи и проведение бифуркационного анализа с использованием различных подходов к описанию запаздывающей связи (конечномерное приближение и метод укороченных уравнений для амплитуд и фаз);

2. анализ влияния ангармоничности на мультистабильность в автогенераторе, связанном с линейным диссипативным осциллятором;
3. изучение влияния распределенной связи на формирование и эволюцию основной области синхронизации автоколебаний в системе двух диссипативно связанных генераторов Ван дер Поля;
4. обоснование перехода от автоколебательных систем к возбудимым;
5. численное моделирование динамики малого и большого ансамблей, а также многослойной сети, связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо с запаздывающей локальной и нелокальной связью, притягивающей, отталкивающей и периодически модулированной межслойной связью.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В системе двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля с запаздыванием в канале связи с увеличением времени задержки, внутри основной области синхронизации формируется область бистабильности, в которой сосуществуют синфазный и противофазный режимы синхронизации, а также область бистабильности, внутри которой сосуществуют синфазная синхронизация и квазипериодические противофазные колебания. Бифуркационный механизм формирования областей бистабильности связан с последовательными касательными бифуркациями и бифуркациями Неймарка–Сакера, в которых участвуют устойчивые, седловые и неустойчивые предельные циклы, а также седловые и устойчивые двумерные торы.
2. В автоколебательной системе с двумя степенями свободы классическое явление затягивания частоты (гистерезис и бистабильность синфазного и противофазного режимов) наблюдается только при малых значениях параметра возбуждения, когда автоколебания близки к квазигармоническим.

При больших значениях параметра возбуждения, когда квазигармонические автоколебания превращаются в релаксационные пилообразной формы, и определённых частотных расстройках на основе синфазного семейства предельных циклов возникают новые мультистабильные состояния, формирующиеся через каскад седло-узловых бифуркаций и образующие «полосы бистабильности» на плоскости параметров «частотная расстройка – параметр возбуждения».

3. В ансамблях осцилляторов ФитцХью-Нагумо, находящихся в возбуждённом режиме, с запаздывающей связью пороговое значение силы, необходимое для возбуждения колебаний, существенно зависит от параметра диссипации: чем меньше потери (больше параметр диссипации, $\alpha \gtrsim 0.7$), тем ниже порог. Начиная с определённого времени запаздывания, порог по силе связи перестаёт зависеть от величины задержки. Кроме того, при малой диссипации (когда $\alpha \gtrsim 0.7$) синхронные колебания в кольцевой сети возникают при меньших значениях времени запаздывания по сравнению со случаем большой диссипации.
4. В двухслойной кольцевой сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо с разными типами мгновенной внутрислойной связи (притягивающей и отталкивающей) характер взаимодействия бегущих волн определяется типом межслойной связи. Притягивающая пространственно однородная межслойная связь, при достаточно большой силе связи, приводит к полной синфазной синхронизации волн в слоях. Отталкивающая связь может искажать или разрушать волновые структуры, а при больших значениях восстанавливать их. Периодически модулированная в пространстве вдоль кольца межслойная связь приводит к образованию нескольких некогерентных кластеров, локализованных в разных участках кольца.

Научная новизна. Диссертационная работа посвящена решению актуальной радиофизической задачи - анализу влияния запаздывания и тополо-

гии связи на динамику систем связанных нелинейных осцилляторов. Совокупность результатов диссертации позволяет расширить представления о механизмах формирования мультистабильности, синхронизации, возникновения и гашения автоколебаний в малых и больших ансамблях связанных осцилляторов с различным характером связи. Новизна основных результатов работы подтверждается их публикацией в ряде научных статей в отечественных и зарубежных журналах, входящих в Белый список, международные и российские системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ, а также в трудах международных конференций и всероссийских школ. Содержание диссертационной работы соответствует паспорту специальности 1.3.4. — Радиофизика.

В работе впервые получены следующие научные результаты:

1. Впервые выявлен и описан бифуркационный механизм формирования мультистабильности в системе двух связанных осцилляторов Ван дер Поля с запаздыванием в слагаемом связи. Выявлена и описана зависимость наблюдаемых динамических режимов и эффектов (возникновение и гашение колебаний, синхронизация периодических автоколебаний, бистабильность) от изменения времени запаздывания в канале связи.
2. Проанализирована роль ангармоничности в процессе формирования областей мультистабильности в автоколебательной системе с двумя степенями свободы. Показано, что при больших значениях параметра возбуждения квазигармонические автоколебания превращаются в релаксационные пилообразной формы, и при определенных расстройках по частоте между осциллятором и контуром, формируются новые мультистабильные состояния на базе синфазного цикла. Выявлен бифуркационный механизм формирования мультистабильных состояний при увеличении параметра возбуждения автогенератора.
3. Обоснована возможность применения длинной линии в канале связи для моделирования запаздывания в системах связанных автоколебательных ос-

цилляторов. Показано, что включение линейного осциллятора с определенной добротностью между двумя идентичными автогенераторами приводит с увеличением связи к гашению автоколебаний, что аналогично введению временного запаздывания в канал связи.

4. Установлено, что в системе двух автогенераторов с распределенной связью в виде конечной цепочки пассивных колебательных контуров возможно управлять режимами синхронизации и амлитудного вымирания путем изменения силы связи между взаимодействующими осцилляторами и выборе определенного числа контуров и уровня их добротности.
5. Методами численного моделирования последовательно исследовано и описано влияние запаздывающей связи и параметра диссипации на возбуждение периодических автоколебаний в малых и больших ансамблях осцилляторов ФитцХью-Нагумо в возбуждимом режиме. Установлено, что параметр диссипации существенно влияет на порог возникновения колебаний, индуцированных запаздыванием: чем меньше потери в индивидуальном осцилляторе (выше параметр диссипации), тем ниже порог по силе связи и тем при меньших временах запаздывания возникают синхронные режимы. Показано, что порог колебательного режима относительно времени запаздывания не зависит от параметра диссипации и для возбуждения синфазных колебаний он больше, чем для противофазных.
6. Проанализировано и описано влияние топологии межслойной связи на возникновение режима бегущих волн и их синхронизацию в двухслойных сетях связанных колец осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Выявлено, что при определенном значении силы притягивающей межслойной связи реализуется эффект полной синфазной синхронизации бегущих волн в связанных слоях, в то время как при отталкивающей межслойной связи можно до-

стичь только эффективной (с конечной точностью) противофазной синхронизации.

7. Установлена возможность управление средней частотой колебаний в двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо путем изменения топологии межслойной связи. Введение положительных (притягивающих) связей приводит к снижению средней частоты колебаний, а введение отрицательных (отталкивающих) связей, наоборот, увеличивает среднюю частоту колебаний.

Достоверность научных выводов работы подтверждается соответствием результатов, полученных в численном эксперименте, с данными строгой теории, когда таковые существуют. Разработанное программное обеспечение тестировалось на ранее полученных и опубликованных результатах. Все полученные результаты численных экспериментов воспроизводимы и не зависят от конкретных схем численного анализа.

Научная и практическая значимость результатов диссертационной работы обусловлена тем, что научные результаты вносят определенный новый вклад в радиофизику, современную теорию колебаний, теорию бифуркаций и теорию динамических систем, развивают и расширяют понимание бифуркационных механизмов возникновения мультистабильности в системах двух связанных нелинейных осцилляторов в присутствии запаздывания. Систематическое сравнение динамики двух генераторов Ван дер Поля при непосредственном запаздывании и при распределённой связи через цепочки пассивных контуров открывает новый подход к моделированию распределённой связи и запаздывания. Показано, что модель с конечным числом контуров не полностью воспроизводит все эффекты, наблюдаемые в системе с запаздыванием (в частности, в такой модели не возникают области мультистабильности синфазных и противофазных режимов). Этот вывод важен для выбора адекватных приближений в радиофизике. Анализ влияния степени диссипации на порог возникновения

индуцированных запаздыванием синхронных синфазных и противофазных колебаний имеет важное фундаментальное значение как для радиофизических систем, так и для процессов, изучаемых в нейродинамике.

Практическая значимость обусловлена применением полученных результатов в радиофизике и технике связи, при анализе работы систем передачи информации, инфокоммуникационных и телерадиовещательных комплексов, энергетических систем, при моделировании биологических и нейронных сетей, при управлении спайковой активностью нейронных сетей. Полученные выводы о влиянии запаздывания и топологии связи на синхронизацию и гашение колебаний могут быть использованы при проектировании связанных радиофизических генераторов, в том числе работающих в микроволновом диапазоне, где конечная скорость распространения сигнала играет критическую роль. Установлено, для того чтобы в двух идентичных генераторах с увеличением связи произошло гашение колебаний, не обязательно использовать канал связи с временным запаздыванием, а достаточно включить линейный осциллятор с определенной добротностью. Показанная возможность управления режимами синхронизации и гашения колебаний в системах с распределённой связью (через цепочки контуров) путём изменения количества контуров, их добротности и силы связи открывает путь для создания перестраиваемых устройств на связанных автогенераторах. Понимание того, как временные задержки (обусловленные конечной скоростью распространения потенциала действия и синаптической передачей) влияют на возбудимость и синхронизацию нейронов, имеет прямое значение для нейрофизиологии и разработки нейроморфных систем. Обнаруженная возможность регулирования средней частоты спайков путём введения положительных и отрицательных межслойных связей может быть использована в импульсных нейронных сетях и при обучении нейроморфных процессоров. Это позволяет компенсировать нежелательное снижение или повышение активности при добавлении обучающих связей.

Результаты фундаментальных исследований, полученные при подготовке диссертации, частично внедрены в учебный процесс подготовки бакалавров и магистров по направлению “Радиофизика” в Институте физики ФГБОУ ВО “СГУ имени Н.Г. Чернышевского”. При выполнении диссертационной работы было создано 2 программы, на которые получены свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ. Данные программы были использованы при выполнении ряда НИР, а также в учебном процессе при постановке курсовых и выпускных квалификационных работ студентов.

Личный вклад. Результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, получены соискателем лично. Все численные эксперименты проводились при помощи программного обеспечения, разработанного автором. Постановка задач, планирование проведения исследований, интерпретация и обсуждение результатов, написание научных статей осуществлялись совместно с научным руководителем и соавторами опубликованных работ.

Апробация работы. Основные результаты научных исследований были представлены на всероссийских и международных конференциях и школах:

1. Международная конференция «Saratov Fall Meeting» (Саратов, сентябрь, 2022, 2023 гг.).
2. Научная школа «Актуальные проблемы механики» (СпбПУ, С.-Петербург, 20-24 июня 2022 г.).
3. Международная научная конференция «Динамические системы. Теория и приложения» (г. Нижний Новгород, ННГУ, 26-29 июня 2022 г.).
4. Международная конференция «XX научная школа "Нелинейные волны – 2022"» (ИПФ РАН, Бор, 7-13 ноября 2022 г.).

Кроме того, результаты работы неоднократно обсуждались на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики СГУ.

Гранты. Исследования, результаты которых вошли в настоящую диссертационную работу, проводились при поддержке Российского научного фонда (проект №№20-12-00119 и его продолжение).

Публикации. По результатам диссертационной работы опубликовано 4 статьи в центральных реферируемых научных журналах, входящих в системы цитирования Web of Science, Scopus, РИНЦ, рекомендованных ВАК РФ для опубликования основных научных результатов диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук. Также опубликовано 5 статей в сборниках трудов конференций всероссийского и международного уровня. Автором получено 2 свидетельства о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитируемой литературы. Материал диссертационной работы изложен на 198 страницах, включая 73 иллюстрации. Список цитируемой литературы включает 203 наименования.

Во введении обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится краткий обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме проводимого исследования, определяются цели и задачи исследования, приводятся основные полученные результаты, отмечается их новизна и практическая значимость, формулируются положения, выносимые на защиту.

В первой главе проводится исследование системы двух связанных осцилляторов Ван дер Поля с запаздыванием в слагаемом связи. Приводится краткий обзор имеющихся аналитических результатов. Далее обосновывается выбор управляющих параметров, для которых проводятся исследования. Показывается, что при увеличении запаздывания в связи между осцилляторами, в основной области синхронизации на плоскости параметров "частотная расстройка - сила связи" возникают области сосуществования синхронных синфазных и противофазных режимов колебаний, а также синхронных синфазных и квазипериодических противофазных режимов колебаний. Выводятся конечно-мерная модель и укороченные уравнения для системы с запаздывающим аргу-

ментом, и осуществляется подробный бифуркационный анализ. Показывается, что на границе области мультистабильности происходит одновременное рождение и/или исчезновение устойчивого и неустойчивого торов в зависимости от направления движения по параметру частотной расстройки.

Во второй главе рассматриваются системы осциллятора Рэля с дополнительным контуром, а также система двух связанных осцилляторов Ван дер Поля с распределённой связью. Показывается, что характерное для системы с дополнительным контуром явление затягивания частоты бистабильности и обусловленного ей гистерезиса, наблюдается только при небольших значениях параметра возбуждения. При больших значениях параметра возбуждения и определенных расстройках по частоте на базе синфазного семейства циклов наблюдаются разнообразные бифуркации, приводящие к новым режимам. Показывается, что характер бифуркационных переходов между областями динамики в системе двух осцилляторов Ван дер Поля, связанных через конечное число пассивных колебательных контуров, повторяет характер переходов в системе, рассмотренной в первой главе, однако области мультистабильности в данной системе не формируются. Далее приводится ряд особенностей динамики рассматриваемой системы при изменении как количества контуров в связи между осцилляторами, так и добротности контуров.

В третьей главе исследуются системы связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо с запаздыванием в слагаемом связи. Приводится краткое обоснование перехода от автоколебательных систем к возбудимым. Показывается, что при наличии запаздывания в связи между осцилляторами, находящимися в возбудимом режиме, могут возникнуть как синфазные, так и противофазные автоколебания. Приводятся как результаты численного моделирования, так и бифуркационный анализ системы. Показывается, что в кольце связанных с запаздыванием осцилляторов ФитцХью–Нагумо, также как и в случае двух связанных с запаздыванием нейронов, параметр диссипации оказывает существенное влияние на пороговое значение времени запаздывания для возникно-

вения колебаний. Приводится детальный анализ перехода локально связанных с запаздыванием нейронов из состояния покоя в колебательное состояние. Далее численно исследуется влияние типа межслойной связи на динамику системы двух связанных кольцевых сетей осцилляторов ФитцХью-Нагумо.

В заключении сформулированы основные выводы и результаты диссертационной работы.

Глава 1. БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ФОРМИРОВАНИЯ БИСТАБИЛЬНОСТИ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ГЕНЕРАТОРОВ ВАН ДЕР ПОЛЯ С ЗАПАЗДЫВАЮЩЕЙ ДИССИПАТИВНОЙ СВЯЗЬЮ

1.1 Введение

Явления синхронизации изучаются в ансамблях фазовых осцилляторов с частотно-зависимой связью [130], в сетях осцилляторов с мерцающими, изменяющимися во времени связями [131–133], в автоколебательных системах, взаимодействующих на расстоянии через пассивную среду [134]. В ряде исследований белый шум в элементах связи используется для улучшения синхронизации связанных хаотических систем [135]. Исследуется индуцированный запаздыванием эффект “амплитудной смерти” в мультиплексной сети осцилляторов с частотно-расстроенными слоями [136].

Характерные последовательности бифуркаций при переходе к режимам синхронизации, структура множества бифуркационных линий в плоскости параметров управления хорошо известны (см., например, [1]). Напомним основные элементы этой универсальной картины.

Сначала из состояния равновесия в результате суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный цикл. При дальнейшем изменении управляющих параметров происходит суперкритическая би-

фуркация Неймарка–Сакера, в результате которой предельный цикл теряет устойчивость, и в его окрестности рождается устойчивый двумерный тор. При движении вдоль линии бифуркации Неймарка–Сакера в плоскости параметров наблюдаются области синхронизации, границы которых образованы линиями седло-узловых бифуркаций резонансных циклов. Устойчивые и седловые резонансные циклы расположены на двумерном торе: неустойчивое многообразие седлового цикла замыкается на устойчивом предельном цикле, образуя резонансный тор. При выходе из области синхронизации после седло-узловой бифуркации резонансных циклов наблюдаются квазипериодические колебания, соответствующие притягивающему эргодическому тору. Области синхронизации сужаются с уменьшением силы связи, и опираются на линию бифуркации Неймарка–Сакера. Их последовательность с характерными числами вращения подчиняется закону Фэйри. Подобная последовательность областей синхронизации с соответствующими бифуркационными границами образует универсальную структуру вблизи линии рождения тора. Она реализуется как при вынужденной синхронизации слабым гармоническим воздействием, так и при взаимной синхронизации слабо связанных автоколебательных систем с различными типами взаимодействия.

По мере удаления от линии бифуркации Неймарка–Сакера картина синхронизации становится менее универсальной и более сложной. Теперь поведение взаимодействующих систем зависит как от силы, так и от типа связи.

Как уже было отмечено во Введении, исследования влияния запаздывающих связей на эффекты синхронизации и динамику связанных осцилляторов являются актуальными и востребованными как с фундаментальной, так и прикладной точек зрения. Особенный интерес данное направление приобрело в последнее время в связи с открытием особых структур (химерных состояний) в ансамблях и сетях связанных осцилляторов различной природы. Такие структуры отражают режим сосуществования локализованных в пространстве ансамбля кластеров осцилляторов с синхронной (когерентной) и асинхронной

(некогерентной) динамикой [137–140]. Как показали исследования, запаздывание в слагаемом связи может играть важную роль в процессе формирования и устойчивости химерных структур и являться значимым фактором для эффективного управления динамикой больших ансамблей и сетей.

Бистабильность синфазной и противофазной взаимной синхронизации в двух взаимодействующих осцилляторах при мгновенной и запаздывающей связи представляет собой довольно типичное явление, которое рассматривалось в различных системах [2, 31, 47]. Сосуществование синхронных и асинхронных состояний было показано в периодически возбуждаемых (однонаправленно связанных) автоколебательных системах типа Ван дер Поля даже без запаздывания [141, 142]. Это явление также было выявлено в хаотических системах в работе [143], где показано, что механизм перехода между асинхронными и синхронными хаотическими состояниями связан с гомоклинической бифуркацией. Мультистабильность многочисленных синхронизированных и десинхронизированных состояний может быть индуцирована в модели двух фазовых осцилляторов с запаздыванием [144].

Однако в силу сложности изучаемых объектов выявление бифуркационного механизма возникновения бистабильности синхронных и асинхронных режимов динамики представляется весьма затруднительным. В этом случае целесообразно обратиться к аналитическому и численному исследованию бифуркационной картины с использованием малых ансамблей связанных нелинейных осцилляторов.

В первой главе рассматривается система двух осцилляторов Ван дер Поля с диссипативной запаздывающей связью. Показано, что такая минимальная система может демонстрировать сосуществование синхронных и асинхронных состояний в некоторых областях значений времени запаздывания. Это означает, что устойчивый предельный цикл, соответствующий режиму синхронизации, и притягивающий двумерный эргодический тор, определяющий квазипериодичность или режим некогерентности, сосуществуют в фазовом пространстве при

одинаковых значениях параметров управления, и их наблюдение зависит от начальных условий. Указанная бистабильность наблюдается внутри основного языка синхронизации между областями захвата и подавления и возникает по мере увеличения времени запаздывания в канале связи.

Бистабильность синхронных и асинхронных состояний в минимальной цепочке из двух связанных осцилляторов недостаточно изучена с точки зрения бифуркационного анализа её формирования. Остаётся открытым ряд вопросов. Например, может ли такая бистабильность быть реализована только в дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом, т.е. в системах с бесконечномерным фазовым пространством, или это возможно в более простых системах с малым числом степеней свободы? Каков механизм бифуркации формирования мультистабильности? Как изменяется бифуркационная структура основной области синхронизации и ее окрестностей в пространстве параметров управления? В первой главе диссертации проведен последовательный и систематический бифуркационный анализ формирования бистабильности и приведены результаты численного исследования системы дифференциальных уравнений с запаздыванием, описывающей динамику двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля с запаздывающей связью, и ее конечномерной модели в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Справедливость полученных результатов подтверждается с использованием амплитудно-фазового подхода.

Представленные результаты опубликованы в статье [145].

1.2 Бистабильность синхронных и асинхронных состояний во взаимодействующих осцилляторах Ван дер Поля с запаздывающей диссипативной связью

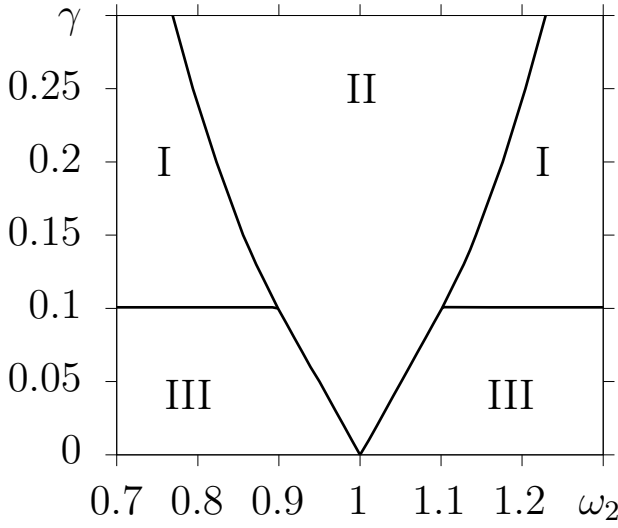
1.2.1 Уравнения исследуемой системы

Система двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля является одной из наиболее известных и простых систем, способных демонстрировать как взаимную синхронизацию, так и гашение колебаний (или амплитудную смерть) [1, 32]. Эта модель описывается следующими уравнениями второго порядка:

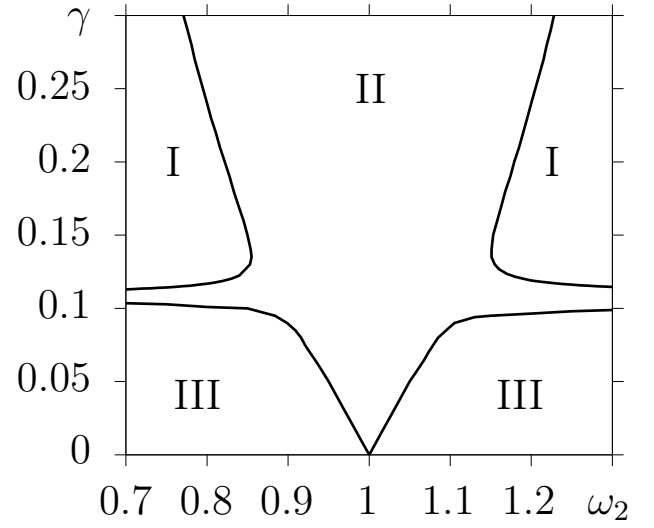
$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - (\varepsilon_1 - x_1^2) \dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \gamma (\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_2 - (\varepsilon_2 - x_2^2) \dot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= \gamma (\dot{x}_1 - \dot{x}_2),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $x_{1,2}$ – динамические переменные первого и второго осцилляторов, $\varepsilon_{1,2}$ – параметры, управляющие возбуждением автоколебаний в индивидуальных осцилляторах, γ – коэффициент связи, $\omega_{1,2}$ – параметры, задающие собственные частоты колебаний первого и второго осцилляторов. Система (1.1) имеет единственное состояние равновесия в начале координат.

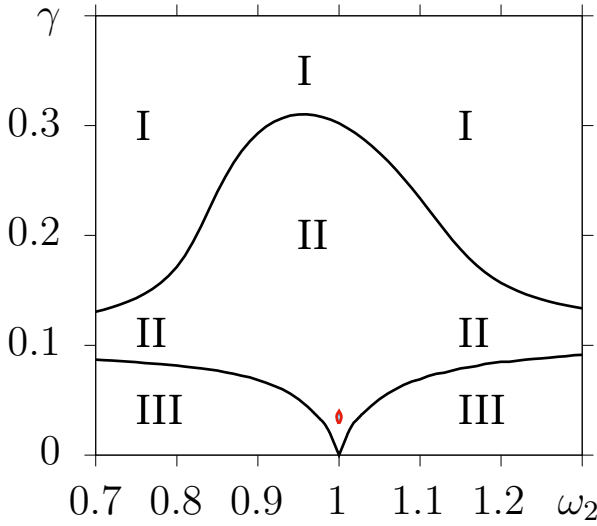
В отсутствие взаимодействия ($\gamma = 0$) при отрицательных значениях параметров возбуждения $\varepsilon_{1,2}$ автоколебания в одиночном осцилляторе отсутствуют. Они возникают при переходе $\varepsilon_{1,2}$ через ноль. Это происходит в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа, когда из неустойчивого фокуса рождается устойчивый предельный цикл. Радиус предельного цикла увеличивается пропорционально $\sqrt{2\varepsilon}$. При малых параметрах возбуждения наблюдаются квазипериодические автоколебания, переходящие в релаксационные с ростом $\varepsilon_{1,2}$.



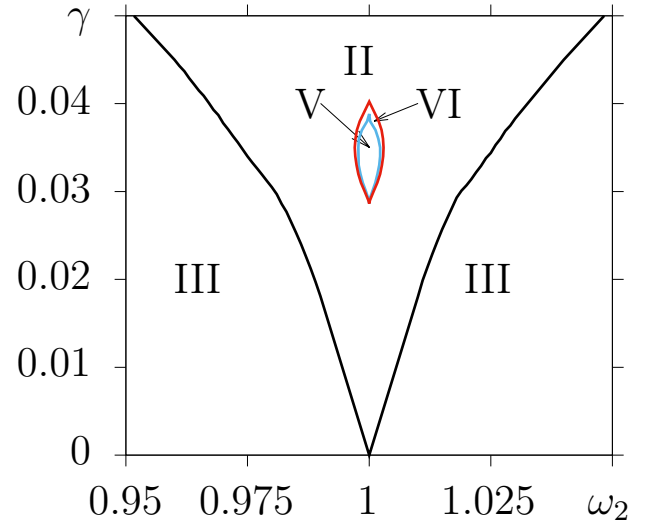
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 1.1. Карты режимов для системы (1.2) на плоскости параметров (ω_2, γ) при фиксированных значениях $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$ и трёх различных значениях времени запаздывания: (а) $\tau = 0.0$, (б) $\tau = 0.1$, (в) $\tau = 1.0$ и (г) увеличенный фрагмент рисунка (в). Обозначения: I – область гашения колебаний, II – область синхронизации, III – область квазипериодичности, V – область сосуществования устойчивых циклов C_1 и C_2 , VI – область сосуществования устойчивого цикла C_1 и устойчивого тора T_2 .

При наличии связи и положительных $\varepsilon_{1,2}$ в системе (1.1) возможны квазипериодические колебания, режимы синхронизации и гашение колебаний. Систе-

ма двух диссипативно связанных осцилляторов Ван дер Поля подробно исследована вблизи бифуркации Андронова-Хопфа, в окрестности основной области синхронизации как при одинаковых, так и при различных значениях параметров возбуждения $\varepsilon_{1,2}$ и описана в статьях и монографиях [1, 5, 32–35, 146].

Рассмотрим влияние запаздывания в канале связи на явление синхронизации, гашение автоколебаний и мультистабильность. На основе (1.1) запишем систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в виде

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= y_1(t), \\ \dot{y}_1(t) &= (\varepsilon_1 - x_1^2(t)) y_1(t) - \omega_1^2 x_1(t) + \gamma (y_2(t - \tau) - y_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) &= y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= (\varepsilon_2 - x_2^2(t)) y_2(t) - \omega_2^2 x_2(t) + \gamma (y_1(t - \tau) - y_2(t)).\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь τ – время запаздывания.

На рисунке 1.1 показаны карты режимов для системы (1.2) на плоскости параметров (ω_2, γ) для фиксированных значений $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$ и для трех различных значений времени запаздывания.

Карта режимов для случая $\tau = 0$ (рис. 1.1(а)) хорошо известна [32]. На плоскости параметров (ω_2, γ) можно выделить три характерные области: область гашения колебаний (I), область синхронизации (II) и область квазипериодических колебаний (III). Режиму взаимной синхронизации соответствует устойчивый предельный цикл C_1 . Синхронные колебания во взаимодействующих осцилляторах близки к синфазным при малой расстройке собственных частот.

При переходе из области II в область III происходит переход от цикла C_1 к двумерному тору T_1 . При пересечении границы возникают квазипериодические колебания жёстким образом.

Гашение колебаний происходит при переходе из области II в область I. С увеличением расстройки частоты размер предельного цикла C_1 плавно умень-

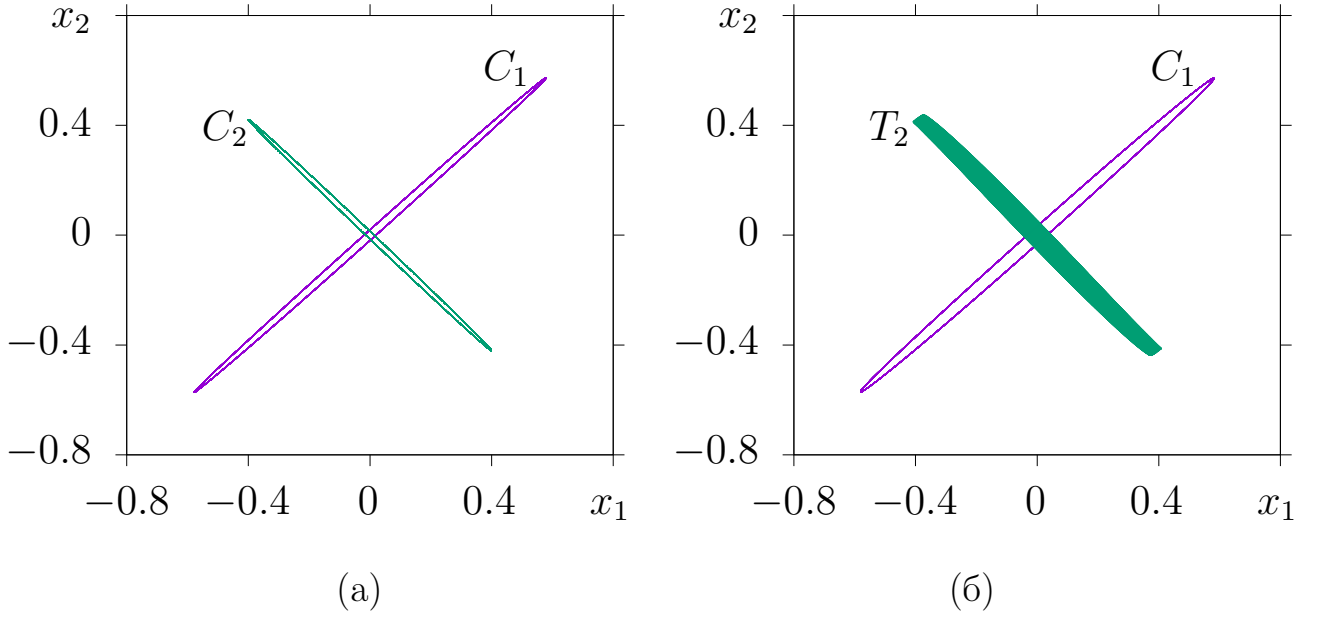


Рис. 1.2. Проекция устойчивых предельных циклов C_1 , C_2 (а), устойчивого цикла C_1 и устойчивого тора T_2 (б) в системе (1.2) при $\omega_2 = 1.01$ (а) и $\omega_2 = 1.036$ (б). Другие параметры: $\tau = 1.0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$, $\gamma = 0.06$.

шается и стягивается в неподвижную точку на границе. Теперь в фазовом пространстве существует только устойчивое состояние равновесия E .

При переходе из области I в область III из состояния равновесия плавно возбуждаются квазипериодические автоколебания. Предельный цикл здесь не рождается. Такой нетипичный переход обусловлен симметрией системы и наблюдается только при одинаковых значениях параметров возбуждения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Это вырождение можно устранить, если осцилляторы слегка неидентичны ($\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$). В этом случае из состояния равновесия рождается устойчивый предельный цикл, а затем из предельного цикла возникает устойчивый тор.

Внесение малой задержки в канал связи приводит к изменению карты режимов на плоскости параметров. На границе области гашения колебаний и области квазипериодичности образуется канал (рис. 1.1(б)) и внутри него существует устойчивый предельный цикл C_1 , соответствующий режиму синхронизации. Причём этот канал расширяется с увеличением времени запаздывания τ . Дальнейшее увеличение τ приводит к более существенным качественным

изменениям карты режимов (рис. 1.1(в,г)). Области гашения колебаний, расположенные слева и справа от области синхронизации, объединяются сверху в одну (рис. 1.1(в)). Теперь переход от синхронизации к гашению колебаний наблюдается не только при увеличении частотной расстройки, но и для равных частот $\omega_2 = \omega_1$ при увеличении коэффициента связи γ . Кроме того, начиная со значения τ , приблизительно равного 0,834, в центре области синхронизации ($\omega_2 \simeq \omega_1$) возникает «остров» бистабильности (рис. 1.1(в,г)). При значениях параметров из его средней части, обозначенной V, в системе сосуществуют синфазный и противофазный режимы синхронизации. При выборе значений параметров из области, расположенной по периметру «острова» и обозначенной VI, в зависимости от выбора начальных условий может наблюдаться либо синфазная синхронизация, либо режим квазипериодических колебаний (отсутствие синхронизации). То есть, устойчивые предельные циклы C_1 и C_2 являются бистабильными состояниями в области V (рис. 1.2(а)), цикл C_1 и тор T_2 сосуществуют внутри области VI (рис. 1.2(б)). Область бистабильности увеличивается с увеличением времени запаздывания.

Для ответа на вопросы, сформулированные в вводном разделе 1.1, в следующем разделе работы перейдём от дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.2) к системе четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разложив члены с запаздыванием в ряд. Используя эту упрощённую модель, проведём подробный бифуркационный анализ формирования бистабильности.

1.3 Бифуркационный анализ возникновения бистабильности в конечномерной модели

1.3.1 Вывод системы уравнений модели

Известный подход [48, 49] используется для перехода от дифференциальных уравнений с запаздыванием (1.2) к конечномерной модели. В этом случае члены с запаздыванием разлагаются в ряд Тейлора. Применительно к системе (1.2) можно записать:

$$y_{1,2}(t - \tau) = y_{1,2}(t) + \sum_{k=1}^n \frac{y_{1,2}^{(k)}(t)}{k!} (-\tau)^k. \quad (1.3)$$

Ограничимся линейным членом:

$$y_{1,2}(t - \tau) = y_{1,2}(t) - \tau \dot{y}_{1,2}(t). \quad (1.4)$$

Подставим (1.4) в систему уравнений (1.2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= (\varepsilon_1 - x_1^2) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma (y_2 - \tau \dot{y}_2 - y_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= (\varepsilon_2 - x_2^2) y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma (y_1 - \tau \dot{y}_1 - y_2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Перепишем приведенную выше систему следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 + \tau \gamma \dot{y}_2 &= (\varepsilon_1 - x_1^2) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma (y_2 - y_1), \\ \dot{x}_2 &= y_2, \\ \dot{y}_2 + \tau \gamma \dot{y}_1 &= (\varepsilon_2 - x_2^2) y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma (y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Далее, подставляем выражение для $\dot{y}_2$ из четвёртого уравнения системы (1.5) во второе уравнение системы (1.6), а выражение для $\dot{y}_1$ из второго уравнения

системы (1.5) – в четвёртое уравнение системы (1.6). Имеем

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1, \\
 \dot{y}_1 + \tau\gamma [(\varepsilon_2 - x_2^2) y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma (y_1 - \tau\dot{y}_1 - y_2)] &= \\
 &= (\varepsilon_1 - x_1^2) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma (y_2 - y_1), \\
 \dot{x}_2 &= y_2, \\
 \dot{y}_2 + \tau\gamma [(\varepsilon_1 - x_1^2) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma (y_2 - \tau\dot{y}_2 - y_1)] &= \\
 &= (\varepsilon_2 - x_2^2) y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma (y_1 - y_2).
 \end{aligned} \tag{1.7}$$

Результатом является следующая система уравнений:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1, \\
 \dot{y}_1 &= \frac{1}{1 - \tau^2\gamma^2} [(\varepsilon_1 - x_1^2) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma (y_2 - y_1)] - \\
 &\quad - \frac{\tau\gamma}{1 - \tau^2\gamma^2} [(\varepsilon_2 - x_2^2) y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma (y_1 - y_2)], \\
 \dot{x}_2 &= y_2, \\
 \dot{y}_2 &= \frac{1}{1 - \tau^2\gamma^2} [(\varepsilon_2 - x_2^2) y_2 - \omega_2^2 x_2 + \gamma (y_1 - y_2)] - \\
 &\quad - \frac{\tau\gamma}{1 - \tau^2\gamma^2} [(\varepsilon_1 - x_1^2) y_1 - \omega_1^2 x_1 + \gamma (y_2 - y_1)].
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Система (1.8) представляет собой простейшую конечномерную модель двух связанных осцилляторов Ван дер Поля с диссипативной запаздывающей связью. Здесь время запаздывания τ является параметром в системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Все остальные параметры и переменные имеют тот же смысл, что и в системах (1.1) и (1.2). При $\tau = 0$ системы уравнений (1.8) и (1.2) преобразуются в систему (1.1) для двух осцилляторов ван дер Поля с диссипативной мгновенной связью.

1.3.2 Динамика системы в отсутствие запаздывания в канале связи

Начнём бифуркационный анализ системы (1.8) со случая $\tau = 0$. Затем будем увеличивать параметр τ и проследим за изменением бифуркационной структуры на плоскости параметров «собственная частота второго осциллятора ω_2 (расстройка) - сила связи γ ». Как и ранее, зафиксируем параметры возбуждения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$ и собственную частоту первого осциллятора $\omega_1 = 1.0$.

На рисунке 1.3 изображены линии бифуркационных значений на плоскости параметров (ω_2, γ) для фиксированной точки (состояния равновесия) и предельных циклов в окрестности основной области синхронизации. Эти линии ограничивают области синхронизации, гашения колебаний и квазипериодичности.

В областях II и IV наблюдаются синхронные автоколебания. Они окружены областями квазипериодических колебаний III и областями гашения колебаний I ("амплитудной смерти"). Область IV ограничена бифуркационными линиями l_{SN} , l'_{SN} и l_{SR} . При значениях параметров из этой области в фазовом пространстве существуют неустойчивая неподвижная точка E , три седловых цикла C_2, C_3, C_4 и устойчивый предельный цикл C_1 . Их проекции на плоскость переменных (x_1, x_2) показаны на рис. 1.4(а). Соответствующие временные зависимости для каждого цикла, характеризующие колебания в первом $x_1(t)$ и втором $x_2(t)$ осцилляторах, а также сдвиг фаз между ними представлены на рис. 1.5.

Предельные циклы в области IV соответствуют синхронным движениям с различными фазовыми сдвигами между временными зависимостями в первом и втором осцилляторах. Однако в экспериментально реализованных режимах синхронизации наблюдаются только устойчивые предельные циклы. Устойчивый цикл C_1 относится к режимам синфазной синхронизации периодических

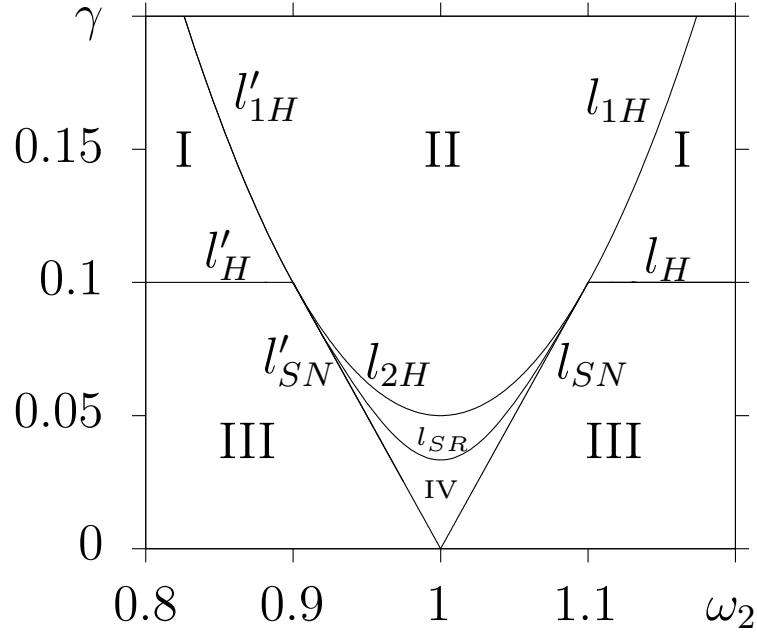


Рис. 1.3. Линии бифуркаций на плоскости параметров (ω_2, γ) для неподвижной точки и предельных циклов в окрестности основной области синхронизации при $\tau = 0$. Обозначения: I – область гашения колебаний, II и IV – области синхронизации, III – область квазипериодичности, l_{SR} – линия субкритической бифуркации вил, l_{SN} и l'_{SN} – линии седло-узловой бифуркации, l_{2H} – линия суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа, l_H и l'_H – линии бифуркации рождения тора, l_{1H} и l'_{1H} – линии суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа. Другие параметры: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$.

автоколебаний (строго синфазные колебания происходят при $\omega_2 = \omega_1$). Вычисленные собственные значения для неподвижной точки E показывают, что она неустойчива по всем направлениям. Как следует из анализа значений мультипликаторов циклов, седловые циклы C_3 и C_4 имеют одномерные устойчивые и трехмерные неустойчивые многообразия, а седловой цикл C_2 – двумерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия. Цикл C_2 отражает неустойчивые противофазные синхронные движения. Неустойчивые многообразия цикла C_2 замыкаются на устойчивом цикле C_1 , образуя резонансный тор. Другими словами, резонансные циклы C_1 и C_2 лежат на двумерном торе.

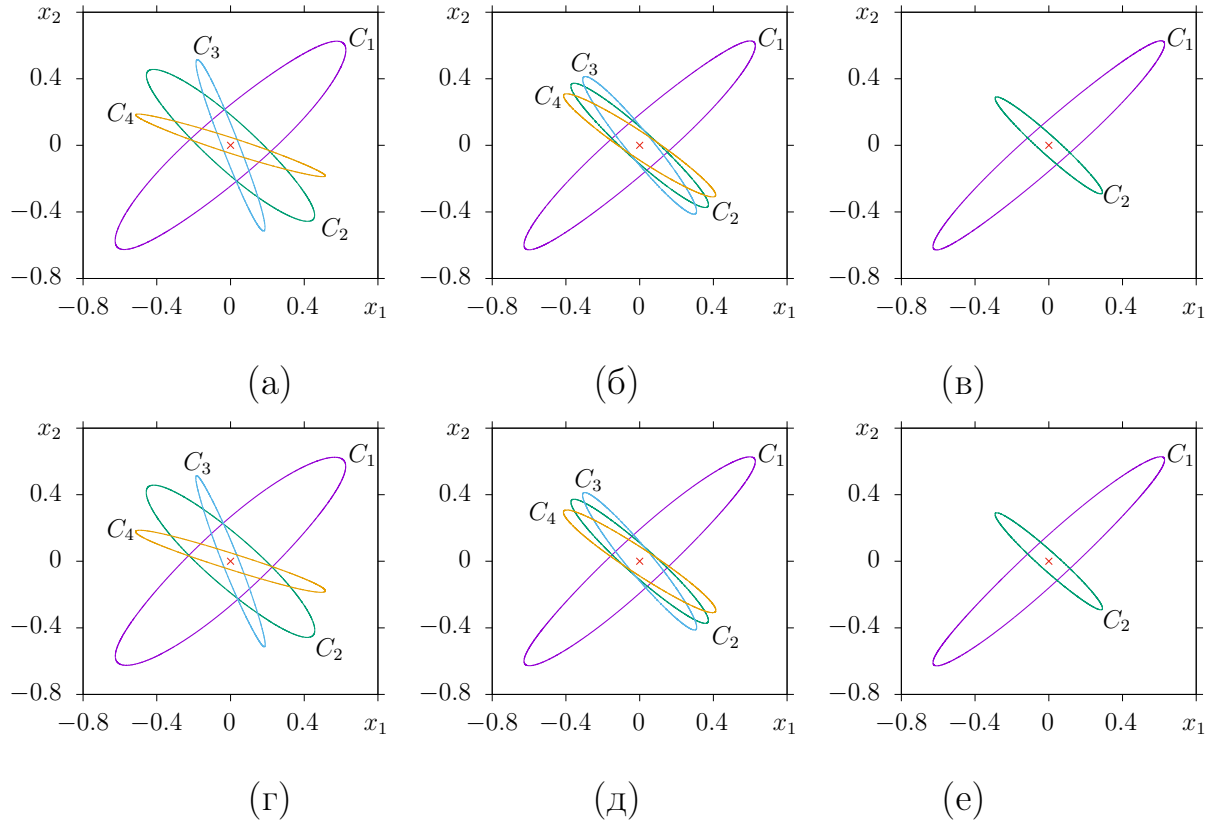


Рис. 1.4. Проекция устойчивого предельного цикла C_1 и седловых циклов C_2 , C_3 , C_4 на плоскость (x_1, x_2) при различных значениях расстройки: (а)–(в) $\omega_2 = 0.99$ и (г)–(е) $\omega_2 = 1.01$, и силы связи: (а),(г) $\gamma = 0.025$, (б),(д) $\gamma = 0.03337$ и (в),(е) $\gamma = 0.04$. Красным крестиком обозначена точка равновесия E . Другие параметры: $\tau = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$.

Проследим теперь, какие бифуркации претерпевают предельные циклы и неподвижная точка при движении в плоскости параметров (ω_2, γ) . Начнем с рассмотрения их поведения при движении из области IV в область III при фиксированной силе связи $\gamma = 0.025$ и при изменении расстройки между собственными частотами. Соответствующая одномерная бифуркационная диаграмма изображена на рис. 1.6(а), где по оси ординат отложены максимальные значения динамической переменной $x = x_m$ соответствующих предельных циклов и координата точки равновесия. При выходе из области синхронизации IV с изменением ω_2 на линиях l_{SN} и l'_{SN} происходят седло-узловые бифуркации. Устойчивый предельный цикл C_1 , лежащий на торе, и седловой цикл C_2 схо-

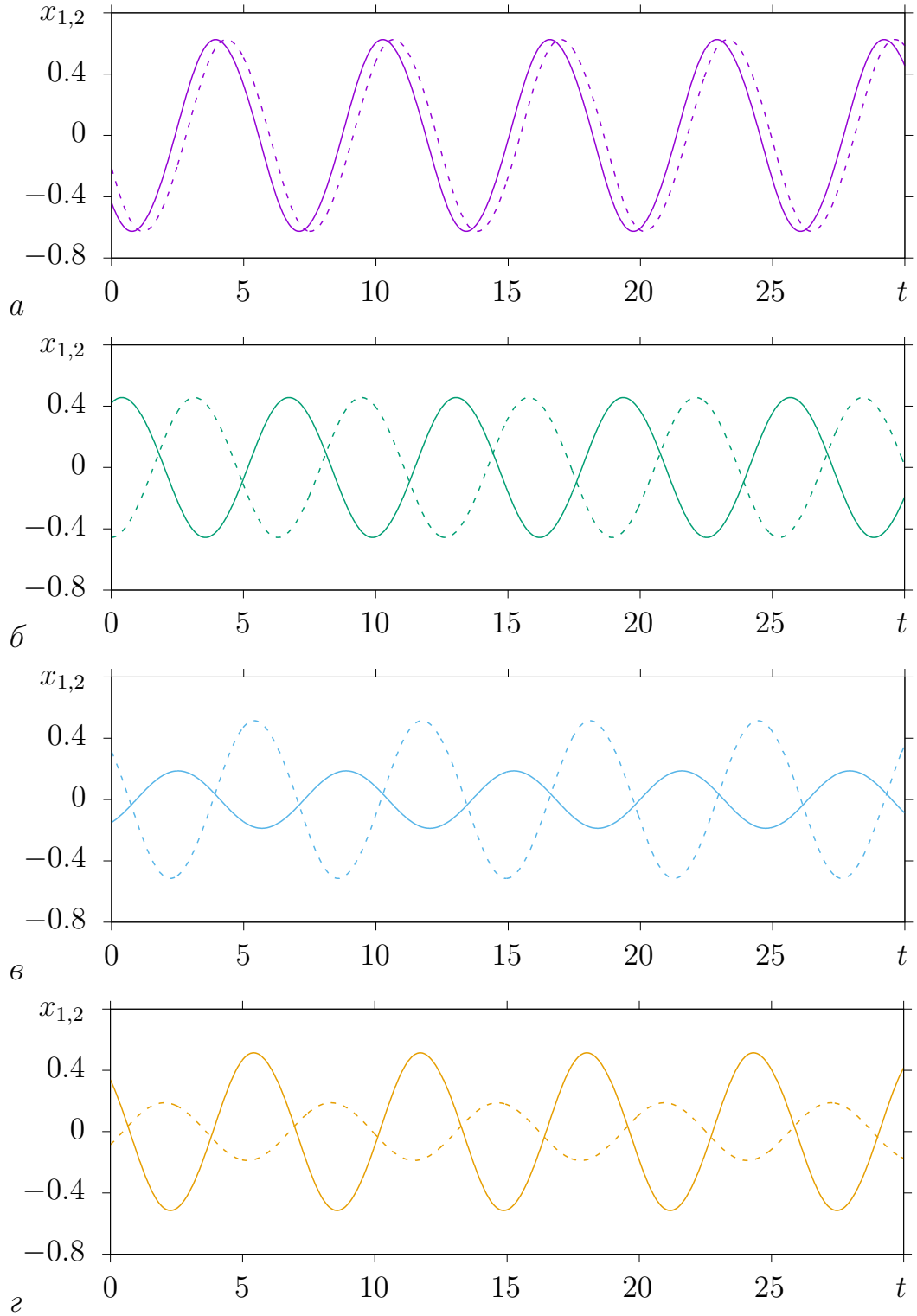


Рис. 1.5. Временные зависимости для (а) устойчивого предельного цикла C_1 и седловых циклов (б) C_2 , (в) C_3 и (г) C_4 для первого осциллятора $x_1(t)$ (сплошные кривые) и второго осциллятора $x_2(t)$ (штриховые кривые) при $\omega_2 = 0,99$ и $\gamma = 0,025$. Временная зависимость и соответствующий ей предельный цикл показаны одним цветом (см. рис. 1.4(а)). Другие параметры:

$$\tau = 0, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,1, \omega_1 = 1,0.$$

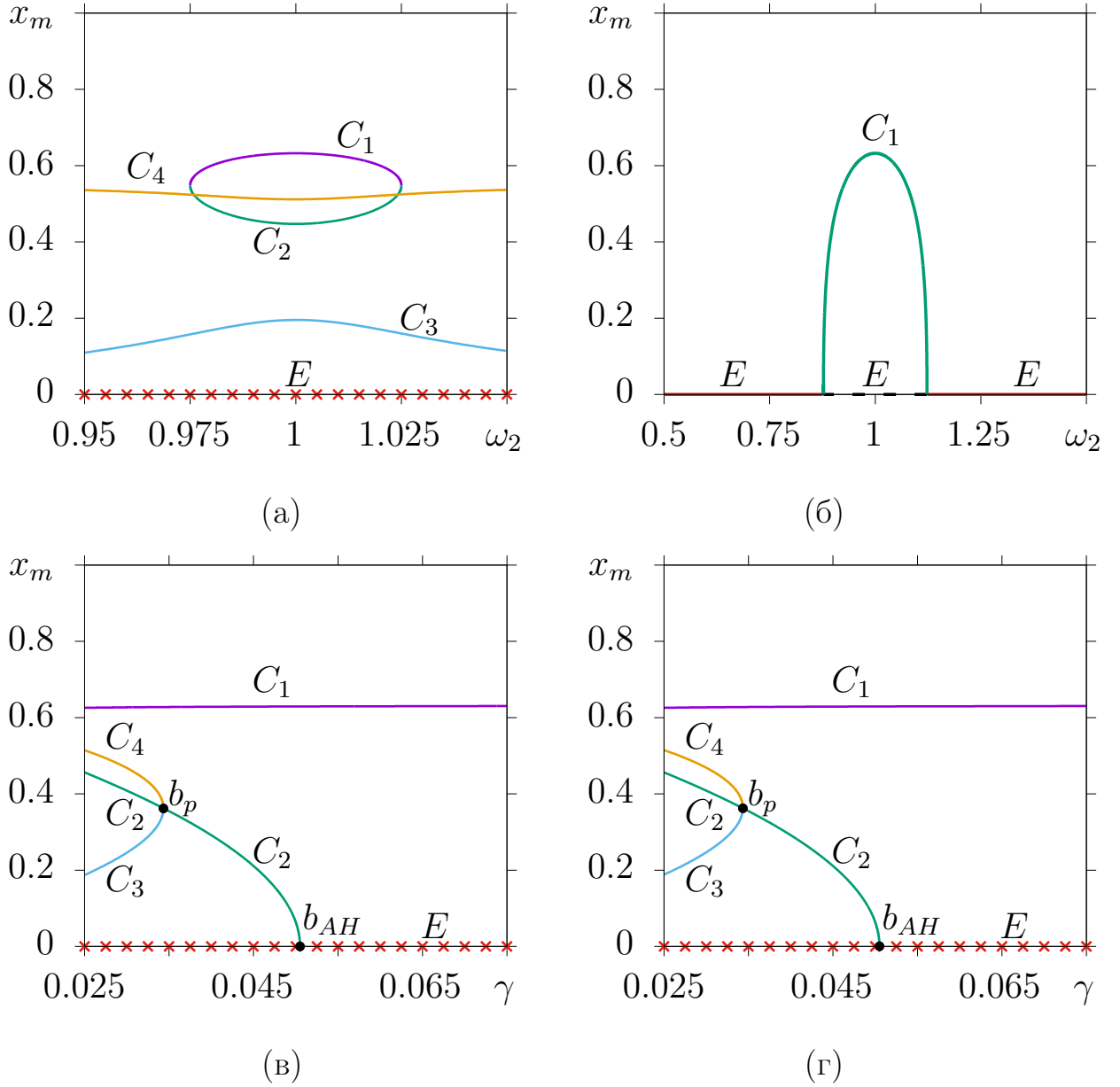


Рис. 1.6. Бифуркационные диаграммы предельных циклов C_1 , C_2 , C_3 , C_4 и точки равновесия E в зависимости от расстройки ω_2 при (а) $\gamma = 0.025$ и (б) $\gamma = 0.125$, а также от коэффициента связи γ при (в) $\omega_2 = 0.99$ и (г) $\omega_2 = 1.01$.

Обозначения: b_p – точка субкритической бифуркации вил, b_{AH} – точка бифуркации Андронова–Хопфа. Другие параметры: $\tau = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$.

дятся при приближении управляющего параметра к линиям бифуркации l_{SN} и l'_{SN} . На этих линиях циклы сливаются, превращаясь в негрубый седло-узловой цикл, и исчезают за точкой бифуркации (в области III на рис. 1.3). Теперь в фазовом пространстве имеется притягивающий эргодический двумерный тор.

Фазовые траектории покрывают его, нигде не замыкаясь. При движении изображающей точки по двумерному тору система демонстрирует режим квазипериодических колебаний с двумя несоизмеримыми частотами. Седловые циклы C_3 , C_4 и неподвижная точка E не претерпевают бифуркаций при выходе из области синхронизации IV при изменении параметра ω_2 . Таким образом, в области квазипериодических колебаний III фазовый портрет системы образован притягивающим эргодическим тором T_1 , седловыми предельными циклами C_3 , C_4 и неустойчивой неподвижной точкой E , расположенной в начале координат.

Исследуем поведение седловых циклов и состояния равновесия при переходе из области IV в область II при двух фиксированных значениях расстройки $\omega_2 = 0.99$ и $\omega_2 = 1.01$, а также при увеличении силы связи γ , начиная с $\gamma = 0.025$. На рисунке 1.6(в,г) показаны соответствующие бифуркационные диаграммы в зависимости от коэффициента связи γ .

Как следует из бифуркационных диаграмм на рис. 1.6(в,г) и проекций предельных циклов на рис. 1.4, устойчивый предельный цикл C_1 не претерпевает бифуркаций при увеличении γ до 0.075 (область II на рис. 1.3), в то время как седловые циклы C_3 и C_4 приближаются к седловому циклу C_2 . В точке b_p бифуркационных диаграмм на рис. 1.6(в,г) (или на прямой l_{SR} на плоскости управляющих параметров на рис. 1.3) они влипают в C_2 . Выше точки бифуркации остаётся седловой предельный цикл C_2 с другим характером устойчивости. Здесь происходит субкритическая бифуркация вил. Анализ мультипликаторов циклов показывает, что до точки бифуркации седловые циклы C_3 и C_4 имеют одномерные устойчивые и трёхмерные неустойчивые многообразия. Седловой цикл C_2 имеет двумерное устойчивое и двумерное неустойчивое многообразия, которые замыкаются на устойчивый предельный цикл C_1 , образуя двумерный резонансный тор. За точкой субкритической бифуркации вил седловой цикл C_2 превращается в седловой предельный цикл с одномерным устойчивым и трёхмерным неустойчивым многообразиями, что приводит к разрушению двумерного тора, на котором лежат резонансные циклы.

При значениях коэффициента связи из области, ограниченной линиями l_{SR} и l_{2H} (рис. 1.3), фазовый портрет системы образован неустойчивой точкой равновесия E , седловым циклом C_2 и устойчивым циклом C_1 (рис. 1.4(в,е)). Двумерный резонансный тор выше линии l_{SR} уже отсутствует. Он был разрушен в результате субкритической бифуркации вил седлового цикла C_2 . При дальнейшем увеличении коэффициента связи γ радиус C_2 уменьшается, и цикл стягивается к неустойчивой неподвижной точке E на линии l_{2H} . Происходит бифуркация Андронова-Хопфа, обозначенная символом b_{AH} на бифуркационных диаграммах рис. 1.6(в,г). До бифуркации неподвижная точка E имела две пары комплексно-сопряженных собственных значений с положительными действительными частями. После бифуркации у нее появилась пара собственных значений с положительными действительными частями и пара с отрицательными. При сильной связи в фазовом пространстве в области синхронизации II (выше линии l_{2H} на рис. 1.3) существуют устойчивый предельный цикл C_1 и неустойчивый фокус E . При этом увеличение расстройки собственных частот приводит к эффекту гашения автоколебаний. С увеличением расстройки частот амплитуда автоколебаний в каждом из осцилляторов плавно уменьшается до нуля, что иллюстрирует бифуркационная диаграмма на рис. 1.6(б). Видно, что при совпадении собственных частот осцилляторов ($\omega_2 = \omega_1 = 1.0$) радиус устойчивого предельного цикла C_1 , соответствующего режиму синхронизации, принимает максимальное значение. При увеличении или уменьшении ω_2 относительно $\omega_1 = 1.0$ радиус предельного цикла плавно уменьшается, и цикл стягивается к точке равновесия в начале координат на линиях бифуркаций l_{1H}, l'_{1H} (рис. 1.3). При переходе из области II в область I состояние равновесия из неустойчивого фокуса переходит в устойчивое. При этом происходит суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа. В области I в фазовом пространстве системы имеется только устойчивая неподвижная точка. В системе отсутствуют автоколебания, взаимодействие привело к гашению колебаний, хо-

тя каждый из осцилляторов при выключении связи находится в возбужденном состоянии.

При переходе из области I в область III мягко возбуждаются квазипериодические автоколебания (рис. 1.3). Линии бифуркации l'_H слева и l_H справа от области синхронизации представляют собой границу перехода от режима гашения к режиму квазипериодичности. Перед этими линиями в области I неподвижная точка E имеет две пары комплексно-сопряженных собственных значений с отрицательными действительными частями, которые обращаются в нуль на линиях l'_H и l_H и становятся положительными ниже них. В результате мягко рождаются притягивающий тор T_1 и седловые циклы C_3 и C_4 . Циклы расходятся по мере уменьшения связи.

Описанный бифуркационный переход рождения притягивающего тора и двух седловых циклов из неподвижной точки является вырожденным. Это обусловлено идентичностью индивидуальных осцилляторов, т.е. их одинаковыми параметрами возбуждения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Идентичность параметров, управляющих бифуркацией рождения цикла в несвязанных осцилляторах, приводит не только к указанной вырожденной ситуации, но и к бифуркации вил, возникающей на линии l_{SR} основной области синхронизации (рис. 1.3), в которой участвуют седловые циклы C_2 , C_3 и C_4 (см. бифуркационную диаграмму на рис. 1.6(c,d)). Введение небольшой задержки в канал связи определённым образом устраняет эти вырождения.

1.3.3 Режимы динамики в конечномерной модели при увеличении времени запаздывания. Бифуркационный механизм формирования бистабильности синхронных и асинхронных состояний.

Рассмотрим теперь, как может меняться бифуркационная структура в основной области синхронизации и её окрестности на плоскости управляющих параметров с увеличением времени запаздывания τ . Следует отметить, что уже небольшое запаздывание приводит к качественным перестройкам бифуркационной структуры. Как отмечалось выше, это связано с устранением вырожденных, нетипичных бифуркационных переходов, возникающих при малом возмущении системы.

На рис. 1.7 в окрестности основной области синхронизации на плоскости параметров (ω_2, γ) при $\tau = 0.1$ построены линии бифуркационных значений для состояния равновесия и предельных циклов. Здесь сохраняются те же четыре области. В областях II и IV наблюдаются синхронные периодические колебания. В области III существуют квазипериодические колебания с двумя независимыми частотами. В области I колебания отсутствуют, здесь имеет место режим гашения колебаний. Хотя характерные области сохранились, бифуркационная структура претерпела качественные изменения. Вместо линий l_H и l'_H (на рис. 1.3 при $\tau = 0$) перехода от неподвижной точки к притягивающему двумерному тору T_1 и седловым циклам C_3, C_4 на границе областей I и III теперь имеются три линии: l_{1H}, l_{NS}, l_{2H} справа и l'_{1H}, l'_{NS}, l_{2H} слева. Переход из области I в область III осуществляется через последовательность бифуркаций. Первая из них - бифуркация Андронова - Хопфа, имеющая место при пересечении линии l_{1H} справа и линии l'_{1H} слева. В результате неподвижная точка E теряет устойчивость и возникает устойчивый предельный цикл C_1 . Вторая би-

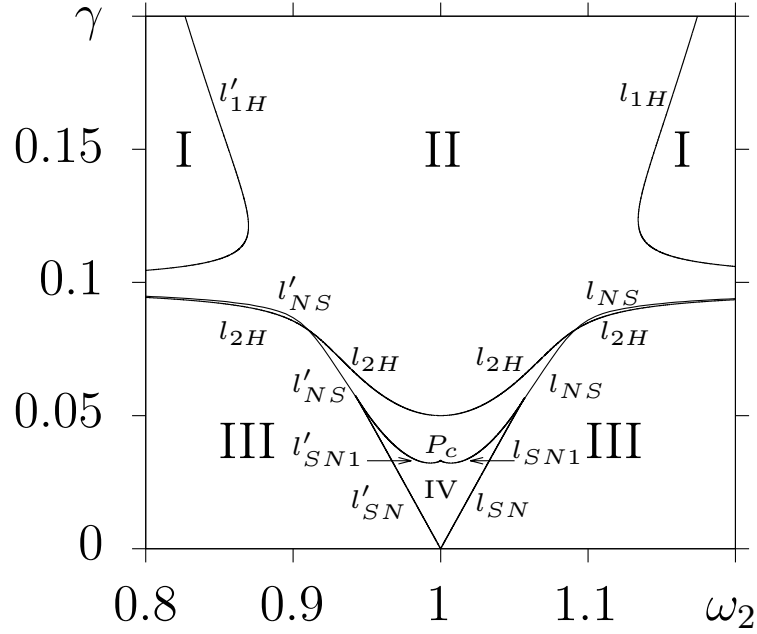


Рис. 1.7. Линии бифуркационных значений в окрестности основной области синхронизации на плоскости параметров (ω_2, γ) при $\tau = 0.1$. Обозначения: I – область гашения колебаний, II и IV – области синхронизации, III – область квазипериодичности, l_{SN} и l'_{SN} – линии седло-узловой бифуркации, l_{SN1} и l'_{SN1} – линии седло-узловой (касательной) бифуркации, l_{NS} и l'_{NS} – линии бифуркации Неймарка–Сакера, l_{1H} и l'_{1H} – линии суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа, l_{2H} – линия суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа, P_c – точка сборки. Другие параметры: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$.

бифуркация - бифуркация Неймарка – Саккера, происходящая при пересечении прямой l_{NS} справа и l'_{NS} слева. В результате предельный цикл C_1 становится неустойчивым, и в его окрестности возникает устойчивый двумерный тор T_1 . Линии бифуркации Андронова - Хопфа и Неймарка - Сакера образуют каналы на плоскости параметров справа и слева от языка синхронизации, расширяющие область синхронизации II, в которой существует устойчивый цикл C_1 .

Введение запаздывания устраняет вырожденные бифуркации не только при переходе из области гашения I в область квазипериодических колебаний III,

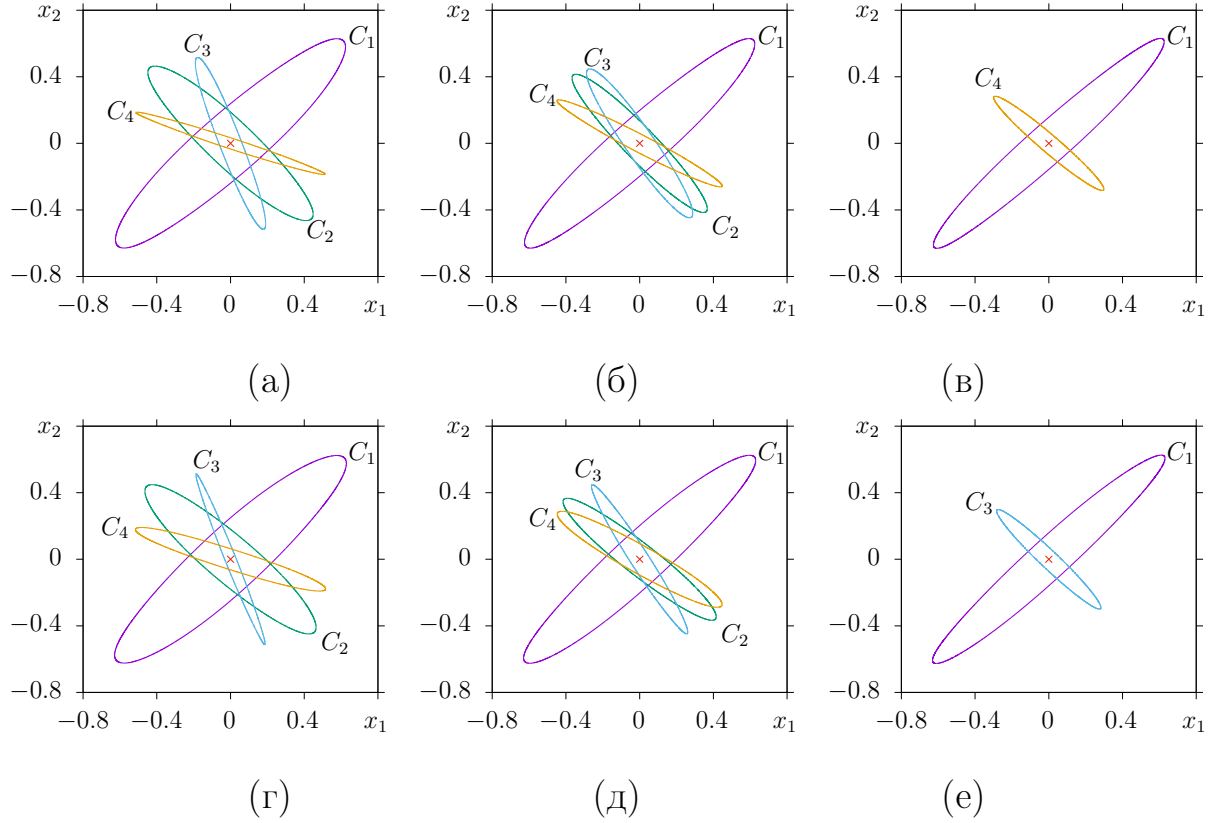


Рис. 1.8. Проекции предельных циклов на плоскость (x_1, x_2) для различных значений частотной расстройки: (а),(в),(д) $\omega_2 = 0.99$ и (б),(г),(е) $\omega_2 = 1.01$, и силы связи: (а),(б) $\gamma = 0.025$, (в),(г) $\gamma = 0.0315$ и (д),(е) $\gamma = 0.04$. Красный крестик обозначает точку равновесия E . Другие параметры: $\tau = 0.1$,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1, \omega_1 = 1.0.$$

но и при переходе из области синхронизации II через подавление в область синхронизации IV через захват. При этом изменяется бифуркационный механизм разрушения резонансного тора. Вместо одной линии l_{SR} (рис. 1.3), на которой происходила субкритическая бифуркация вил седловых циклов C_2, C_3, C_4 , теперь граница, разделяющая области синхронизации IV и II на рис. 1.7, состоит из двух отрезков l'_{SN1} и l_{SN1} . Прямые l'_{SN1} и l_{SN1} соответствуют касательным бифуркациям пар седловых циклов C_2, C_3 и C_2, C_4 и сходятся к точке сборки P_c . Рассмотрим поведение предельных циклов более подробно.

В области синхронизации II в фазовом пространстве системы существуют устойчивый предельный цикл C_1 , седловые циклы C_2, C_3, C_4 и неустой-

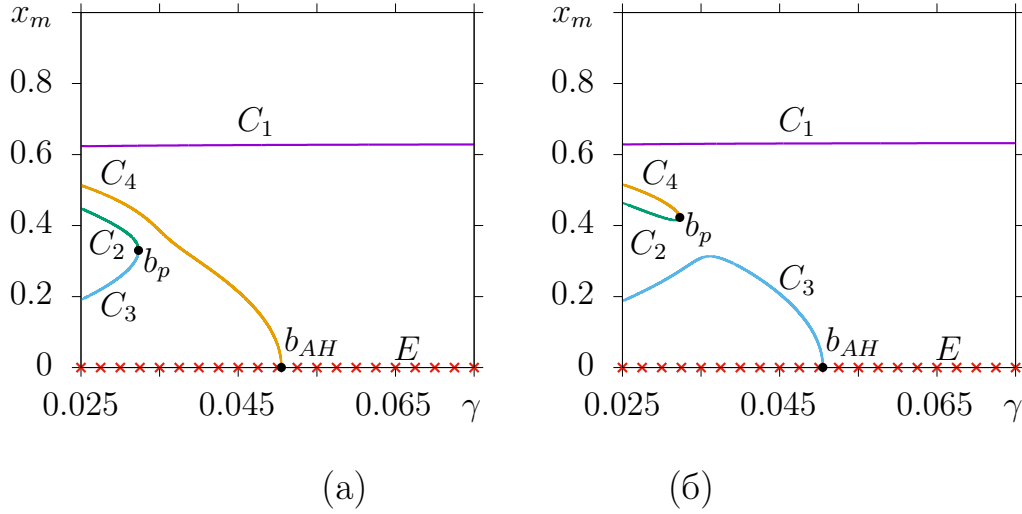


Рис. 1.9. Бифуркационные диаграммы предельных циклов C_1 , C_2 , C_3 , C_4 и состояния равновесия E в зависимости от коэффициента связи γ при (а) $\omega_2 = 0.99$ и (б) $\omega_2 = 1.01$. Обозначения: b'_{SN1} и b_{SN1} – точки касательной бифуркации, b_{2H} – точка бифуркации Андронова–Хопфа. Другие параметры: $\tau = 0.1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$.

чивое состояние равновесия E . Они показаны на рис. 1.8(а,б) при $\tau = 0.1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\gamma = 0.025$, $\omega_1 = 1.0$ и двух значениях второй собственной частоты $\omega_2 = 0.99$ (рис. 1.8(а)) и $\omega_2 = 1.01$ (рис. 1.8(б)) слева и справа от точки сборки P_c (рис. 1.7). Соответствующие однопараметрические бифуркационные диаграммы $x_m(\gamma)$ для предельных циклов и неподвижной точки представлены на рис. 1.9(а,б).

Как видно из рис. 1.8(а,в,д) и 1.9(а), при $\omega_2 = 0.99$ седловой цикл C_3 с ростом связи γ приближается к седловому резонансному циклу C_2 . Оба цикла сливаются в точке бифуркации b_p (рис. 1.9(а)) и затем исчезают. В результате резонансный тор разрушается. При переходе из области синхронизации II в область IV устойчивый предельный цикл C_1 и седловой цикл C_4 не испытывают бифуркаций. Таким образом, при $\gamma = 0.04$ (рис. 1.8(д)) в фазовом пространстве существуют неустойчивое состояние равновесия E , седловой цикл C_4 и устойчивый предельный цикл C_1 . При дальнейшем увеличении коэффициента связи γ седловой цикл C_4 стягивается в состояние равновесия E . В точке

b_{AH} происходит бифуркация Андронова–Хопфа (рис. 1.9(а)). Неустойчивая точка E с четырьмя комплексными с положительными действительными частями собственными значениями превращается в неустойчивое состояние равновесия, содержащее пару комплексно-сопряженных чисел с отрицательными действительными частями и пару комплексно-сопряженных чисел с положительными действительными частями. За этой точкой бифуркации в фазовом пространстве существуют неустойчивое состояние равновесия E и устойчивый предельный цикл C_1 .

Из рис. 1.8(б,г,е) и 1.9(б) видно, что при $\omega_2 = 1.01$ аналогичные бифуркации происходят с ростом γ . Однако теперь седловой цикл C_4 участвует в касательной бифуркации с циклом C_2 , что приводит к разрушению резонансного тора. При переходе из области подавления II в область захвата частот IV седловые циклы C_2 и C_4 исчезают. При дальнейшем движении по γ седловой цикл C_3 стягивается в состояние равновесия E , происходит бифуркация Андронова–Хопфа (точка b_{2H} на рис. 1.9(б)). В фазовом пространстве остаются устойчивый предельный цикл C_1 и неустойчивое равновесие E .

Следует отметить, что седловые циклы C_4 и C_3 , существующие в сечениях $\omega_2 = 0.99$ и $\omega_2 = 1.01$ выше линии разрушения тора (выше точки сборки P_c на рис. 1.7 и до бифуркации Андронова - Хопфа (линия l_{2H} на рис. 1.7), переходят друг в друга эволюционным образом, без бифуркаций, при изменении частотной расстройки ω_2 .

При дальнейшем увеличении времени запаздывания τ на плоскости параметров (ω_2, γ) вблизи точки сборки P_c , на границе перехода от области синхронизации через захват к области синхронизации через подавление, постепенно формируется область бистабильности. Соответствующая карта режимов представлена на рис. 1.10 для $\tau = 1.0$.

Здесь, помимо области квазипериодичности III, области синхронизации II через подавление и области синхронизации IV через захват частоты, рассматриваемых при $\tau = 0.1$ (рис. 1.6), появляются дополнительные области V и VI.

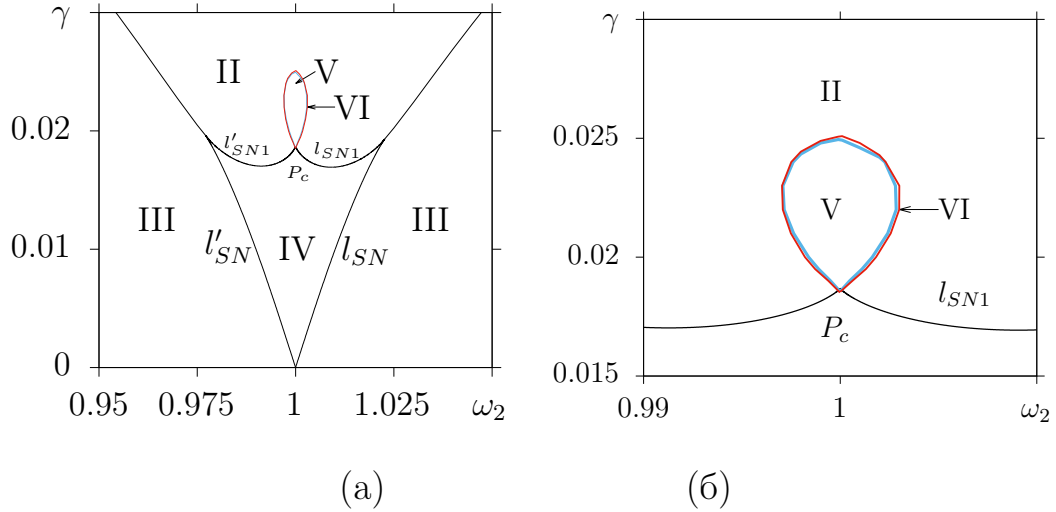


Рис. 1.10. Карта режимов (а) в плоскости параметров (ω_2, γ) системы (1.8) для $\tau = 1.0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$ и её увеличенный фрагмент (б).

Обозначения: II - область синхронизации через подавление, III - область квазипериодичности, IV - область синхронизации через захват частот, V - область сосуществования устойчивых синфазного C_1 и противофазного C_{ap} синхронных циклов, VI - область сосуществования устойчивого цикла C_1 и тора T_{ap} , l'_{SN} и l_{SN} - линии седло-узловой бифуркации, l'_{SN1} и l_{SN1} - линии седло-узловой бифуркации, P_c - точка сборки.

Явление бистабильности наблюдается при значениях параметров из этих областей. В области V сосуществуют устойчивые предельные циклы (рис. 1.11(а)), соответствующие синфазному C_1 и противофазному C_{ap} режимам синхронизации. В области VI сосуществуют устойчивый цикл C_1 и тор T_{ap} (рис. 1.11(б)), которые связаны с бистабильностью синхронных и асинхронных состояний.

Для выяснения бифуркационного механизма формирования бистабильности синфазной и противофазной синхронизации (устойчивых циклов C_1 и C_{ap} соответственно), а также бистабильности синхронных и асинхронных состояний (устойчивого цикла C_1 и тора T_{ap} соответственно) проведем однопараметрический бифуркационный анализ в зависимости от параметра ω_2 в различных сечениях по коэффициенту связи γ , проходящих через области V и VI на плоскости параметров (ω_2, γ) (рис. 1.10).

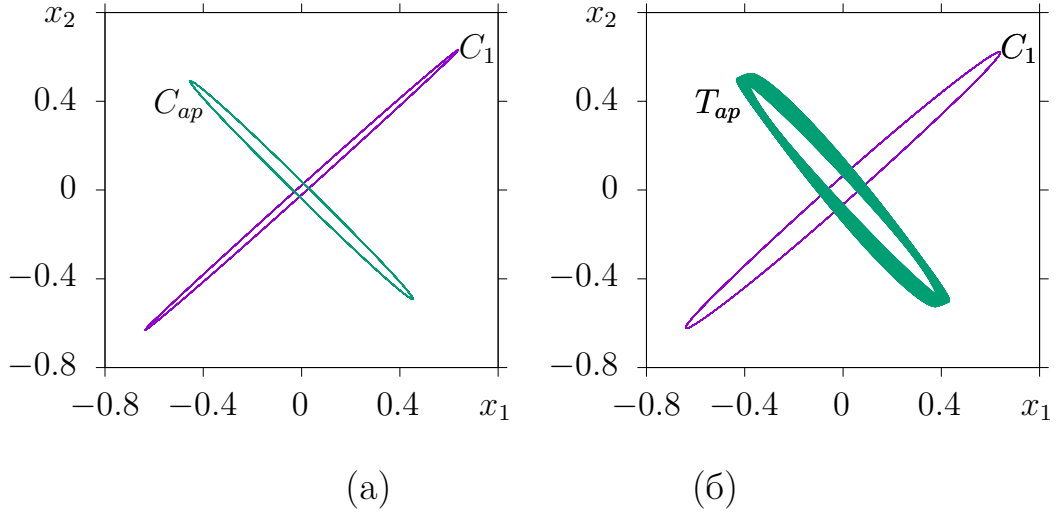


Рис. 1.11. Проекции сосуществующих устойчивых предельных циклов C_1 и C_{ap} при $\omega_2 = 1,001$ (а) и сосуществующего устойчивого цикла C_1 и тора T_{ap} при $\omega_2 = 1,00175$ (б). Другие параметры: $\tau = 1.0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$ и $\gamma = 0.022$.

На карте режимов на рис. 1.10 выше линии l'_{SN1} слева от области VI в фазовом пространстве существуют неустойчивое состояние равновесия E , устойчивый предельный цикл C_1 и седловой предельный цикл C_4 . Выше линии l_{SN} справа от области VI в фазовом пространстве наблюдаются неустойчивое состояние равновесия E , устойчивый предельный цикл C_1 и седловой цикл C_3 . При изменении управляющих параметров в области, ограниченной линиями l'_{SN} , l_{SN} , l'_{SN1} и l_{SN1} , ниже значения $\gamma = 0.03$, устойчивый предельный цикл C_1 и неустойчивое состояние равновесия не претерпевают бифуркаций. В диапазоне изменения коэффициента связи $0.025 < \gamma < 0.030$ и при изменении частотной расстройки ω_2 седловые циклы C_3 и C_4 эволюционно, без бифуркаций, переходят друг в друга. Ниже $\gamma = 0.025$, например, на участках $\gamma = 0.024$, 0.022 , 0.020 , проходящих через области V и VI, на основе седловых циклов C_3 и C_4 формируются бистабильные состояния синфазной и противофазной синхронизации, а также синхронного и асинхронного поведения.

На рисунке 1.12(а) представлена бифуркационная диаграмма для состояния равновесия и предельных циклов в зависимости от ω_2 . Видно, что в этом

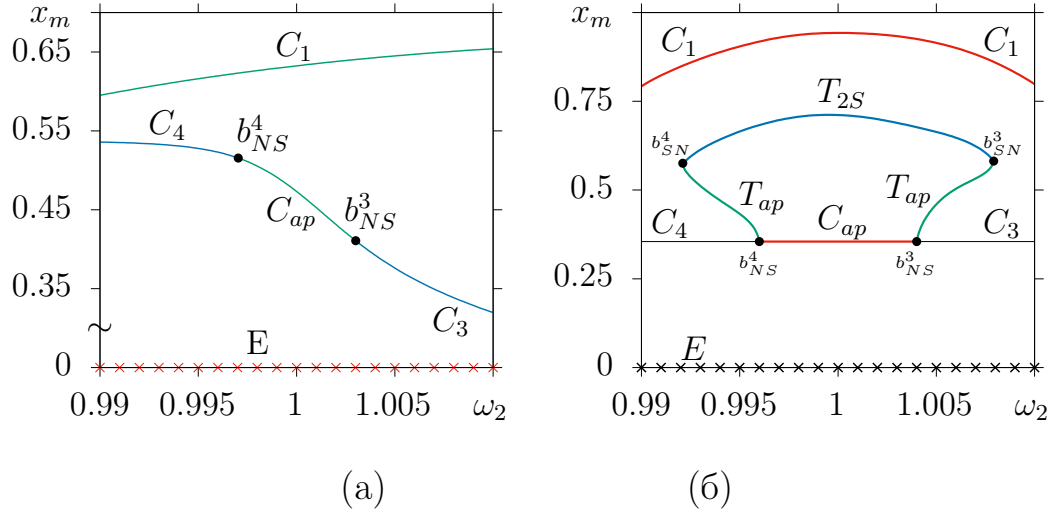


Рис. 1.12. (а) Бифуркационная диаграмма для состояния равновесия E и предельных циклов C_1 , C_{ap} , C_3 , C_4 в зависимости от ω_2 , (б) эскиз предлагаемой бифуркационной диаграммы с учётом седлового T_{2s} и устойчивого двумерных торов T_{ap} . Обозначения: b_{SN}^3 и b_{SN}^4 – точки седло-узловой бифуркации, b_{NS}^3 и b_{NS}^4 – точки бифуркации Неймарка–Сакера. Другие параметры: $\tau = 1.0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$, $\gamma = 0.022$.

интервале значений расстройки частоты устойчивый предельный цикл C_1 , соответствующий режиму синфазной синхронизации, не претерпевает бифуркаций. Состояние равновесия E неустойчиво. На левом краю бифуркационной диаграммы находится седловой предельный цикл C_4 . Этот цикл претерпевает бифуркацию с увеличением ω_2 при переходе через точку b_{NS}^4 . Пара комплексно-сопряженных мультипликаторов попадает в единичную окружность на плоскости $(Re(\mu), Im(\mu))$, и предельный цикл становится устойчивым (он обозначен как C_{ap} на рис. 1.12(а)). В интервале от b_{NS}^4 до b_{NS}^3 предельный цикл C_{ap} остаётся устойчивым. Он сосуществует с устойчивым предельным циклом C_1 (см. рис. 1.11(а)). При дальнейшем увеличении ω_2 цикл C_{ap} претерпевает бифуркацию в точке b_{NS}^3 . Пара комплексно-сопряженных множителей выходит за пределы единичной окружности, предельный цикл теряет устойчивость, и в его окрестности рождается притягивающий двумерный тор. Он сосуществует с устойчивым предельным циклом C_1 (см. рис. 1.11(б)). Эта ситуация со-

ответствует бистабильности синхронного и асинхронного режимов. Далее по параметру тор T_{ap} исчезает (это не показано на бифуркационной диаграмме рис. 1.12(a)).

На правом краю бифуркационной диаграммы на рис. 1.12(a) находится седловой предельный цикл C_3 . При уменьшении ω_2 он претерпевает бифуркацию при переходе через точку b_{NS}^3 . Пара комплексно-сопряженных множителей попадает в единичную окружность, и предельный цикл становится устойчивым. Он не отличается от C_{ap} , и здесь нет других устойчивых или седловых предельных циклов, кроме C_1 . При дальнейшем движении по параметру ω_2 предельный цикл теряет устойчивость в точке b_{NS}^4 . Пара комплексно-сопряженных множителей выходит за единичную окружность, и в окрестности предельного цикла рождается притягивающий двумерный тор. При анализе предельного цикла C_4 при увеличении ω_2 и при рассмотрении предельного цикла C_3 при уменьшении ω_2 видно, что характер бифуркаций и соответствующие им бифуркационные значения полностью совпадают. При прямом и обратном движении по параметру ω_2 предельные циклы C_3 и C_4 переходят друг в друга.

Проведенный бифуркационный анализ предельных циклов не дает полного понимания механизма формирования бистабильности и полной бифуркационной диаграммы. Здесь по-прежнему необходим бифуркационный анализ седловых и устойчивых торов. Можно предположить, что полная бифуркационная диаграмма, включающая седловые и устойчивые двумерные торы, может иметь вид, представленный на рис. 1.12(б).

Эскиз бифуркационной диаграммы показывает, что при малых значениях ω_2 в фазовом пространстве существуют устойчивый предельный цикл C_1 , седловой цикл C_4 и неустойчивое состояние равновесия E . С ростом ω_2 в точке b_{SN}^4 происходит седло-узловая бифуркация двумерных торов. В фазовом пространстве рождаются устойчивый T_{ap} и седловой T_{2s} торы. Возникает бистабильность синхронных и асинхронных состояний. Границу областей притяжения устойчивого цикла C_1 и устойчивого тора T_{ap} образует седловой тор T_{2s} с его устойчи-

вым и неустойчивым многообразиями. При дальнейшем увеличении ω_2 тор T_{ap} стягивается к седловому предельному циклу C_4 и влипает в него в точке b_{NS}^4 . Предельный цикл становится устойчивым и обозначен на диаграмме как C_{ap} . Устойчивый предельный цикл C_{ap} претерпевает суперкритическую бифуркацию Неймарка–Сакера в точке b_{NS}^3 , и мягко рождается устойчивый двумерный тор T_{ap} . С увеличением ω_2 T_{ap} приближается к седловому тору T_{2s} . В точке b_{SN}^3 происходит седло-узловая бифуркация торов, после чего они сливаются и исчезают. Система снова становится моностабильной. Аналогичные бифуркационные переходы показаны при движении назад по параметру ω_2 .

Бифуркационный анализ седловых торов в системе (1.8) представляет собой весьма сложную задачу. Чтобы подтвердить справедливость предположений, сделанных относительно бифуркационной диаграммы на рис. 1.12(б), были выведены укороченные уравнения для амплитуд и фаз и проведено их систематическое исследование. В рамках этого подхода устойчивые и седловые предельные циклы соответствуют устойчивым и седловым двумерным торам системы (1.8), а неподвижные точки, отличные от нуля, соответствуют предельным циклам.

Здесь следует отметить, что явление бистабильности рассматривается в двух взаимодействующих осцилляторах Ван дер Поля при малых значениях параметра возбуждения и коэффициента связи, в области основной области синхронизации при малой расстройке собственных частот, т.е. в условиях, когда применим метод Ван дер Поля. Кроме того, как будет показано ниже, укороченные уравнения для амплитуд и фаз конечномерной модели (1.8) также отражают явление бистабильности синхронных и асинхронных состояний исходной системы (1.2).

1.4 Анализ бифуркационных переходов в системе укороченных уравнений для амплитуд и фаз

1.4.1 Вывод системы укороченных уравнений

В соответствии с методом ван дер Поля (метод усреднения) для системы (1.8) используем подстановку

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} (a_1 \exp(i\omega t) + a_1^* \exp(-i\omega t)), \\ x_2 &= \frac{1}{2} (a_2 \exp(i\omega t) + a_2^* \exp(-i\omega t)), \\ y_1 &= \frac{1}{2} (i\omega a_1 \exp(i\omega t) - i\omega a_1^* \exp(-i\omega t)), \\ y_2 &= \frac{1}{2} (i\omega a_2 \exp(i\omega t) - i\omega a_2^* \exp(-i\omega t)), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $a_1(t)$ и $a_2(t)$ – медленно меняющиеся комплексные амплитуды, a_1^* и a_2^* – комплексно-сопряженные числа, ω – частота, которую необходимо определить, $i = \sqrt{-1}$.

Подставляя (1.9) в систему (1.8) и выполняя стандартные преобразования и усреднение по периоду, получаем следующую систему укороченных уравнений для комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -i\frac{\omega}{2}a_1 + \frac{1}{1 - \tau^2\gamma^2} \left[i\frac{\omega_1^2}{2\omega}a_1 + \frac{\varepsilon}{2}a_1 - \frac{1}{8}|a_1|^2 a_1 + \frac{\gamma}{2}(a_2 - a_1) \right] - \\ &\quad - \frac{\tau\gamma}{1 - \tau^2\gamma^2} \left[i\frac{\omega_2^2}{2\omega}a_2 + \frac{\varepsilon}{2}a_2 - \frac{1}{8}|a_2|^2 a_2 + \frac{\gamma}{2}(a_1 - a_2) \right], \\ \dot{a}_2 &= -i\frac{\omega}{2}a_2 + \frac{1}{1 - \tau^2\gamma^2} \left[i\frac{\omega_2^2}{2\omega}a_2 + \frac{\varepsilon}{2}a_2 - \frac{1}{8}|a_2|^2 a_2 + \frac{\gamma}{2}(a_1 - a_2) \right] - \\ &\quad - \frac{\tau\gamma}{1 - \tau^2\gamma^2} \left[i\frac{\omega_1^2}{2\omega}a_1 + \frac{\varepsilon}{2}a_1 - \frac{1}{8}|a_1|^2 a_1 + \frac{\gamma}{2}(a_2 - a_1) \right]. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь смысл коэффициентов тот же, что и в системе (1.8).

Представляя комплексные амплитуды $a_1(t)$, $a_2(t)$ в полярных координатах

$$\begin{aligned} a_1(t) &= \rho_1(t) \exp[i\varphi_1(t)], \\ a_2(t) &= \rho_2(t) \exp[i\varphi_2(t)], \end{aligned} \quad (1.11)$$

где ρ_1 , ρ_2 , φ_1 , φ_2 – амплитуды и фазы колебаний первого и второго осцилляторов. Подставляя (1.11) в (1.10), получаем систему четырёх дифференциальных уравнений для амплитуд и фаз. Эту систему можно свести к трём дифференциальным уравнениям первого порядка, введя новую динамическую переменную – разность фаз колебаний второго и первого осцилляторов $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$. Учитывая близость собственных частот, частоту синхронизации можно определить следующим образом: $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Таким образом, в результате система трёх дифференциальных уравнений может иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \frac{1}{1 - \tau^2 \gamma^2} \left[\frac{\varepsilon}{2} \rho_1 - \frac{1}{8} \rho_1^3 + \frac{\gamma}{2} (\rho_2 \cos \psi - \rho_1) \right] - \frac{\tau \gamma}{1 - \tau^2 \gamma^2} \times \\ &\quad \left[-\frac{\omega_2^2}{\omega_1 + \omega_2} \rho_2 \sin \psi + \left(\frac{\varepsilon}{2} \rho_2 - \frac{1}{8} \rho_2^3 \right) \cos \psi + \frac{\gamma}{2} (\rho_1 - \rho_2 \cos \psi) \right], \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_2 &= \frac{1}{1 - \tau^2 \gamma^2} \left[\frac{\varepsilon}{2} \rho_2 - \frac{1}{8} \rho_2^3 + \frac{\gamma}{2} (\rho_1 \cos \psi - \rho_2) \right] - \frac{\tau \gamma}{1 - \tau^2 \gamma^2} \times \\ &\quad \left[-\frac{\omega_1^2}{\omega_1 + \omega_2} \rho_1 \sin \psi + \left(\frac{\varepsilon}{2} \rho_1 - \frac{1}{8} \rho_1^3 \right) \cos \psi + \frac{\gamma}{2} (\rho_2 - \rho_1 \cos \psi) \right], \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \frac{1}{1 - \tau^2 \gamma^2} \left[(\omega_2 - \omega_1) - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \sin \psi \right] \\ &\quad - \frac{\tau \gamma}{1 - \tau^2 \gamma^2} \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_2 + \omega_1} \frac{\rho_1}{\rho_2} - \frac{\omega_2^2}{\omega_2 + \omega_1} \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \cos \psi \\ &\quad + \frac{\tau \gamma}{1 - \tau^2 \gamma^2} \left[\frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{\rho_1^3}{\rho_2} + \frac{\rho_2^3}{\rho_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\gamma}{2} \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \right] \sin \psi. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Проведенные численные исследования показывают, что явление мультистабильности наблюдается в основной области синхронизации в укороченных уравнениях для амплитуд и фаз (1.12)-(1.14), а также в конечномерной модели (1.8) и в системе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (1.2). На

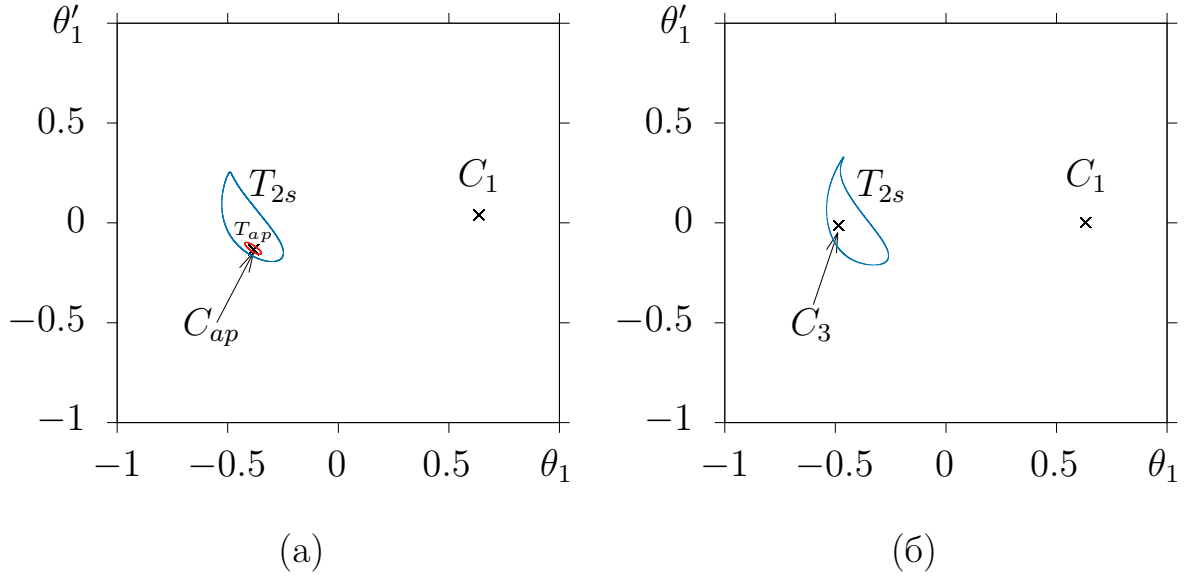


Рис. 1.13. Проекция фазовых портретов на плоскость (θ_1, θ'_1) для системы (1.12)-(1.14) при (а) $\omega_2 = 1.0001$ и (б) $\omega_2 = 1.0017$. Обозначения: $\theta_1 = \rho_1 \cos \psi$, $\theta'_1 = \rho_1 \sin \psi$; C_1 и C_{ap} – устойчивые равновесия, T_{2s} – седловой предельный цикл, T_{ap} – устойчивый предельный цикл, C_3 – неустойчивое равновесие.

Другие параметры: $\tau = 1.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$, $\gamma = 0.02$.

рисунке 1.13 изображены проекции фазовых портретов на плоскость $(\rho_1 \cos \psi, \rho_1 \sin \psi)$ для системы (1.12)-(1.14) при значениях параметров из области бистабильности.

Сосуществующие устойчивые состояния равновесия C_1 и C_{ap} , соответствующие синфазной и противофазной синхронизации соответственно, изображены на рис. 1.13(а). Их области притяжения разделены седловым предельным циклом T_{2s} , связанным с седловым тором исходной системы (1.8). На рис. 1.13(б) показаны сосуществующие устойчивое состояние равновесия C_1 и устойчивый предельный цикл T_{ap} . Они соответствуют предельному циклу и двумерному тору исходной системы соответственно и образуют бистабильность синхронных и асинхронных состояний. Имеется также седловой предельный цикл T_{2s} (соответствующий седловому тору), который определяет границу областей притяжения мультистабильных состояний. Кроме того, на фазовом портрете присутствует неустойчивое состояние равновесия C_3 .

1.4.2 Анализ бифуркаций, приводящих к формированию бистабильности синхронных и асинхронных состояний

Для выявления бифуркаций, приводящих к образованию бистабильности, построена бифуркационная диаграмма в зависимости от ω_2 , представленная на рис. 1.14 для коэффициента связи $\gamma = 0.02$ и тех же значений остальных параметров, что и для мультистабильных состояний на рис. 1.13.

Из бифуркационной диаграммы видно, что в рассматриваемом диапазоне изменения ω_2 устойчивое состояние C_1 не претерпевает бифуркаций. Однако, начиная с малых значений и с ростом ω_2 , в точке b_{SN}^4 рождаются устойчивый T_{ap} и седловой T_{2S} циклы. Устойчивый цикл T_{ap} стягивается в седловое состояние равновесия. В точке b_{NS}^4 происходит бифуркация Андронова - Хопфа, и состояние равновесия C_{ap} становится устойчивым. При дальнейшем увеличении ω_2 из этого состояния равновесия мягко рождается устойчивый предельный цикл T_{ap} в результате субкритической бифуркации Андронова - Хопфа в точке b_{NS}^3 . Далее по параметру устойчивый цикл T_{ap} приближается к седловой T_{2S} . При переходе через точку b_{SN}^3 происходит седло-узловая бифуркация, циклы сливаются и исчезают. Система становится моностабильной, и в фазовом пространстве существуют устойчивое C_1 и неустойчивое C_3 состояния равновесия. При движении в обратном направлении по параметру с уменьшением ω_2 наблюдается аналогичная последовательность бифуркаций, приводящая к образованию бистабильности. В точке b_{SN}^3 происходит седло-узловая бифуркация рождения устойчивого и неустойчивого циклов. В точке бифуркации Андронова - Хопфа b_{NS}^3 цикл стягивается в точку, и состояние равновесия C_{ap} становится устойчивым. При переходе через точку b_{NS}^4 из C_{ap} рождается устойчивый предельный цикл T_{ap} . Далее, с уменьшением ω_2 , седловой T_{2s} и устойчивый T_{ap} циклы сливаются в точке b_{SN}^4 . Ниже этой точки система становится моностабильной.

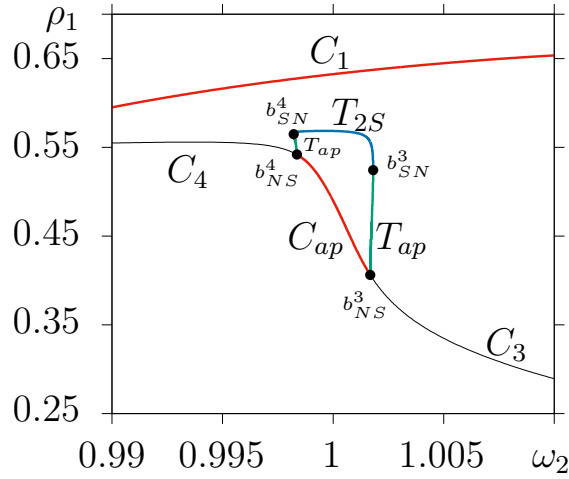


Рис. 1.14. Бифуркационная диаграмма $\rho_1(\omega_2)$ при $\gamma = 0.02$. Обозначения: C_1 и C_{ap} – устойчивые состояния равновесия, T_{2s} – седловой предельный цикл, T_{ap} – устойчивый предельный цикл, C_3 – неустойчивое состояние равновесия, b_{SN}^3 и b_{SN}^4 – точки бифуркации седло-узел, b_{NS}^3 и b_{NS}^4 – точки бифуркации Андронова–Хопфа. Другие параметры: $\tau = 1.5$, $\varepsilon = 0.1$, $\omega_1 = 1.0$.

Проведенные исследования укороченных уравнений для амплитуд и фаз подтверждают высказанное предположение о бифуркационном механизме формирования мультистабильности с участием устойчивых и седловых двумерных торов в исходной конечномерной модели (1.8), представленном на эскизе бифуркационной диаграммы на рис. 1.12(б).

Следует также отметить, что укороченные уравнения для амплитуды и фазы (1.12)–(1.14) дают наглядное объяснение возможности реализации бифуркации вил в исходной системе (1.8) при $\tau = 0$ (рис. 1.6) и её устранения на рис. 1.9, что обычно происходит при введении времени запаздывания. Хорошо известно, что бифуркация вил может реализоваться только в системах с симметрией. Она наблюдается на рис. 1.6, несмотря на различие между ω_1 и ω_2 . Однако динамика системы зависит не от абсолютных значений собственных частот, а от их разности, т.е. от расстройки частоты. Как видно из уравнений (1.12)–(1.14), непосредственно связанных с (1.8), эта система симметрична при $\tau = 0$ и равных параметрах возбуждения $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, а расстройка $(\omega_2 - \omega_1)$ не

влияет на её симметрию. Введение запаздывания нарушает симметрию и устраняет бифуркацию вил. В результате получается бифуркационная диаграмма, представленная на рис. 1.9.

1.5 Выводы по главе 1

Проведенные численные исследования динамики системы двух взаимно связанных осцилляторов Ван дер Поля с диссипативной запаздывающей связью позволяют сформулировать следующие основные результаты:

1. Проведен бифуркационный анализ для системы дифференциальных уравнений с запаздывающей связью между осцилляторами и соответствующей конечномерной модели обыкновенных дифференциальных уравнений, где время запаздывания выступает в качестве параметра. Полученные результаты показали полное соответствие. Выявленные бифуркационные переходы подтверждены исследованием укороченных уравнений для амплитуд и фаз.
2. Показано, что для всех трёх рассмотренных в статье моделей бистабильность синхронных и асинхронных состояний, обусловленная запаздывающей связью, возникает с увеличением времени задержки в связи между осцилляторами. Область бистабильности формируется в основной области синхронизации за линией разрушения резонансного тора на плоскости параметров «расстройка частоты - сила связи». Она возникает при достаточно малом времени задержки, $\tau \approx 0.834$, и расширяется с ростом τ . При определённом наборе значений параметров (собственной частоты ω_2 и силы связи γ) и в зависимости от начальных условий в рассматриваемых системах наблюдается сосуществование синфазной и противофазной синхронизации. Этим режимам соответствуют устойчивые синфазный и про-

тивофазный предельные циклы соответственно. При выборе параметров управления из области, окружающей указанную выше область синхронной бистабильности, в системах взаимодействующих осцилляторов Ван дер Поля наблюдается сосуществование синфазной синхронизации (устойчивого предельного цикла) и асинхронной динамики (устойчивого двумерного тора, соответствующего квазипериодическим колебаниям).

3. Впервые установлен и последовательно описан бифуркационный механизм формирования синхронной и асинхронной динамики с использованием минимального ансамбля из двух взаимодействующих автоколебательных осцилляторов с запаздывающей связью.
4. Полученные результаты имеют важное прикладное значение в области изучения динамики сложных ансамблей и сетей, моделирующих поведение реальных систем. Сосуществование синхронных и асинхронных состояний является типичным свойством сложных пространственно-временных структур, таких как химерные состояния, возникающие в больших сетях связанных нелинейных осцилляторов при переходе от полной синхронизации (когерентности) к пространственно-временному хаосу (полной некогерентности).

Глава 2. ЭФФЕКТЫ МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТИ, ГАШЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ И СИНХРОНИЗАЦИИ В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СВЯЗЬЮ

2.1 Введение

Мультистабильность является фундаментальным нелинейным явлением, которое широко наблюдается и активно исследуется в системах различной природы [17–29]. Под этим явлением понимают сосуществование в фазовом пространстве динамической системы нескольких аттракторов, которые можно пронаблюдать, меняя начальные условия системы. Мультистабильность имеет важное, зачастую определяющее значение в свойствах и функциональных возможностях различных систем. Например, установлено, что мультистабильность лежит в основе механизмов хранения памяти и обработки информации в нейронных сетях [147]. В ряде случаев она играет отрицательную роль, понижая устойчивость системы к воздействию флуктуаций, помех, что приводит к нарушению режимов работы технических устройств [17, 148].

В связи с этим важно знать условия возникновения и исчезновения мультистабильности при вариации параметров системы, бифуркационные механизмы ее формирования. Возникновение мультистабильности может быть связано с бифуркациями типа вил состояний равновесия и предельных циклов, с седло-узловыми бифуркациями рождения пар неподвижных точек или предельных

циклов, когда в расширенном пространстве динамических переменных и параметров системы формируются складки и сборки для неподвижных точек и предельных циклов [149, 150]. В связанных системах с удвоением периода возможно формирование развитой фазовой мультистабильности [151], когда при переходе к хаосу через каскад удвоений периода каждый из циклов претерпевает бифуркацию удвоения дважды. После первой бифуркации рождается устойчивый цикл удвоенного периода, после второй – седловой. Далее по параметру неустойчивый цикл претерпевает субкритическую бифуркацию вил и становится устойчивым [152]. Возникающие режимы одного периода различаются фазовыми сдвигами между колебаниями подсистем. В результате в фазовом пространстве могут сосуществовать циклы одного периода, разных периодов, торы и различные виды хаотических аттракторов.

При исследовании бифуркационного механизма затягивания частоты в классической автоколебательной системе с двумя степенями свободы [153, 154] – в генераторе Ван дер Поля с дополнительным колебательным контуром – было установлено [155, 156], что появление сосуществующих устойчивых предельных циклов в области затягивания частоты обусловлено двумя последовательными суперкритическими бифуркациями Андронова–Хопфа состояния равновесия и субкритической бифуркацией Неймарка–Сакера седлового предельного цикла. Этот бифуркационный механизм формирования бистабильности был выявлен при малых значениях параметра возбуждения в генераторе и слабой диссипации в дополнительном колебательном контуре, когда система является квазигармонической. Однако для подобных автоколебательных систем с двумя степенями свободы остается открытым вопрос о влиянии параметра возбуждения, когда с его увеличением автоколебания становятся ангармоническими, на явление мультистабильности, на бифуркационный механизм ее формирования. Сохраняется ли эффект затягивания частоты и соответствующие бистабильные состояния в широкой области значений на плоскости управляющих параметров возбуждения и расстройки по собственным частотам? Происходит ли форми-

рование новых мультистабильных состояний? Как выглядит бифуркационная структура плоскости управляющих параметров?

Во второй главе представлены результаты двухпараметрического анализа автоколебательной системы с двумя степенями свободы, состоящей из осциллятора Рэлея, взаимодействующего с линейным диссипативным осциллятором. На плоскости «параметр расстройки по собственным частотам – параметр возбуждения» построены области характерных режимов, выявлены области мультистабильности и определены бифуркации, которые приводят к сосуществующим аттракторам.

Также во второй главе приводятся результаты бифуркационного анализа динамики и эффекта синхронизации в системе двух генераторов Ван дер Поля, связанных через конечное число пассивных колебательных контуров. Данные контуры играют роль распределенной связи и в определенном приближении эквивалентны наличию запаздывания в канале связи, влияние которого было детально изучено в первой главе работы. Последовательно проанализированы и описаны изменения бифуркационной картины динамики рассматриваемой системы на плоскости параметров "частотная расстройка – сила связи" при различном числе и различных характеристиках диссипативных осцилляторов.

Представленные результаты были отражены в статье [157] опубликованной в журнале “Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Физика”, 2024.

2.2 Влияние ангармоничности на мультистабильность в генераторе Рэлея с дополнительным линейным колебательным контуром

2.2.1 Уравнения исследуемой системы

Исследуемая автоколебательная система с двумя степенями свободы состоит из осциллятора Рэлея, взаимодействующего с линейным диссипативным осциллятором. Осциллятор Рэлея относится к базовым моделям теории колебаний. Он представляет собой одну из простейших моделей автоколебательных систем с одной степенью свободы. Уравнение Рэлея [36] описывает, например, хорошо известные механические автоколебательные системы – маятник Фроуда [158] и систему Кайдановского–Хайкина [3]. Примером радиофизической системы, описываемой уравнением Рэлея, может служить генератор на нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью, включенном в колебательный контур [159]. Осциллятор Рэлея представляет собой осциллятор с нелинейной диссипацией, величина которой нелинейно зависит от скорости (в механической интерпретации), тогда как в осцилляторе Ван дер Поля диссипация определяется координатой по нелинейному закону. Заменой переменных уравнение Рэлея переходит в уравнение Ван дер Поля.

В осцилляторе Рэлея, так же как и в генераторе Ван дер Поля, наблюдается мягкое возбуждение устойчивых автоколебаний. Единственное состояние равновесия с ростом управляющего параметра при переходе через нулевое значение претерпевает суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа. Из устойчивого фокуса рождается устойчивый предельный цикл, радиус которого растет пропорционально корню из надкритичности. При малых значениях параметра наблюдаются квазигармонические автоколебания. С ростом управ-

ляющего параметра развивается явление ангармоничности. Близкие к синусоидальным автоколебания постепенно превращаются в релаксационные. Однако в осцилляторе Ван дер Поля форма временных реализаций становится прямоугольной, а в осцилляторе Рэлея – пилообразной.

Исследуемая автоколебательная система с двумя степенями свободы может быть представлена в виде двух связанных осцилляторов:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - (\varepsilon - \dot{x}^2)\dot{x} + p^2x + p^2\gamma(x - x_1) &= 0, \\ \ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + x_1 + \gamma(x_1 - x) &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

или описана системой четырех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (\varepsilon - y^2)y - p^2x - p^2\gamma(x - x_1) = 0, \\ \dot{x}_1 &= y_1, \\ \dot{y}_1 &= -\alpha y_1 - x_1 - \gamma(x_1 - x) = 0.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Здесь пары динамических переменных (x, y) и (x_1, y_1) определяют состояние осциллятора Рэлея (основного контура) и линейного диссипативного осциллятора (дополнительного контура) соответственно; ε – параметр возбуждения автоколебательной системы; α – параметр диссипации линейного осциллятора; γ – коэффициент связи между осциллятором Рэлея и линейным осциллятором; p – параметр расстройки по собственным частотам осциллятора Рэлея и линейного осциллятора.

Такие уравнения можно получить при описании, например, механической автоколебательной системы Кайдановского–Хайкина [3, 36, 154], состоящей из грузика, закрепленного на пружине и расположенного на движущейся с постоянной скоростью ленте, который взаимодействует с другим грузиком, закрепленным на пружине и расположенным на покоящейся поверхности. Радио-

физическим примером такой системы является генератор, состоящий из двух связанных колебательных контуров, один из которых возбуждается активным нелинейным элементом с отрицательной дифференциальной проводимостью.

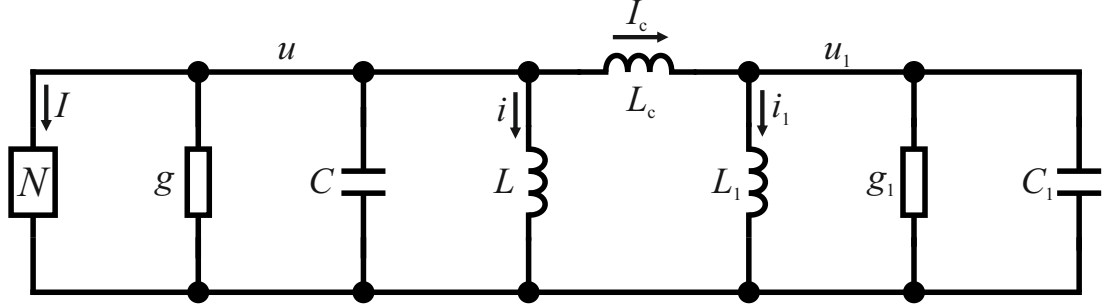


Рис. 2.1. Схема генератора на активном нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью и двумя колебательными контурами

На рисунке 2.1 представлена схема генератора на активном нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью и двумя колебательными контурами.

Исходя из приведенной схемы и используя законы Кирхгофа, запишем уравнения:

$$I + i_g + i_c + i + I_c = 0, \quad (2.3)$$

$$i_1 + i_{g1} + i_{c1} I_c = 0.$$

Вольт-амперную характеристику нелинейного элемента определим в виде

$$I = -au + bu^3. \quad (2.4)$$

Указанные на рисунке 2.1 токи и напряжения на элементах схемы связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} i_g &= gu, & i_c &= C \frac{du}{dt}, & u &= L \frac{di}{dt}, & u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt}, \\ i_{g1} &= g_1 u_1, & i_{c1} &= C_1 \frac{du_1}{dt}, & u - u_1 &= L_c \frac{dI_c}{dt}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Подставляя данные соотношения в (2.3) с учетом (2.4), запишем уравнения относительно токов i и i_1 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i}{dt^2} \left[\frac{a-g}{C} \frac{bL^2}{C} \left(\frac{di}{dt} \right)^2 \right] \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i + \frac{1}{LC} \left(\frac{L}{L_c} i - \frac{L_1}{L_c} i_1 \right) &= 0, \\ \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{g_1}{C_1} \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{L_1 C_1} i_1 + \frac{1}{L_1 C_1} \left(\frac{L_1}{L_c} i_1 - \frac{L}{L_c} i \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Переходя к новому времени, нормированным переменным и параметрам, эту систему можно представить в виде (2.1) и (2.2), где

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\beta} \frac{i}{i_0}, \quad x_1 = \sqrt{\beta} \frac{i_1}{i_0}, \quad \beta = \frac{b^2 L^2 i_0^2}{C \sqrt{L_1 C_1}}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}, \\ \tau &= \omega_{01} t, \quad p^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega_{01}^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \omega_{01}^2 = \frac{1}{L_1 C_1}, \\ \varepsilon &= \frac{a-g}{C \omega_{01}}, \quad \alpha = \frac{g_1}{\omega_{01} C_1}, \quad \gamma = \frac{L}{L_c}, \quad L_1 = L. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, изображенный на рисунке 2.1 двухконтурный генератор на нелинейном элементе с отрицательной дифференциальной проводимостью представляет собой осциллятор Рэля, взаимодействующий с линейным диссипативным осциллятором (2.1).

2.2.2 Явление затягивания частоты

Автоколебательная система (2.2) имеет четырехмерное фазовое пространство с единственным состоянием равновесия в начале координат, положение которого не зависит от параметров системы. В отсутствие связи ($\gamma = 0$) система распадается на осциллятор Рэля и линейный диссипативный осциллятор. При малых положительных значениях параметра диссипации α линейный осциллятор при любых начальных условиях демонстрирует затухающие до нуля колебания. Поведение осциллятора Рэля зависит от параметра возбуждения ε . При отрицательных значениях параметра автоколебания отсутствуют. Единственное состояние равновесия является устойчивым, причем при $\varepsilon < -2$ пред-

ставляет собой устойчивый узел и при $-2 < \varepsilon < 0$ – устойчивый фокус. Когда ε переходит через ноль, происходит возбуждение автоколебаний.

В результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа из устойчивого фокуса рождается устойчивый предельный цикл. При малых значениях параметра возбуждения ε осциллятор Рэля демонстрирует квазигармонические автоколебания. По мере увеличения ε развивается явление ангармоничности, колебания постепенно превращаются из квазигармонических в релаксационные пилообразной формы. При взаимодействии этих двух осцилляторов с очень простым поведением возникают более сложные явления, а именно формируется мультистабильность, происходит затягивание частоты и гистерезис. В пространстве параметров наблюдается более сложная бифуркационная структура, определяющая механизмы появления мультистабильности.

Рассмотрим поведение системы (2.2) в зависимости от параметра возбуждения ε и расстройки по собственным частотам p с фиксированными значениями параметра диссипации $\alpha = 0.01$ и коэффициента связи $\gamma = 0.2$.

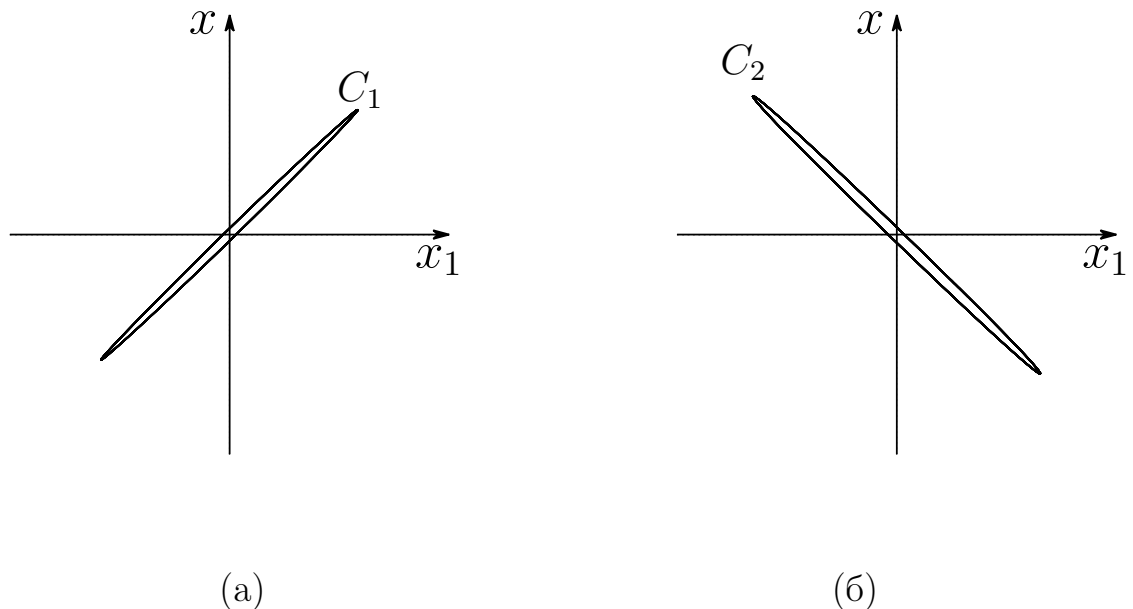


Рис. 2.2. Проекции предельных циклов C_1 (а) и C_2 (б), соответствующие синфазным и противофазным колебаниям в осцилляторах, при $\varepsilon = 0.05$, $\alpha = 0.01$, $\gamma = 0.2$, $p = 0.995$ (а), $p = 1.005$ (б)

В автоколебательной системе (2.2) с увеличением ε мягко возбуждаются квазигармонические автоколебания. Однако при значениях p немного меньше единицы рождается устойчивый предельный цикл, соответствующий синфазным колебаниям в основном и дополнительном контуре, а при p немного больше единицы – устойчивый предельный цикл, соответствующий противофазным колебаниям в контурах. Проекции этих предельных циклов, обозначенные C_1 для синфазных и C_2 для противофазных колебаний, представлены на рисунке 2.2. Эти два цикла участвуют в явлении затягивания частоты, их области существования перекрываются на плоскости параметров, что приводит к мульт-

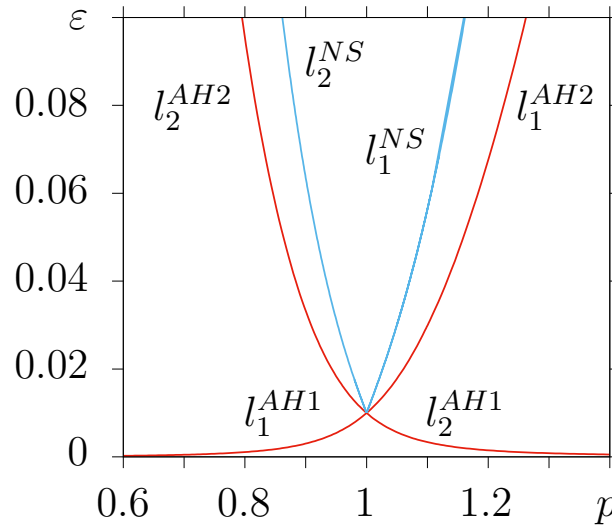


Рис. 2.3. Линии бифуркационных значений на плоскости управляющих параметров (p, ε) в диапазоне малых значений ε при фиксированных $\alpha = 0.01, \gamma = 0.2$. Линии l_1^{AH1} , l_2^{AH1} соответствуют суперкритическим бифуркациям Андронова–Хопфа. При их пересечении из состояния равновесия рождаются устойчивые циклы C_1 и C_2 соответственно. На линиях l_1^{AH2} и l_2^{AH2} из седлового состояния равновесия рождаются седловые циклы C_1 и C_2 . Линии l_1^{NS} и l_2^{NS} соответствуют субкритическим бифуркациям Неймарка–Сакера, при которых седловые циклы C_1 и C_2 становятся устойчивыми.

тистабильности и гистерезису. Рассмотрим бифуркации состояния равновесия и предельных циклов, которые определяют эти явления.

На рисунке 2.3 построены бифуркационные линии на плоскости управляющих параметров (p, ε) в диапазоне малых значений ε (от 0 до 0.1), когда автоколебания близки к гармоническим.

Ниже линий l_1^{AH1} и l_2^{AH1} автоколебания отсутствуют. В фазовом пространстве существует устойчивое состояние равновесия. Вблизи бифуркационных линий оно представляет собой устойчивый фокус: все четыре собственных значения являются комплексными с отрицательными действительными частями. Когда $p < 1$, при пересечении линии l_1^{AH1} действительные части одной пары собственных значений переходят через ноль и становятся положительными. Неподвижная точка превращается в седло, в ее окрестности мягко рождается устойчивый предельный цикл C_1 . С ростом параметра возбуждения, при пересечении линии l_2^{AH2} , состояние равновесия претерпевает еще одну суперкритическую бифуркацию Андронова–Хопфа. Действительные части еще одной пары комплексных собственных значений переходят через ноль. Из седловой неподвижной точки рождается неустойчивый предельный цикл C_2 . Он имеет четыре мультипликатора, один из которых равен единице, один действительный и по модулю меньше единицы и пара комплексных, расположенных за единичной окружностью на плоскости с координатами $(Re(\mu), Im(\mu))$. На линии l_2^{NS} этот седловой предельный цикл C_2 претерпевает субкритическую бифуркацию Неймарка–Сакера. Пара комплексно-сопряженных мультипликаторов становится чисто мнимыми, из цикла рождается седловой тор, и C_2 становится устойчивым. Теперь в фазовом пространстве сосуществуют два устойчивых предельных цикла C_1 и C_2 . Следует отметить, что точно такой же бифуркационный механизм формирования бистабильности был выявлен и описан в работах [155, 156] для генератора Ван дер Поля с дополнительным контуром. Используя укороченные уравнения для амплитуд и фаз, авторы явно продемонстрировали рождение седлового тора при возникновении бистабильности.

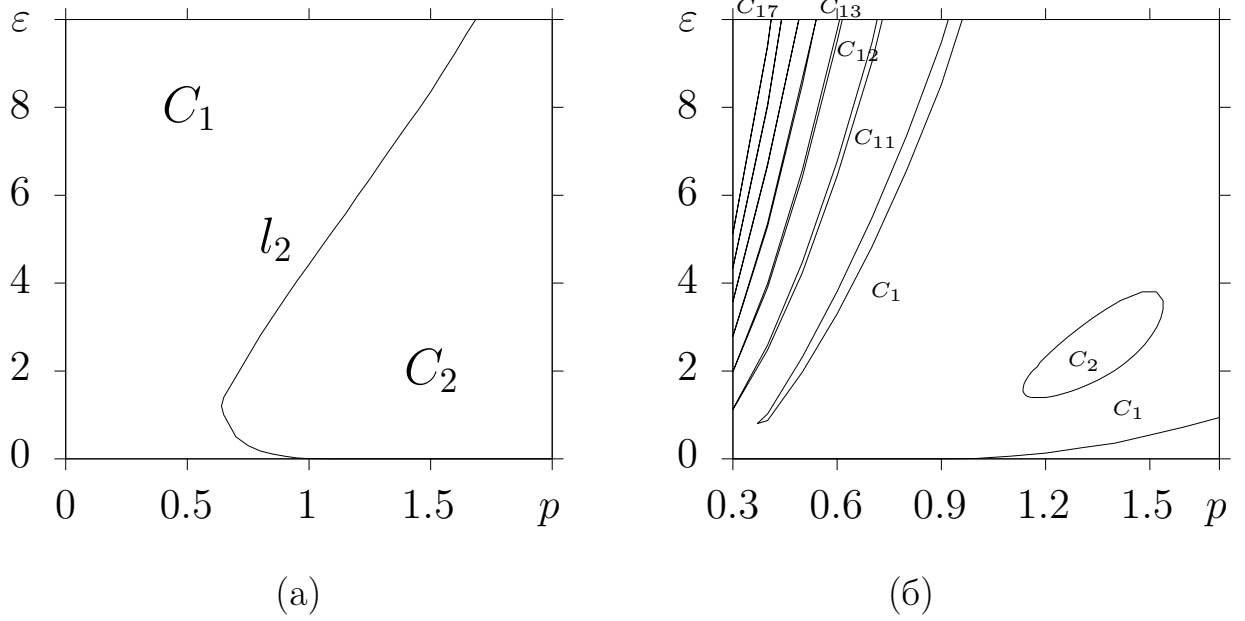


Рис. 2.4. Карты режимов на плоскости управляющих параметров (p, ε) , возникающих в системе (2.3) на базе противофазного цикла C_2 (а) и синфазного цикла C_1 (б). Линия l_2 на фрагменте (а) ограничивает область существования цикла C_2 .

Когда $p > 1$, происходят аналогичные бифуркации с той разницей, что при пересечении линии l_2^{AH1} в результате суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый предельный цикл C_2 . Вторая суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа на линии l_1^{AH2} приводит к появлению седлового цикла C_1 , который становится устойчивым при пересечении линии l_1^{NS} в результате субкритической бифуркации Неймарка–Сакера. Область бистабильности, в которой сосуществуют устойчивые предельные циклы C_1 и C_2 , гистерезиса и затягивания частоты ограничена бифуркационными линиями l_1^{NS} и l_2^{NS} .

Как видно из рисунка 2.3, эта область затягивания частоты располагается в окрестности линии $p = 1$ с отстройкой по частоте вправо и влево. При $\varepsilon = 0.1$ интервал затягивания ограничен значениями p примерно от 0.7 до 1.3. С уменьшением ε этот интервал сужается и постепенно стягивается в точку. При фиксированном значении параметра возбуждения, например, $\varepsilon = 0.08$, с изме-

нением параметра расстройки по частоте p система демонстрирует следующее поведение. Если расстройка по собственным частотам существенно отличается от единицы, например, $p = 0.6$, в фазовом пространстве существует устойчивый предельный цикл C_1 . Других устойчивых режимов здесь нет. При плавном увеличении p устойчивый цикл C_1 наблюдается до точки пересечения с линией l_1^{NS} . Затем происходит жесткий переход на режим автоколебаний с другой амплитудой и частотой, который соответствует устойчивому предельному циклу C_2 . Далее, до конца исследуемого интервала значений $p = 1.4$, наблюдается C_2 . При обратном движении по параметру p , при пересечении линии l_1^{NS} цикл C_2 бифуркаций не претерпевает, сохраняется прежний автоколебательный режим. Жесткий переход на устойчивый цикл C_1 происходит существенно дальше по параметру – при пересечении линии l_2^{NS} . Наблюдается явление гистерезиса. Здесь имеет место классическая картина затягивания частоты в генераторе с дополнительным контуром.

Таким образом, в области малых значений параметра возбуждения формирование мультистабильности происходит в результате двух последовательных суперкритических бифуркаций Андронова–Хопфа состояния равновесия и одной субкритической бифуркации Неймарка–Сакера седлового предельного цикла.

2.2.3 Бифуркационный анализ формирования мультистабильности

Далее рассмотрим поведение осциллятора Рэля, взаимодействующего с линейным осциллятором, в широкой области значений параметра возбуждения ε от 0 до 10 при расстройке по собственным частотам p от 0.3 до 1.7 на базе каждого из сосуществующих бистабильных состояний C_1 и C_2 . На рисунке 2.4

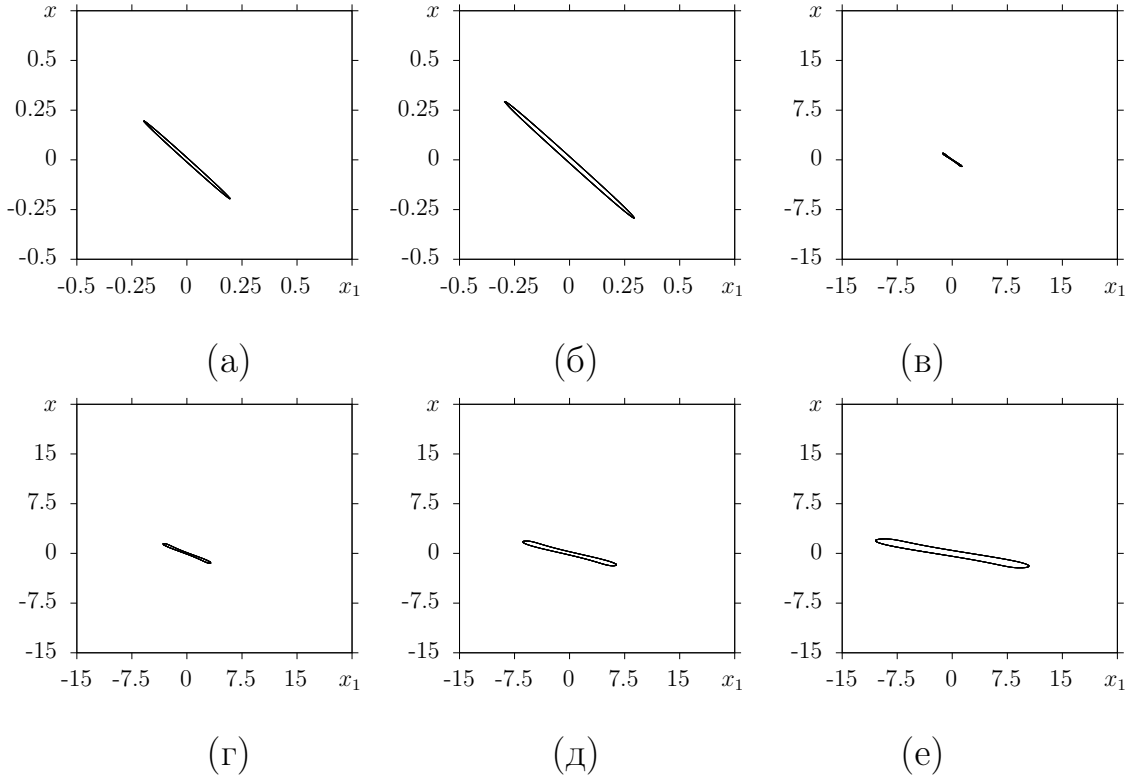


Рис. 2.5. Проекции перекрёстных фазовых портретов автоколебательных режимов, возникших на базе противофазного цикла C_2 в основном и дополнительном контурах, при фиксированном $p = 1.0$ и различных значениях параметра возбуждения ε : 0.05 (а), 0.1 (б), 1.0 (в), 2.0 (г), 3.0 (д), 4.0 (е).

построены отдельные карты режимов с наследованием начальных условий на базе каждого из указанных циклов.

Устойчивый предельный цикл C_2 существует на плоскости управляющих параметров (p, ε) в области, ограниченной линией l_2 (рисунке 2.4, а). При $p > 1$ с уменьшением параметра возбуждения ε цикл C_2 стягивается в неподвижную точку. Здесь границей является линия суперкритической бифуркации Андронова–Хопфа мягкого рождения устойчивого цикла C_2 из устойчивого фокуса. Остальная часть границы и слева, и сверху определяется линией субкритической бифуркации Неймарка–Сакера. На ней предельный цикл C_2 не исчезает, а теряет устойчивость. Изображающая точка уходит с него на устойчивый цикл C_1 . Таким образом, жесткий переход с C_2 на C_1 происходит не только с уменьшением параметра расстройки по собственным частотам, но и при увели-

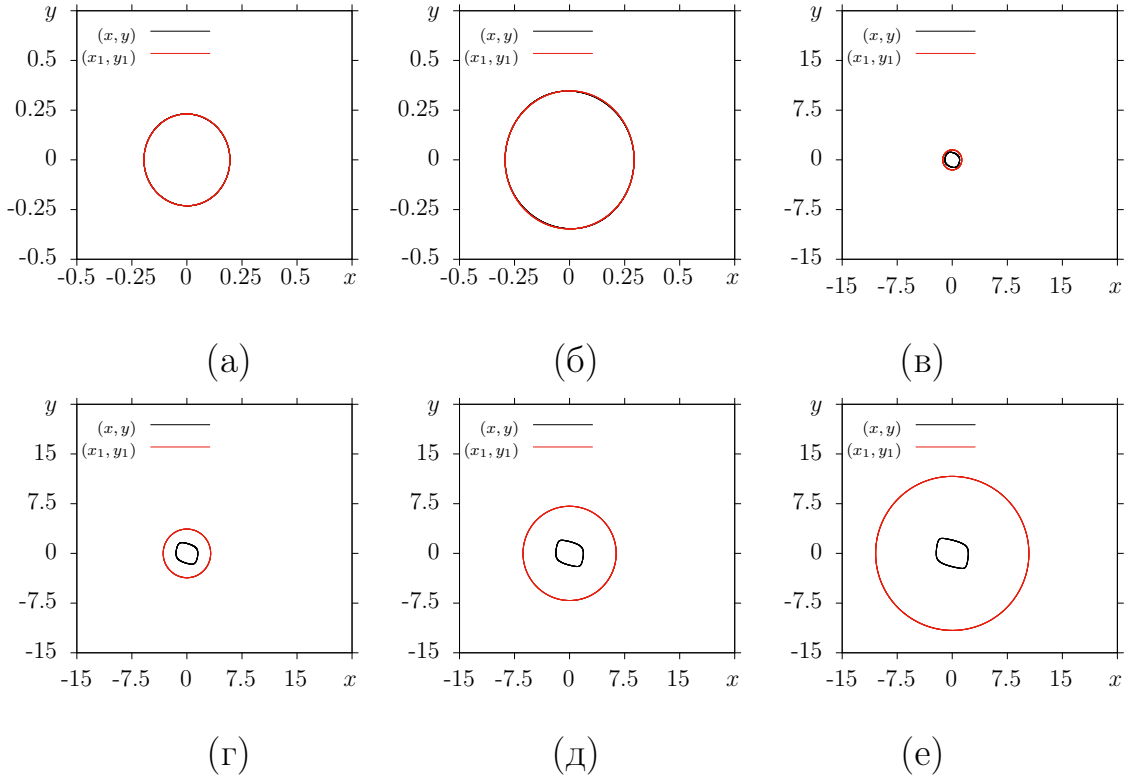


Рис. 2.6. Проекция фазовых портретов автоколебательных режимов, возникших на базе противофазного цикла C_2 в основном (черные кривые) и дополнительном (красные кривые) контурах, при фиксированном $p = 1.0$ и различных значениях параметра возбуждения ε : 0.05 (а), 0.1 (б), 1.0 (в), 2.0 (г), 3.0 (д), 4.0 (е).

чении параметра возбуждения. При вариации параметров внутри этой области устойчивый предельный цикл C_2 бифуркаций не претерпевает. Однако характеристики колебаний (форма, амплитуда, период) в основном и дополнительном контурах существенно меняются. Проекция фазовых портретов и временные реализации этого семейства автоколебательных режимов представлены на рисунках 2.5–2.7.

Видно, что при $p = 1.0$ и малых значениях параметра возбуждения ($\varepsilon = 0.05, 0.1$, рисунок 2.7, а, б) в основном и дополнительном колебательном контурах наблюдаются квазигармонические противофазные колебания практически одинаковой амплитуды. В сечении $\varepsilon = 0.05$ при изменении расстройки по частоте от $p = 0.92$ до $p = 1.7$ колебания остаются квазигармоническими,

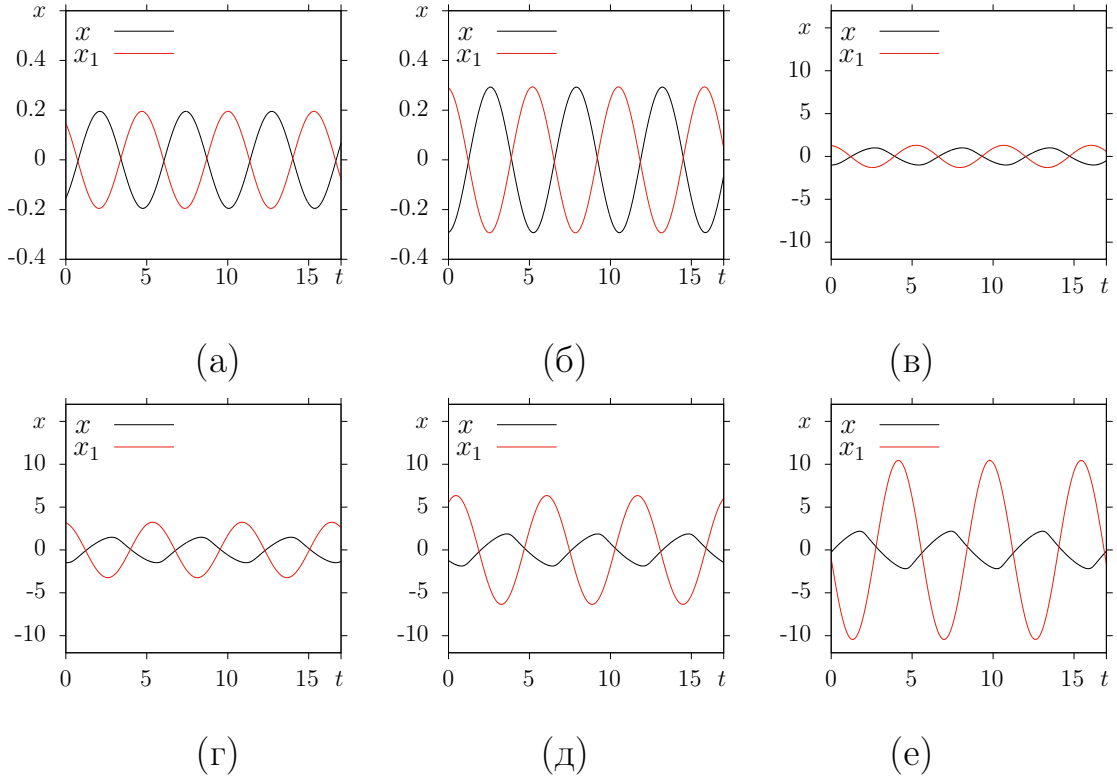


Рис. 2.7. Временные реализации автоколебательных режимов, возникших на базе противофазного цикла C_2 в основном (черные кривые) и дополнительном (красные кривые) контурах, при фиксированном $p = 1.0$ и различных значениях параметра возбуждения ε : 0.05 (а), 0.1 (б), 1.0 (в), 2.0 (г), 3.0 (д), 4.0 (е).

но меняется их период (примерно от $T = 5.5$ до $T = 3.5$) и амплитуды в основном A и дополнительном A_1 контурах. Так, при $p = 1.0$ амплитуды колебаний одинаковые: $A = A_1 = 0.19$, а при $p = 1.7$ амплитуда колебаний в основном контуре ($A = 0.13$) становится больше, чем в дополнительном ($A_1 = 0.01$).

Из рисунка 2.6 видно, что при $p = 1.0$ с увеличением параметра возбуждения ε от нижней до верхней границы области существования автоколебательный режим на базе предельного цикла C_2 заметно видоизменяется. Колебания в дополнительном контуре во всем диапазоне значений остаются квазигармоническими, а в основном контуре плавно превращаются в релаксационные пилообразной формы. Различие в интенсивности колебаний постепенно нарастает

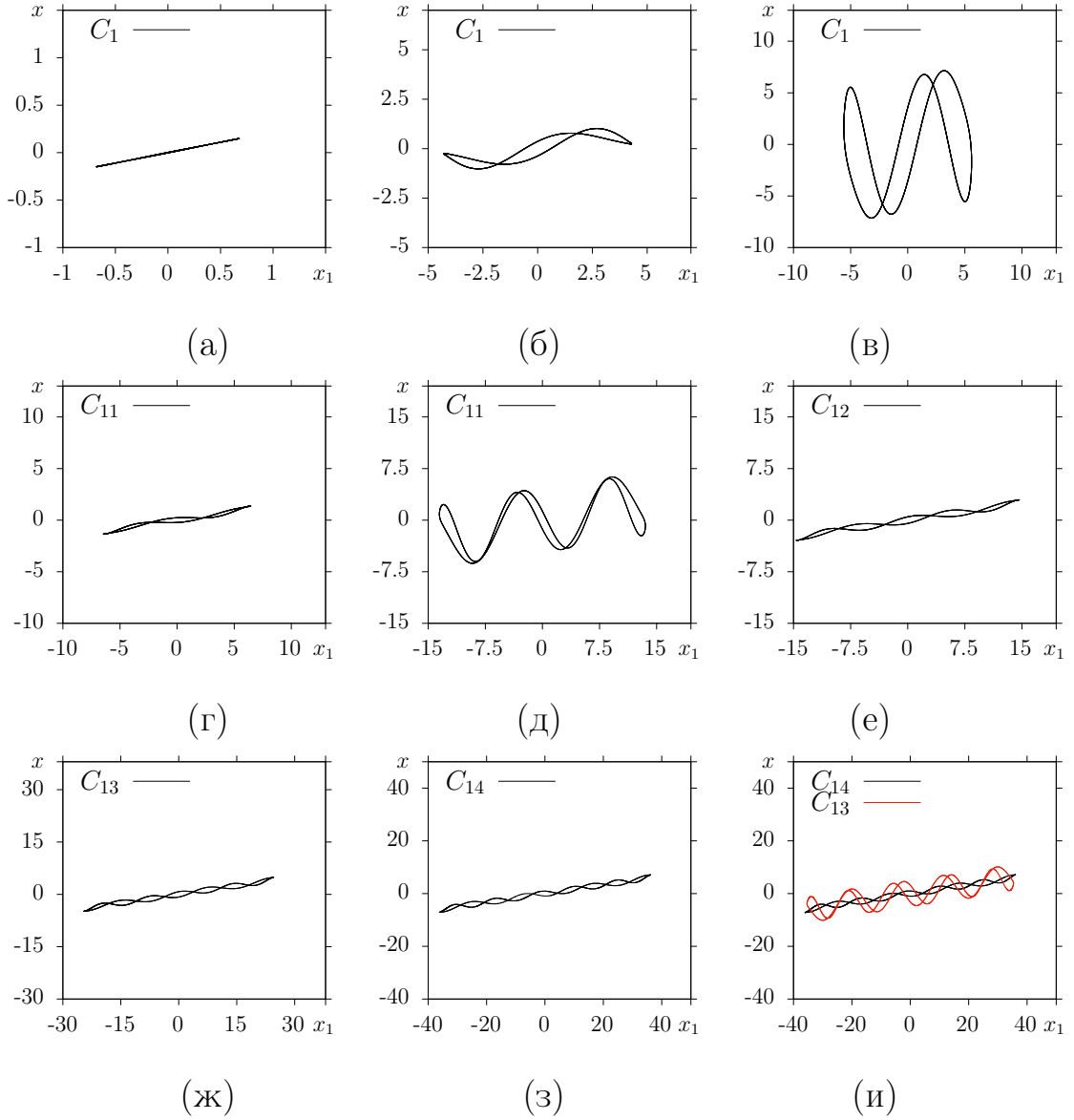


Рис. 2.8. Проекции (x_1, x) предельных циклов, возникших на базе синфазного цикла C_1 при фиксированном значении расстройки $p = 0.5$ и различных значениях параметра возбуждения ε : 0.1 (а), 1.6 (б), 2.31 (в) – цикл C_1 ; 2.32 (г), 4.35 (д) – цикл C_{11} ; 4.48 (е) – цикл C_{12} ; 6.58 (ж) – цикл C_{13} ; 8.67 (з) – цикл C_{14} ; 8.65 (и) – сосуществующие предельные циклы C_{13} (черная кривая) и C_{14} (красная кривая), образующие одну из областей бистабильности (рисунок 2.4,б).

и становится довольно существенным у верхней границы области ($A = 2.17$, $A1 = 10.39$ при $\varepsilon = 4.0$, рисунок 2.6,е).

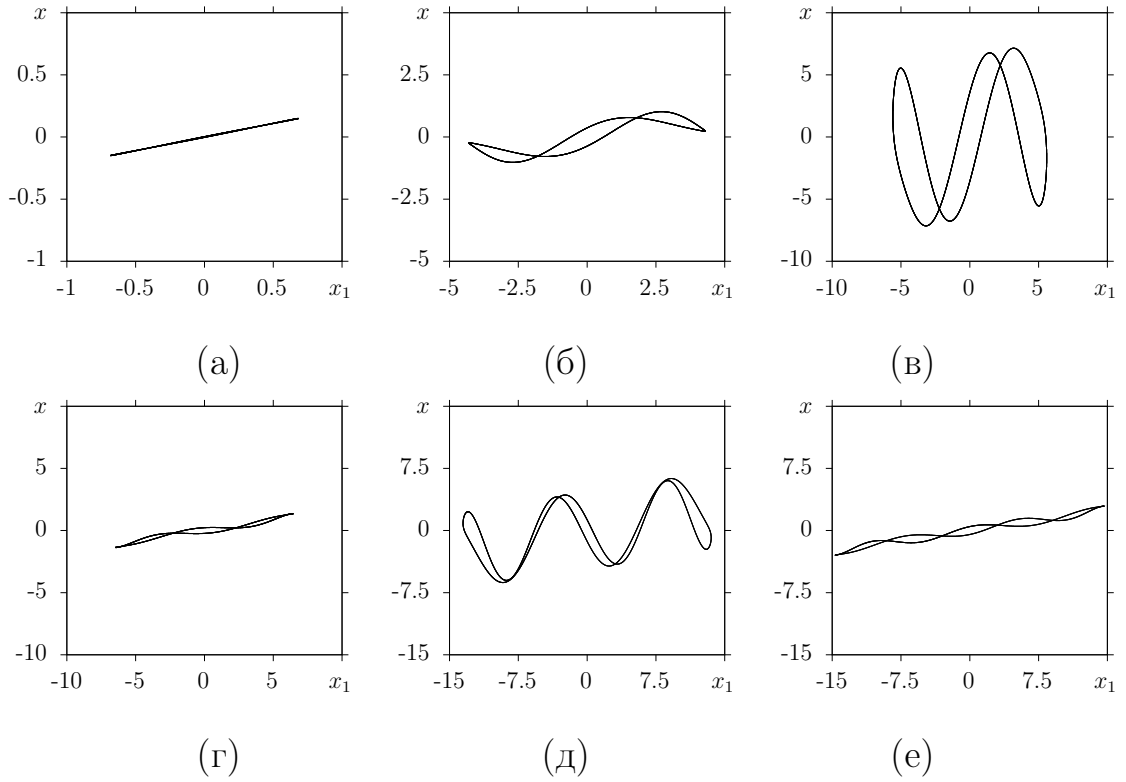


Рис. 2.9. Перекрёстные фазовые портреты предельных циклов семейства колебательных режимов, возникшего на базе цикла C_1 , при фиксированном параметре расстройки $p = 0.5$ и различных значениях параметра возбуждения ε : 0.1 (а), 1.6 (б), 2.31 (в), 2.32 (г), 4.35 (д), 4.48 (е).

Карта режимов на плоскости параметров (p, ε) на базе синфазного цикла C_1 (рисунок 2.4,б) устроена более сложным образом. В исследуемой области значений она ограничена только снизу линией l_1 . При $p < 1$ на ней происходит суперкритическая бифуркация Андронова–Хопфа. При уменьшении параметра возбуждения устойчивый предельный цикл C_1 плавно стягивается в неподвижную точку в начале координат. При $p > 1$ у нижней границы цикл имеет конечный размер. При пересечении границы происходит жесткий перескок с цикла C_1 на устойчивый цикл C_2 . Здесь происходит субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера, в результате которой C_1 теряет устойчивость и изображающая точка уходит на устойчивый C_2 . Из рисунка 2.4, б видно, что при малой расстройке (в окрестности $p = 1$) с увеличением параметра возбуждения ε вплоть до границы исследуемого диапазона предельный цикл C_1 никаких бифуркаций

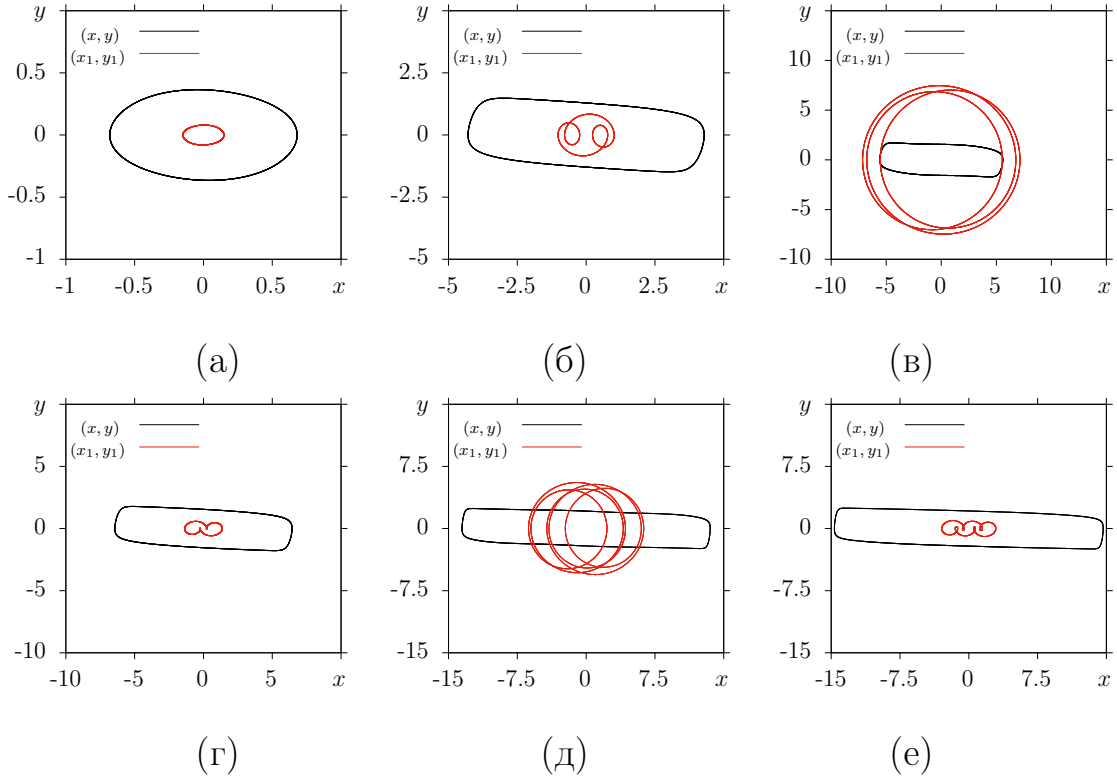


Рис. 2.10. Проекции предельных циклов семейства колебательных режимов, возникшего на базе цикла C_1 в основном (черные кривые) и дополнительном (красные кривые) контурах, при фиксированном параметре расстройки $p = 0.5$ и различных значениях параметра возбуждения ε : 0.1 (а), 1.6 (б), 2.31 (в), 2.32 (г), 4.35 (д), 4.48 (е).

не претерпевает. Однако при увеличении расстройки вправо и влево от $p = 1$ с ростом параметра возбуждения ε на базе предельного цикла C_1 наблюдаются различные бифуркации. В правой стороне плоскости параметров имеется область, ограниченная линией l_1^{NS} , при входе в которую происходит жесткий переход с цикла C_1 на устойчивый предельный цикл C_2 . На линии l_1^{NS} происходит субкритическая бифуркация Неймарка–Сакера. Рассмотрим поведение цикла C_1 при пересечении этой области снизу вверх, например, при фиксированном $p = 1.3$ с увеличением параметра возбуждения ε . При достижении линии l_1^{NS} снизу пара комплексно-сопряженных мультипликаторов выходит на единичную окружность. При пересечении границы цикл C_1 теряет устойчивость, но в его окрестности устойчивый тор не возникает, что свидетельствует

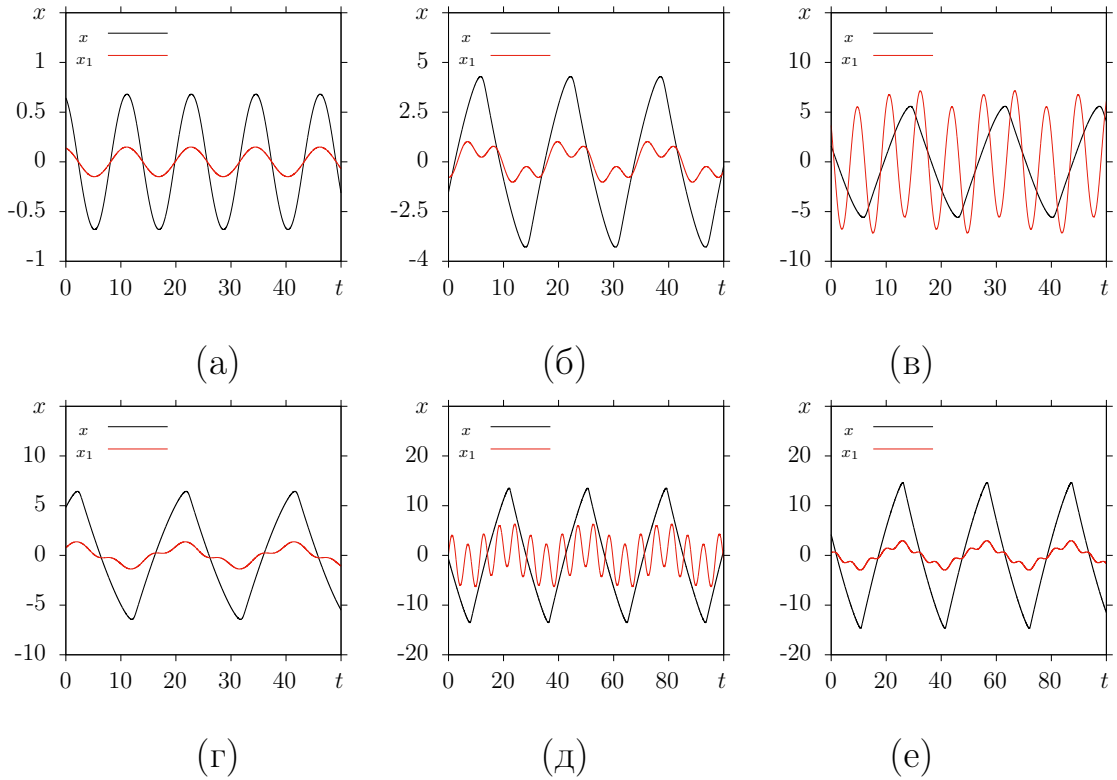


Рис. 2.11. Временные реализации семейства колебательных режимов, возникшего на базе цикла C_1 в основном (черные кривые) и дополнительном (красные кривые) контурах, при фиксированном параметре расстройки $p = 0.5$ и различных значениях параметра возбуждения ε : 0.1 (а), 1.6 (б), 2.31 (в), 2.32 (г), 4.35 (д), 4.48 (е).

о субкритической бифуркации Неймарка–Сакера. Здесь седловой тор стягивается к предельному циклу, C_1 теряет устойчивость, но не исчезает. С дальнейшим увеличением параметра возбуждения на верхней части границы l_1^{NS} пара мультипликаторов седлового цикла C_1 вновь входит в единичную окружность, предельный цикл становится устойчивым. Далее, до $\varepsilon = 10$ цикл C_1 никаких бифуркаций не демонстрирует.

Более сложное поведение на базе предельного цикла C_1 наблюдается в левой части плоскости параметров при $p < 1$ (рисунок 2.4, б). Здесь гораздо больше различных бифуркационных линий в отличие от правой части плоскости параметров. Рассмотрим, как меняются режимы колебаний на базе цикла C_1 при вариации управляющих параметров.

На рисунке 2.8 представлены проекции предельных циклов, наблюдаемые в сечении $p = 0.5$ при различных значениях параметра возбуждения. При $\varepsilon = 0.1$ все еще наблюдаются квазигармонические колебания (рисунок 2.8, а). В интервале значений ε от 0.1 до 2.31 предельный цикл C_1 бифуркаций не претерпевает. Однако по мере увеличения ε форма его постепенно (эволюционно, без бифуркаций) искажается, предельный цикл при $\varepsilon = 1.6$ (рисунок 2.8, б) и $\varepsilon = 2.31$ (рисунок 2.8, в) по своей форме сильно отличается от C_1 при $\varepsilon = 0.1$. Далее, при небольшом приращении по параметру до $\varepsilon = 2.32$ происходит жесткий переход на другой предельный цикл, проекция которого показана на рисунке 2.8, г. Обозначим его C_{11} . При обратном движении по параметру наблюдается гистерезис. Предельный цикл C_{11} существует до $\varepsilon = 1.98$. При этом значении наблюдается жесткий переход обратно на предельный цикл C_1 . В области гистерезиса сосуществуют устойчивые циклы C_{11} и C_1 . Проследим за предельным циклом C_{11} с увеличением параметра возбуждения от $\varepsilon = 2.32$. С ростом ε форма C_{11} плавно трансформируется. При $\varepsilon = 4.35$ он имеет вид, представленный на рисунке 2.8, д. При $\varepsilon = 4.48$ происходит жесткий переход на другой предельный цикл, который обозначим C_{12} . Проекция этого предельного цикла представлена на рисунке 2.8, е. При обратном движении по параметру перескок с C_{12} на C_{11} происходит при $\varepsilon = 4.24$. Бистабильные состояния C_{11} и C_{12} сосуществуют в интервале значений ε от 4.24 до 4.48. Далее цикл C_{12} претерпевает бифуркацию при $\varepsilon = 6.58$, происходит жесткий переход на C_{13} (рисунок 2.8, ж). Устойчивые предельные циклы C_{12} и C_{13} сосуществуют в интервале значений ε от 6.42 до 6.58. При $\varepsilon = 6.42$ происходит жесткий переход с цикла C_{13} на C_{12} . С увеличением ε цикл C_{13} претерпевает бифуркацию при $\varepsilon = 8.67$, происходит жесткий переход на цикл C_{14} (рисунок 2.8, з). Интервал бистабильности для этих предельных циклов ограничен значениями $\varepsilon = 8.53$ и $\varepsilon = 8.67$. На рисунке 2.8, и показаны проекции двух сосуществующих устойчивых предельных циклов C_{13} и C_{14} при $\varepsilon = 8.65$. Далее по параметру возбуждения до $\varepsilon = 10$ предельный цикл C_{14} никаких бифуркаций не демонстрирует.

Перечисленные предельные циклы и их бифуркации формируют структуру плоскости параметров (p, ε) на базе предельного цикла C_1 при $p < 1$ (см. рисунок 2.4, б). Здесь показаны «полосы бистабильности», ограниченные линиями складок для попарно сосуществующих устойчивых предельных циклов C_1 и C_{11} , C_{11} и C_{12} , C_{12} и C_{13} , C_{13} и C_{14} соответственно, по мере перемещения от одной «полосы бистабильности» к другой от центра влево. Кроме рассмотренных предельных циклов и соответствующих областей бистабильности, на плоскости параметров на рисунке 2.4, б показаны еще линии складок, ограничивающие области бистабильности для C_{14} и C_{15} , C_{15} и C_{16} , C_{16} и C_{17} .

Для более детальной иллюстрации наблюдаемых бистабильных состояний на рисунках 2.9–2.11 показаны проекции предельных циклов и временные реализации семейства автоколебательных режимов, возникшего на базе C_1 , при фиксированном значении параметра расстройки по частоте $p = 0.5$ и различных значениях ε . При слабом возбуждении $\varepsilon = 0.1$ наблюдаются квазигармонические автоколебания (рисунок 2.11, а), причем амплитуда колебаний в дополнительном контуре значительно меньше, чем в генераторе Рэлея. С ростом ε , еще до бифуркации, колебания становятся ангармоническими (рисунок 2.10, б). В генераторе они превращаются в релаксационные пилообразной формы, а в дополнительном контуре во временной реализации на периоде колебаний появляются осцилляции, что приводит к появлению петель на проекциях предельного цикла. Такая ангармоничность в дополнительном контуре с увеличением параметра развивается постепенно. Вначале мягко возникают осцилляции малой интенсивности, затем они нарастают и достигают максимальной величины вблизи точки бифуркации. Здесь интенсивность колебаний больше, чем в генераторе Рэлея (рисунок 2.10, в). При переходе через точку бифуркации происходит жесткий переход на другой устойчивый предельный цикл C_{11} (рисунок 2.11, г). С увеличением параметра этот цикл развивается аналогичным образом (рисунок 2.10, г, д), как и предыдущий. Далее происходит жесткий переход на предельный цикл C_{12} (рисунок 2.11, е) и т. д. Предельные циклы, формирую-

щие “полосы бистабильности”, отличаются друг от друга количеством петель, что обусловлено разным числом осцилляций на периоде в дополнительном контуре.

2.3 Эффекты синхронизации и гашения колебаний в системе двух генераторов Ван дер Поля с распределённой связью

2.3.1 Уравнения исследуемой системы

Объектом исследования в данном разделе является динамическая система или малый ансамбль, представляющий собой два генератора Ван дер Поля, взаимодействующих через конечное число пассивных колебательных контуров. В общем случае исследуемая система описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 - (\varepsilon - x_1^2)\dot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= \gamma_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1), \\ \ddot{x}_n + \alpha_n \dot{x}_n + \omega_n^2 x_n &= \gamma_n(\dot{x}_{n-1} - 2\dot{x}_n + \dot{x}_{n+1}), \\ \ddot{x}_N - (\varepsilon - x_N^2)\dot{x}_N + \omega_N^2 x_N &= \gamma_N(\dot{x}_{N-1} - \dot{x}_N).\end{aligned}\tag{2.8}$$

Вводя замену переменных $\dot{x} = y$, перепишем эти уравнения в форме:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1, \\
\dot{y}_1 &= (\varepsilon - x_1^2)y_1 + \omega_1^2 x_1 = \gamma(y_2 - y_1), \\
\dot{x}_i &= y_i, \\
\dot{y}_i &= -\alpha y_i + \omega_k^2 x_i = \gamma(y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \\
\dot{x}_N &= y_N, \\
\dot{y}_N &= (\varepsilon - x_N^2)y_N + \omega_N^2 x_N = \gamma(y_{N-1} - y_N).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Здесь x, y – динамические переменные, n – количество пассивных колебательных контуров в канале связи между генераторами, $i = 2, \dots, n$, $k = 2, \dots, n$, а N – количество элементов в ансамбле с учётом генераторов. Управляющим параметром в генераторе Ван дер Поля является ε , который также называется параметром возбуждения. При $\varepsilon < -2\omega_1$ собственные значения единственной особой точки $(x = 0, y = 0)$ действительные и отрицательные числа. В этом случае состояние равновесия представляет собой устойчивый узел. При $-2\omega_1 < \varepsilon < 0$ собственные значения – комплексно сопряжённые числа с отрицательной действительной частью, а состояние равновесия – устойчивый фокус. При переходе значения ε через 0 в системе происходит бифуркация Андронова-Хопфа и возникают автоколебания, амплитуда которых нарастает пропорционально $\sqrt{\varepsilon}$. Собственные значения при $0 < \varepsilon < 2\omega_1$ – комплексно сопряжённые числа с положительной действительной частью, а состояние равновесия – неустойчивый фокус. По мере ухода от точки бифуркации рождения цикла квазигармонические автоколебания превращаются в ангармонические. Дальнейший рост параметра ε приводит к релаксационным колебаниям. При $\varepsilon > 2\omega_1$ собственные значения являются действительными положительными числами, а состояние равновесия представляет собой неустойчивый узел. Собственная частота автоколебаний генератора или собственная частота колебаний

контура обозначена как ω , γ – сила связи между осцилляторами, α – параметр диссипации пассивного колебательного контура [146].

Проводится численный анализ динамики связанных автогенераторов при различном количестве пассивных колебательных контуров в канале связи и для различного уровня диссипации данных осцилляторов. Начальные условия выбирались случайным образом.

2.3.2 Случай одного пассивного колебательного контура в канале связи

Рассмотрим случай взаимодействия автогенераторов через один пассивный колебательный контур, т.е. $N = 3$ в системе уравнений (2.9). Зафиксируем управляющий параметр генераторов Ван дер Поля $\varepsilon = 0.1$. Положим собственную частоту автоколебаний первого генератора ω_1 , а также собственную частоту колебаний пассивного колебательного контура ω_2 равными 1.0. Рассмотрим динамику системы при изменении собственной частоты второго генератора $\omega_N \in [0.5, 1.5]$ и величины силы связи $\gamma \in [0, 1.0]$ для случая малой диссипации пассивного колебательного контура $\alpha = 0.01$.

Для получения бифуркационной картины, отражающей динамику системы 2.9 для $N = 3$, построим бифуркационные линии на плоскости параметров (ω_N, γ) . Соответствующая бифуркационная диаграмма приведена на рисунке 2.12. Бифуркационная диаграмма для двух генераторов Ван дер Поля с мгновенной связью (без контура) показана в главе 1 на рисунке 1.3. Для простоты сравнения бифуркационных диаграмм все обозначения бифуркационных линий и областей сохраняются.

Как видно из рисунка 2.12, имеют место 4 основных области, соответствующие разным режимам динамики. Область IV образуется линиями l_{SN} ,

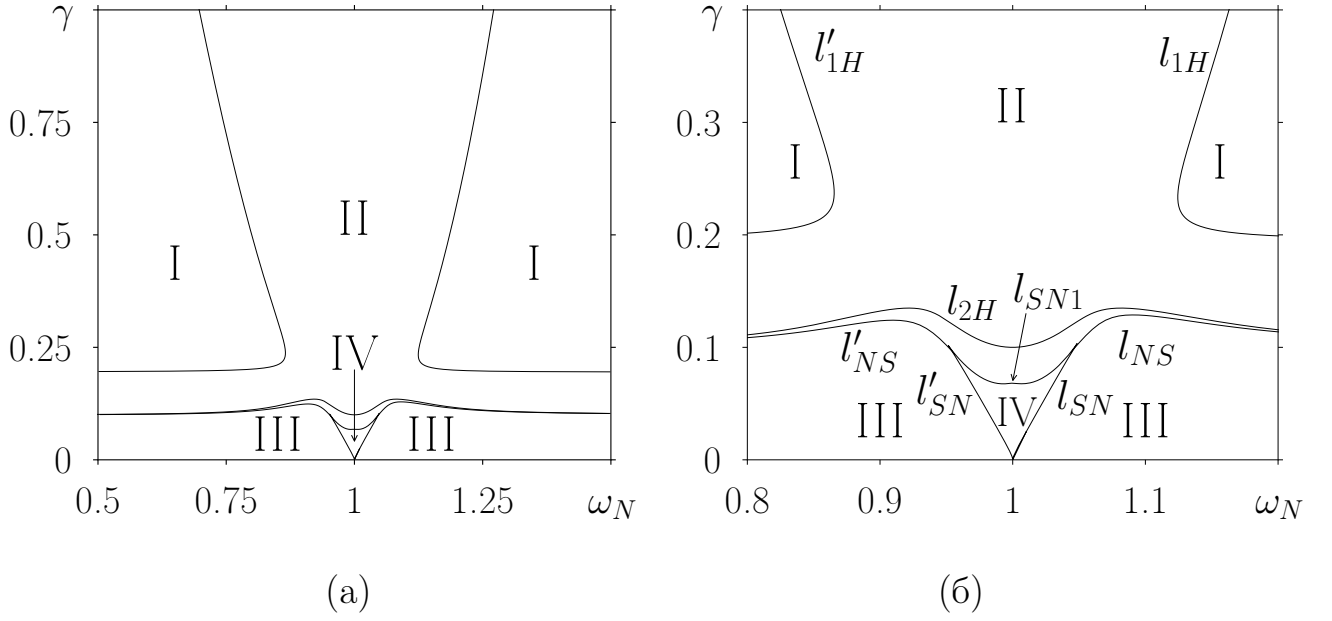


Рис. 2.12. Линии бифуркационных значений вблизи основной области синхронизации на плоскости параметров (ω_N, γ) для системы (2.9) при $N = 3$ и $\alpha = 0.01$. Рисунок б представляет собой увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на рисунке а для $\gamma \in [0, 0.4]$ и $\omega_N \in [0.8, 1.2]$. Обозначения: I – область гашения колебаний, II и IV – области синхронизации автоколебаний, III – область квазипериодических колебаний, l_{SN} и l'_{SN} – линии седло-узловой бифуркации, l_{SN1} – линия седло-узловой (касательной) бифуркации, l_{NS} и l'_{NS} – линии бифуркации Неймарка-Сакера, l_{1H} и l'_{1H} – линии суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа, l_{2H} – линия суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0, i = 1, \dots, N - 1$.

l'_{SN} и l_{SN1} , отвечающими седло-узловым бифуркациям, и соответствует режиму синхронизации автоколебаний. В данном случае, при значениях параметров из области IV, в системе (2.9) наблюдаются неустойчивая точка E , три седловых предельных цикла C_2, C_3 и C_4 , и один устойчивый предельный цикл C_1 (рисунок 2.13(а,г)). Область III ограничивается линиями l'_{NS} и l'_{SN} , соответствующими бифуркации Неймарка-Сакера и седло-узловой бифуркации, соответственно, а также l_{NS} и l_{SN} , отвечающими бифуркации Неймарка-Сакера и

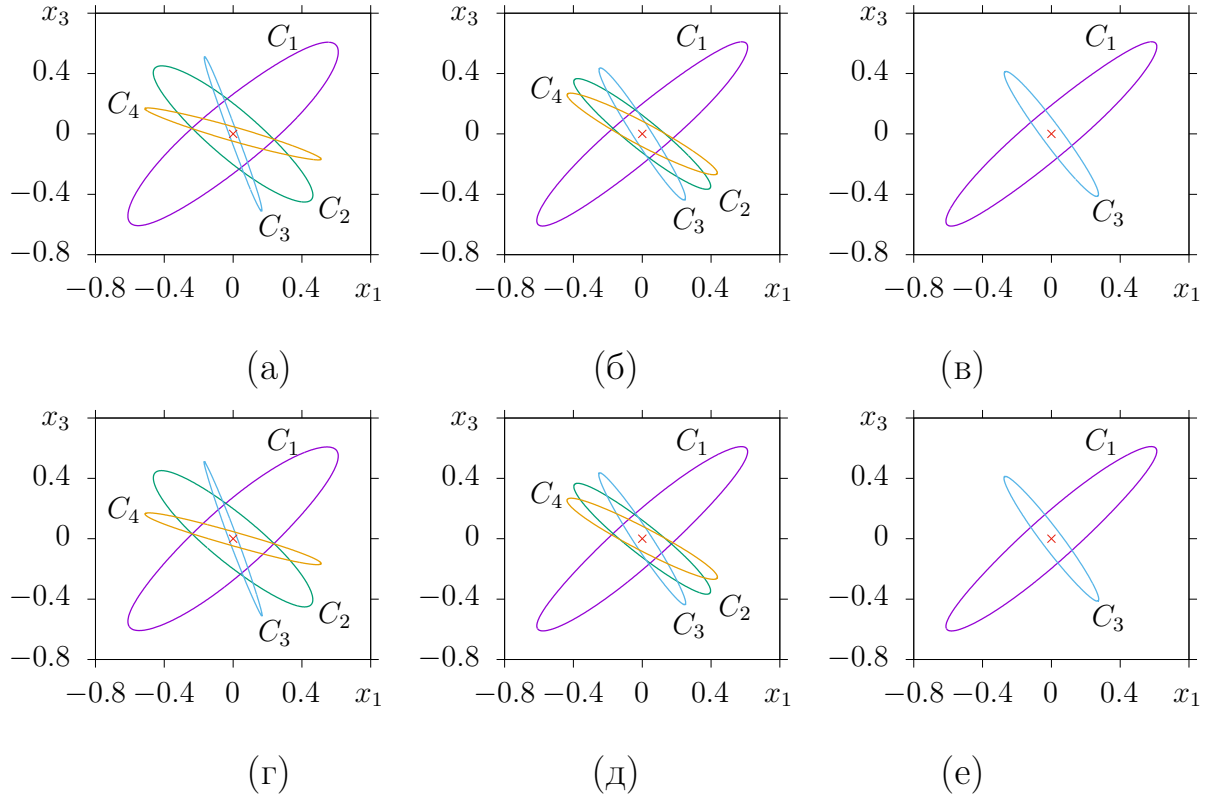


Рис. 2.13. Проекция устойчивого предельного цикла C_1 и седловых циклов C_2, C_3, C_4 на плоскость (x_1, x_3) при различных значениях расстройки: (а-в) $\omega_N = 0.99$ и (г-е) $\omega_N = 1.01$, и силы связи: (а, г) $\gamma = 0.05$, (б, д) $\gamma = 0.065$ и (в, е) $\gamma = 0.068$. Красный крестик обозначает точку равновесия E . Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $N = 3$, $\alpha = 0.01$.

седло-узловой бифуркации, соответственно. В области III реализуется режим квазипериодических колебаний.

Рассмотрим переход из области IV в область III. Зафиксируем значение коэффициента силы связи $\gamma = 0.05$ и будем изменять частоту второго генератора. При переходе из области IV в область III неустойчивый предельный цикл C_2 , так же как и в системе (1.2), сливается с устойчивым предельным циклом C_1 и исчезает за точкой бифуркации, в результате чего рождается притягивающий тор T_1 . Неустойчивые предельные циклы C_3 и C_4 , а также неустойчивая неподвижная точка E при переходе из области IV в область III не претерпевают бифуркаций. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма, соответствующая переходу из области IV в область III, представлена на рисунке 2.14(а).

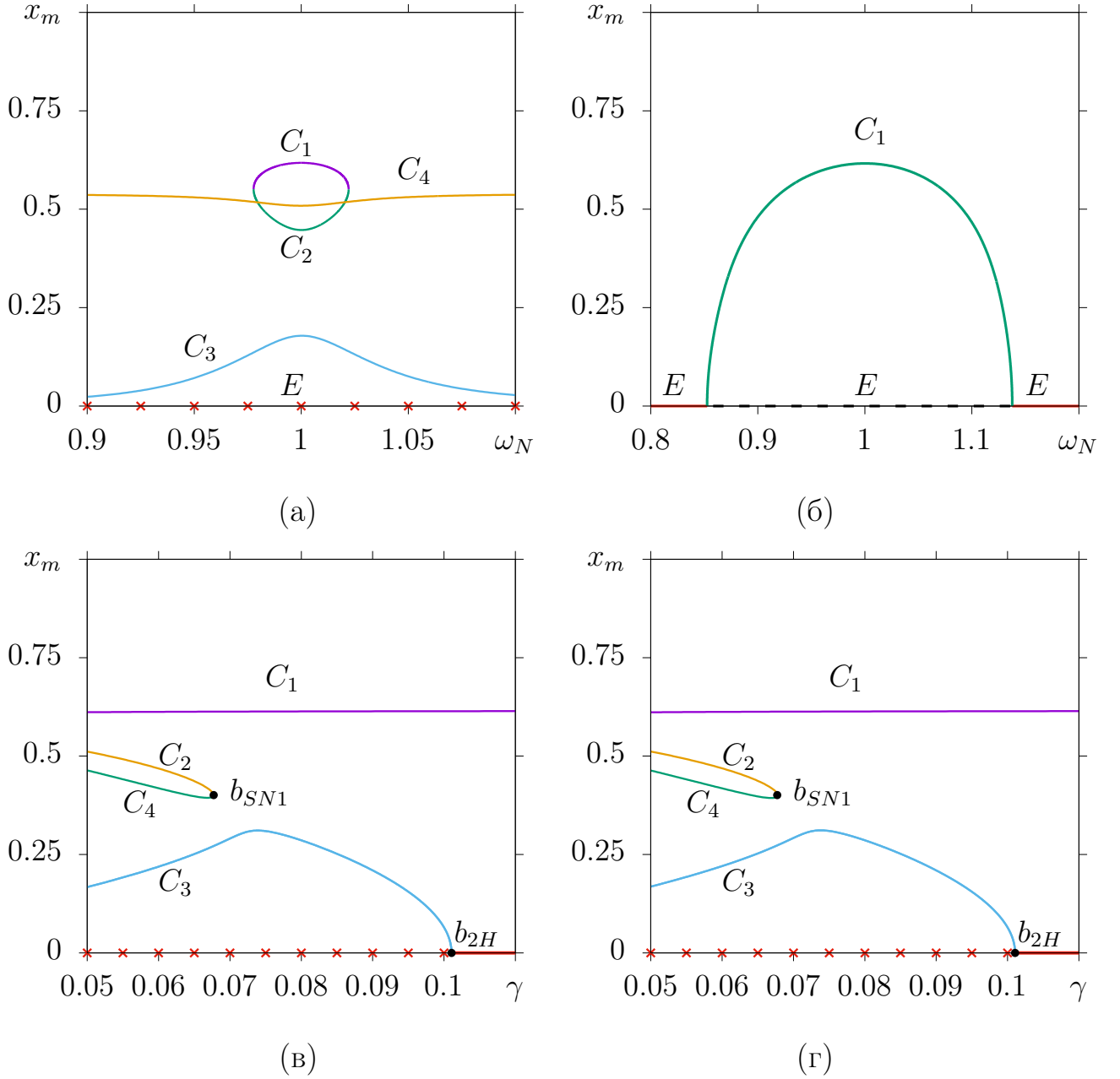


Рис. 2.14. Бифуркационные диаграммы предельных циклов C_1, C_2, C_3, C_4 и неподвижной точки E для системы (2.9) в зависимости от расстройки ω_N при (а) $\gamma = 0.05$ и (б) $\gamma = 0.3$, а также от коэффициента связи γ при (в) $\omega_N = 0.99$ и (г) $\omega_N = 1.01$. Обозначения: b_{SN1} – точка седло-узловой бифуркации. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $N = 3$, $\alpha = 0.01$.

Таким образом, фазовый портрет изучаемой системы в области III составляют неустойчивая неподвижная точка E , неустойчивые предельные циклы C_3 и C_4 , и притягивающий тор T_1 (рисунок 2.15).

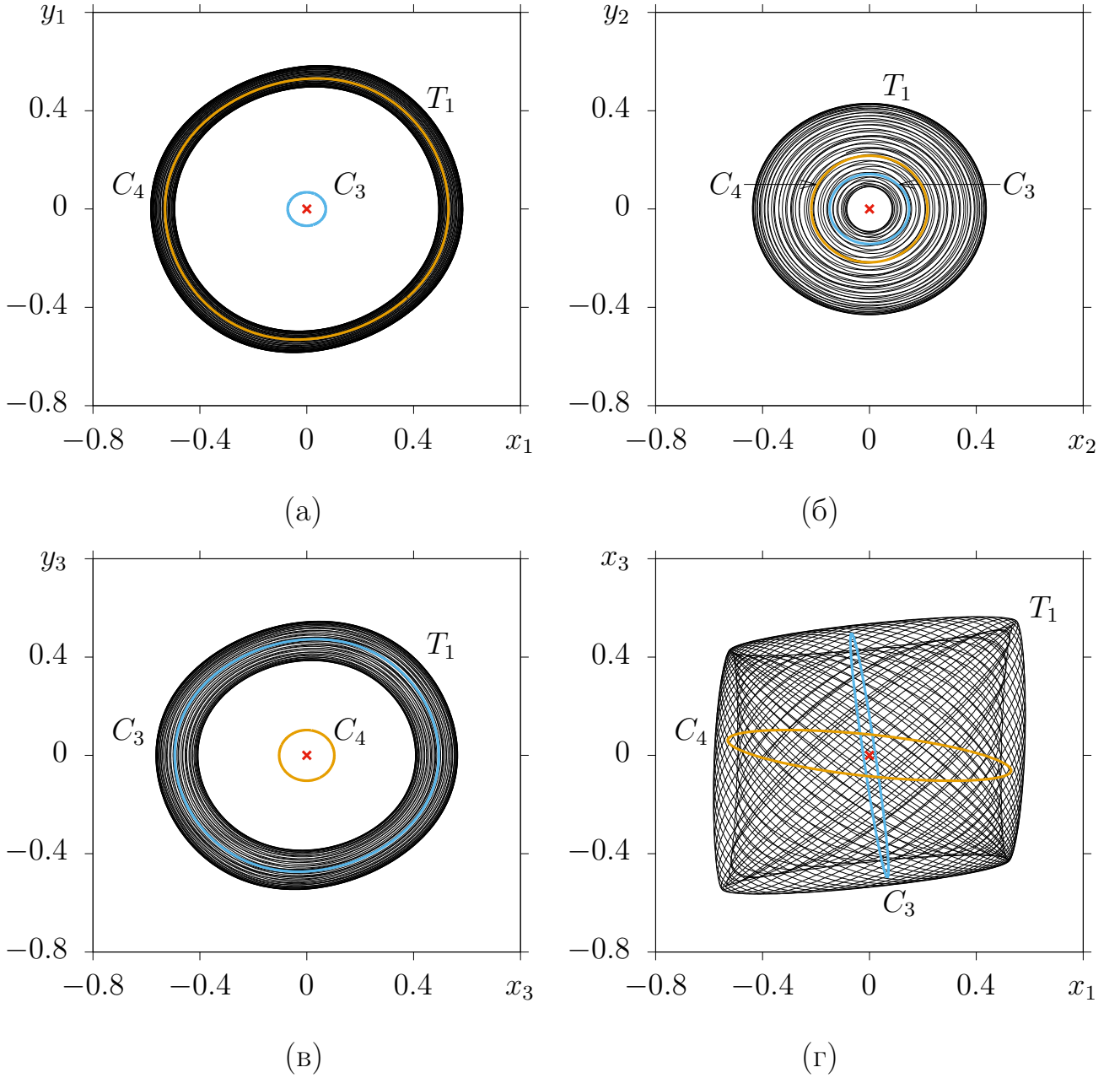


Рис. 2.15. Фазовые (а-в) и перекрёстный фазовый (г) портреты системы (2.9) в области III при значениях собственной частоты второго генератора $\omega_N = 0.95$ и силы связи $\gamma = 0.05$. Красным крестиком обозначена неподвижная точка E .

Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $N = 3$, $\alpha = 0.01$.

Область II на бифуркационной диаграмме (рисунок 2.12) образуется линиями бифуркации Андронова-Хопфа l'_{1H} и l_{1H} , а также l_{SN1} , соответствующей седло-узловой бифуркации, и отвечает режиму синхронизации автоколебаний. Для рассмотрения перехода из области IV в область II выберем два значения

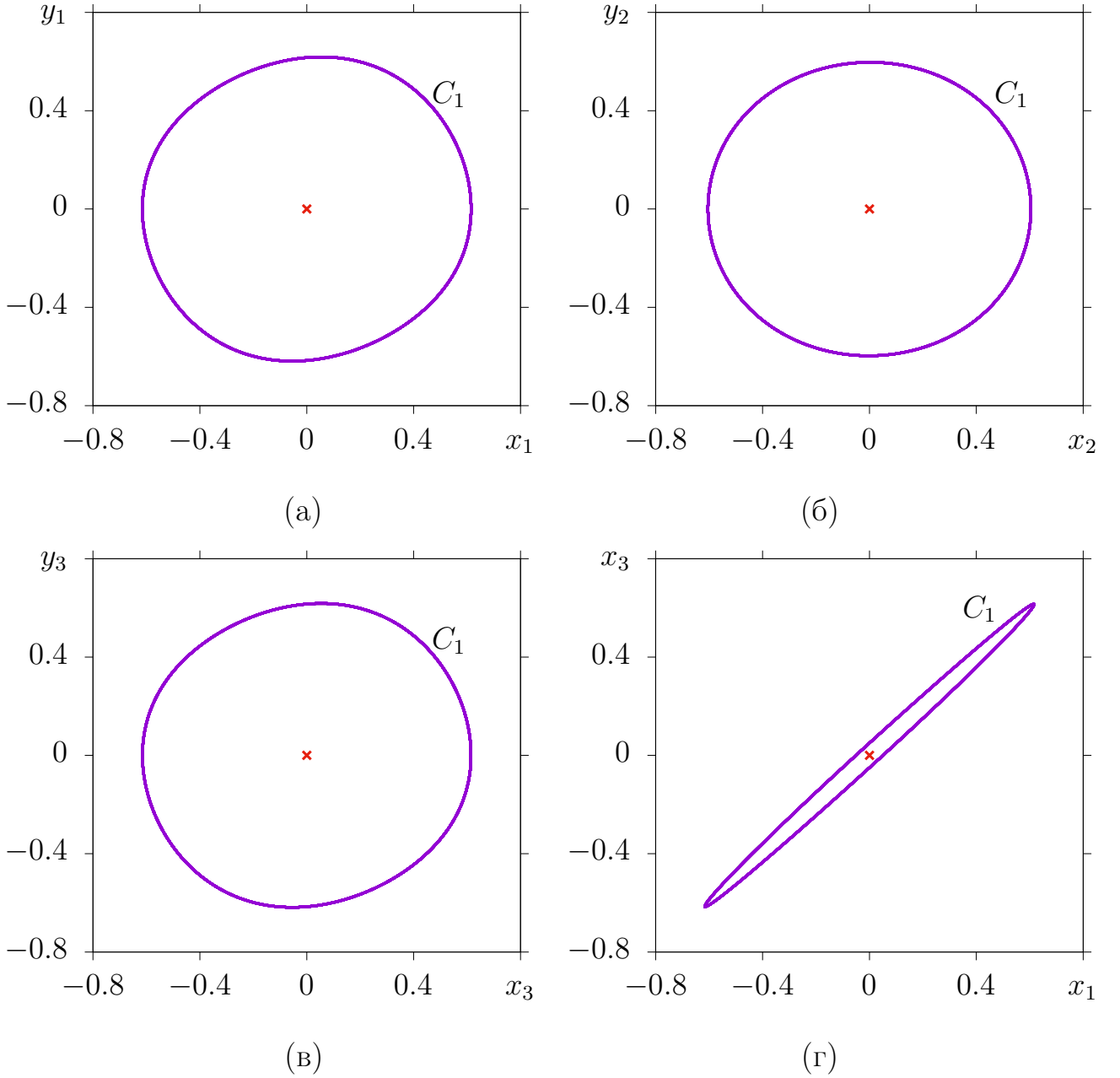


Рис. 2.16. Фазовые (а-в) и перекрёстный фазовый (г) портреты системы (2.9) в области II при значениях собственной частоты второго генератора $\omega_N = 0.99$ и силы связи $\gamma = 0.25$. Красным крестиком обозначена неподвижная точка E .

Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $N = 3$, $\alpha = 0.01$.

частотной расстройки ($\omega_N = 0.99$ и $\omega_N = 1.01$) и будем изменять величину силы связи. В случае перехода из области IV в область II неустойчивый предельный цикл C_4 сливается с неустойчивым предельным циклом C_2 на линии l_{SR} и исчезает за точкой бифуркации. Устойчивый предельный цикл C_1 бифур-

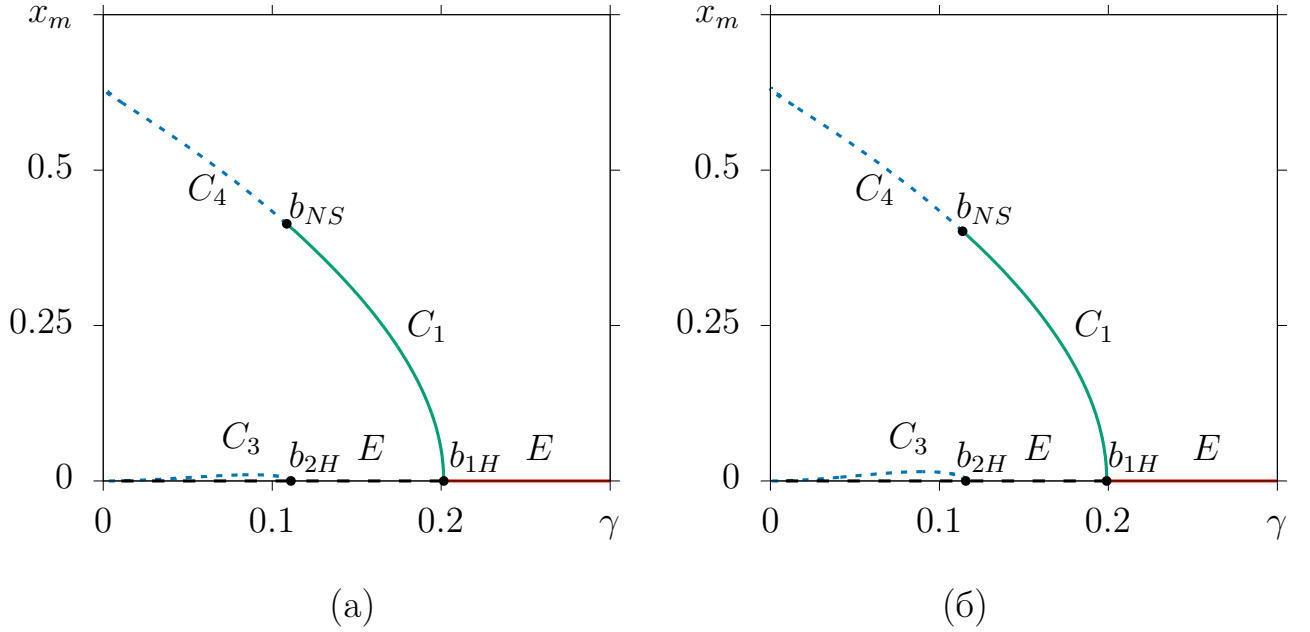


Рис. 2.17. Бифуркационные диаграммы предельных циклов C_1, C_2, C_3, C_4 и неподвижной точки E для системы (2.9) в зависимости от силы связи γ при

(а) $\omega_N = 0.8$ и (б) $\omega_N = 1.2$. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$,

$$i = 1, \dots, N - 1, N = 3, \alpha = 0.01.$$

каций не претерпевает. На линии l_{2H} неустойчивый предельный цикл C_3 плавно стягивается в точку E . Фазовый портрет системы в области, ограниченной линиями l_{SR} и l_{2H} , составляют устойчивый предельный цикл C_1 , неустойчивый предельный цикл C_3 и неустойчивая неподвижная точка E (рисунок 2.13(в,е)). Фазовый портрет системы в области II выше линии l_{2H} включает устойчивый предельный цикл C_1 и неустойчивую неподвижную точку E (рисунок 2.16). Одопараметрические бифуркационные диаграммы, соответствующие переходу из области IV в область II, представлены на рисунке 2.14(в,г).

Линии бифуркаций Андронова-Хопфа l'_{1H} и l_{1H} ограничивают область I (рисунок 2.12), в которой имеет место эффект гашения колебаний. Зафиксируем значение коэффициента связи $\gamma = 0.3$ и будем изменять частоту второго генератора, чтобы пронаблюдать переход из области II в область I. По мере приближения к границе области II амплитуда устойчивого предельного цикла C_1 уменьшается, пока цикл не стянется в устойчивую точку E на линии l_{1H} .

Происходит субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая переход из области II в область I, представлена на рисунке 2.14(б).

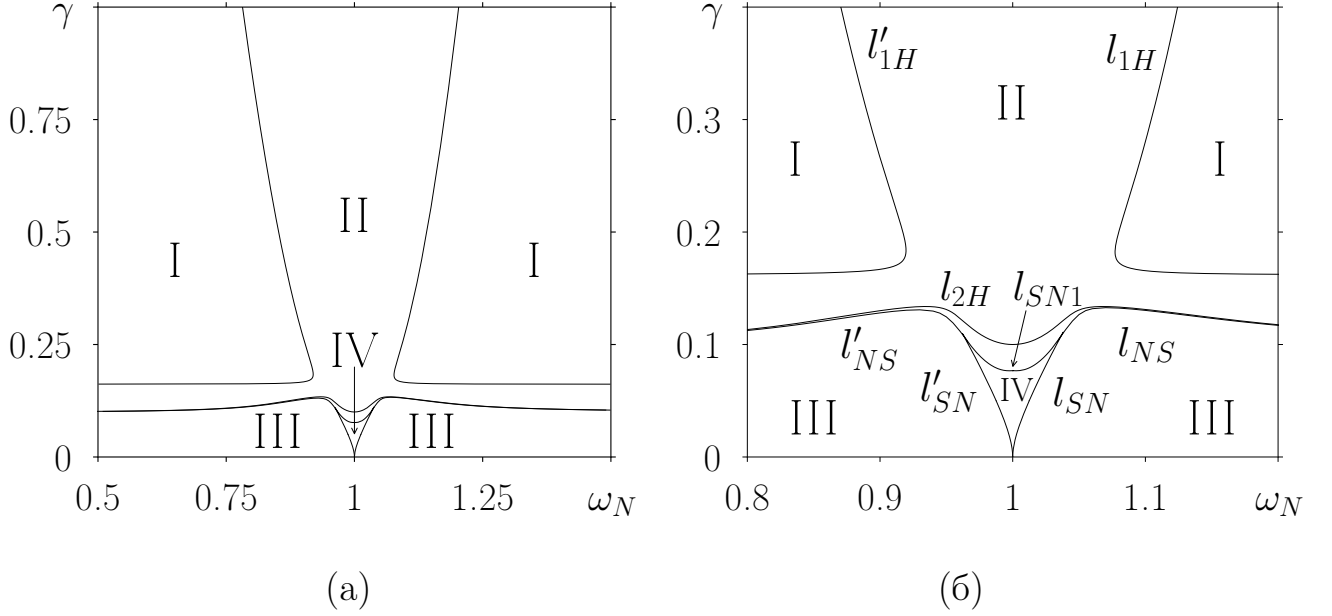


Рис. 2.18. Линии бифуркационных значений вблизи основной области синхронизации на плоскости параметров (ω_N, γ) для системы (2.9) при $N = 3$ и $\alpha = 0.1$. Рисунок б представляет собой увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на рисунке а для $\gamma \in [0; 0.4]$ и $\omega_N \in [0.8; 1.2]$. Обозначения: I – область гашения колебаний, II и IV – области синхронизации автоколебаний, III – область квазипериодических колебаний, l_{SN} и l'_{SN} – линии бифуркации седло-узел, l_{SN1} – линия бифуркации седло-узел (касательной), l_{NS} и l'_{NS} – линии бифуркации Неймарка-Сакера, l_{1H} и l'_{1H} – линии суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа, l_{2H} – линия суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0, i = 1, \dots, N - 1$.

Из бифуркационной диаграммы на рисунке 2.12) видно, что, как и в случае появления запаздывания в связи в системе (1.2), вдоль линии, разделяющей области квазипериодических колебаний (III) и гашения колебаний (I), появляется канал, при переходе в который из области I устойчивая точка E становится

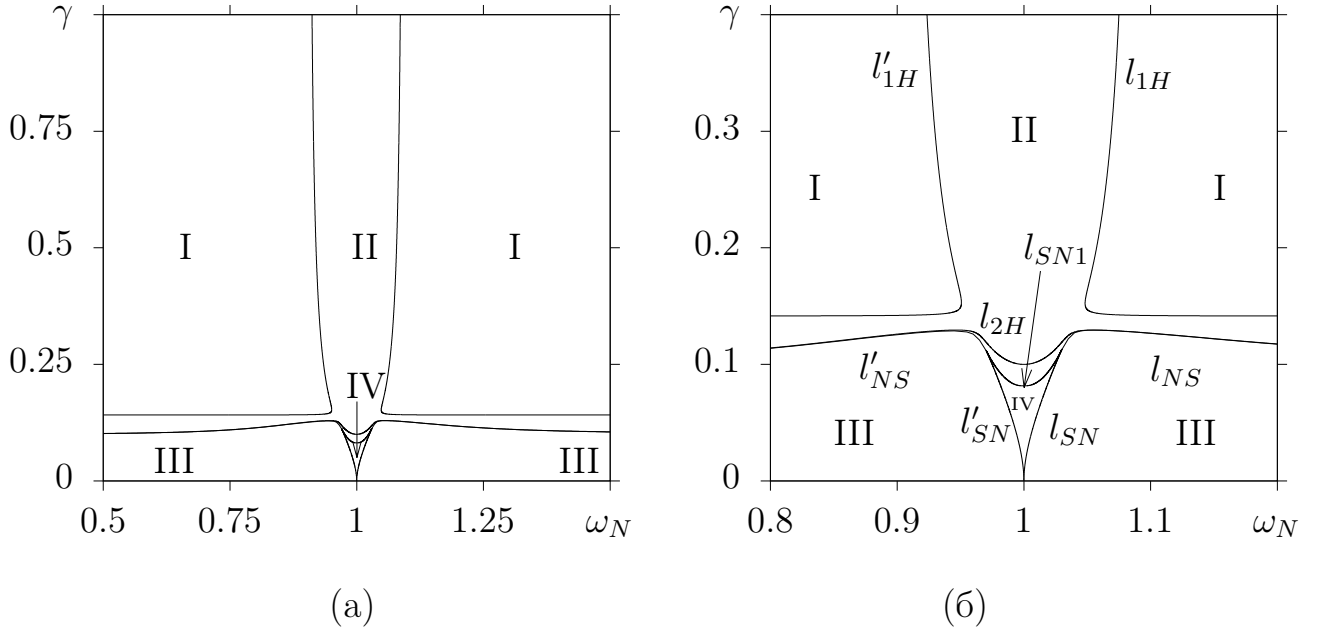


Рис. 2.19. Линии бифуркационных значений вблизи основной области синхронизации на плоскости параметров (ω_N, γ) для системы (2.9) при $N = 3$ и $\alpha = 0.2$. Рисунок б представляет собой увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на рисунке а для $\gamma \in [0; 0.4]$ и $\omega_N \in [0.8; 1.2]$. Обозначения: I – область гашения колебаний, II и IV – области синхронизации автоколебаний, III – область квазипериодических колебаний, l_{SN} и l'_{SN} – линии бифуркации седло-узел, l_{SN1} – линия бифуркации седло-узел (касательной), l_{NS} и l'_{NS} – линии бифуркации Неймарка-Сакера, l_{1H} и l'_{1H} – линии суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа, l_{2H} – линия суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0, i = 1, \dots, N - 1$.

неустойчивой, а в системе возникает устойчивый предельный цикл C_1 (рисунок 2.17). На нижней границе “канала” ($\gamma \approx 0.108584$ при $\omega_N = 0.8$) устойчивый предельный цикл C_1 теряет устойчивость, превращаясь при этом в C_4 , а в его окрестности мягко рождается притягивающий тор T_1 . Также чуть выше нижней границы “канала”, на линии l_{2H} ($\gamma \approx 0.111096$ при $\omega_N = 0.8$) рождается неустойчивый предельный цикл C_3 .

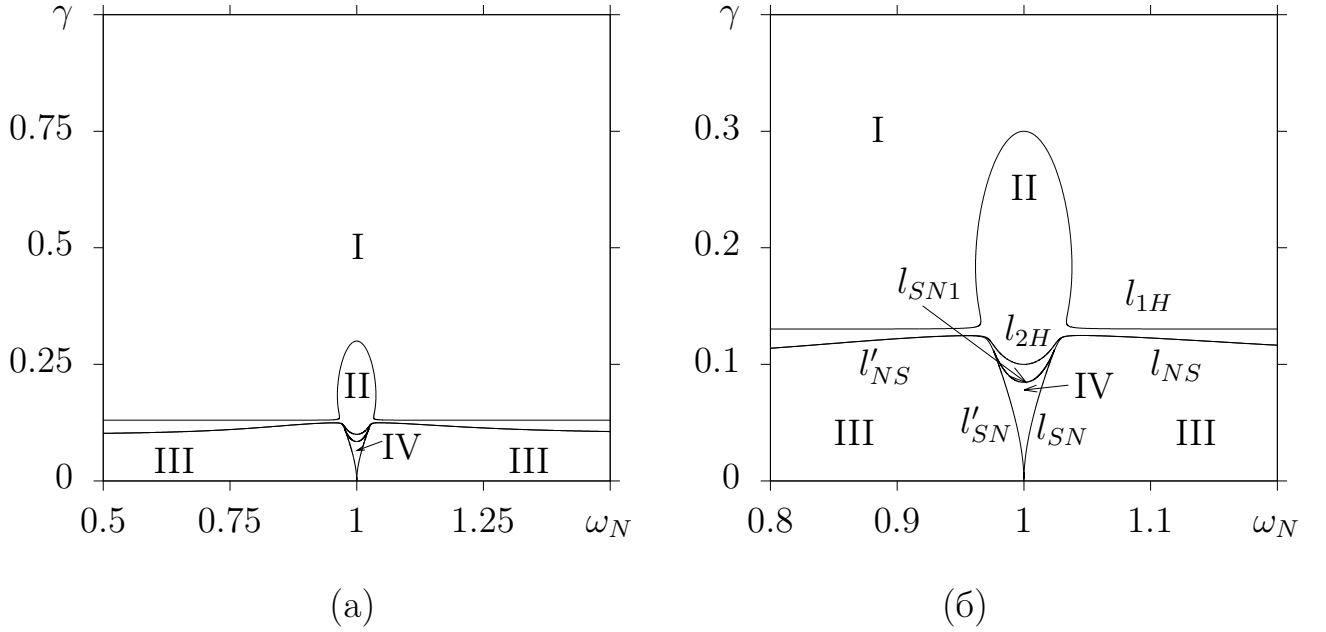
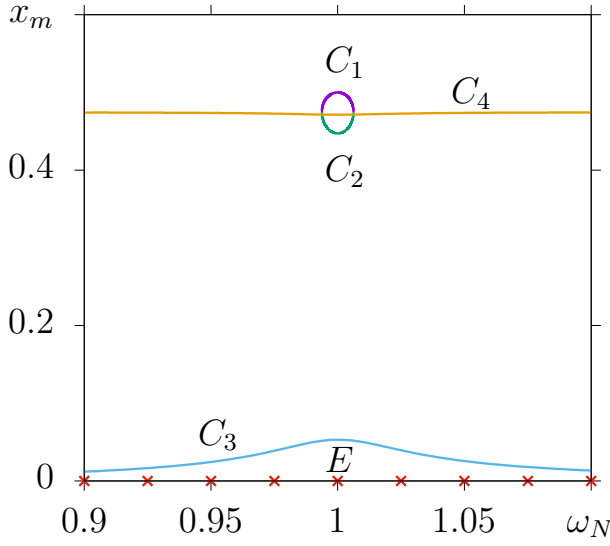


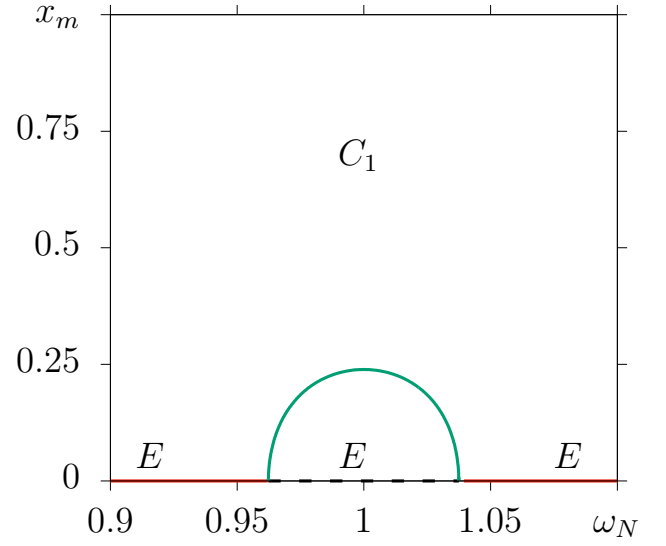
Рис. 2.20. Линии бифуркационных значений вблизи основной области синхронизации на плоскости параметров (ω_N, γ) для системы (2.9) при $N = 3$ и $\alpha = 0.3$. Рисунок б представляет собой увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на рисунке а для $\gamma \in [0; 0.4]$ и $\omega_N \in [0.8; 1.2]$. Обозначения: I – область гашения колебаний, II и IV – области синхронизации автоколебаний, III – область квазипериодических колебаний, l_{SN} и l'_{SN} – линии бифуркации седло-узел, l_{SN1} – линия бифуркации седло-узел (касательной), l_{NS} и l'_{NS} – линии бифуркации Неймарка-Сакера, l_{1H} – линия суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа, l_{2H} – линия суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0, i = 1, \dots, N - 1$.

Возникает логический вопрос, как изменится бифуркационная картина динамики исследуемой системы (2.9) (при $N = 3$) при увеличении степени диссипации в колебательном контуре α ? Рассчитанные и построенные на плоскости параметров (ω_N, γ) бифуркационные диаграммы приведены на рисунках 2.18, 2.19 и 2.20 для $\alpha = 0.1, 0.2$ и 0.3 , соответственно.

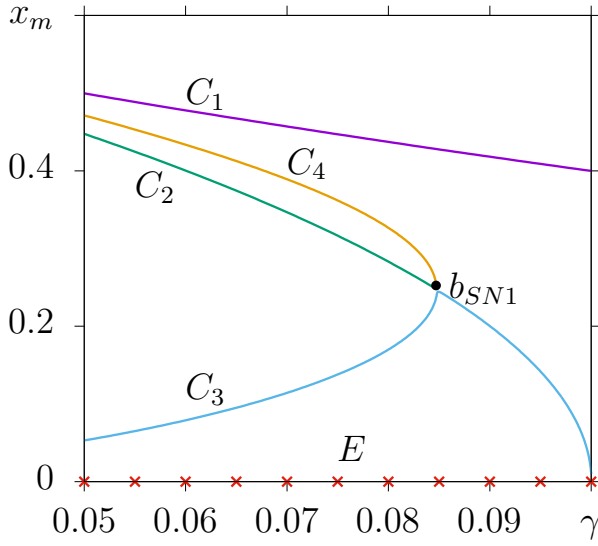
Как видно из диаграмм 2.18 и 2.19, при увеличении параметра диссипации линии бифуркационных значений l'_{1H} и l_{1H} , соответствующие бифуркации



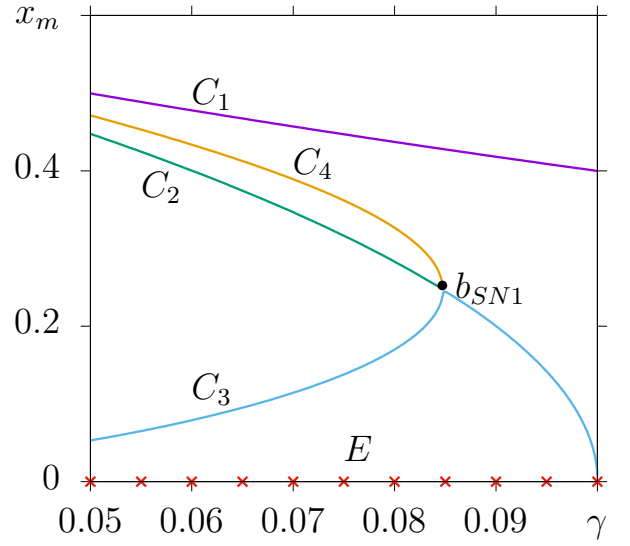
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 2.21. Бифуркационные диаграммы предельных циклов C_1, C_2, C_3, C_4 и неподвижной точки E для системы (2.9) в зависимости от расстройки ω_N при (а) $\gamma = 0.05$ и (б) $\gamma = 0.2$, а также от коэффициента связи γ при (в) $\omega_N = 0.999$ и (г) $\omega_N = 1.001$. Обозначения: b_{SN1} – точка седло-узловой бифуркации. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $N = 3$, $\alpha = 0.3$.

Андропова-Хопфа, постепенно сближаются, за счёт чего область I гашения колебаний расширяется, а область синхронизации II существенно сужается по па-

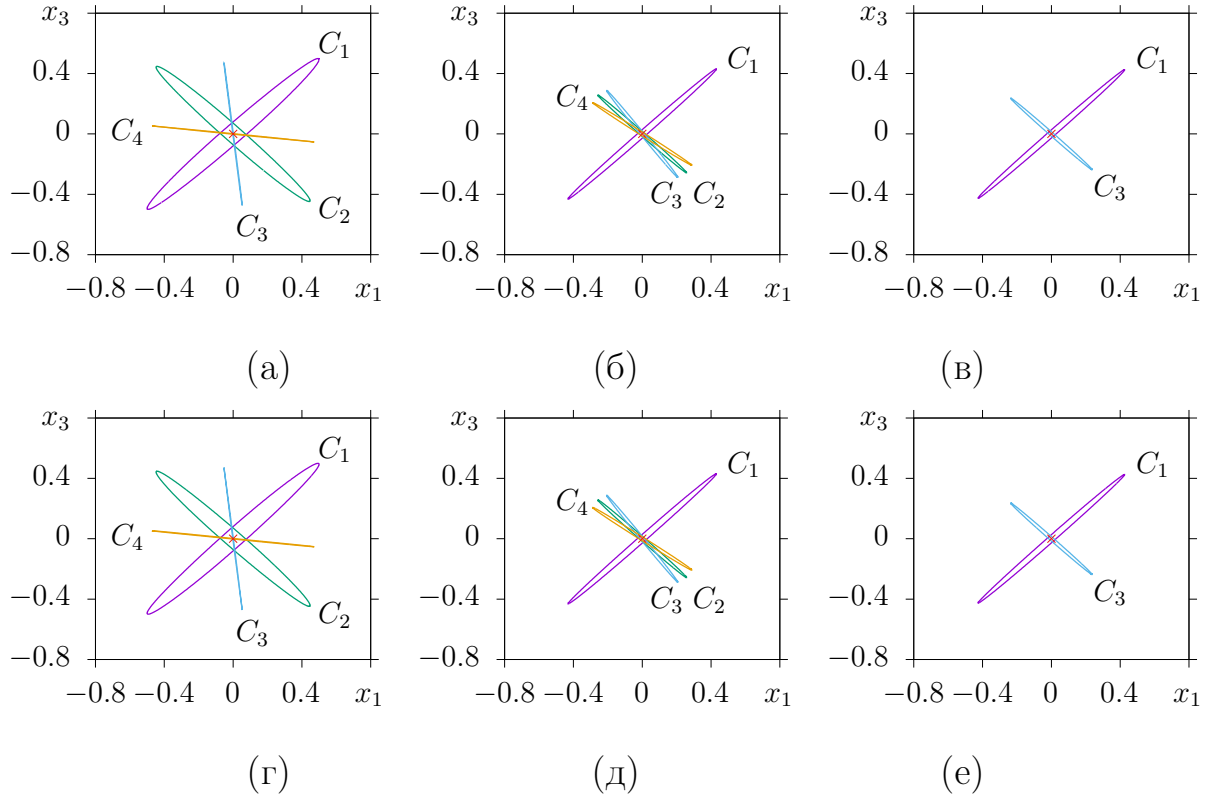


Рис. 2.22. Проекция устойчивого предельного цикла C_1 и седловых циклов C_2, C_3, C_4 на плоскость (x_1, x_3) при различных значениях расстройки: (а-в) $\omega_N = 0.999$ и (г-е) $\omega_N = 1.001$, и силы связи: (а, г) $\gamma = 0.05$, (б, д) $\gamma = 0.0835$ и (в, е) $\gamma = 0.086$. Красный крестик обозначает точку равновесия E . Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $N = 3$, $\alpha = 0.3$.

параметру расстройки ω_N . В этом случае ширина “канала” синхронного режима, находящегося между областями I и III, также уменьшается относительно величины силы связи между осцилляторами. Увеличение параметра диссипации α также приводит к уменьшению области синхронизации IV на бифуркационных диаграммах. В то же время проведенные исследования показали, что характер переходов между областями с увеличением параметра диссипации пассивного колебательного контура не меняется по сравнению с рассмотренным выше случаем очень малого уровня потерь.

Бифуркационная картина режимов динамики системы (2.9) (при $N = 3$) претерпевает существенное изменение при значении параметра диссипации контура $\alpha = 0.3$ (рисунок 2.20). Как видно из диаграммы, линии бифуркации

Андропова-Хопфа l'_{1H} и l_{1H} , сливаются в одну единую линию l_{1H} , образуя таким образом “шапочку”, ограничивающую область синхронизации II. Причем размер областей синхронного режима II и IV значительно уменьшился как по параметру расстройки, так и по величине силы связи. Для иллюстрации на рисунке 2.22 приведены проекции устойчивого и седловых предельных циклов для двух значений параметра расстройки и трех значений силы связи, соответствующих области IV. На рисунке 2.21 приведены однопараметрические бифуркационные диаграммы, показывающие эволюцию предельных циклов и неподвижной точки исследуемой системы в зависимости от расстройки для двух значений силы связи из областей IV и II (2.21(а,б), соответственно) и в зависимости от силы связи в области IV для двух значений ω_N .

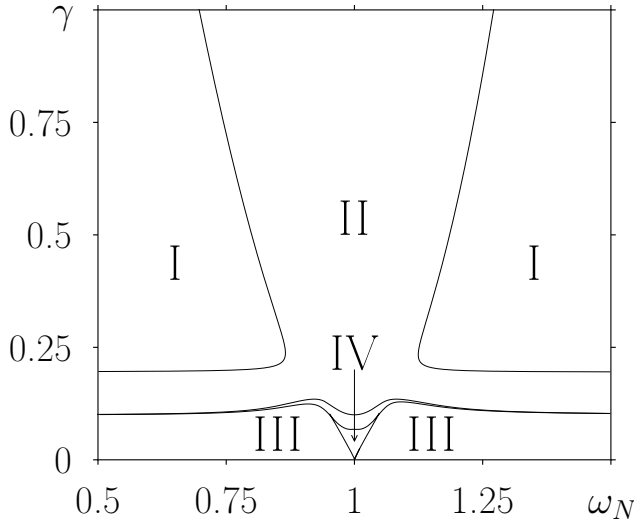
Как следует из диаграммы 2.20, большую часть плоскости параметров (ω_N, γ) занимает область I, соответствующая амплитудному гашению. Теперь независимо от расстройки по собственным частотам при больших значениях силы коэффициента связи (в рассматриваемом случае, начиная примерно от $\gamma = 0.3$) режимы синхронизации не наблюдаются, происходит гашение автоколебаний. Аналогичный эффект с аналогичной бифуркационной структурой основной области синхронизации и амплитудного вымирания реализуется в идентичных генераторах Ван дер Поля при диссипативной запаздывающей связи [145]. Впервые эффект гашения автоколебаний в двух идентичных генераторах с одинаковыми собственными частотами, индуцированный запаздывающей связью, был отмечен в работе [160]. Полученные в данной работе результаты показывают, для того чтобы в двух идентичных генераторах с увеличением связи произошло амплитудное вымирание, не обязательно использовать канал связи с временным запаздыванием, а достаточно включить линейный осциллятор с определенной добротностью.

2.3.3 Взаимодействие генераторов Ван дер Поля посредством цепочки высокодобротных пассивных колебательных контуров

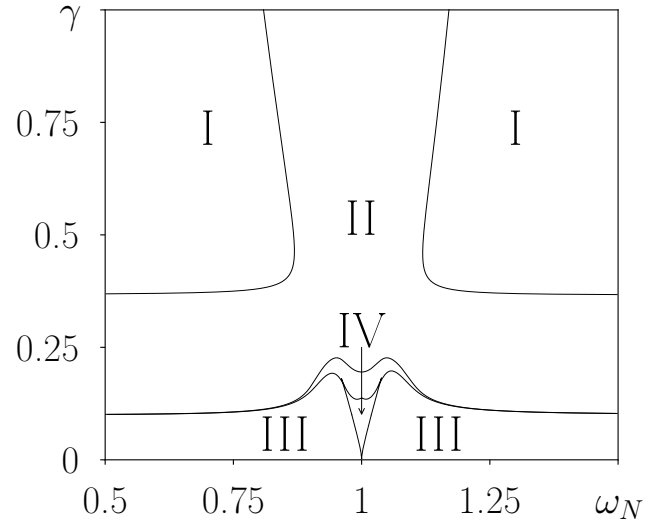
Проследим за изменениями бифуркационной картины по мере увеличения количества пассивных колебательных контуров в связи между двумя генераторами Ван дер Поля. Рассмотрим случай высокодобротных контуров с фиксированным значением параметра диссипации $\alpha = 0.01$ при изменении собственной частоты автоколебаний второго генератора в пределах $\omega_N \in [0.5, 1.5]$ и значения силы связи в интервале $\gamma \in [0, 1.0]$.

На рисунке 2.23(а–г) представлены бифуркационные диаграммы для случаев связи через один, три, пять и семь пассивных колебательных контуров, соответственно. Из рисунка следует, что с увеличением количества осцилляторов в связи между генераторами Ван дер Поля, на плоскости параметров (ω_N, γ) динамика системы остаётся представленной теми же четырьмя основными областями динамических режимов, что и в случае наличия небольшого запаздывания в слагаемом связи при непосредственной связи между генераторами. Новых областей динамических режимов не возникает. Из сравнения представленных диаграмм видно, что с увеличением числа пассивных линейных осцилляторов в линии связи канал синхронной динамики, расположенный между областями I и III, существенно расширяется относительно изменения величины силы связи независимо от расстройки. При этом область квазипериодических колебаний III остается неизменной, а область амплитудного вымирания I уменьшается и ее нижняя граница смещается вверх, в область больших значений силы связи.

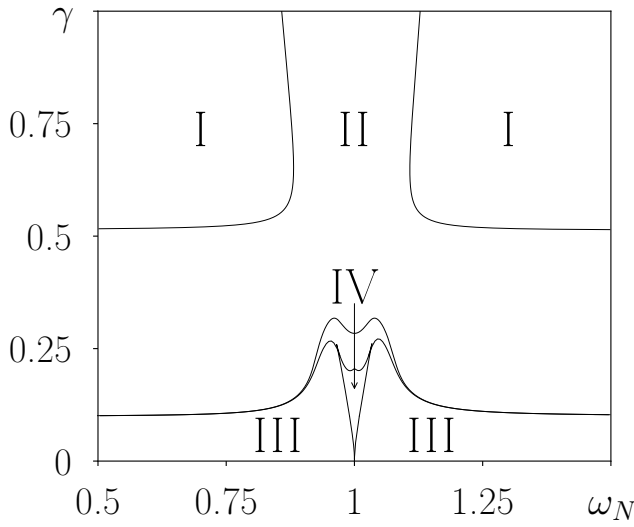
Рассмотрим подробнее бифуркационную картину для случая $N = 12$ (два генератора Ван дер Поля связаны через цепочку 9 пассивных осцилляторов), представленную на рисунке 2.24. Область синхронизации автоколебаний IV рас-



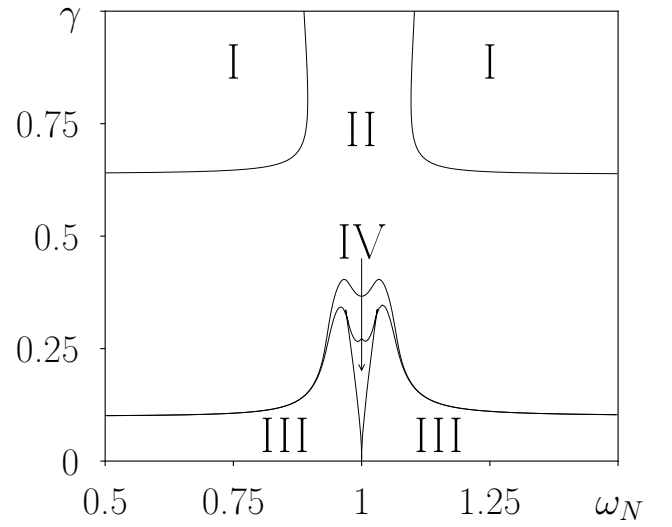
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 2.23. Линии бифуркационных значений вблизи основной области синхронизации на плоскости параметров (ω_N, γ) для системы (2.9) при $\alpha = 0.01$ для $N = 3$ (1 контур) (а), $N = 5$ (3 контура) (б), $N = 7$ (5 контуров) (в) и $N = 9$ (7 контуров) (г). Обозначения областей и бифуркационных линий такие же как на рисунке 2.20. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$.

полагается между линиями седло-узловых бифуркаций l_{SN}, l'_{SN} . Как видно из рисунков 2.23 и 2.24, с увеличением количества пассивных колебательных контуров в связи между генераторами, область IV сужается и вытягивается вдоль

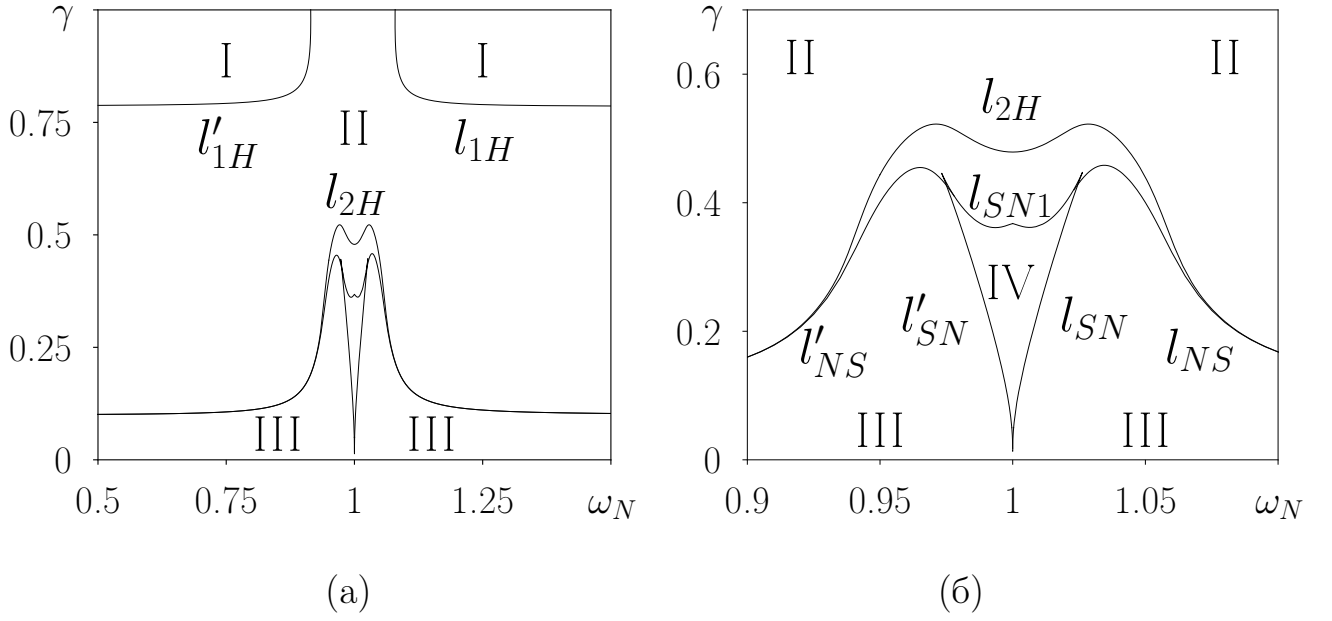


Рис. 2.24. Линии бифуркационных значений вблизи основной области синхронизации на плоскости параметров (ω_N, γ) для системы (2.9) при $N = 12$ и $\alpha = 0.01$. Рисунок б представляет собой увеличенный фрагмент бифуркационной диаграммы на рисунке а для $\gamma \in [0; 0.7]$ и $\omega_N \in [0.9; 1.1]$. Обозначения: I – область гашения колебаний, II и IV – области синхронизации автоколебаний, III – область квазипериодических колебаний, l_{SN} и l'_{SN} – линии бифуркации седло-узел, l_{SN1} – линия бифуркации седло-узел (касательной), l_{NS} и l'_{NS} – линии бифуркации Неймарка-Сакера, l_{1H} и l'_{1H} – линии суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа, l_{2H} – линия суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0, i = 1, \dots, N - 1$.

оси ординат. Фазовый портрет системы в области IV составляют три неустойчивых седловых предельных цикла C_2, C_3 и C_4 , устойчивый предельный цикл C_1 и неустойчивая неподвижная точка E (рисунок 2.25). Соответствующие однопараметрические диаграммы приведены на рисунках 2.26(а) и 2.27.

Область квазипериодики III ограничивается линиями l_{SN} и l_{NS} справа и l'_{SN} и l'_{NS} слева от основной области синхронизации, отвечающими седло-узловым бифуркациям и бифуркациям Неймарка-Сакера, соответственно. Рас-

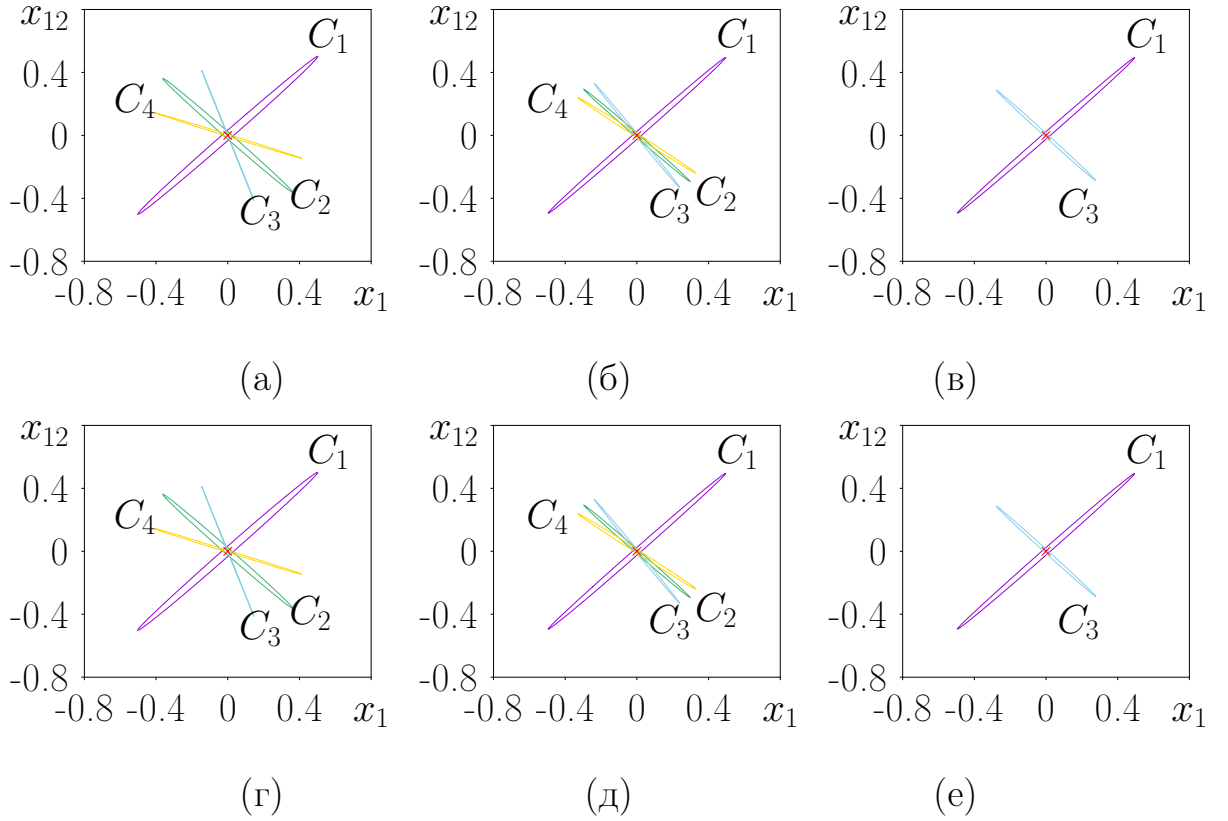


Рис. 2.25. Проекция устойчивого предельного цикла C_1 и седловых циклов C_2, C_3, C_4 на плоскость (x_1, x_{12}) при различных значениях расстройки: (а-в) $\omega_3 = 0.999$ и (г-е) $\omega_3 = 1.001$, и силы связи: (а,г) $\gamma = 0.3$, (б,д) $\gamma = 0.36$ и (в,е) $\gamma = 0.37$. Красный крестик обозначает точку равновесия E . Другие параметры: $\varepsilon = 0.1, \omega_i = 1.0, i = 1, \dots, N - 1, \alpha = 0.01$.

четыре показывают, с увеличением количества пассивных колебательных контуров в связи между генераторами Ван дер Поля область III почти не изменяется при большой частотной расстройке ($|\omega_N - \omega_1| > 0.1$). При малой частотной расстройке ($|\omega_N - \omega_1| < 0.1$) область III значительно увеличивается. Различия в динамике системы в области III при большой и малой частотной расстройке можно хорошо пронаблюдать из коллекций перекрестных фазовых портретов соседних осцилляторов, на рисунках 2.28 и 2.29, соответственно, для двух значений силы связи. При малой частотной расстройке квазипериодические колебания наблюдаются как во втором генераторе, так и во всех колебательных контурах, в то время как при большой частотной расстройке квазипериодиче-

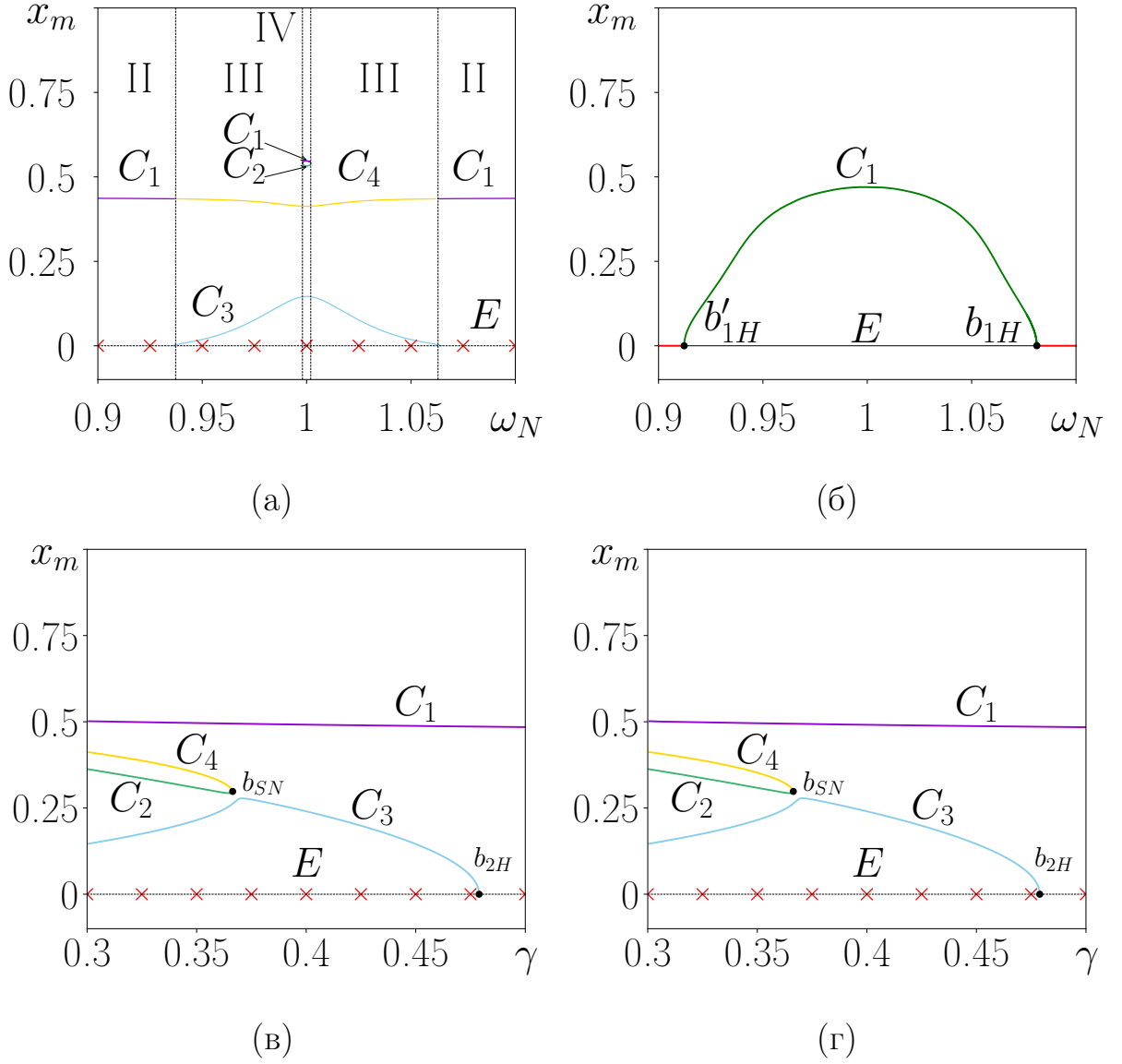


Рис. 2.26. Бифуркационные диаграммы предельных циклов C_1, C_2, C_3, C_4 и неподвижной точки E для системы (2.9) для случая $N = 12$ в зависимости от расстройки ω_N при (а) $\gamma = 0.3$ и (б) $\gamma = 0.9$, а также от коэффициента связи γ при (в) $\omega_3 = 0.999$ и (г) $\omega_3 = 1.001$. Обозначения: b_{SN} – точка седло-узловой бифуркации. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $\alpha = 0.01$.

ские колебания наблюдаются только во втором генераторе и ближайших к нему колебательных контурах.

При переходе из области IV в область III устойчивый предельный цикл C_1 и неустойчивый предельный цикл C_2 сливаются и исчезают, что приводит к рождению притягивающего синфазного тора T_1 . Неустойчивые предельные

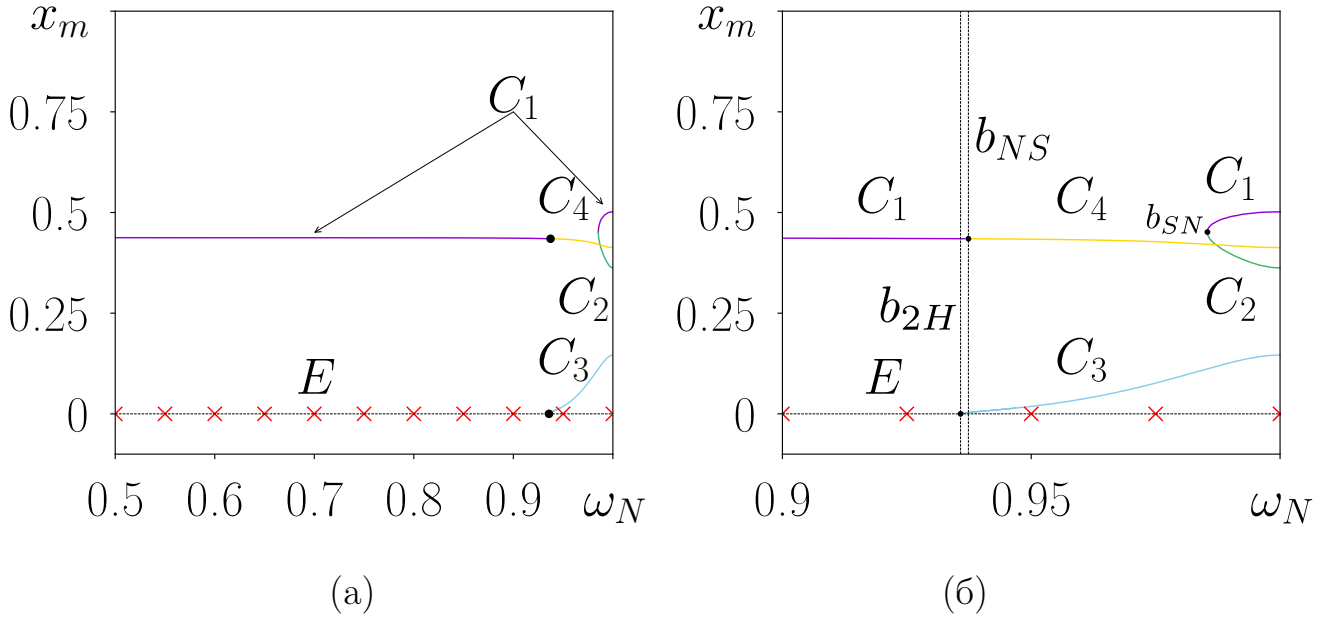


Рис. 2.27. Бифуркационная диаграмма предельных циклов C_1, C_2, C_3, C_4 и неподвижной точки E для системы (2.9) для случая $N = 12$ в зависимости от расстройки ω_N при $\gamma = 0.3$ (а) и её увеличенный фрагмент (б). Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $\alpha = 0.01$.

циклы C_3 и C_4 и неустойчивая неподвижная точка при переходе из области IV в область III не претерпевают бифуркаций. Фазовый портрет системы в области III составляют два неустойчивых цикла C_3 и C_4 , неустойчивая неподвижная точка E и притягивающий тор T_1 (Рисунок 2.29). Начиная с определённого значения силы связи, выбрав начальную точку в области IV и увеличивая модуль частотной расстройки между генераторами Ван дер Поля, можно перейти из области IV в область III, а из области III в “канал” в области II, образующийся вдоль линии, разделяющей в системе (1.2) области I и III. Соответствующая описанному переходу однопараметрическая бифуркационная диаграмма представлена на рисунке 2.26 (а).

Область II ограничивается линиями l_{1H} , l'_{1H} и l_{SN1} , отвечающими бифуркациям Андронова-Хопфа и седло-узловой бифуркации, соответственно, и соответствует режиму синхронизации автоколебаний. Зафиксируем два значения частоты второго генератора и пронаблюдаем переход из области IV в область

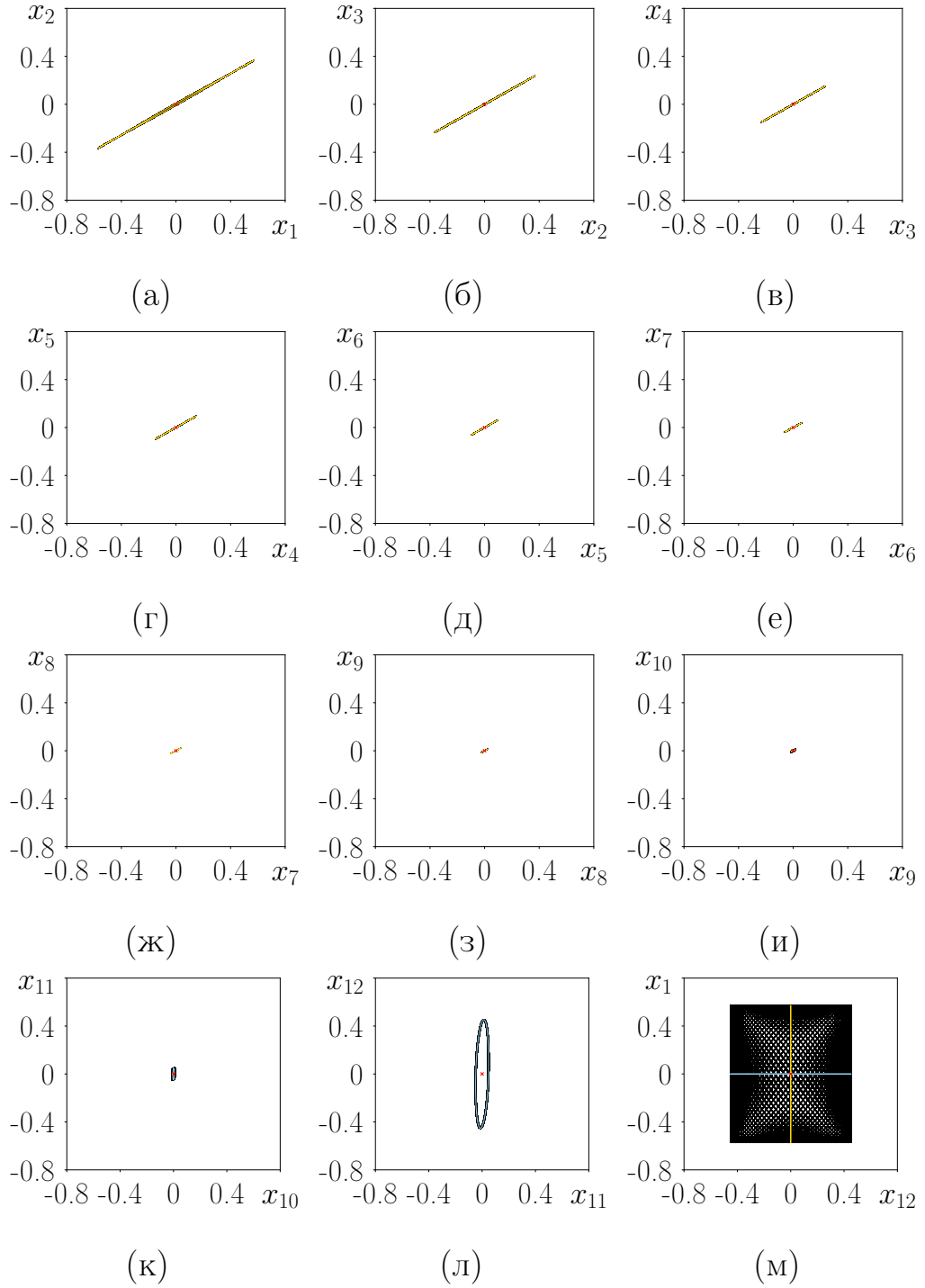


Рис. 2.28. Проекции притягивающего синфазного тора T_1 (чёрные линии) и седловых циклов C_3, C_4 (голубые и жёлтые линии соответственно) на плоскость (x_i, x_j) , где i, j – индексы соседних осцилляторов. Проекции получены для значений управляющих параметров $\gamma = 0.05, \omega_N = 0.8$. Красный крестик обозначает точку равновесия E . Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0, i = 1, \dots, N - 1, \alpha = 0.01, N = 12$.

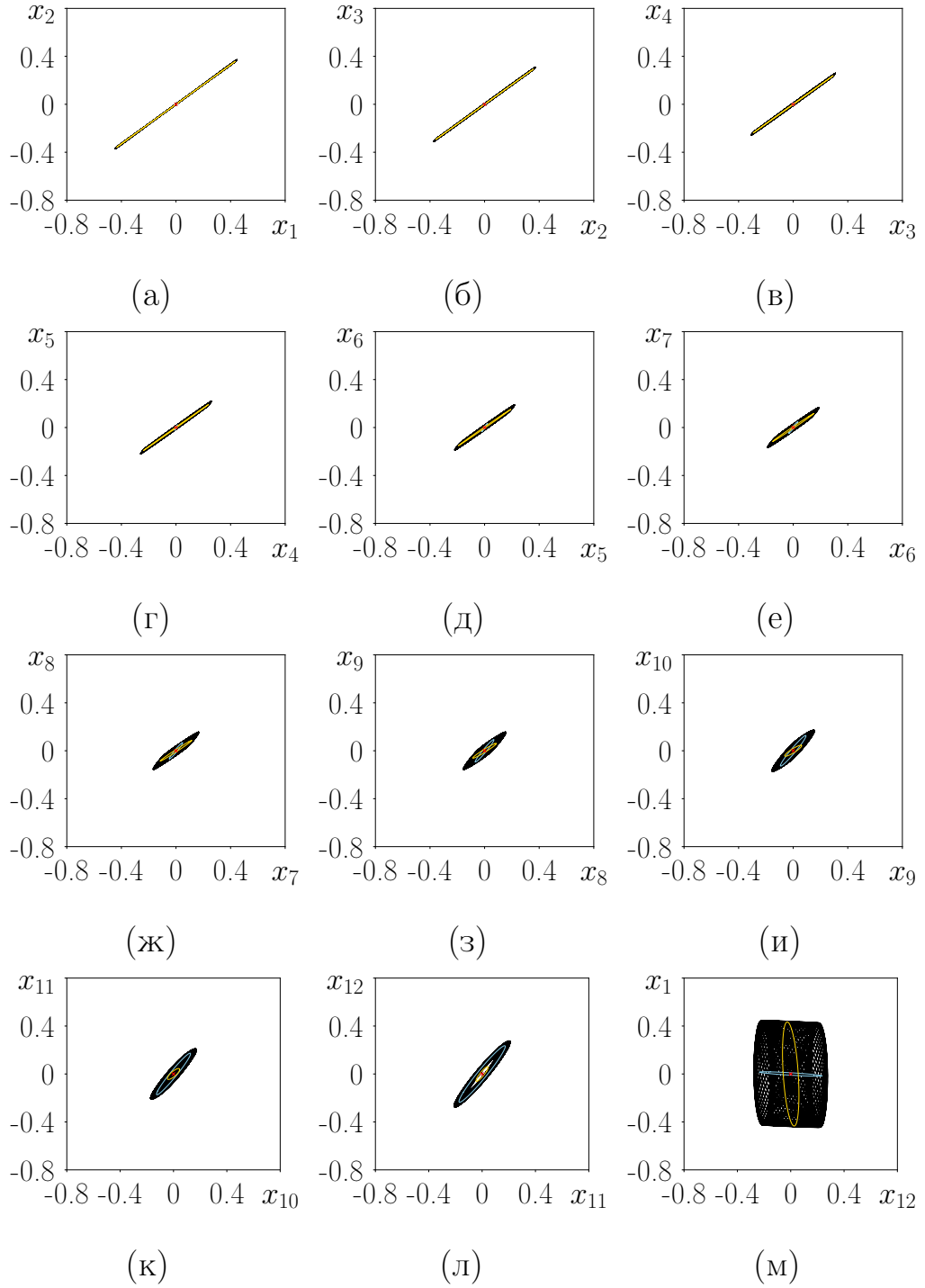


Рис. 2.29. Проекции притягивающего синфазного тора T_1 (чёрные линии) и седловых циклов C_3, C_4 (голубые и жёлтые линии соответственно) на плоскость (x_i, x_j) , где i, j – индексы соседних осцилляторов. Проекции получены для значений управляющих параметров $\gamma = 0.3$, $\omega_N = 0.95$. Красный крестик обозначает точку равновесия E . Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $\alpha = 0.01$, $N = 12$.

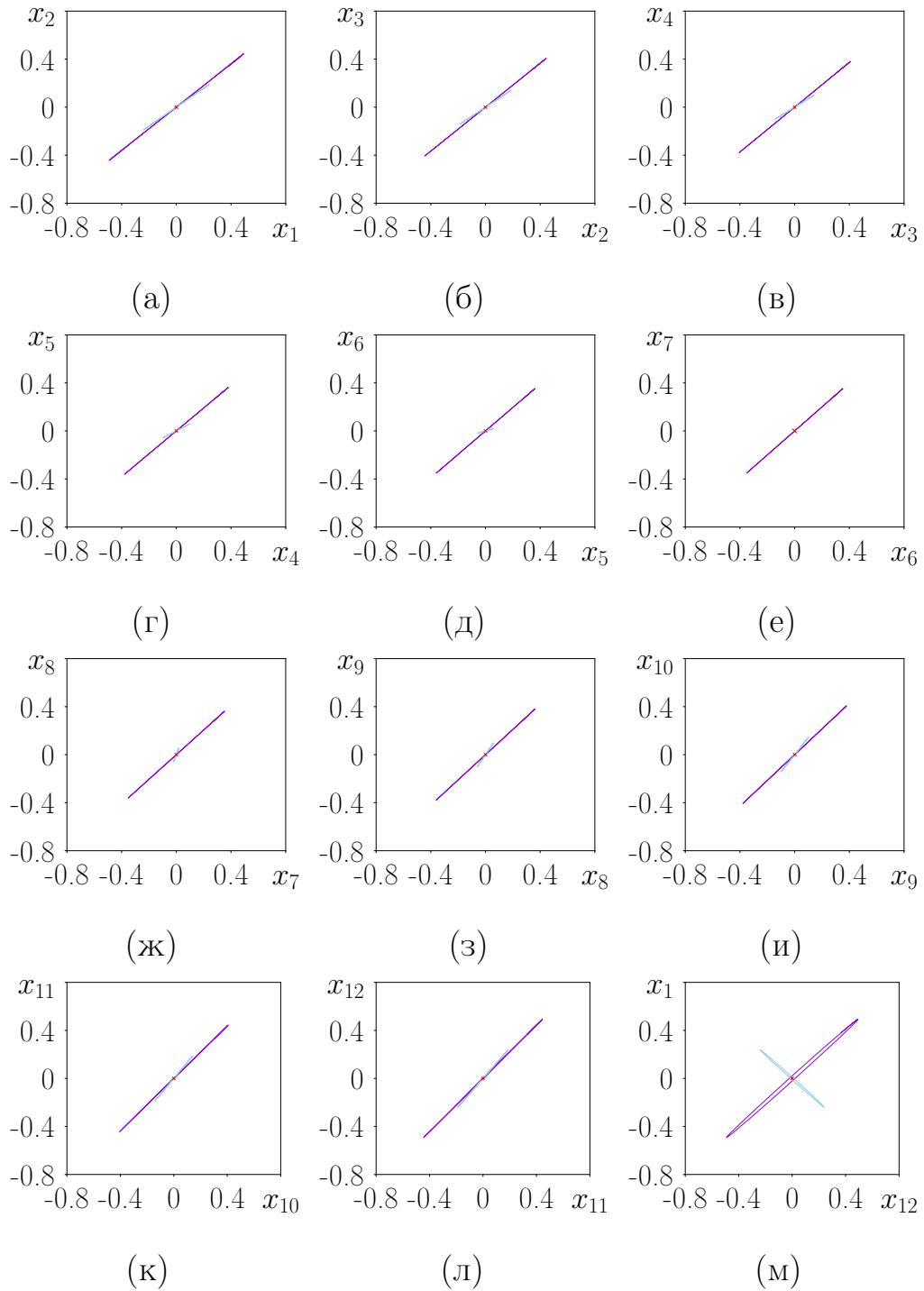


Рис. 2.30. Проекции устойчивого предельного цикла C_1 (фиолетовые линии) и седлового цикла C_3 (голубые линии) на плоскость (x_i, x_j) где i, j – индексы соседних осцилляторов. Проекции получены для значений управляющих параметров $\gamma = 0.5, \omega_N = 0.999$. Красный крестик обозначает точку равновесия E . Другие параметры: $\varepsilon = 0.1, \omega_i = 1.0, i = 1, \dots, N - 1, \alpha = 0.01, N = 12$.

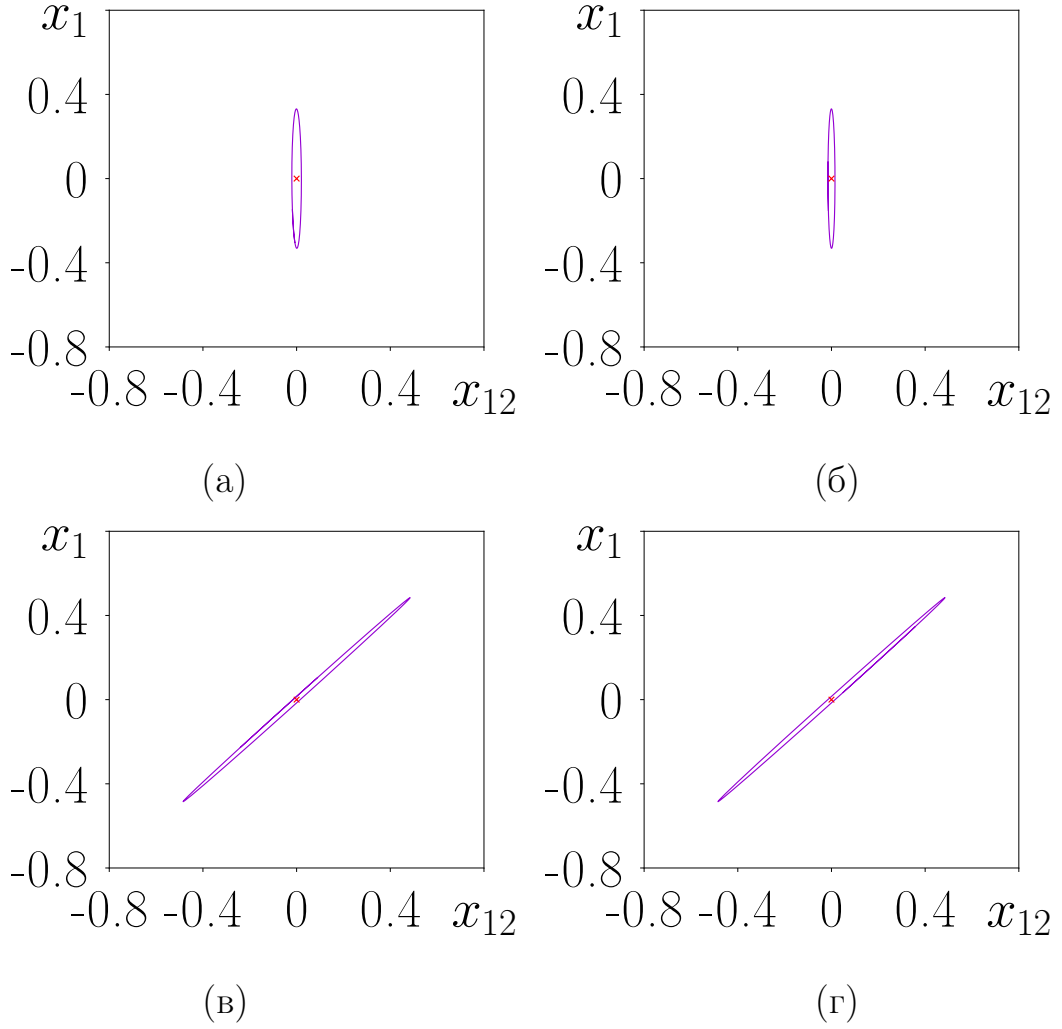


Рис. 2.31. Проекция устойчивого предельного цикла C_1 (фиолетовые линии) на плоскость (x_{12}, x_1) при различных значениях расстройки: (а) $\omega_N = 0.8$, (б) $\omega_N = 1.2$, (в) $\omega_N = 0.999$ и (г) $\omega_N = 1.001$, и силы связи: $\gamma = 0.5$. Красный крестик обозначает точку равновесия E . Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$, $\alpha = 0.01$, $N = 12$.

II. По мере увеличения силы связи неустойчивые предельные циклы C_2 , C_3 и C_4 сближаются, однако сливаются и исчезают на линии l_{SN1} в обоих случаях только C_2 и C_4 (рисунок 2.25(б,д)). В области, ограниченной линиями l_{SN1} и l_{2H} , соответствующими седло-узловой бифуркации и бифуркации Андронова-Хопфа, фазовый портрет системы составляют неустойчивый предельный цикл C_3 , устойчивый предельный цикл C_1 и неустойчивая неподвижная точка (рисунок 2.25(в,е)). При дальнейшем увеличении силы связи неустойчивый предель-

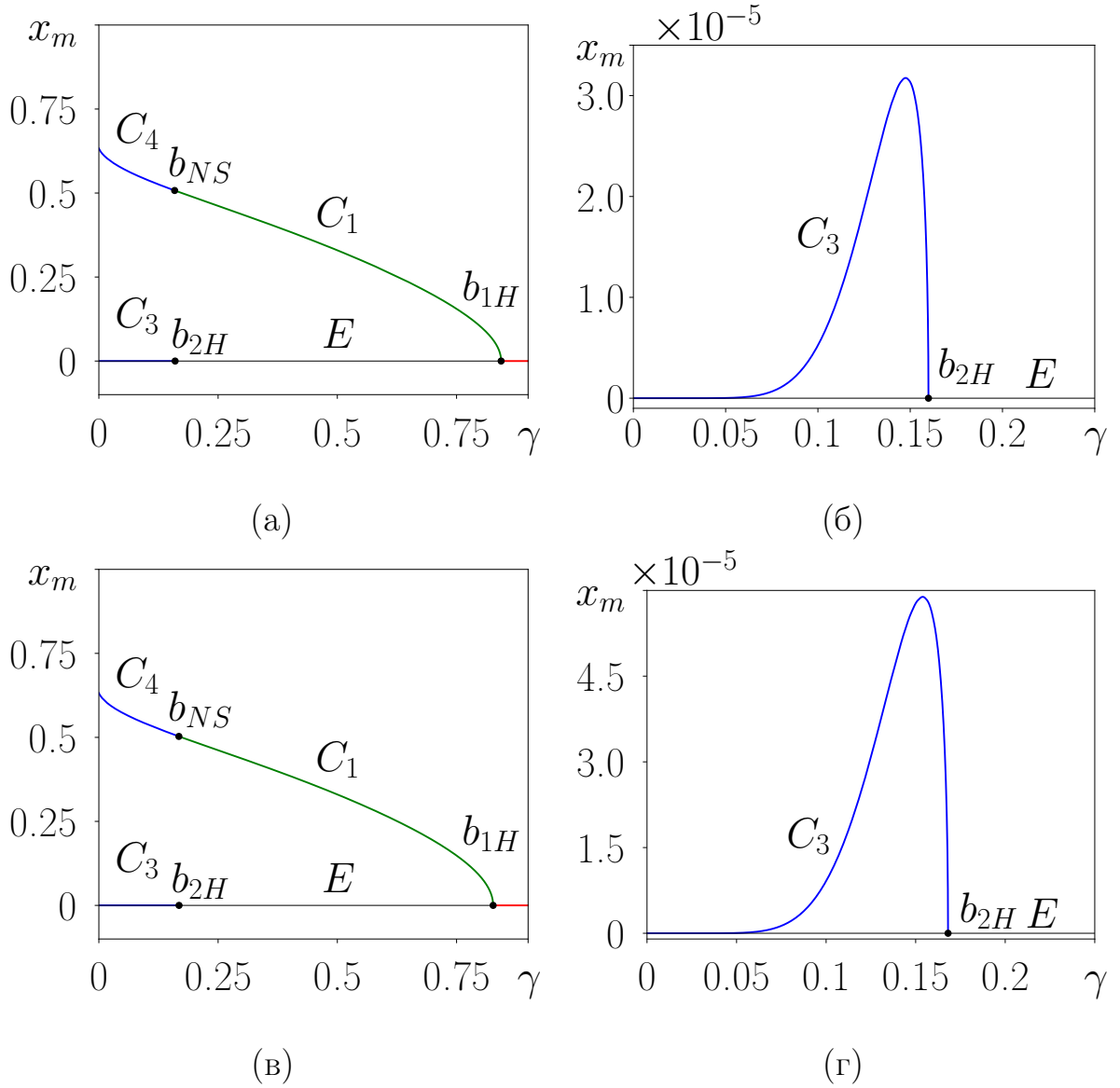


Рис. 2.32. Бифуркационные диаграммы предельных циклов C_1, C_3, C_4 и неподвижной точки E для системы (2.9) в зависимости от коэффициента связи γ при (а,б) $\omega_N = 0.8$ и (в,г) $\omega_N = 1.2$. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0, i = 1, \dots, N - 1, \alpha = 0.01, N = 12$.

ный цикл C_3 стягивается в точку на линии l_{2H} и исчезает за точкой бифуркации. Соответствующая описанному переходу однопараметрическая бифуркационная диаграмма представлена на рисунке 2.26 (в,г). Фазовый портрет системы в области II составляют устойчивый цикл C_1 и неустойчивая неподвижная точка E (рисунок 2.31 в,г)). К области II также относится “канал”, образующийся вдоль линии, разделяющей в системе (1.2) области I и III. Как видно из рисунков 2.23

и 2.24, с увеличением количества пассивных колебательных контуров в связи между генераторами ван дер Поля этот канал значительно расширяется. Перекрёстные фазовые портреты системы в области II при большой (в канале) и малой частотной расстройке представлены на рисунке 2.31. Чем больше по модулю частотная расстройка, тем большее влияние один из генераторов оказывает на второй.

Область I ограничивается линиями l_{1H} и l'_{1H} отвечающими бифуркациям Андронова-Хопфа, и соответствует режиму гашения колебаний. По мере увеличения количества пассивных колебательных контуров в связи между двумя генераторами Ван дер Поля, область I значительно уменьшается, как видно из рисунков. Зафиксируем значение силы связи и пронаблюдаем переход из области II в область I. По мере увеличения модуля частотной расстройки устойчивый предельный цикл C_1 стягивается в точку на линиях l_{1H} и l'_{1H} и исчезает за точкой бифуркации, а неустойчивая неподвижная точка становится устойчивой. Происходит бифуркация Андронова-Хопфа. Однопараметрическая бифуркационная диаграмма, соответствующая описанному переходу, представлена на рисунке 2.26 (б). Фазовый портрет системы в области I составляет устойчивая неподвижная точка E .

Зафиксируем два значения собственной частоты автоколебаний второго генератора и пронаблюдаем переход из области I в область III через канал в области II. По мере уменьшения силы связи устойчивая неподвижная точка E становится неустойчивой на линии l_{1H} (или l'_{1H}), а в её окрестности рождается устойчивый предельный цикл C_1 . Внутри канала в области II амплитуда одного из генераторов значительно больше амплитуды другого (рисунок 2.32). При дальнейшем уменьшении силы связи устойчивый предельный цикл C_1 становится неустойчивым предельным циклом C_4 , а в его окрестности рождается притягивающий синфазный тор T_1 . Также в окрестности неустойчивой неподвижной точки на линии l_{2H} рождается неустойчивый предельный цикл C_3 . С увеличением количества колебательных контуров в связи между генераторами

Ван дер Поля, при существенной частотной расстройке амплитуда неустойчивого предельного цикла C_3 значительно уменьшается, однако вблизи области IV изменения амплитуды предельного цикла C_3 незначительны. Соответствующая описанному переходу однопараметрическая бифуркационная диаграмма представлена на рисунке 2.32.

2.3.4 Случай распределенной связи в виде цепочки низкодобротных пассивных колебательных контуров

В данном разделе продолжен анализ влияния количества пассивных осцилляторов в цепочке связи на динамику двух автогенераторов. Однако теперь рассмотрим случай низкодобротных контуров при фиксированном параметре затухания $\alpha = 0.1$. Бифуркационные линии для описанных ранее состояний равновесия на плоскости параметров (ω_N, γ) , также как и в рассмотренных выше случаях, разделяют области синхронизации (II и IV), гашения колебаний (I) и квазипериодичности (III), и представлены на рисунке 2.33. Из рисунка видно, что при более низкой добротности контура, с увеличением количества контуров в связи между генераторами области синхронизации (IV и II) сужаются по расстройке. Ширина “канала” синхронных периодических автоколебаний, разделяющего области гашения I и квазипериодики III, очень сильно уменьшается при увеличении числа контуров в окрестности малой частотной расстройки. Начиная с $N = 5$, области гашения колебаний I, находившиеся ранее слева и справа от области II, сливаются сверху, и в системе становится возможно гашение колебаний посредством увеличения силы связи. Областей мультистабильности, по мере увеличения количества контуров в цепи, как и в случае малого значения параметра затухания контура, не возникает, в отличие от системы (1.2), где по мере увеличения запаздывания в связи между генераторами, на плоскости па-

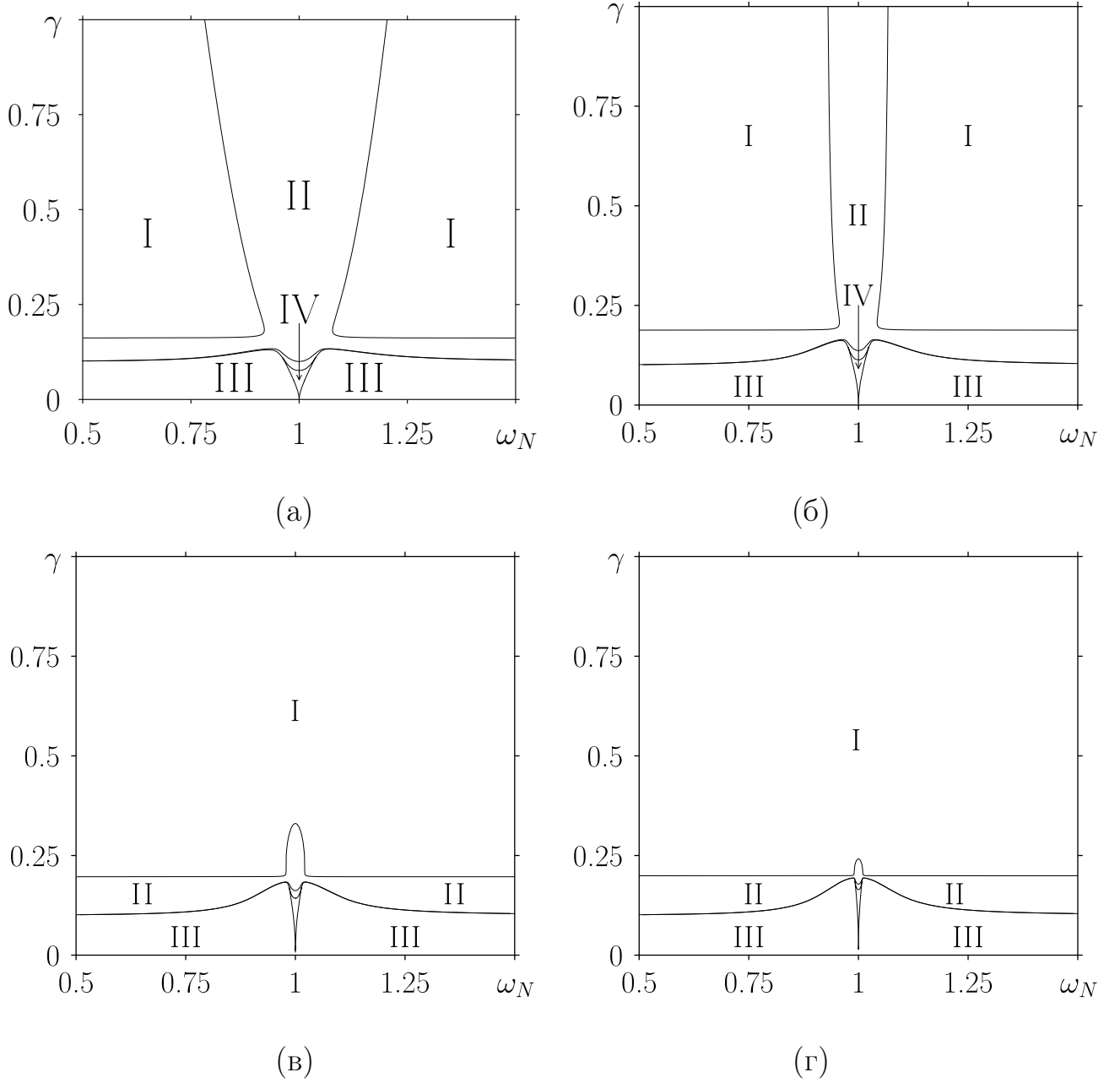
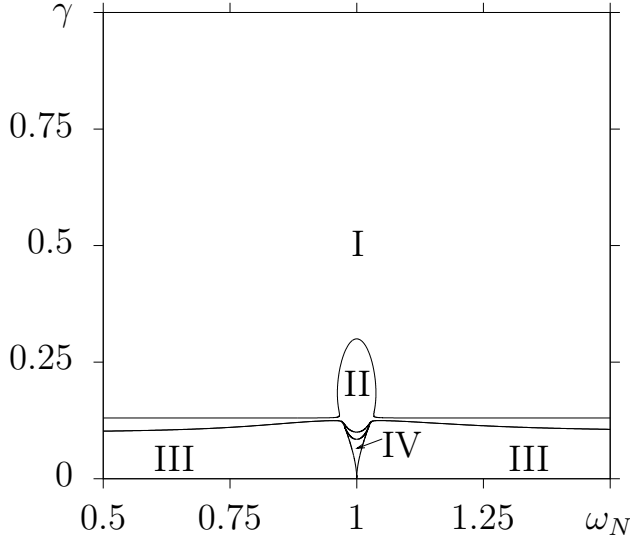


Рис. 2.33. Бифуркационные линии на плоскости параметров (ω_N, γ) вблизи основной области синхронизации для системы (2.9) для (а) $N = 3$, (б) $N = 4$, (в) $N = 5$, (г) $N = 6$ и для значения параметра диссипации контуров $\alpha = 0.1$.

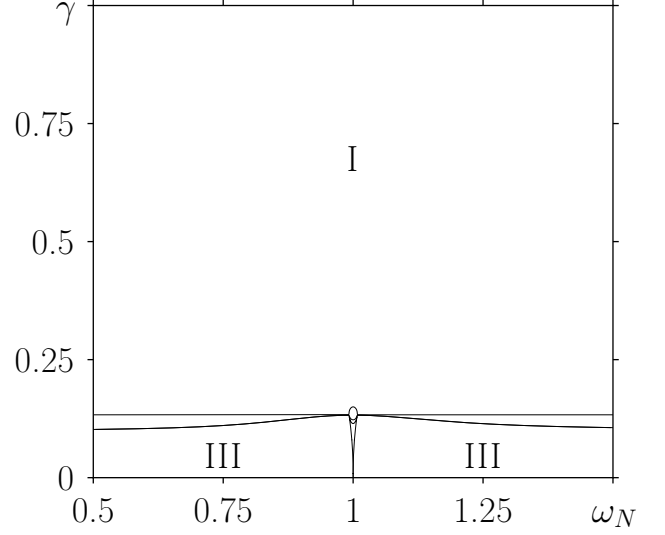
Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$.

раметров (ω_N, γ) возникали новые области, соответствующие сосуществованию в системе устойчивых режимов синфазной и противофазной синхронизации, и синфазной синхронизации и противофазного тора. Фазовый портрет системы в основной области синхронизации IV составляют неустойчивая точка E , три

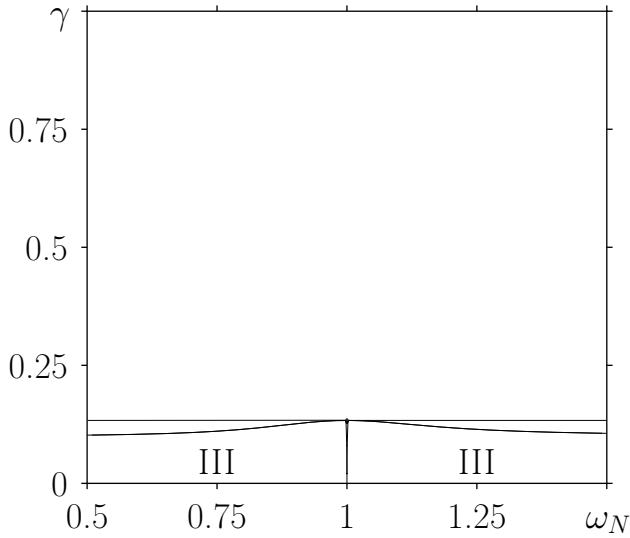
седловых предельных цикла C_2 , C_3 и C_4 , и один устойчивый предельный цикл C_1 . Характер переходов между областями с увеличением количества контуров в цепи связи не меняется.



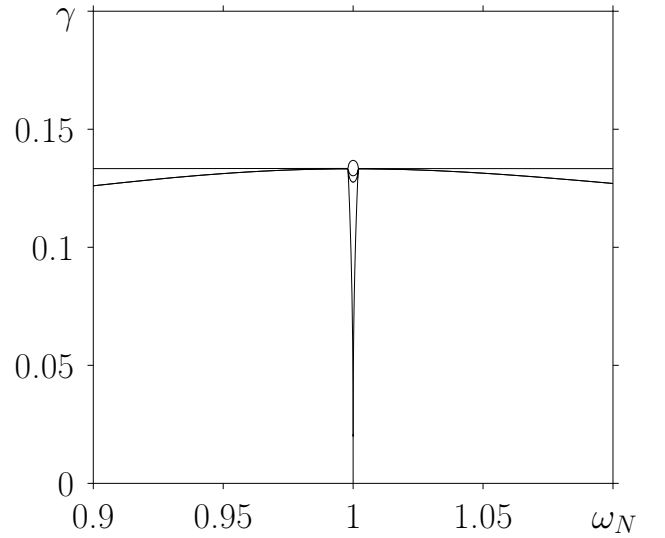
(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 2.34. Бифуркационные линии на плоскости параметров (ω_N, γ) вблизи основной области синхронизации для системы (2.9) для $N = 3$ (а), $N = 4$ (б), $N = 5$ (в, г) и при значении параметра диссипации контуров $\alpha = 0.3$. Другие параметры: $\varepsilon = 0.1$, $\omega_i = 1.0$, $i = 1, \dots, N - 1$.

Проведем аналогичные численные расчеты бифуркационных диаграмм режимов динамики системы (2.9), но увеличив параметр диссипации колебательного контура до значения $\alpha = 0.3$. Полученные диаграммы приведены на рисунке 2.34. Видно, что увеличение диссипации в цепочке связи между генераторами очень сильно влияет на размер областей синхронизации и практически подавляет синхронную динамику в системе при увеличении количества контуров в цепочке, как это хорошо заметно на диаграммах для случая $N = 5$ (связь через цепочку из трех пассивных осцилляторов) (2.34(в,г)). В этом случае синхронизация может наблюдаться только в отсутствие расстройки и при почти равных частотах взаимодействующих автогенераторов, $\omega_1 = \omega_N = 1.0$. В отличие от предыдущего случая $\alpha = 0.1$, увеличение диссипации контуров приводит к значительному сужению ширины “канала” синхронной динамики (области II) по величине силы связи для всего рассмотренного диапазона частотной расстройки.

2.4 Выводы по главе 2

Проведенные численные исследования динамики автоколебательной системы с двумя степенями свободы, состоящей из осциллятора Рэлея, взаимодействующего с линейным диссипативным осциллятором, позволяют сформулировать следующие основные результаты:

- Показано, что классическое явление затягивания частоты наблюдается только при небольших значениях параметра возбуждения ε . Область бистабильности, где сосуществуют два предельных цикла, соответствующие синфазным и противофазным режимам колебаний в связанных осцилляторах, ограничена не только по параметру расстройки, но и по ε . По мере увеличения параметра возбуждения и развития ангармоничности, когда

квазигармонические автоколебания превращаются в релаксационные пилообразной формы, одно из бистабильных состояний теряет устойчивость и явление затягивания частоты больше не наблюдается.

- При больших значениях параметра возбуждения и определенных расстройках по частоте на базе синфазного семейства циклов наблюдаются разнообразные бифуркации, приводящие к новым режимам. Формируются новые мультистабильные состояния. На плоскости параметров при $p < 1$ возникает ряд «полос бистабильности», ограниченных линиями складок для попарно сосуществующих устойчивых предельных циклов.
- Выявлен бифуркационный механизм формирования мультистабильных состояний при увеличении параметра возбуждения автогенератора. При малых значениях параметра возбуждения появление мультистабильности определяется двумя последовательными суперкритическими бифуркациями Андронова–Хопфа состояния равновесия и субкритической бифуркацией Неймарка–Сакера седлового предельного цикла. При больших значениях параметра возбуждения мультистабильность возникает через седло-узловые бифуркации рождения пар устойчивого и неустойчивого предельных циклов.
- Выдвинуто и обосновано предположение, механизм формирования мультистабильности через последовательность суперкритических бифуркаций Андронова–Хопфа и субкритических бифуркаций Неймарка–Сакера более характерен для квазигармонических автоколебательных систем.

В данной главе также приведены результаты численного анализа режимов динамики системы, состоящей из двух осцилляторов Ван дер Поля, связанных друг с другом через конечное число пассивных колебательных контуров. Данные контура играют роль распределенной связи между автогенераторами, которая в свою очередь может выступать аналогом или моделью запаздывающей

связи в системах (1.2) и (1.8), рассмотренных в главе 1. На основе полученных результатов можно сформулировать следующие основные результаты:

- При увеличении степени диссипации пассивных колебательных контуров в цепочке связи независимо от расстройки по собственным частотам при больших значениях силы коэффициента связи режимы синхронизации не наблюдаются, а происходит гашение автоколебаний. Аналогичный эффект с аналогичной бифуркационной структурой основной области синхронизации и амплитудного вымирания реализуется в идентичных генераторах Ван дер Поля при диссипативной запаздывающей связи (глава 1, [145]).
- Показано, что для того чтобы в двух идентичных генераторах с увеличением связи произошло амплитудное вымирание, не обязательно использовать канал связи с временным запаздыванием, а достаточно включить линейный осциллятор с определенной добротностью.
- Увеличение количества высокочастотных пассивных осцилляторов в цепочке связи между двумя автогенераторами приводит к уменьшению области гашения колебаний и увеличению области синхронизации через подавление, а именно к расширению “канала” синхронных колебаний по силе связи, разделяющего области квазипериодической динамики (снизу) и амплитудного вымирания (сверху).
- Установлено, что в системе двух автогенераторов с распределенной связью в виде конечной цепочки пассивных колебательных контуров возможно управлять режимами синхронизации и амплитудного вымирания путем изменения силы связи между взаимодействующими осцилляторами и выборе определенного числа контуров и уровня их добротности.

Глава 3. ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И ТОПОЛОГИИ СВЯЗИ НА ДИНАМИКУ АНСАМБЛЕЙ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ФИТЦХЬЮ-НАГУМО

3.1 Введение

Возбудимые системы играют важную роль в понимании и моделировании различных природных явлений, таких как, например, передача импульсов между нейронами в головном мозге, сердечная аритмия, появление организованных структур в коре яйцеклеток и т. д. [67–69] Генерация одиночного импульса электрического потенциала на мембране нейрона является типичным примером возбудимого поведения. Такие возбудимые единицы обычно появляются в качестве составляющих элементов сложных систем и могут передавать возбуждения между собой. Феноменологическая система уравнений ФитцХью—Нагумо, представляющая собой двумерное упрощение четырехпеременной модели Ходжкина—Хаксли, оказалась успешной моделью для описания генерации импульсов в нейронном аксоне [108, 161]. Биологический нейрон – это диссипативный объект (единица), в котором активность одиночного импульса затухает довольно быстро из-за высокого электрического сопротивления. Соответственно, чем выше диссипация в нейроне, тем больше энергии требуется для возбуждения импульса. Диссипативная природа генерации импульсов в нейронах была описана в работах [162, 163] для некоторых моделей нейронов. Наличие диссипации в нейроне ФитцХью—Нагумо является существенным условием для возникновения автоколебаний в нейроне, т.е. одного из основных режимов рабо-

ты нейрона. Эффекты, связанные с диссипацией в нейроне ФитцХью-Нагумо, рассматривались в работах [164, 165].

Запаздывание во времени является фундаментальной частью почти всех биологических явлений. Конечная скорость распространения потенциала действия вдоль аксонов нейронов и временные промежутки в передаче информации (синаптический процесс) и приеме (дендритный процесс) между нейронами создают задержки во времени в реальных нейронах и их сетях [70].

Время, необходимое для нейронной коммуникации, может быть значительно увеличено из-за физического расстояния между передающими и принимающими объектами [166, 167], конечной скорости передачи сигнала [168], морфологии дендритов и аксонов [169, 170] и времени обработки информации клеткой [83]. Таким образом, задержки во времени могут играть решающую роль в динамике нейронных сетей и должны учитываться при математическом моделировании и анализе [88, 171]. Также следует отметить роль задержки в передаче сигналов в мозговых цепях [172]. Игнорирование реалистичных временных задержек в математических моделях может привести к расхождениям между теоретическими и экспериментальными данными и, таким образом, препятствует пониманию соответствующих физиологических механизмов.

В третьей главе используется парадигматический пример осциллятора ФитцХью-Нагумо (ФХН) в форме и диапазоне изменения значений параметров, соответствующих возбудимой динамике нейрона. Для исследования влияния запаздывающей связи рассматриваются уравнения осциллятора ФХН, которые включают параметр, отвечающий за диссипацию нейрона. Форма используемых уравнений отличается от упрощенной и обычно рассматриваемой системы ФитцХью-Нагумо [173, 174]. Чем больше этот параметр, тем меньше диссипация. В проведенном численном моделировании динамики осцилляторов ФитцХью-Нагумо с запаздывающей связью выбираются два различных значения параметра диссипации, одно из которых близко к границе бистабильности, а другое – к границе области автоколебаний. Сначала рассматриваются два

нейрона с задержкой в канале связи, а затем численно анализируется динамика кольцевой сети с локальной и нелокальной топологией связи между нейронами ФХН. Исследуется взаимосвязь между диссипацией в отдельном элементе, временем задержки, параметрами связи и начальными условиями при формировании пространственно-временной динамики сетей. Проведенное численное моделирование и полученные результаты могут быть легко обобщены на динамику упрощенной модели нейрона ФитцХью–Нагумо с запаздывающей связью [173–175].

Также в главе исследуется влияние различных типов межслойной связи на пространственно-временную динамику двухслойных мультиплексных нейронных сетей ФитцХью–Нагумо. В данном случае используется упрощенная система уравнений осциллятора ФХН. В зависимости от внутрислойной связи, притягивающей или отталкивающей, несвязанные слои первоначально демонстрируют бегущие волны различной формы и с различными фазовыми характеристиками. Особенности взаимодействия волновых режимов исследуются для притягивающей, отталкивающей и периодически модулированной межслойной связи. Изменения в динамике сети, а также возможности синфазной и противофазной межслойной синхронизации анализируются с использованием зависимостей средней частоты и коэффициента корреляции Пирсона [176].

Представленные результаты опубликованы в статьях [177] и [178].

3.2 Связь уравнений Ван дер Поля, Бонхоффера–Ван дер Поля и ФитцХью–Нагумо

Прежде чем описать результаты, полученные для осциллятора ФитцХью–Нагумо, проведем аналитические выкладки перехода от классической автоколебательной системы Ван дер Поля к собственно осцилятору ФХН, который,

при определенных значениях управляющих параметров, может демонстрировать как возбудимую динамику, так и режим автоколебаний.

В осцилляторной форме уравнение Ван дер Поля можно записать в следующем виде:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (3.1)$$

Эта модель широко известна и была детально изучена многими исследователями [179–183]. Приравняв левую часть уравнения не к 0, а к некоторой константе a , можно записать:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + \omega^2 x = a. \quad (3.2)$$

Данное уравнение представляет собой осциллятор Бонхоффера–Ван дер Поля, который был предложен Бонхоффером в [184] и, также как и уравнение (3.1), является широко известной моделью [185–187]. Уравнение Бонхоффера–Ван дер Поля описывает автоколебательные процессы и возбудимые системы и часто используется для моделирования нейронной динамики (потенциалов действия) и электронных генераторов. Модель сочетает быструю переменную активации (Ван дер Поля) и медленную переменную восстановления, являясь упрощением модели Ходжкина–Хаксли.

Преобразуем уравнение (3.2) так, чтобы справа от знака равенства остался 0, и раскроем скобки:

$$\ddot{x} - (\varepsilon - x^2) \dot{x} + \omega^2 x - a = 0. \quad (3.3)$$

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x} + x^2 \dot{x} + \omega^2 x - a = 0. \quad (3.4)$$

Введём замену $\dot{y} = \omega^2 x - a$ и перепишем уравнение (3.4) в следующей форме:

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x} + x^2 \dot{x} + \dot{y} = 0. \quad (3.5)$$

Проинтегрировав левую часть уравнения (3.5), получаем уравнение:

$$\dot{x} - \varepsilon x + \frac{x^3}{3} + y = 0. \quad (3.6)$$

Используя замену $\dot{y} = \omega^2 x - a$ и уравнение (3.6), можем записать систему уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \dot{y} &= \omega^2 x - a.\end{aligned}\tag{3.7}$$

Вынесем ω^2 за скобки и произведём замены $a/\omega^2 = b$ и $\omega^2 = \mu$. В результате получаем:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon x - y - \frac{x^3}{3}, \\ \dot{y} &= \mu(x - b).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Система уравнений (3.8) представляет собой упрощённую модель нейрона ФитцХью–Нагумо. При $\varepsilon \neq 1$ и $b = 0$ (3.8) сводится к (3.1).

В литературе часто встречается запись уравнений ФХН с малым параметром при старшей производной, которая также может быть получена из системы (3.8). Продифференцируем один раз первое уравнение, положив $\varepsilon = 1$, и подставим в него второе:

$$\ddot{x} - \dot{x} + x^2 \dot{x} + \dot{y} = 0.\tag{3.9}$$

$$\ddot{x} - \dot{x} + x^2 \dot{x} + \mu(x - b) = 0.\tag{3.10}$$

Разделим на μ и перейдём к новому времени $\theta = \mu\tau$. Получим уравнение с малым параметром при старшей производной:

$$\mu\ddot{x} - \dot{x} + x^2 \dot{x} + (x - b) = 0.\tag{3.11}$$

Выполнив замену $\dot{y} = x - b$ и проинтегрировав данное уравнение, приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\mu\dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y, \\ \dot{y} &= x - b.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Наряду с уравнениями (3.8), система (3.12) также представляет собой модель нейрона ФитцХью–Нагумо и широко используется в различного рода исследованиях [188–191].

3.3 Влияние запаздывания в слагаемом связи на динамику ансамбля осцилляторов ФитцХью-Нагумо

3.3.1 Уравнения исследуемой системы

В качестве объекта исследования рассматривается осциллятор ФитцХью-Нагумо, представляющий собой одну из простейших моделей нейронов и широко используемый в численном моделировании. Эта двухпеременная система является парадигматической моделью нейронной возбудимости и описывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - x^3/3 - y, \\ \dot{y} &= \alpha x - y + \beta.\end{aligned}\tag{3.13}$$

где x – быстрая переменная (активатор), представляющая собой напряжение на клеточной мембране, а y – переменная медленного восстановления (ингибитор), соответствующая состоянию восстановления покоящейся мембраны нейрона. Все управляющие параметры безразмерны. Малый параметр $\varepsilon > 0$ представляет собой отношение временных масштабов активатора к ингибитору. Параметр β определяет асимметрию, а параметр α отвечает за рассеивание энергии в нейроне. Аналоговый электрический нейрон ФитцХью–Нагумо, описываемый системой уравнений вида (3.13), использовался в работе [192] для анализа его импульсных ответов на импульсную стимуляцию. В аналоговой схеме параметр α прямо пропорционален отношению двух сопротивлений R_0/R_6 , где R_6 – сопротивление колебательного контура [192]. Значение R_6 определяет величину рассеивания энергии в контуре. При увеличении значения R_6 диссипация увеличивается, а следовательно, уменьшается параметр α , и наоборот. Оба параметра β и α также определяют динамическое поведение нейрона. Отметим,

что форма уравнений ФитцХью–Нагумо (3.13) отличается от исходной формы [108, 193, 194], но она также исследована в ряде работ [195–197].

Модель нейрона ФитцХью–Нагумо (3.13) позволяет рассматривать множество различных динамических режимов, а именно возбудимые, автоколебательные и бистабильные режимы. Области существования каждого динамического режима выделены на бифуркационной диаграмме на плоскости параметров (α, β) , представленной на рис. 3.1. Область I соответствует бистабильности, область II – автоколебательному режиму и область III – возбудимой динамике. Сплошные линии на диаграмме рис. 3.1 соответствуют бифуркации кратности точек равновесия при $\alpha \lesssim 0.72$ и бифуркации Андронова–Хопфа при $\alpha \gtrsim 0.72$. Соответствующие значения для бифуркаций складок можно приблизительно оценить аналитически следующим образом [198]:

$$\beta = \pm \frac{2}{3} \sqrt{1 - \alpha} (1 - \alpha).$$

Положение линий бифуркаций на рис. 3.1 не зависит от параметра ε . Внутри области III (рис. 3.1) нейрон переходит в возбудимый режим, когда автоколебания отсутствуют без внешней силы или возмущения. Одиночный стимул определённой интенсивности может возбудить активность нейрона, но он быстро затухает, и система возвращается в состояние равновесия [198].

В дальнейшем, чтобы изучить влияние параметра диссипации на динамику осциллятора ФХН с запаздыванием, выбираются два различных значения α , отмеченные красными точками на рис. 3.1. Одно из них, $\alpha = 0.5$, близко к границе области бистабильности, а другое, $\alpha = 0.7$, ближе к границе автоколебательного режима. Напомним, что второй случай соответствует меньшей диссипации в отдельном нейроне. Значения остальных параметров фиксируются: $\varepsilon = 0.01$ и $\beta = -0.5$, что отвечает возбудимому режиму, наблюдаемому в осцилляторе ФХН в довольно широком диапазоне изменения параметра $\alpha \in [0.2, 1.1]$ [198].

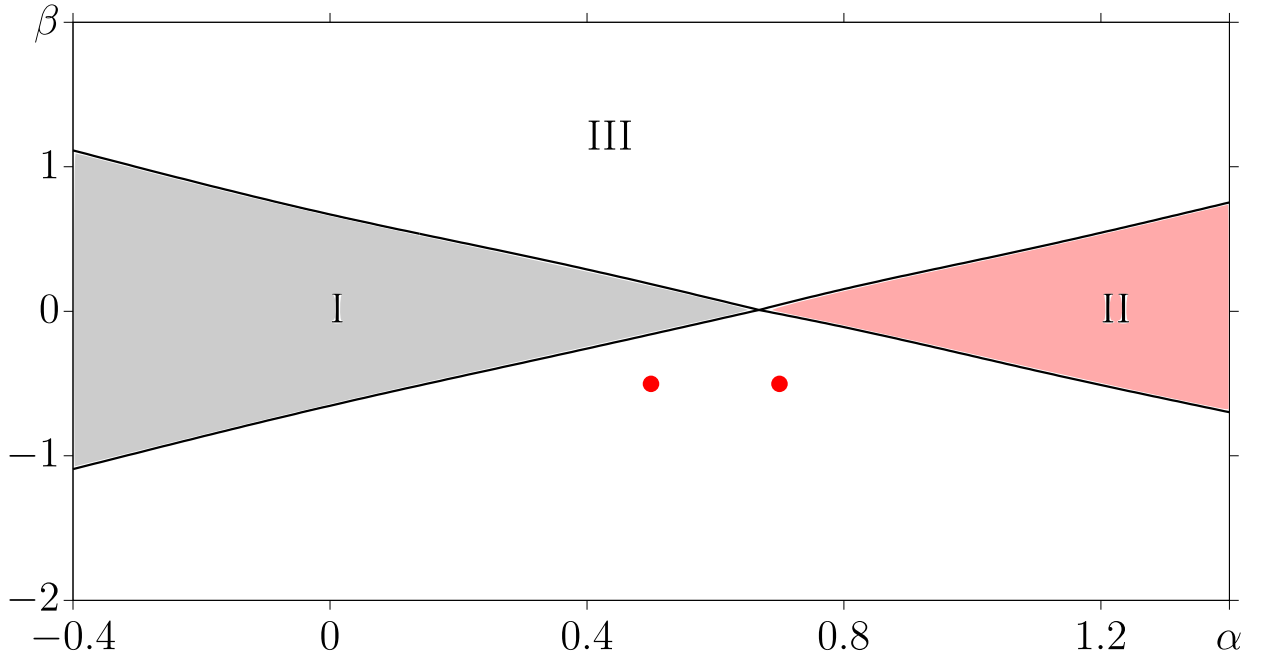


Рис. 3.1. Диаграмма динамических режимов одиночного нейрона (3.13) на плоскости параметров (α, β) при $\varepsilon = 0.01$. Области I, II и III отвечают бистабильному (серый цвет), автоколебательному (розовый цвет) и возбудимому (белый цвет) режимам, соответственно. Для численного моделирования выбираются два набора параметров, отмеченные красными точками, которые соответствуют возбудимому режиму ($\alpha = 0.5$ и $\alpha = 0.7$ при $\beta = -0.5$).

На рис. 3.2(а,б) показаны фазовые траектории, приближающиеся к устойчивому узлу E при различных начальных условиях для системы (3.13) при фиксированных β и ε и двух выбранных значениях α . Как видно, в случае меньшей диссипации (рис. 3.2(б)) фазовые траектории, начинающиеся с различных начальных состояний, расположены ближе и плотнее друг к другу по сравнению со случаем большей диссипации (рис. 3.2(а)). Некоторые из траекторий, изображенных на рис. 3.2, движутся вдоль большой петли возбудимости в направлениях, указанных стрелками. Временные зависимости, представленные на рис. 3.2(в,г), свидетельствуют о том, что время достижения максимальной амплитуды спайка меньше при малой диссипации ($t_{\max} = 1.23$ для $\alpha = 0.7$). Как следствие, траектории сходятся к устойчивому узлу E медленнее. В слу-

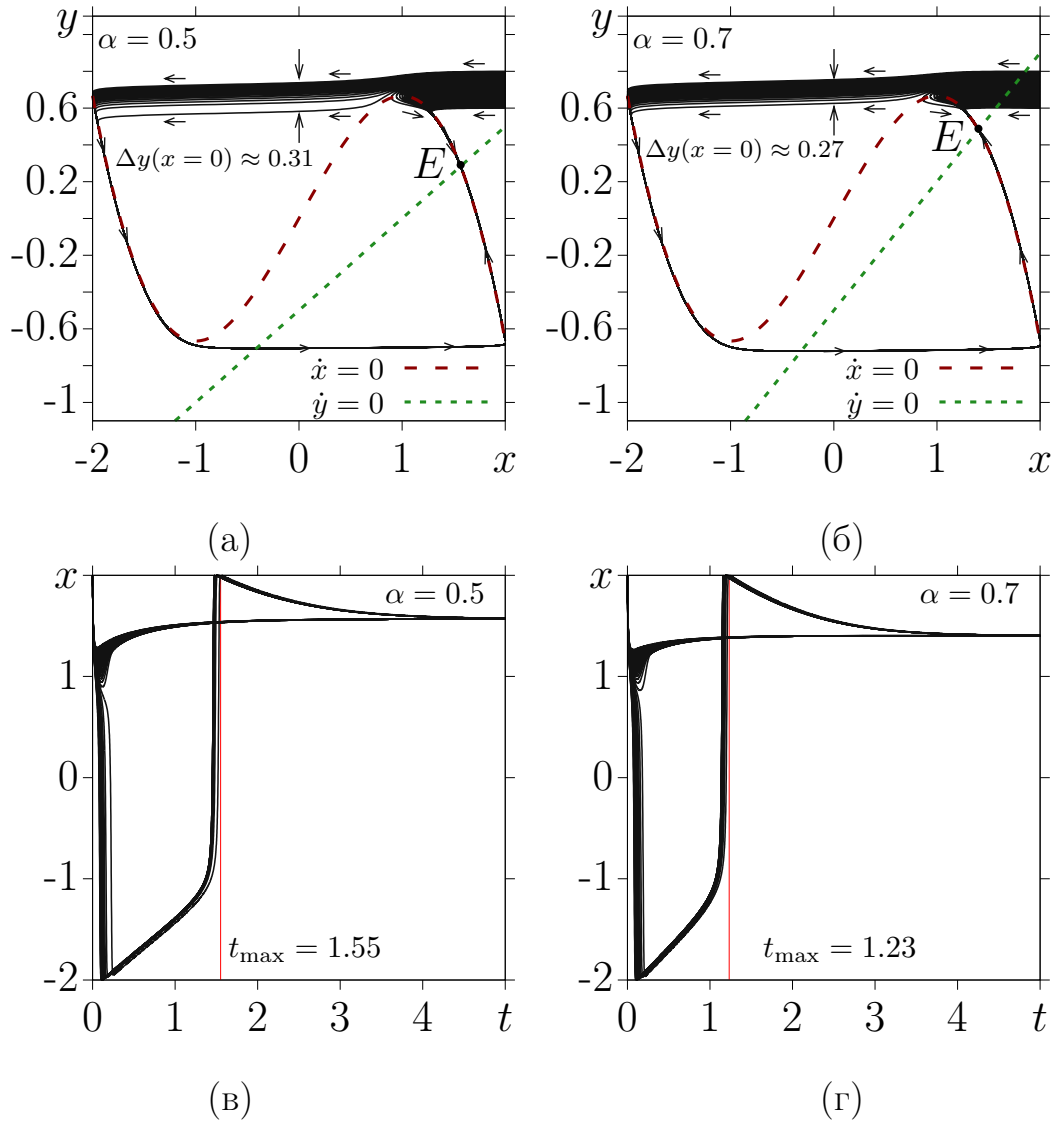


Рис. 3.2. Фазовые портреты (а, б) и временные ряды (в, г) для системы (3.13) при $\alpha = 0.5$ (а, в) и $\alpha = 0.7$ (б, г) для $\varepsilon = 0.01$ и $\beta = -0.5$. Нуль-изоклины x и y изображены красными штриховыми и зелеными пунктирными кривыми, соответственно. Несколько фазовых траекторий, приближающихся к устойчивому узлу E при различных начальных условиях, показаны черным цветом. Стрелки указывают направление движения. Вертикальные красные линии на временных зависимостях (б, г) показывают время достижения максимальной амплитуды импульса.

чае более высокого уровня диссипации (рис. 3.2(в)) требуется большее время для достижения максимальной амплитуды спайка ($t_{\max} = 1.55$ для $\alpha = 0.5$),

и траектории приближаются к устойчивому узлу быстрее, чем в случае малой диссипации.

3.3.2 Возникновение синхронных колебаний в системе двух взаимодействующих осцилляторов ФитцХью-Нагумо с запаздывающей связью

Поскольку задержка по времени неизбежна из-за конечной скорости распространения сигнала между нейронами, рассмотрим сначала систему двух идентичных осцилляторов ФХН с запаздывающей связью и выясним, как автоколебательная активность этой системы зависит от времени задержки, силы связи и параметра диссипации отдельного нейрона.

Для взаимной запаздывающей связи между двумя осцилляторами ФХН запишем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_1 &= x_1 - x_1^3/3 - y_1 + \gamma(x_2(t - \tau) - x_1), \\ \dot{y}_1 &= \alpha x_1 - y_1 + \beta, \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= x_2 - x_2^3/3 - y_2 + \gamma(x_1(t - \tau) - x_2), \\ \dot{y}_2 &= \alpha x_2 - y_2 + \beta,\end{aligned}\tag{3.14}$$

где x_i и y_i , $i = 1, 2$ – динамические переменные, определённые в уравнении (3.13) для одного нейрона. Сила связи между осцилляторами определяется параметром γ , а $\tau > 0$ представляет собой временную задержку в передаче сигнала. Эта система с упрощённой формой записи уравнений для осциллятора ФитцХью–Нагумо $\dot{y}_i = x_i + \beta$ изучалась в работах [100, 173, 174].

Динамика системы (3.14) исследуется для значений параметров, указанных в разделе 3.3.1. Для численного моделирования используется метод Рунге–Кутты четвёртого порядка с шагом по времени $h = 0.005$. Начальные усло-

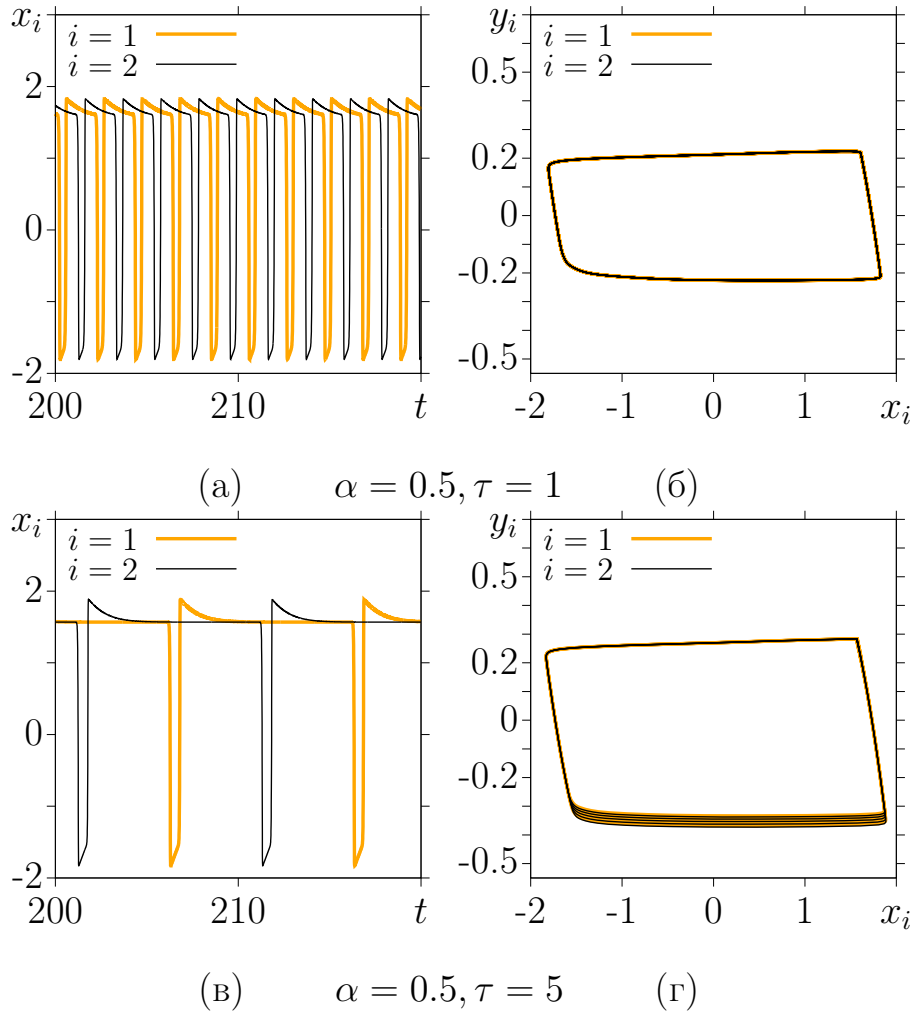


Рис. 3.3. Противофазные колебания в двух осцилляторах ФитцХью-Нагумо с запаздывающей связью (3.14) при $\alpha = 0.5$ и при времени запаздывания $\tau = 1$ (а,б) и $\tau = 5$ (в,г). Временные реализации (а,в) и проекции фазовых портретов (б,г) для 1-го ($i = 1$, чёрные кривые) и 2-го ($i = 2$, оранжевые кривые) нейронов. Начальные условия выбраны так, что в начальный момент возбуждён только один нейрон. Другие параметры: $\gamma = 0.3$, $\varepsilon = 0.01$ и $\beta = -0.5$.

вия задаются в виде двух случайных величин в обоих осцилляторах. Начальные состояния (функция истории) координат выбираются следующим образом: $x_{1,2}(t \in [-\tau; 0]) = x_{1,2}^0$ и $y_{1,2}(t \in [-\tau; 0]) = y_{1,2}^0$, где $x_{1,2}^0 \in [1, 2]$ и $y_{1,2}^0 \in [0, 1]$ для индуцирования синфазного колебательного режима, а из диапазонов $x_1^0 \in [1, 2]$, $y_1^0 \in [0, 1]$, $x_2^0 \in [-2, -1]$, $y_2^0 \in [-1, 0]$ для получения противофазного колебательного режима. Без задержки и при любых значениях силы

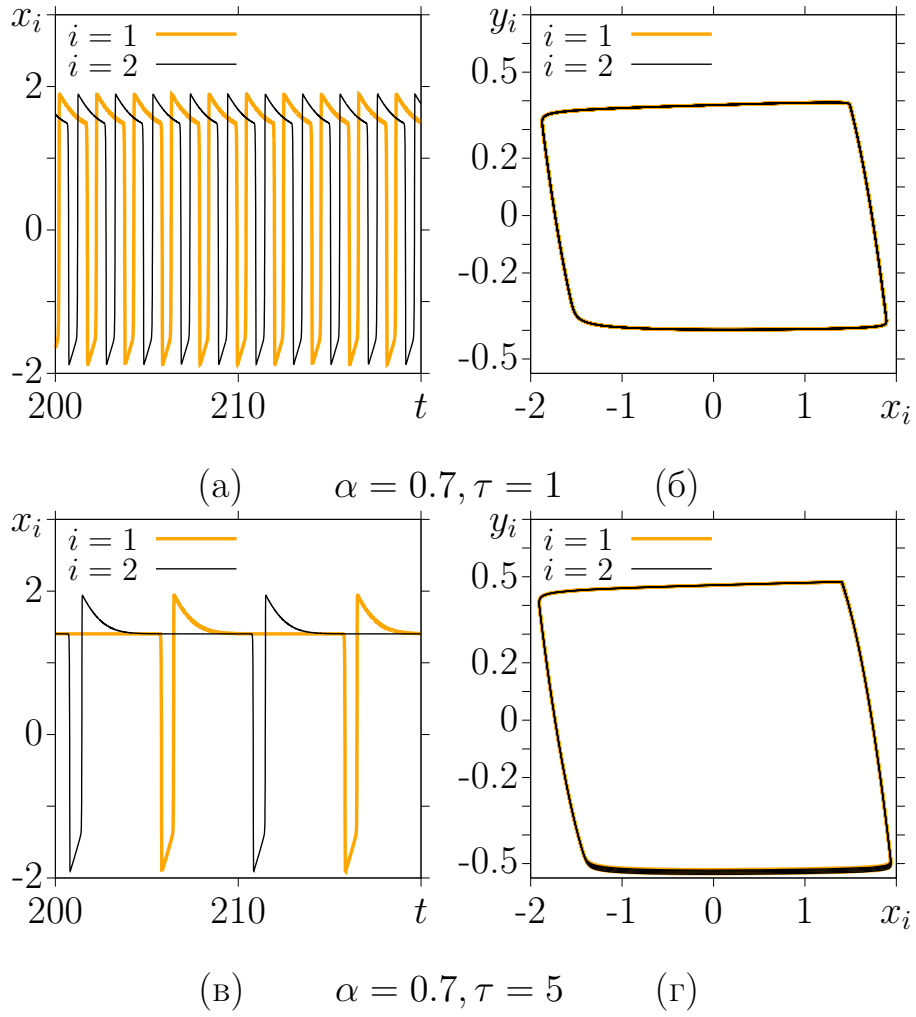


Рис. 3.4. Противофазные колебания в двух осцилляторах ФитцХью-Нагумо с запаздывающей связью (3.14) при $\alpha = 0.7$ и при времени запаздывания $\tau = 1$ (а,б) и $\tau = 5$ (в,г). Временные реализации (а,в) и проекции фазовых портретов (б,г) для 1-го ($i = 1$, чёрные кривые) и 2-го ($i = 2$, оранжевые кривые) нейронов. Начальные условия выбраны так, что в начальный момент возбуждён только один нейрон. Другие параметры: $\gamma = 0.3$, $\varepsilon = 0.01$ и $\beta = -0.5$.

связи γ оба осциллятора ФХН совершают колебания в течение лишь очень короткого переходного периода, после чего возвращаются в одну и ту же точку равновесия без каких-либо колебаний. При введении между нейронами запаздывающей связи в системе возбуждаются периодические автоколебания, начиная с определённого порога по силе связи ($\gamma \approx 0.2$ для $\alpha = 0.5, \tau \gtrsim 1$ и $\gamma \approx 0.1$ для $\alpha = 0.7, \tau \gtrsim 1$). В зависимости от начальных условий связанные осцил-

ляторы демонстрируют как полную синфазную, так и полную противофазную синхронизацию друг с другом.

Динамика осцилляторов ФХН проиллюстрирована на рисунках 3.3 и 3.4 для двух различных значений параметра диссипации ($\alpha = 0.5$ и $\alpha = 0.7$), временной задержки ($\tau = 1$ и $\tau = 5$) и для противофазных колебаний. В этом случае начальные условия выбраны таким образом, что возбуждается только один нейрон ($x_1^0 \in [1, 2]$, $y_1^0 \in [0, 1]$, $x_2^0 \in [-2, -1]$, $y_2^0 \in [-1, 0]$). На обоих рисунках временные зависимости для переменных $x_i(t)$, $i = 1, 2$ (черные и оранжевые кривые соответственно) изображены на фрагментах (а,в), а соответствующие проекции фазовых портретов для двух осцилляторов – на фрагментах (б,г). Графики на рис. 3.3(а,б) получены для $\alpha = 0.5$, а на рис. 3.4(а,б) – для $\alpha = 0.7$; в обоих случаях для времени запаздывания $\tau = 1$. Видно, что, несмотря на возбудимые режимы изолированных нейронов и отсутствие каких-либо внешних сил, запаздывающая связь приводит к возникновению периодических автоколебаний (максимальный показатель Ляпунова Λ равен 0). Это хорошо известный результат, описанный в работе [173]. Поведение во времени обоих осцилляторов отражает противофазные спайковые колебания (рис. 3.3 и 3.4(а,в)). Они характеризуются медленным движением вокруг положения равновесия (в изолированном нейроне) и быстрым движением по предельному циклу, показанному на рисунках 3.3 и 3.4(б,г) при различных значениях параметров. Аналогичные результаты для двух нейронов ФитцХью-Нагумо с задержкой в упрощённом виде были получены численно [173] и аналитически [100]. Кроме того, колебания первого и второго осцилляторов ФХН соответствуют одному и тому же предельному циклу. При большем значении $\alpha = 0.7$ (рис. 3.4) размер предельного цикла увеличивается по оси y , в то время как по оси x он практически не меняется. Это связано с наклоном нулевой линии y по мере роста α . Следовательно, x - и y -нулевые линии пересекаются при больших значениях переменной y , и амплитуда колебаний по этой переменной становится больше.

Теперь проанализируем, как изменяется динамика системы двух взаимно связанных осцилляторов ФХН (3.14) при увеличении времени запаздывания в слагаемом связи.

Сравнение временных реализаций, представленных на рис. 3.3 и 3.4 при $\tau = 1$ и $\tau = 5$, свидетельствует об увеличении периода колебаний с увеличением временной задержки. Как видно из графиков, этот результат не зависит от параметра диссипации.

Расчеты показывают, что период колебаний T сильно зависит от времени запаздывания τ , как было показано аналитически для упрощенной модели ФХН [100, 173]. Более того, было обнаружено, что период всегда равен 2τ для выбранных начальных условий. Этот эффект довольно легко объяснить [74, 174]. Поскольку начальные условия выбираются случайным образом, возбуждается только один нейрон, в то время как другой через короткое время переходит в состояние покоя. После истечения времени задержки второй (молчащий) нейрон получает сигнал от первого (возбужденного) нейрона и также возбуждается. В свою очередь, первый нейрон переходит в состояние покоя, пока не получит сигнал от второго нейрона через связь. Следовательно, колебания в системе противофазны друг другу, а период строго равен удвоенному времени запаздывания. Следует отметить, что возникновение колебаний, вызванных задержкой, имеет пороговый характер. Это означает, что колебания происходят только тогда, когда сила связи γ превышает определённое значение (порог). Это обусловлено следующим фактом. Интенсивность сигнала, который нейрон получает от своего соседа, равна γA , где A – амплитуда колебания. Этот сигнал можно рассматривать как внешнюю периодическую силу. В этом случае нейрон проявляет свою активность только в том случае, если амплитуда внешней силы превышает определённый пороговый уровень. Стоит отметить, что динамика, показанная на рис. 3.3 и 3.4, напоминает реверберацию активности между двумя узлами. Интересным приложением может быть связь с распространением сигналов в слоистых нейронных сетях, исследованным в работе [199].

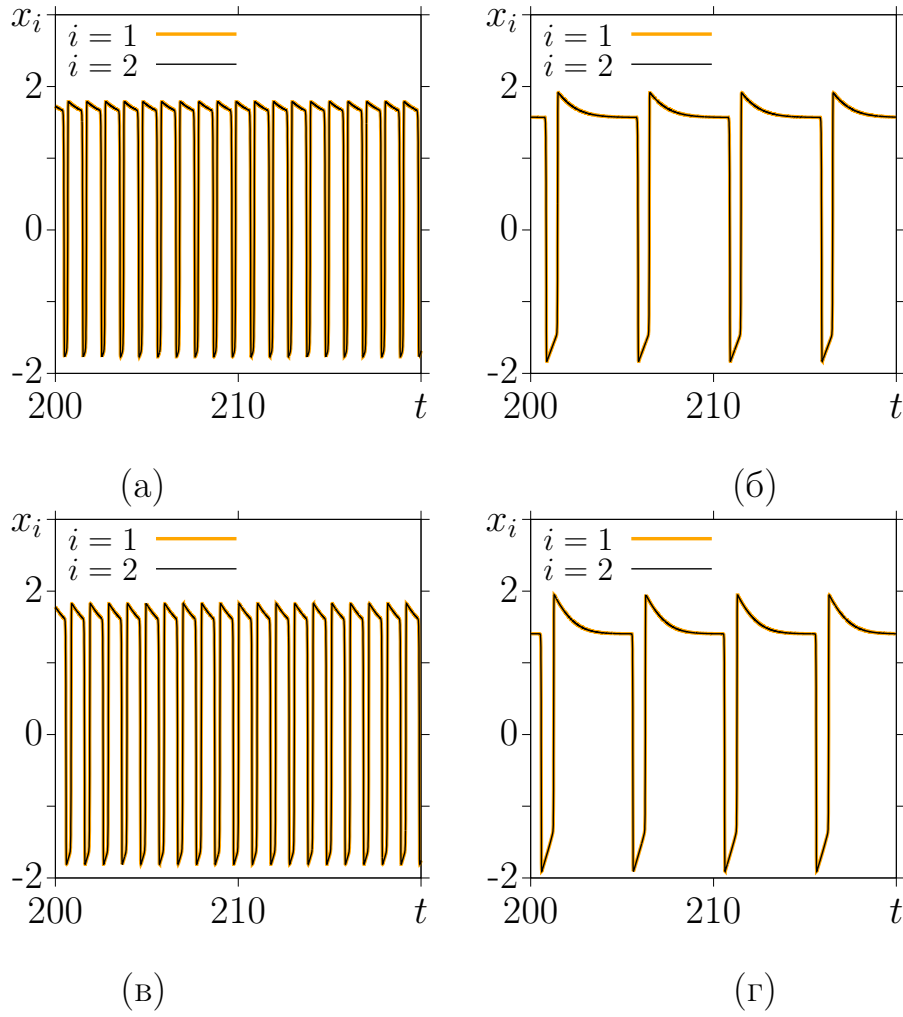


Рис. 3.5. Синфазные колебания двух осцилляторов ФХН с запаздывающей связью (3.14). Временные реализации для 1-го ($i = 1$, чёрные кривые) и 2-го ($i = 2$, оранжевые кривые) осцилляторов при $\alpha = 0.5$ (а,б) и $\alpha = 0.7$ (в,г); $\tau = 1$ (а,в) и $\tau = 5$ (б,г). Начальные условия соответствуют состоянию, в котором оба нейрона изначально возбуждены. Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$,

$$\gamma = 0.5 \text{ и } \beta = -0.5.$$

Возникает следующий вопрос: какие изменения произойдут, если оба осциллятора изначально возбуждены? В этом случае осцилляторы ФХН начинают колебаться синфазно, начиная с определённого значения γ . Примеры временных рядов $x_i(t)$, $i = 1, 2$ представлены на рис. 3.5 для двух значений параметра диссипации $\alpha = 0.5$ (а, б) и $\alpha = 0.7$ (в, г) и для времени запаздывания $\tau = 1$ (а, в) и $\tau = 5$ (б, г). Видно, что теперь оба осциллятора ФХН колеблются синхронно и синфазно. В случае слабой диссипации (рис. 3.5(в,г)) форма спай-

ков во временной зависимости становится более выраженной и резкой для обоих значений τ по сравнению с соответствующими последовательностями спайков в случае сильной диссипации.

Сравнение временных реализаций, полученных для одной и той же временной задержки на рис. 3.3 и 3.4(а,в) (противофазные колебания) и рис. 3.5(а,в) (синфазные колебания), показывает, что частота противофазных колебаний удваивается. При этом проекции фазовых портретов полностью совпадают с предыдущими случаями, представленными на рис. 3.3 и 3.4(б,г). Наблюдаемые различия обусловлены иным механизмом возникновения колебаний, вызванных запаздывающей связью. При первом выборе начальных условий нейроны возбуждаются последовательно один за другим с периодом колебаний $T = 2\tau$. При втором варианте начальных условий оба нейрона активируются одновременно с периодом, равным времени запаздывания. Общее обсуждение такого обмена импульсами, включая запаздывающие обратные связи с различными временами задержки, представлено в работе [74].

Проведем оценку зависимости периода и частоты колебаний от времени запаздывания для обоих типов начальных условий, упомянутых выше. Расчётные зависимости представлены на рис. 3.6 при $\alpha = 0,5$, а также для противофазных (красные кривые) и синфазных (чёрные кривые) колебаний. Как следует из графиков на рис. 3.6(а), период T_i колебаний обоих осцилляторов, обозначенных $i = 1, 2$, строго равен удвоенному времени задержки 2τ для противофазных колебаний и τ для синфазного колебательного режима. В обоих случаях период T_i монотонно и линейно увеличивается с ростом времени запаздывания τ . В свою очередь, частота f_i представляет собой функцию, обратную временной задержке $1/(2\tau)$ для противофазных колебаний и $1/\tau$ для синфазных колебаний (рис. 3.6(б)). Это согласуется с результатами работ [74, 100, 173, 174]. Более того, наши расчёты показывают, что как период, так и частота колебаний определяются только запаздыванием и не зависят от силы связи γ и параметра α . Однако существует определённый порог по γ , при котором колебания

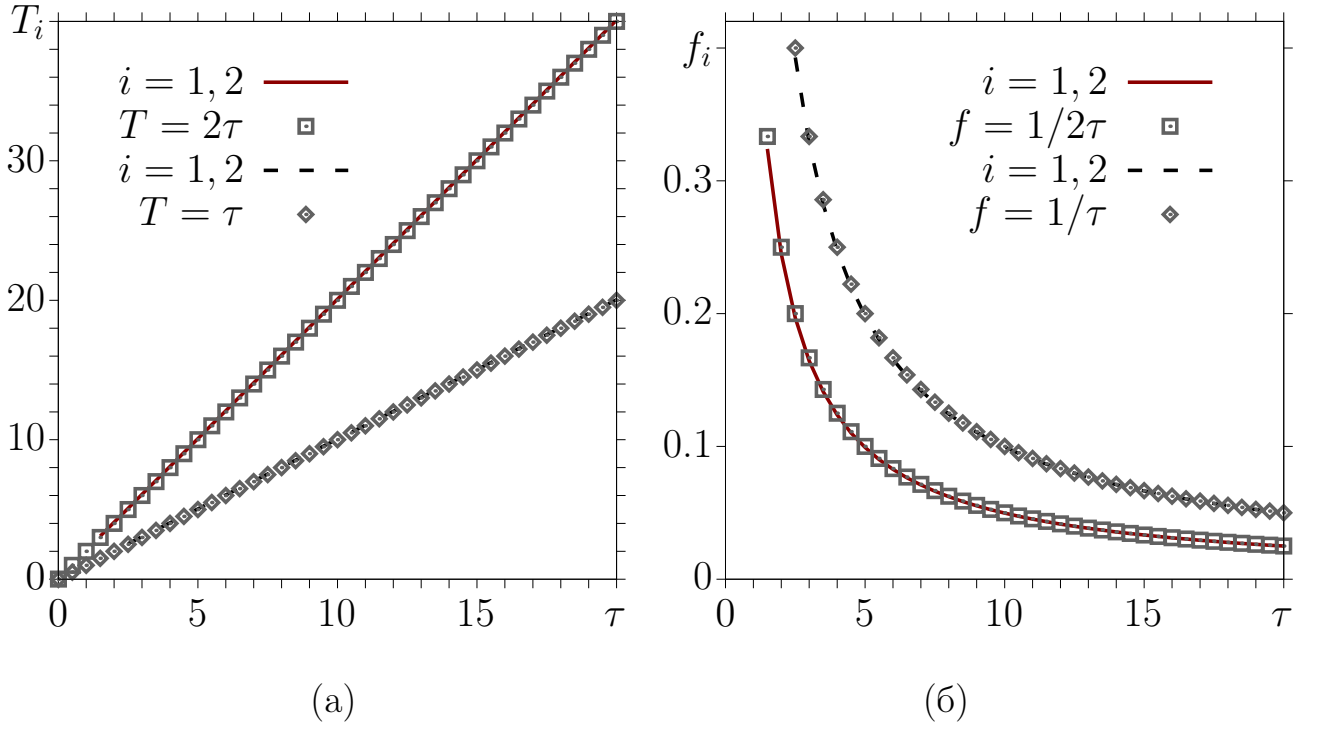


Рис. 3.6. Зависимости периода T_i (а) и частоты f_i (б) двух осцилляторов ФХН ($i = 1, 2$) от времени запаздывания τ для противофазных (красные кривые) и синфазных (чёрные кривые) колебаний в системе (3.14) при $\alpha = 0.5$. Функции $T(\tau) = \tau$ и $f(\tau) = 1/\tau$ обозначены квадратами, а $T(\tau) = 2\tau$ и $f(\tau) = 1/2\tau$ – кружками. Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $\gamma = 0.5$ и $\beta = -0.5$.

возбуждаются, и это значение зависит от времени запаздывания и управляющих параметров (аналитические результаты представлены в работах [74, 100]). Проведённые расчеты показывают, что параметр диссипации α может влиять на порог нейронной активности в системе (3.14). Зависимости порогового значения γ от α представлены на рис. 3.7 при фиксированном времени запаздывания $\tau = 5$ для синфазных и противофазных колебаний. Параметр α варьируется в области возбудимой динамики (область III на рис. 3.1). Видно, что обе зависимости совпадают, а пороговое значение плавно уменьшается с ростом параметра α , т.е. с уменьшением уровня диссипации в нейроне.

Для оценки области существования колебаний, вызванных запаздыванием в системе (3.14), вычислим максимальный показатель Ляпунова Λ и построим его значения на плоскости параметров (τ, γ) для двух значений $\alpha = 0.5$ и $\alpha =$

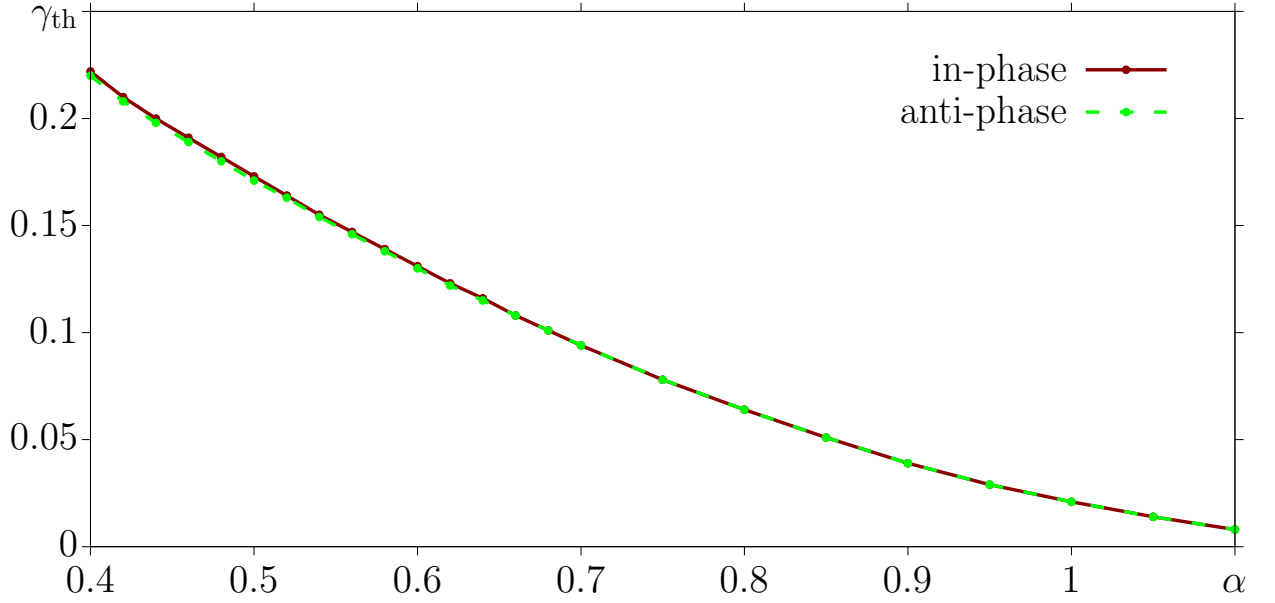


Рис. 3.7. Зависимость порога возбуждения колебаний γ_{th} от параметра диссипации α в системе двух осцилляторов ФХН с запаздывающей связью для синфазных (красная кривая с точками) и противофазных (зелёная штриховая кривая с точками) колебаний при $\tau = 5$. Другие параметры:

$$\varepsilon = 0.01 \text{ и } \beta = -0.5.$$

0.7. Максимальный показатель Ляпунова рассчитывается следующим образом:

$$\Lambda(t_0, T) := \frac{1}{T} \ln \frac{\|\xi(t_0 + T)\|}{\|\xi(t_0)\|}, \quad (3.15)$$

и представляет собой конечную скорость роста малого возмущения $\xi(t_0)$, описываемого вариационными линейными дифференциальными уравнениями. Соответствующие графики представлены на рис. 3.8(а, б) для противофазных колебаний и (в, г) для синфазных колебаний.

Очевидно, что значения Λ должны быть отрицательными при отсутствии колебаний и нулевыми или положительными (только при хаосе) для колебательного режима. В нашем случае колебания, вызванные запаздывающей связью, всегда нехаотичны. Следовательно, максимальный показатель Ляпунова всегда равен нулю. Таким образом, распределение значений Λ на плоскости параметров (τ, γ) позволяет различить состояние устойчивого равновесия (красный цвет, отрицательные значения Λ) и колебательный (жёлтый цвет, $\Lambda = 0$) режим

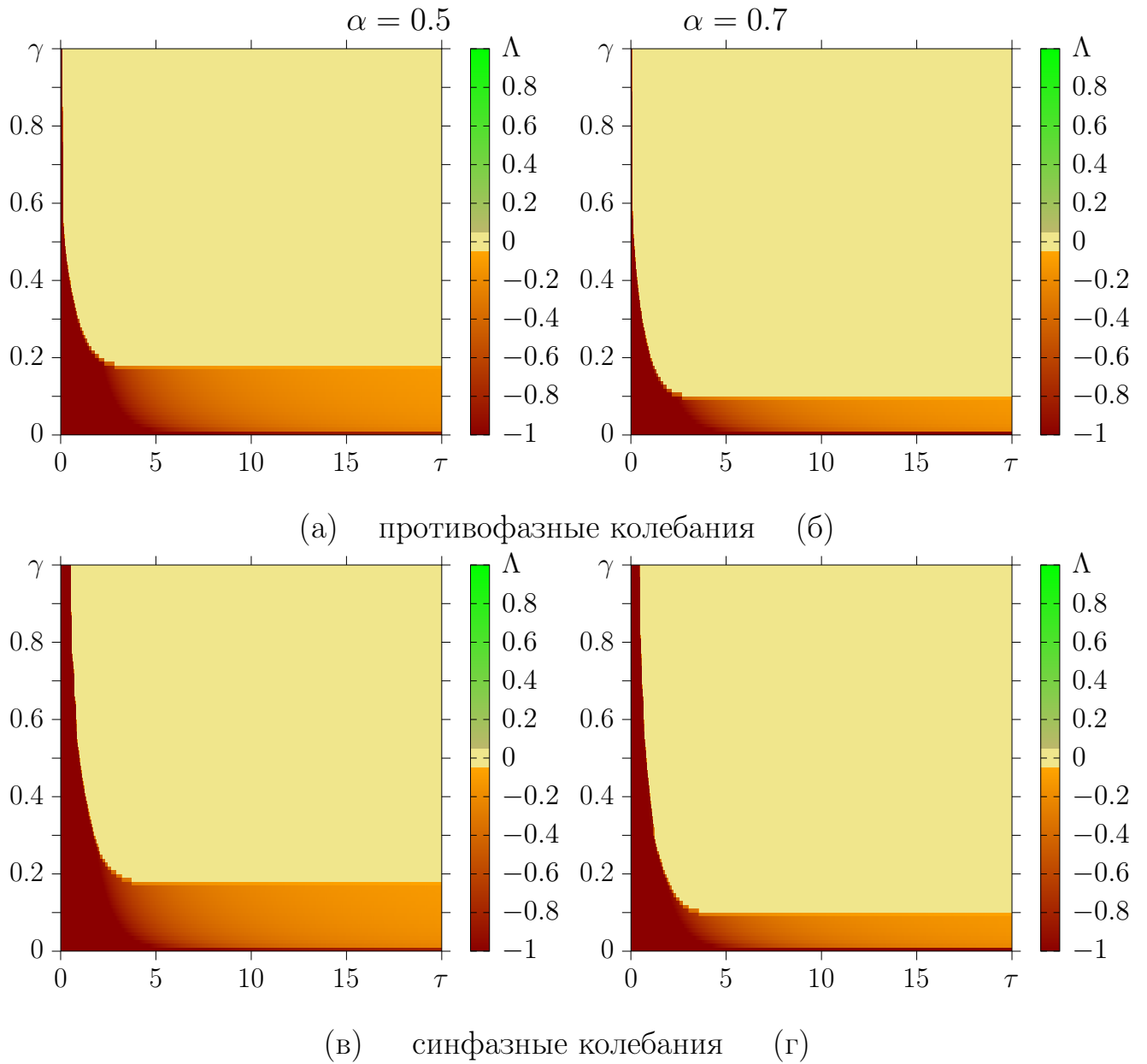


Рис. 3.8. Распределения значений максимального показателя Ляпунова Λ на плоскости параметров (τ, γ) для противофазных колебаний (верхний ряд) и синфазных колебаний (нижний ряд) при $\alpha = 0.5$ (а, в) и $\alpha = 0.7$ (б, г). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $\beta = -0.5$.

и, таким образом, определить границу между ними. Диаграммы показывают, что существует порог возбуждения колебаний как по силе связи γ , так и по запаздыванию τ . При $\tau = 0$ ни противофазные, ни синфазные устойчивые колебания не могут быть возбуждены даже при очень сильной связи. По-видимому, наименьшая временная задержка определяется минимальной длительностью

импульса в нейроне, возбуждаемом запаздывающей связью. В свою очередь, порог по γ обусловлен минимальной амплитудой влияния соседнего нейрона через запаздывающую связь. Чем меньше время запаздывания, тем больше должна быть сила связи, вплоть до определённого значения τ , после чего порог по γ не меняется. Следует отметить, что, как хорошо видно из рис. 3.8 и подтверждается проведенными расчётами, порог γ существенно ниже при больших значениях α . Увеличение α уменьшает диссипацию нейрона, и, следовательно, для возникновения колебаний в осцилляторе ФХН требуется меньшая амплитуда возбуждения. Графики распределения значений максимального показателя Ляпунова на рис. 3.8 свидетельствуют о том, что порог возникновения колебательного режима по времени запаздывания больше для синфазных колебаний, чем для противофазных, при этом порог по силе связи γ практически одинаков для обоих случаев. Следует отметить, что отрицательные значения максимального показателя Ляпунова в области состояния покоя уменьшаются с увеличением τ .

Линейный анализ устойчивости режимов динамики. Пусть неподвижная точка имеет координаты $\mathbf{x}^* = (x_1^*, y_1^*, x_2^*, y_2^*)$. Численные значения координат находятся путём одновременного решения двух нелинейных уравнений для каждой пары $(x_1^*, y_1^*) = (x_2^*, y_2^*)$:

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{x_1^3}{3} - y_1 &= 0, \\ \alpha x_1 - y_1 + \beta &= 0, \\ x_2 - \frac{x_2^3}{3} - y_2 &= 0, \\ \alpha x_2 - y_2 + \beta &= 0 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Точка равновесия в возбуждимом режиме задаётся соотношениями $x_1^* = x_2^*$ и $y_1^* = y_2^*$. Линеаризуя систему (3.14) в окрестности неподвижной точки $\mathbf{x}^*$, полагая $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^* + \delta\mathbf{x}(t)$, получаем

$$\delta\dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\varepsilon}A\delta\mathbf{x}(t) + \frac{\gamma}{\varepsilon}B\delta\mathbf{x}(t - \tau), \tag{3.17}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} \xi & -1 & 0 & 0 \\ \alpha\varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -1 \\ 0 & 0 & \alpha\varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

В приведенной матрице $\xi := 1 - x_1^{*2} - \gamma = 1 - x_2^{*2} - \gamma < 0$, так как $x_1^{*2} > 1$.

Анзац

$$\delta \mathbf{x}(t) = \exp(\lambda t) \mathbf{u}, \quad (3.20)$$

где $\mathbf{u}$ – собственный вектор матрицы Якоби A , приводит к следующему характеристическому уравнению для собственных значений λ :

$$\det\left(\frac{A}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{\varepsilon} B \exp(-\lambda\tau) - \lambda I_{N \times N}\right) = 0.$$

Раскрывая матрицы внутри определителя, получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{\xi}{\varepsilon} - \lambda & -\frac{1}{\varepsilon} & \gamma e^{-\lambda\tau} & 0 \\ \alpha & -1 - \lambda & 0 & 0 \\ \gamma e^{-\lambda\tau} & 0 & \frac{\xi}{\varepsilon} - \lambda & -\frac{1}{\varepsilon} \\ 0 & 0 & \alpha & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.21)$$

В силу симметрии, определитель можно разложить по аналогии с упрощенной моделью [173] на

$$\left[\left(\frac{\xi}{\varepsilon} - \lambda\right)(-1 - \lambda) + \frac{\alpha}{\varepsilon}\right]^2 - \left(\frac{\gamma}{\varepsilon} e^{-\lambda\tau}(-1 - \lambda)\right)^2 = 0, \quad (3.22)$$

что дает характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - \lambda\left(\frac{\xi}{\varepsilon} - 1\right) - \frac{\xi}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon} \pm (\lambda + 1)\frac{\gamma}{\varepsilon} e^{-\lambda\tau} = 0. \quad (3.23)$$

Это трансцендентное уравнение имеет бесконечное число комплексных решений λ . На рис. 3.9 показана зависимость наибольшей действительной части $\text{Re}(\lambda)$ от τ для ряда значений силы связи γ и двух значений параметра диссипации: $\alpha = 0.5$ (рис. 3.9,(а)) и $\alpha = 0.7$ (рис. 3.9,(б)). Получение ξ из приведённого выше уравнения не допускает простой формы, как в случае [173].

Для всех значений τ действительная часть отрицательна, а модуль действительной части собственного значения монотонно убывает с ростом τ . Асимптотически при больших τ собственные значения определяются квадратичным характеристическим уравнением

$$\lambda^2 + \lambda \left(\frac{|\xi|}{\varepsilon} + 1 \right) + \frac{|\xi| + \alpha}{\varepsilon} = 0$$

в предположении, что $\xi < 0$. Его решения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{|\xi|}{\varepsilon} + 1 \right) \left(1 \mp \sqrt{1 - 4\varepsilon \left(\frac{|\xi| + \alpha}{(|\xi| + \varepsilon)^2} \right)} \right) \quad (3.24)$$

всегда имеют отрицательные действительные части. Следовательно, состояние равновесие всегда устойчиво. Как видно из рис. 3.9, увеличение α , по-видимому, не влияет на устойчивость состояния равновесия относительно τ . Таким образом, состояние равновесия сосуществует с предельным циклом (периодическими колебаниями), и в системе двух связанных осцилляторах ФитцХью-Нагумо наблюдается мультистабильность. Это свойство проверено численно и проиллюстрировано на рис. 3.10 для двух значений параметра α . Видно, что на фазовой плоскости имеются три устойчивых режима: состояние равновесия E и два предельных цикла, один из которых соответствует синфазным колебаниям (пунктирная красная линия), а другой – противофазным колебаниям (зеленая кривая).

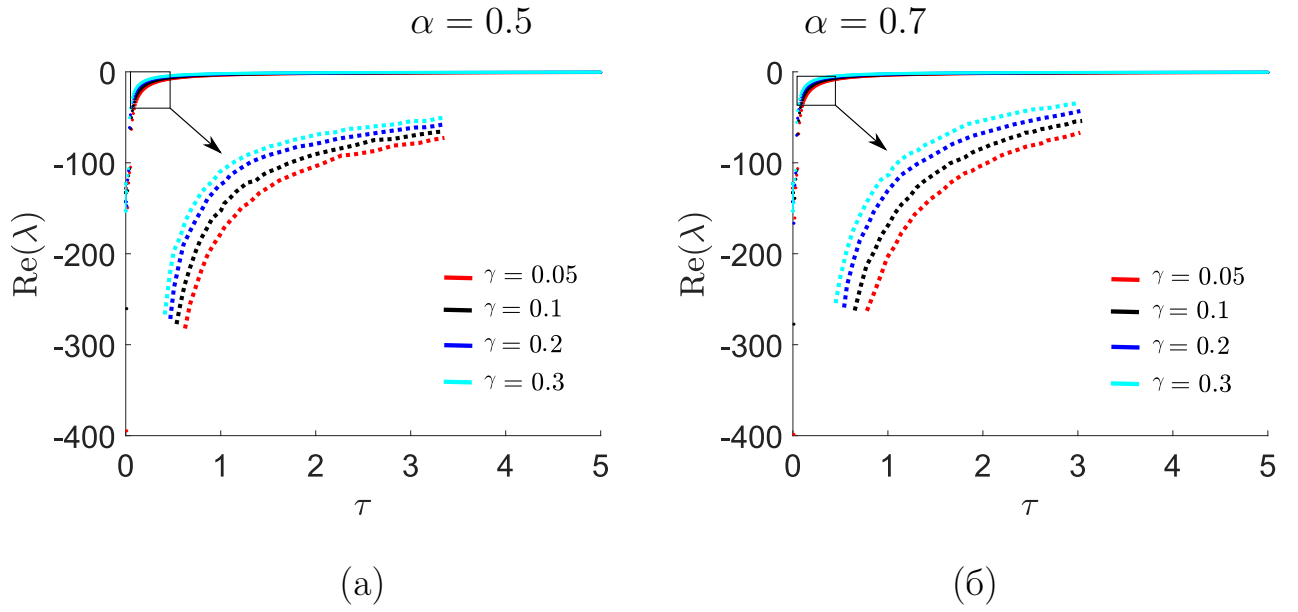


Рис. 3.9. Зависимость действительной части собственных значений λ от времени запаздывания τ при $\alpha = 0.5$ (а) и $\alpha = 0.7$ (б) и для ряда значений силы связи γ (см. легенду). Состояние равновесия системы (3.16) устойчиво при всех выбранных значениях параметров. Кривая зависимости немного смещается вверх с увеличением γ (см. увеличенное изображение на вставках). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01, \beta = -0.5$.

3.3.3 Переход к полной синхронизации в кольце осцилляторов ФитцХью-Нагумо с запаздывающей связью

Зная особенности возникновения колебаний в системе двух связанных осцилляторов ФХН с запаздыванием в канале связи, можно расширить численные исследования на случай сети связанных осцилляторов. Рассматриваемый ансамбль имеет кольцевую топологию с запаздывающей связью между элемен-

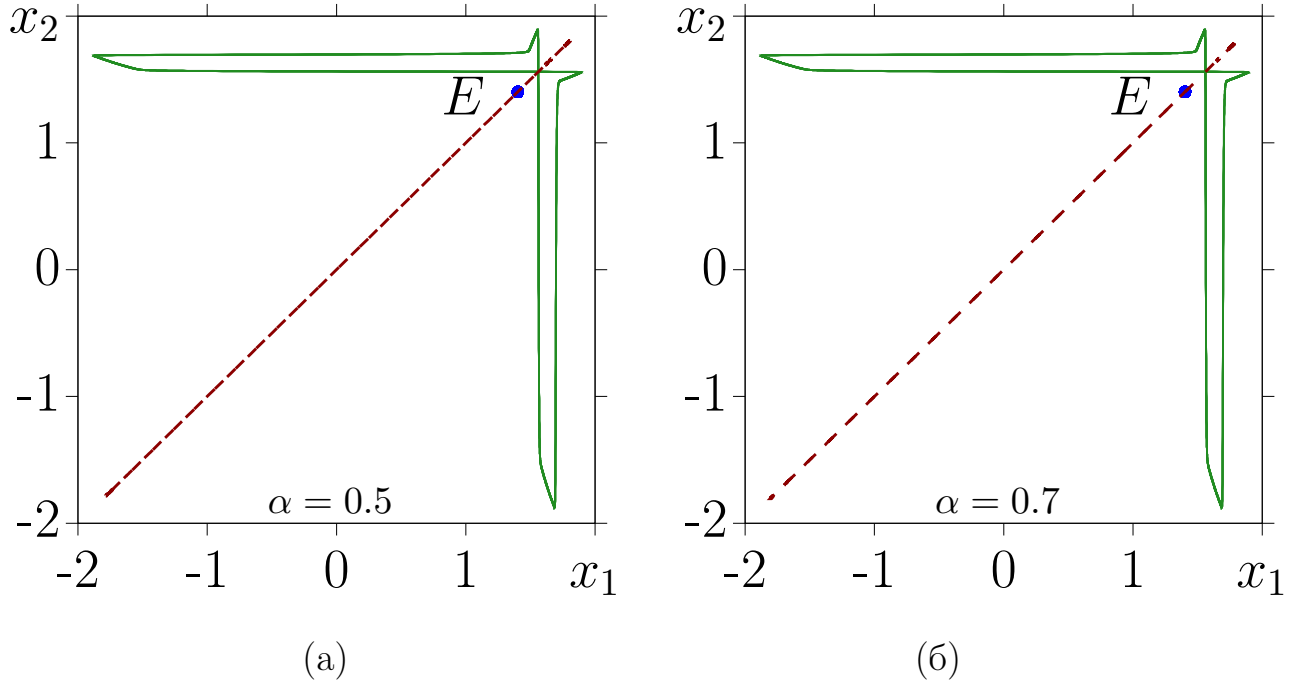


Рис. 3.10. Проекция фазовых портретов на координатную плоскость (x_1, x_2) для системы (3.14) при $\alpha = 0.5$ (а) и $\alpha = 0.7$ (б). На графиках показаны устойчивое равновесие E , синфазная (красная пунктирная линия) и противофазная (зелёная кривая) периодические орбиты. Другие параметры: $\varepsilon = 0.01, \beta = -0.5$.

тами и описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon \dot{x}_i(t) &= x_i(t) - x_i^3(t)/3 - y_i(t) + \frac{\gamma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [x_j(t - \tau) - x_i(t)], \\
 \dot{y}_i(t) &= \alpha x_i(t) - y_i(t) + \beta, \\
 i &= 1, \dots, N, \quad x_{i+N}(t) = x_i(t), \quad y_{i+N}(t) = y_i(t),
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

где индекс i динамических переменных x_i и y_i , $i = 1, \dots, N$ определяет положение осциллятора в сети, а $N = 50$ – общее количество элементов. Параметр P задает радиус связи и обозначает количество соседних узлов, с которыми связан i -й осциллятор с каждой стороны. Рассматривается случай, когда все осцилляторы идентичны и каждый из них взаимодействует (через переменную x) с одним узлом слева и одним справа. Таким образом, $P = 1$ соответствует локальной связи между узлами. Граничные условия являются периодическими, а

начальные состояния фиксированы для каждого нейрона следующим образом: $x_i(t \in [-\tau; 0]) = x_i^0$ и $y_i(t \in [-\tau; 0]) = y_i^0$, где x_i^0 и y_i^0 случайно равномерно распределены в интервалах: $x_i(0) \in [-2, 2]$, $y_i(0) \in [-1, 1]$. Остальные параметры имеют тот же смысл, что и для системы (3.14). Сети упрощенных систем ФитцХью–Нагумо с запаздывающей связью были исследованы численно и аналитически для кольцевой и для более общих топологий в работах [75, 100, 200].

Индукцированные запаздыванием колебания. По аналогии со случаем системы двух связанных осцилляторов ФХН, описанном выше, динамика кольца осцилляторов исследуется при изменении силы связи γ и времени запаздывания τ в слагаемом связи. Интересно, что вызванные запаздыванием колебания в нейронной сети (3.25) могут быть синхронизированы только синфазно при любых рассматриваемых начальных условиях, а устойчивые противофазные колебания не наблюдаются.

Проанализируем сначала зависимость порога возбуждения колебаний от силы связи и времени запаздывания. В этом случае также рассчитывается и строится распределение значений максимального показателя Ляпунова Λ на плоскости параметров (τ, γ) . Результаты представлены на рис. 3.11 для двух различных значений параметра диссипации α .

Численное моделирование показывает, что все колебания, вызванные запаздыванием в нейронной сети (3.14), являются регулярными ($\Lambda = 0$ во всей области существования колебаний (рис. 3.11)). Сравнение диаграмм, построенных для двух осцилляторов ФХН (рис. 3.8) и нейронной сети (рис. 3.11), свидетельствует о сходстве возникновения колебаний по силе связи и времени запаздывания в обоих случаях. Максимальный показатель Ляпунова Λ уменьшается с уменьшением времени запаздывания в неосцилляторном режиме, как и в случае двух связанных осцилляторов ФХН. Однако порог по γ для сети несколько выше.

Таким образом, по сравнению с системой двух связанных осцилляторов ФХН, область автоколебаний уменьшается как по параметру диссипации α , так

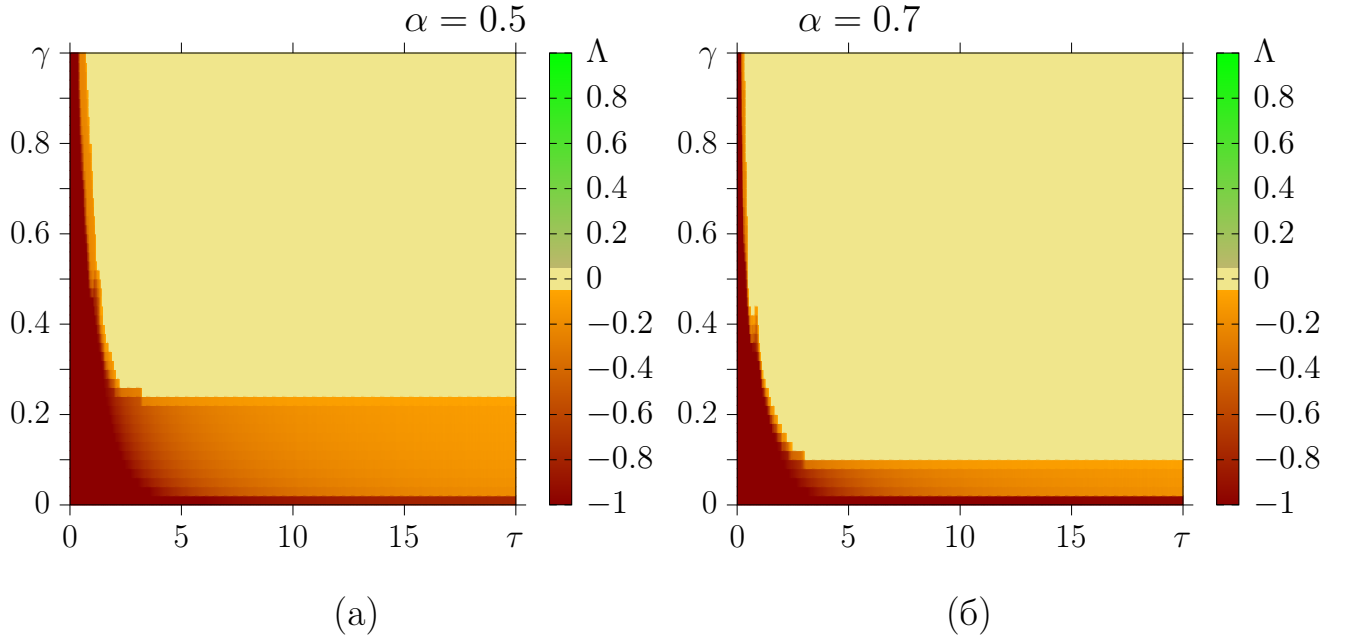


Рис. 3.11. Распределения значений максимального показателя Ляпунова Λ на плоскости параметров (τ, γ) для двух различных значений параметра диссипации $\alpha = 0.5$ (а) и $\alpha = 0.7$ (б) при случайных начальных условиях в сети (3.25). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $\beta = -0.5$, $P = 1$, $N = 50$.

и по времени запаздывания τ . Поскольку сценарий возбуждения колебаний при $\alpha = 0.5$ и $\alpha = 0.7$ одинаков, дальнейшие численные исследования динамики нейронной сети проводились для случая $\alpha = 0.5$.

Теперь зафиксируем время запаздывания $\tau = 5$ и исследуем эволюцию динамики кольца по мере увеличения силы связи γ . При достаточно малом значении γ начальные флуктуации не могут индуцировать колебания в сети (3.25) (красный и оранжевый цвета в распределении на рис. 3.11). Колебания, вызванные задержкой, возникают при $\Lambda \approx 0$ (светло-жёлтые цвета на диаграммах на рис. 3.11). Однако, в отличие от случая двух связанных нейронов, только часть сети начинает демонстрировать колебания, в то время как остальная часть остаётся в состоянии покоя. Это похоже на "бамп" состояние (bump state) в нейронауке [201, 202]. Переходный процесс при $\gamma = 0.3$ проиллюстрирован пространственно-временной диаграммой на рис. 3.12(a1). Видно, что переходный процесс длится достаточно долго, в течение нескольких десятков периодов.

На начальном этапе наблюдается один широкий и три узких кластера, демонстрирующих колебательную динамику. Однако с течением времени размеры кластеров изменяются, широкий кластер значительно сужается, а один из мелких кластеров полностью исчезает. В результате асимптотически наблюдаются только три кластера, что показано на пространственно-временном графике на рис. 3.12(а2), где вертикальная шкала времени увеличена для лучшей визуализации. Отметим, что нейроны в двух кластерах возбуждаются синфазно друг с другом, в то время как их мгновенные фазы не совпадают с таковыми для нейронов третьего кластера. По-видимому, период колебаний не равен строго временной задержке, $T = \tau$, но весьма близок к ней, $T \approx \tau$. Более того, период может незначительно изменяться в разных кластерах независимо друг от друга. Это приводит к опережению или запаздыванию мгновенных фаз в течение длительного времени наблюдения. Остальные осцилляторы в кольце остаются в состоянии покоя. Более того, элементы кластеров с колебательной динамикой проявляют свою активность в течение достаточно короткого времени и большую часть времени между импульсами находятся в состоянии покоя, вызванном задержкой, что характерно для динамики осцилляторов ФитцХью-Нагумо. Мгновенный пространственный профиль в момент возбуждения колебаний показан на рис. 3.12(а3). Нейроны возбуждаются не одновременно, а с некоторой задержкой. Нейроны, принадлежащие молчащему кластеру и взаимодействующие с краевыми элементами кластеров осциллирующих элементов, также подвергаются возмущению во время импульсного возбуждения, однако этого возмущения недостаточно для возбуждения нейронов. По-видимому, увеличение силы связи γ может привести к возбуждению других нейронов.

Увеличим силу связи до $\gamma = 0.4$. Соответствующие пространственно-временные диаграммы и мгновенный пространственный профиль динамики кольца представлены на рис. 3.12(б1)–(б3). Как видно из графиков, увеличение γ приводит к изменению переходного времени процесса. Начальное пространственное распределение кластеров очень похоже на случай $\gamma = 0.3$

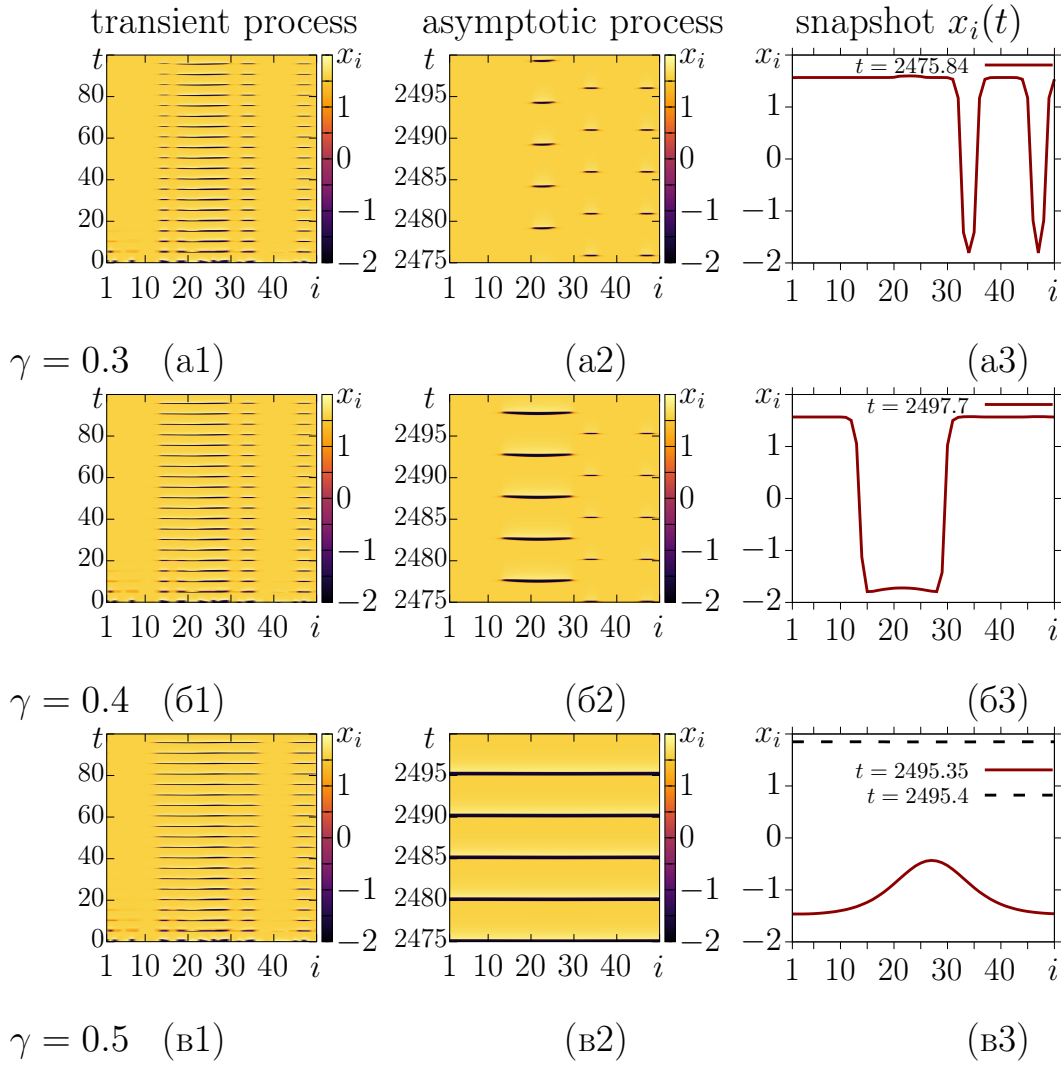


Рис. 3.12. Индуцированные запаздыванием колебания, наблюдающиеся в области с $\Lambda \approx 0$ на диаграмме на рис. 3.11(а), для трёх увеличивающихся значений силы связи: $\gamma = 0.3$ (а1)–(а3), $\gamma = 0.4$ (б1)–(б3) и $\gamma = 0.5$ (в1)–(в3). Эволюция динамики сети (3.25) иллюстрируется пространственно-временными диаграммами для переходного процесса в пределах $t \in [0, 250]$ (левый столбец, (а1)–(в1)) и асимптотического процесса (средний столбец, (а2)–(в2)) в пределах $t \in [2475, 2500]$, а также мгновенными пространственными профилями для переменных x_i (правый столбец, (а3)–(в3), красные кривые). Пунктирная линия на графике (в3) соответствует спокойному режиму. Масштабы времени в левом и среднем столбцах различны. Другие параметры:

$$\tau = 5, \alpha = 0.5, \varepsilon = 0.01, \beta = -0.5, P = 1, N = 50.$$

(рис. 3.12(a1)). Однако размеры кластеров элементов с осциллирующей динамикой практически не меняются со временем, и переходный процесс становится достаточно коротким. В то же время период колебаний в различных кластерах продолжает незначительно меняться в окрестности времени запаздывания τ , и нейроны активируются не одновременно. Устойчивый режим иллюстрируется пространственно-временным графиком, представленным на рис. 3.12(b2). Ширина кластера, включающего осциллирующие элементы, остаётся такой же, как и на начальном этапе колебаний. Мгновенные фазы колебаний в разных кластерах сдвинуты относительно друг друга, а их разности фаз не постоянны во времени, как в случае $\gamma = 0.3$. Мгновенный профиль состояния системы, соответствующий устойчивому режиму в момент возбуждения колебаний (рис. 3.12(b3)), свидетельствует о том, что нейроны возбуждаются также с некоторым запаздыванием, как и в предыдущем случае.

Продолжая увеличивать силу связи между осцилляторами ФХН в (3.25), рассмотрим случай $\gamma = 0.5$. Как следует из пространственно-временной диаграммы для переходного процесса, представленной на рис. 3.12(v1), колебания возникают так же, как и в двух ранее рассмотренных случаях, благодаря одному и тому же набору начальных условий. Однако все кластеры с колебательной динамикой элементов расширяются со временем. Этот эффект связан с тем, что краевые нейроны этих кластеров взаимодействуют с молчащими нейронами. Поскольку сила связи достаточно велика, это взаимодействие возбуждает молчащие нейроны, и они присоединяются к осцилляторным кластерам. В свою очередь, эти нейроны впоследствии возбуждают соседние элементы. Таким образом, все нейроны сети (3.25) начинают демонстрировать колебательную динамику, которая наблюдается в течение достаточно длительного времени. Этот асимптотически устойчивый режим иллюстрируется пространственно-временным графиком, представленным на рис. 3.12(v2). Нейроны возбуждаются не одновременно, в начальном состоянии возбуждения наблюдается небольшая задержка. Период колебаний строго равен $T = \tau$. Мгновенные фазы всех

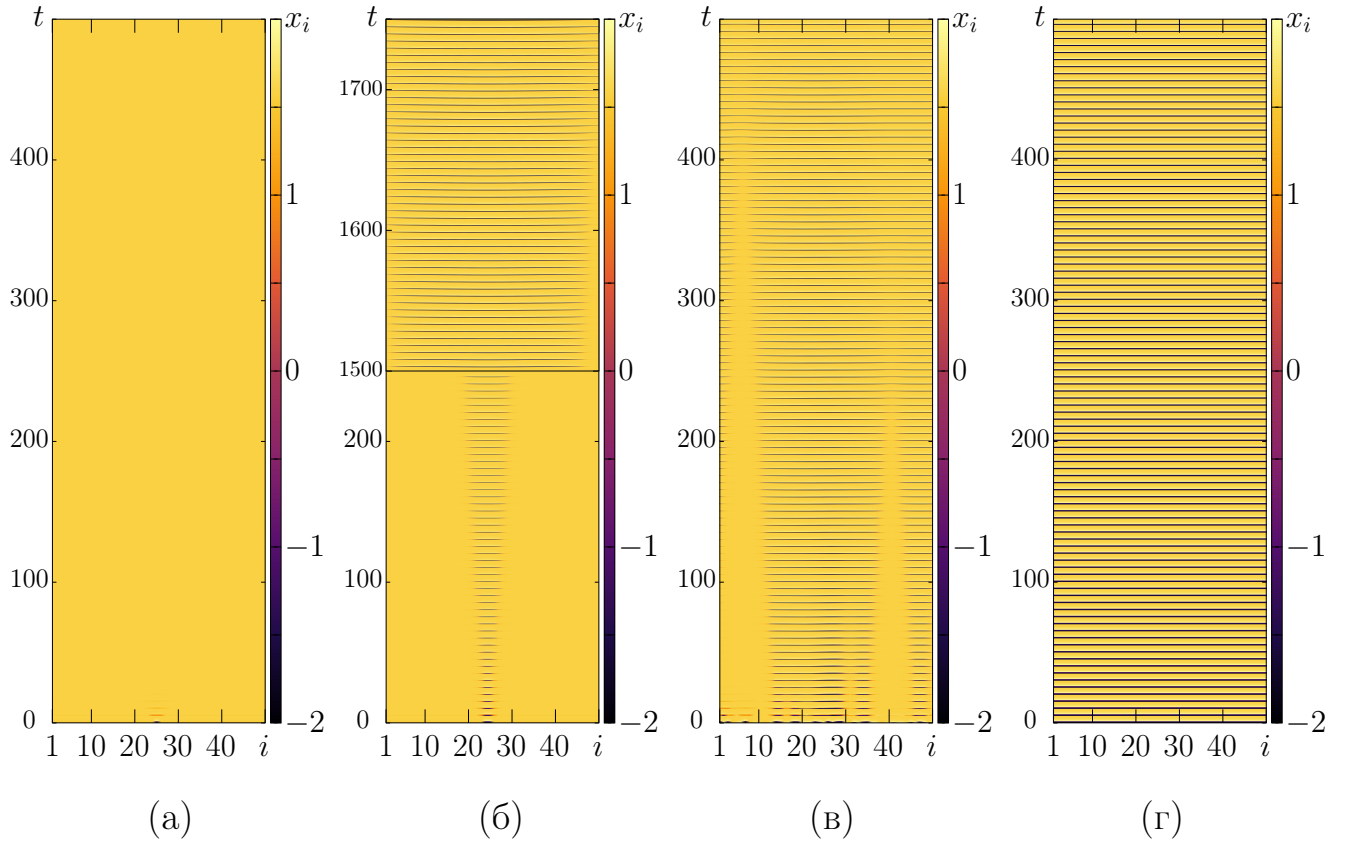


Рис. 3.13. Индуцированные запаздыванием колебания, наблюдающиеся в области с $\Lambda \approx 0$ на диаграмме на рис. 3.11,(а), для одного (а), двух (б), случайного числа (около 30 узлов) (в) и 50 (г) первоначально возбуждённых нейронов для $\gamma = 0.5$. Эволюция динамики сети (3.25) проиллюстрирована пространственно-временными диаграммами. Другие параметры: $\tau = 5$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.01$, $\beta = -0.5$, $P = 1$, $N = 50$.

узлов близки друг к другу, но не равны, что отражает мгновенный пространственный профиль состояния системы на рис. 3.12(в3)). Мгновенный профиль показывает определённое пространственное распределение значений x_i в момент возбуждения нейрона.

Проведенное численное моделирование показывает, что длительность переходного процесса может зависеть от количества изначально возбуждённых нейронов. Этот факт проиллюстрирован на рис. 3.13, где представлены пространственно-временные диаграммы для случаев, когда изначально возбуждён один, два, случайное число (около 30 узлов) и все нейроны сети ($N = 50$).

Численные результаты свидетельствуют о наличии критического числа изначально возбуждённых соседних нейронов, позволяющего кольцу демонстрировать колебательное поведение. Все нейроны сети остаются в состоянии покоя, если изначально возбуждён только один нейрон (рис. 3.13(а)), и демонстрируют постепенное распространение колебательной активности, когда изначально возбуждены по крайней мере два соседних нейрона (рис. 3.13(б)). Однако в этом случае переходный процесс довольно длительный, как видно на рис. 3.13(б), при этом все нейроны возбуждаются быстрее, когда изначально возбуждаются случайно выбранные соседние нейроны или все нейроны (рис. 3.13(в,г)).

Чтобы продемонстрировать, как сила связи γ влияет на количество возбужденных (срабатывающих) нейронов, были рассчитаны распределения отношения количества срабатывающих узлов N_f к общему количеству нейронов в сети N (рис. 3.14(а,г)), значений глобального параметра порядка

$$r = \left\langle \left| \frac{1}{N} \sum_i e^{i\Theta_i} \right| \right\rangle_t,$$

где $\Theta_i = \arctan(y_i/x_i)$ обозначает геометрическую фазу i -го узла [93], на плоскости параметров (τ, γ) (рис. 3.14,(б, д)), и пространственные распределения минимальных значений переменных x_i на плоскости (i, γ) (рис. 3.14,(в,е)). Обозначение $\langle \dots \rangle_t$ означает усреднение по времени. Полученные распределения представлены на рис. 3.14 для двух значений параметра диссипации $\alpha = 0.5$ (рис. 3.14,(а-в)) и $\alpha = 0.7$ (рис. 3.14,(г-е)). Распределения $N_f/N(\tau, \gamma)$ получены с использованием 10 различных наборов случайных начальных условий для усреднения результатов.

Как следует из диаграмм, представленных на рис. 3.14(а,г) и рис. 3.14(б,д), можно выделить два различных пороговых значения по силе связи γ . Лишь небольшая часть нейронов возбуждается при превышении первого порога $\gamma_{\text{th,min}}$. Ниже этого значения все нейроны находятся в состоянии покоя, а параметр порядка r очень близок к 1 (рис. 3.14(б,д)). Как видно из диаграмм,

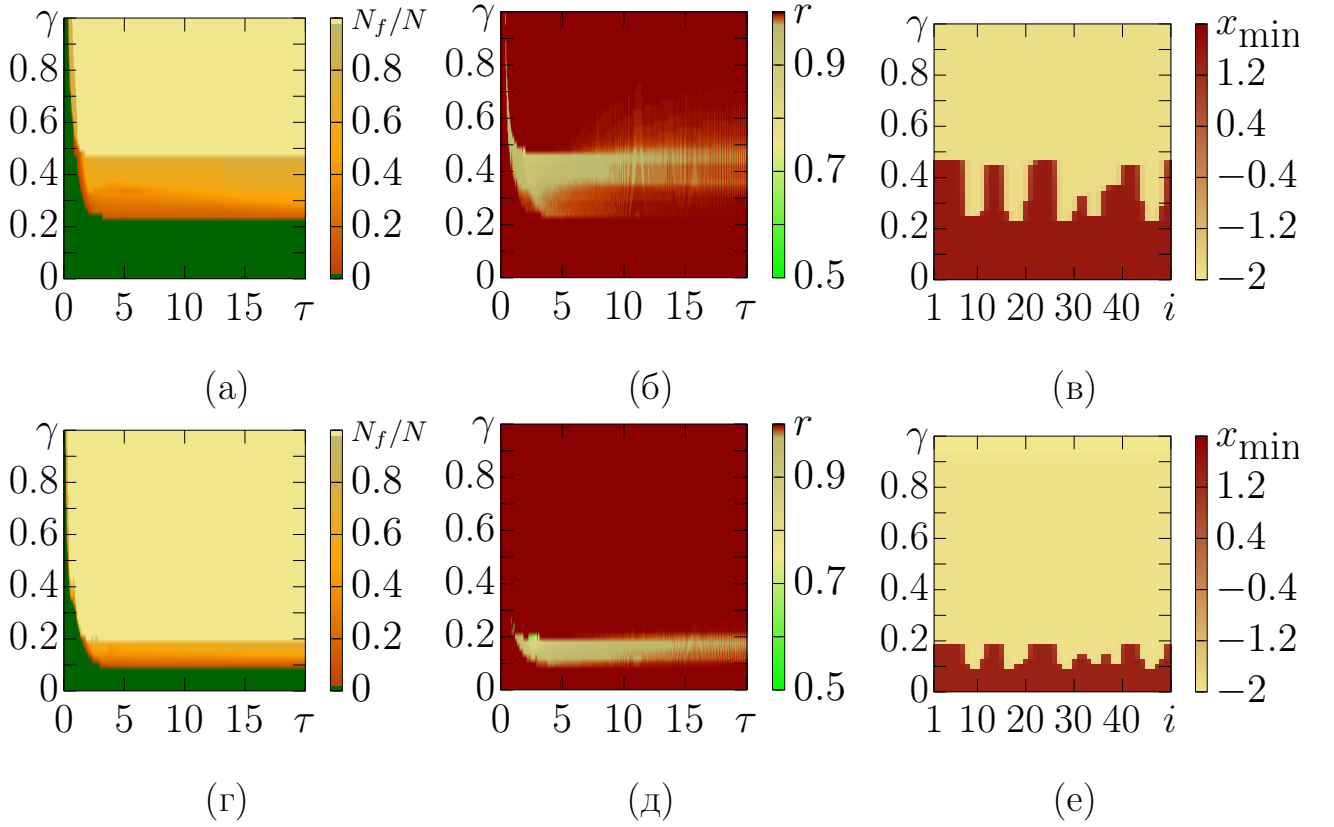


Рис. 3.14. Диаграммы отношения числа активных узлов N_f к общему числу нейронов N (а,г) и глобального параметра порядка r (б,д) на плоскости параметров (τ, γ) , а также пространственные распределения минимальных значений переменной x (состояние покоя: красный, колебательное: жёлтый) (в,е) для времени запаздывания $\tau = 5$ в сети (3.25) при двух различных значениях параметра диссипации: $\alpha = 0.5$ (а–в) и $\alpha = 0.7$ (г–е). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $\beta = -0.5$, $P = 1$, $N = 50$.

первое пороговое значение довольно велико для случая нулевого и очень малого времени запаздывания ($\tau < 2$), быстро уменьшается до определенного уровня с увеличением времени запаздывания ($\tau > 4$), а затем остается неизменным и не зависит от τ . Отметим, что это пороговое значение выше для большого уровня диссипации (оно составляет около 0.21 для $\alpha = 0.5$, рис. 3.14(а,б)) и ниже в случае малой диссипации (оно составляет около 0.1 для $\alpha = 0.7$, рис. 3.14(г,д)).

Когда γ превышает первое пороговое значение $\gamma_{\text{th,min}}$, число активированных нейронов N_f начинает увеличиваться. Этот процесс можно разделить

на два этапа: сначала число N_f увеличивается незначительно (первый этап), а затем очень резко (второй этап). Первый этап происходит в некотором конечном диапазоне изменения силы связи γ и соответствует частичной синхронизации (светло-зеленый цвет на рис. 3.14(б,е)). Этот диапазон достаточно узкий в случае $\tau = 1$, но расширяется при увеличении времени запаздывания (рис. 3.14(а,б,г,д)). Более того, при $\tau > 2$ этот γ -диапазон вдвое шире при большей диссипации (рис. 3.14(а,б)) по сравнению с ситуацией с меньшей диссипацией (рис. 3.14(г,д)). В пределах этого γ -диапазона формируется один или несколько кластеров нейронов с осциллирующей синхронной динамикой. Процесс формирования кластеров проиллюстрирован пространственными распределениями минимальных значений координаты x , представленными на рис. 3.14(в,е) для фиксированного $\tau = 5$. Видно, что синхронные кластеры случайным образом распределены по пространству сети и имеют переменную ширину. Проведенные расчеты показали, что эта особенность обусловлена случайными распределениями начальных условий.

Диапазон γ , соответствующий первому этапу, ограничен вторым пороговым значением $\gamma_{\text{th,all}}$, при котором все нейроны возбуждены и $N_f = N$ (полная синхронизация на рис. 3.14(б,д)). Причем этот переход происходит скачкообразно, и второй порог не зависит от τ , начиная с $\tau > 1$ (рис. 3.14(а,г)). Подобно первому пороговому значению, описанному выше, значение $\gamma_{\text{th,all}}$ больше при большей диссипации (около 0.48 при $\tau > 1$ и $\alpha = 0.5$, рис. 3.14(а,б)) и меньше при меньшей диссипации (около 0.19 при $\tau > 1$ и $\alpha = 0.7$, рис. 3.14(г,д)). Распределения (в),(е) на рис. 3.14 показывают, что этот двухэтапный процесс описывает неравновесный фазовый переход первого рода из состояния покоя в режим полной синхронизации через частичную кластерную синхронизацию с увеличением γ при фиксированном $\tau = 5$. Это похоже на явления нуклеации, наблюдаемые в равновесных и неравновесных системах, которые в последнее время стали объектом исследований синхронизации сетей [203]. Заключительным этапом является резкий одношаговый переход к полной синхронности.

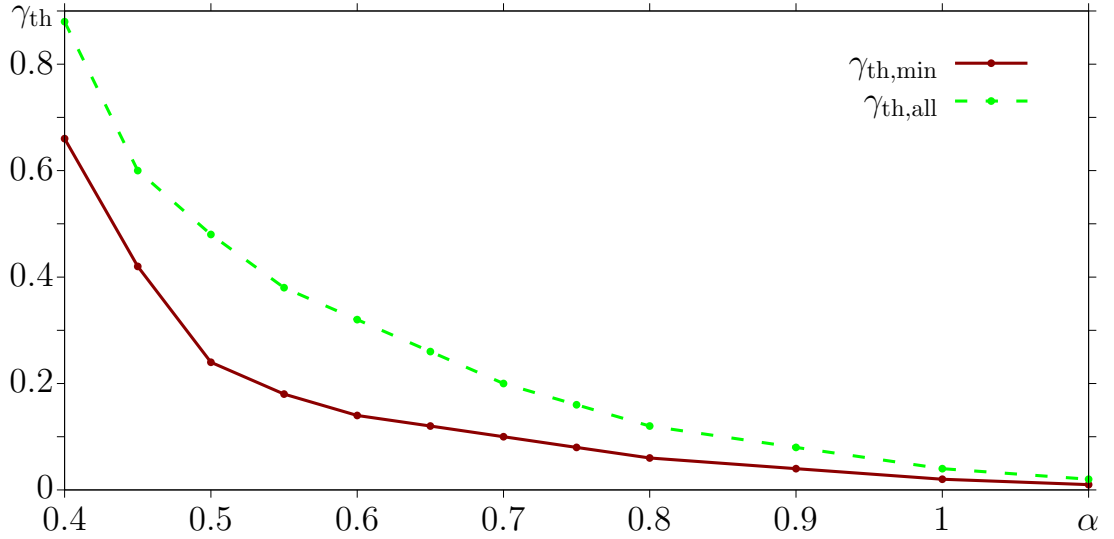


Рис. 3.15. Зависимости пороговых значений $\gamma_{th,min}$ (красная кривая с точками) и $\gamma_{th,all}$ (зелёная пунктирная кривая с точками) от параметра диссипации α при $\tau = 5$ для случайно распределённых начальных условий в сети (3.25).

Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $\beta = -0.5$, $P = 1$, $N = 50$.

Для более глубокого понимания влияния диссипации на динамику сети осцилляторов ФХН были рассчитаны зависимости двух пороговых значений $\gamma_{th,min}$ и $\gamma_{th,all}$ от параметра диссипации α при изменении α в области возбуждаемой динамики (область III на рис. 3.1). Численные результаты представлены на рис. 3.15). Видно, что увеличение α (уменьшение диссипации) приводит к постепенному и нелинейному снижению пороговых значений для возбуждения колебаний. Причем эти значения заметно различаются при $0.4 < \alpha < 0.9$. Однако, когда параметр диссипации становится очень большим, $\alpha > 0.9$ (очень малая диссипация) и приближается к границе автоколебательного режима, пороговые значения практически совпадают и обращаются в нуль.

Линейный анализ устойчивости режимов динамики. Вариационное уравнение для кольцевой сети осцилляторов ФХН с запаздывающей связью имеет следующий вид:

$$\delta \dot{\mathbf{x}} = \frac{1}{\varepsilon} A \delta \mathbf{x}(t) + \frac{\gamma}{\varepsilon} B \delta \mathbf{x}(t - \tau), \quad (3.26)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_N, y_N)$, а $N = 50$ — размер рассматриваемой кольцевой сети.

Анализ аналогичен проведенному для упрощенной модели ФХН [75]. Для сети (3.26) получаем следующие выражения для матриц A и B :

$$A = \begin{bmatrix} \xi & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha\varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\varepsilon & -\varepsilon & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \dots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \xi & -1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \alpha\varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \dots & \vdots & \\ 1 & 0 & \dots & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

где $\xi = 1 - x_1^{*2} - \gamma$. Ищем в виде $\delta\mathbf{x}(t) = \exp(\lambda t)\mathbf{u}$ к (3.26), что даёт следующую задачу на собственные значения:

$$\left(\frac{A}{\varepsilon} + \frac{\gamma B}{2\varepsilon} \exp(-\lambda\tau) \right) \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \quad (3.29)$$

Для получения значений λ находим определитель

$$\left| \frac{A}{\varepsilon} + \frac{\gamma B}{2\varepsilon} e^{-\lambda\tau} - \lambda I_{N \times N} \right| = 0.$$

Зависимости $\text{Re}(\lambda)$ от τ , рассчитанные для кольцевой сети осцилляторов ФХН и приведенные на рис. 3.16, демонстрируют тенденцию, аналогичную описанной в разделе 3.3.2 для системы двух связанных осцилляторов ФХН. Для

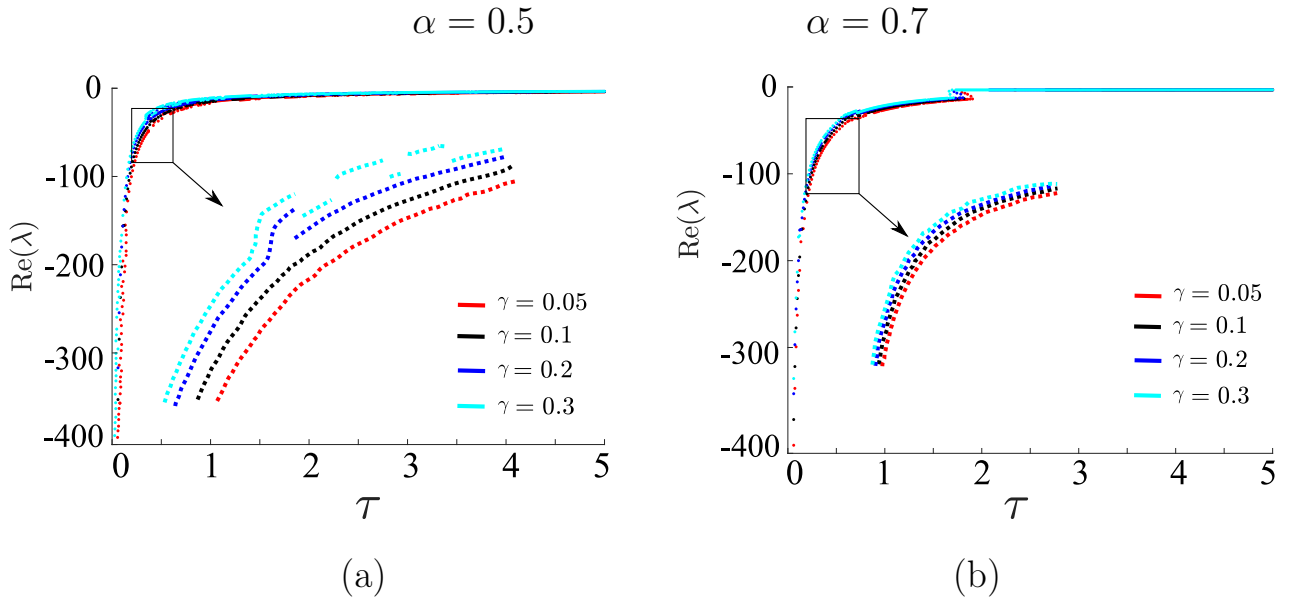


Рис. 3.16. Зависимость действительной части собственных значений λ от времени запаздывания τ при $\alpha = 0.5$ (а) и $\alpha = 0.7$ (б) и для ряда значений силы связи γ (см. легенду). Состояние равновесия системы (3.26) устойчиво при всех выбранных значениях параметров. Кривая слегка смещается вверх с увеличением γ (см. увеличенное изображение на вставках). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $\beta = -0.5$.

всех значений τ действительная часть отрицательна, а модуль действительной части собственного значения уменьшается с ростом τ , а затем стремится к фиксированному отрицательному значению при увеличении τ . Следовательно, состояние равновесия системы устойчиво. При увеличении γ , как показано разными цветами на рис. 3.16, кривая слегка смещается вверх. При увеличении α до 0.7 форма кривой остается такой же. Таким образом, состояние равновесия всегда устойчиво. Следовательно, в областях, где наблюдается колебательный режим, состояние равновесия сосуществует с периодическими колебаниями, и в сети наблюдается мультистабильность.

Влияние нелокальной связи. Для выявления влияния нелокальной связи между элементами были проведены численные исследования динамики кольцевой сети осцилляторов ФХН (3.25), когда каждый элемент взаимодействует с P соседями слева и справа. Диапазон связи изменялся в пределах

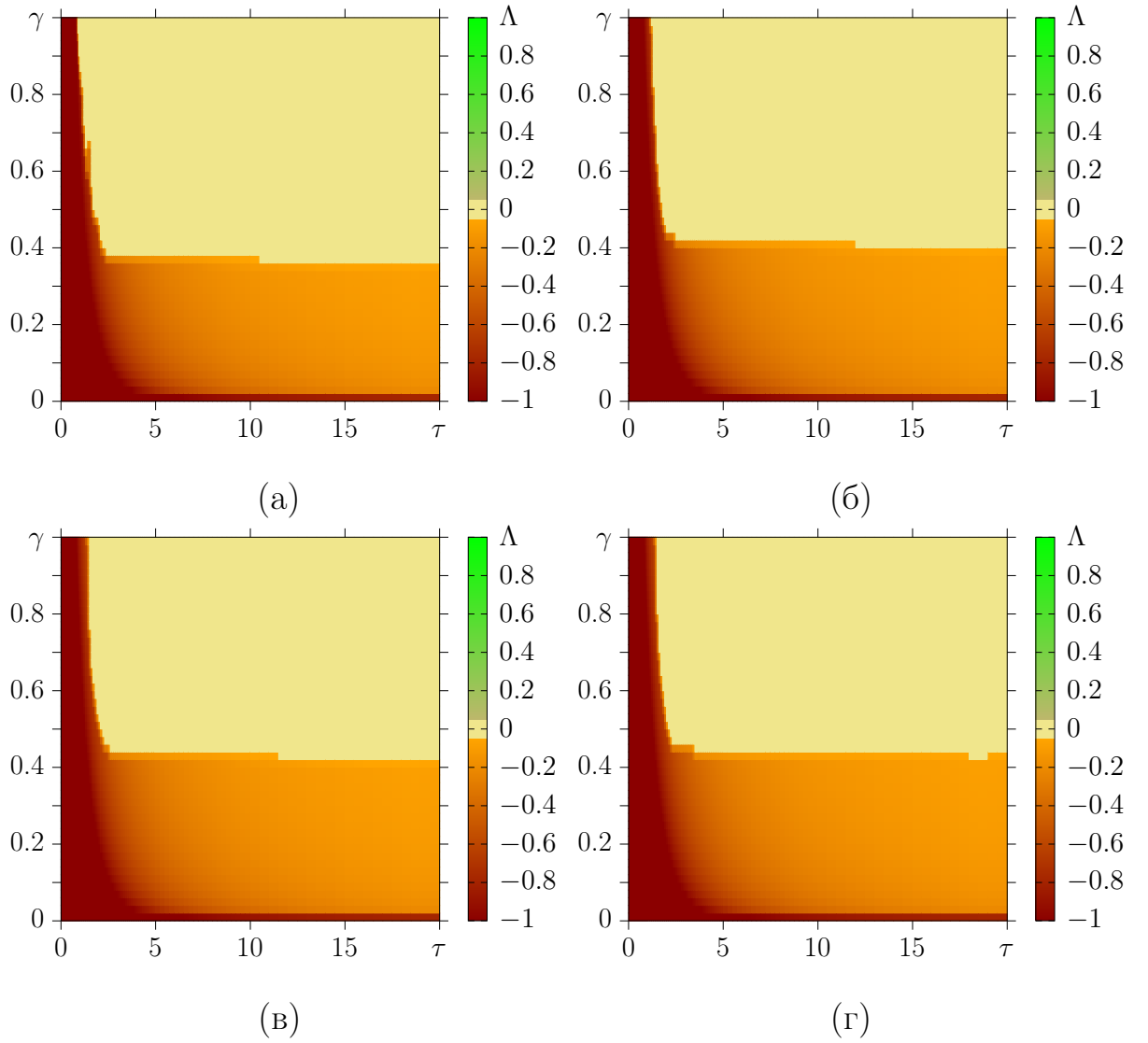


Рис. 3.17. Распределения максимального показателя Ляпунова Λ на плоскости параметров (τ, γ) для кольцевой сети (3.25) для четырёх различных значений радиуса связи P : (а) $P = 2$, (б) $P = 3$, (в) $P = 4$, (г) $P = 5$. Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $\beta = -0.5$, $\alpha = 0.5$, $N = 50$.

$P \in [2, 5]$. Были рассчитаны и построены распределения максимального показателя Ляпунова Λ на плоскости параметров (τ, γ) в тех же интервалах изменения τ и γ , что и на рис. 3.11. Численные результаты представлены на рис. 3.17 для фиксированного значения $\alpha = 0.5$. Если сравнить эти диаграммы с диаграммами для локальной связи (рис. 3.11(а)), то можно увидеть, что введение нелокальной связи приводит к значительному увеличению пороговых значений для возбуждения колебаний как по времени запаздывания τ , так и по силе

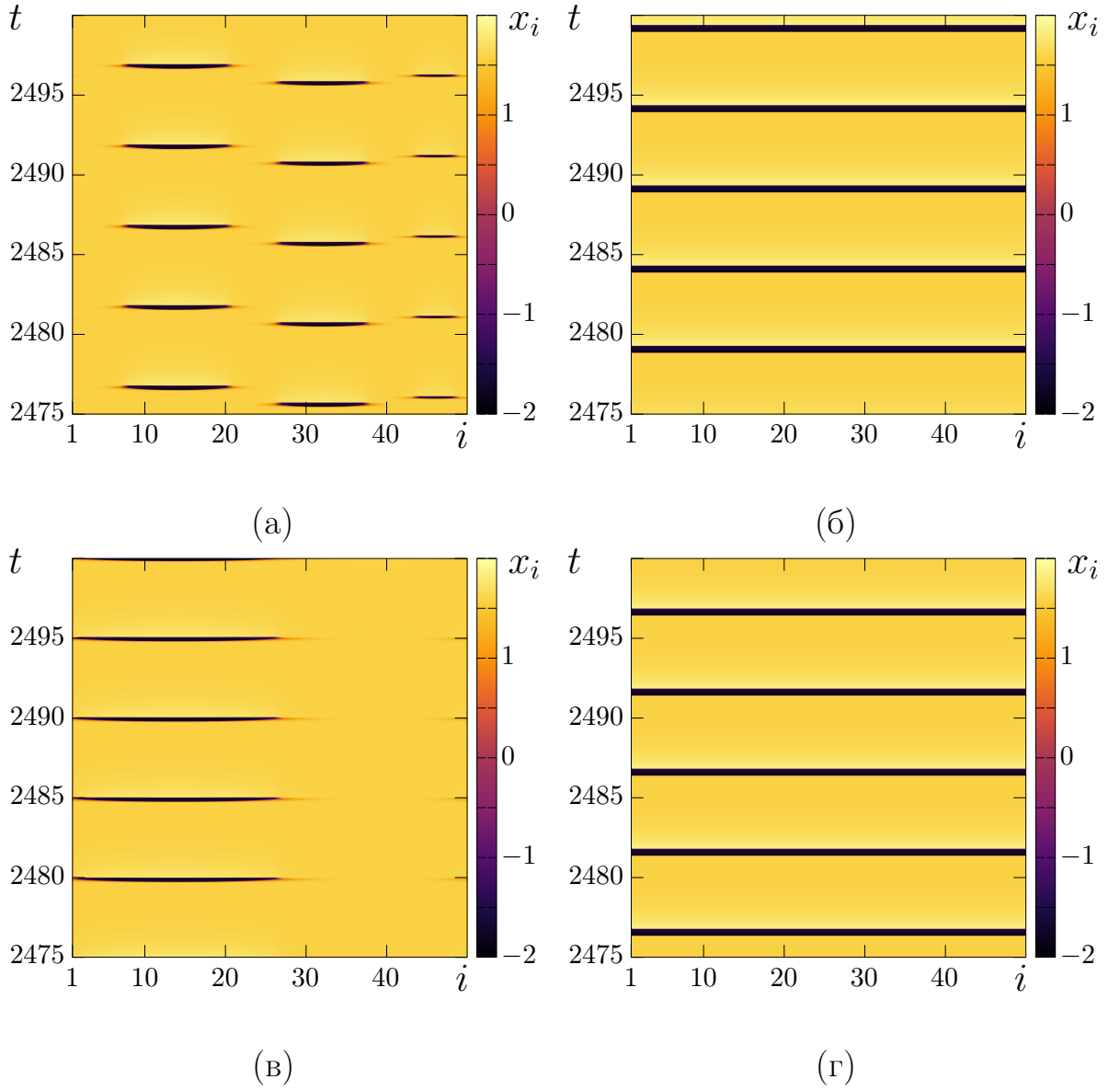


Рис. 3.18. Индуцированные запаздывающей связью колебания при нелокальной связи в системе (3.25) показаны на асимптотических пространственно-временных диаграммах при (а) $P = 2, \gamma = 0.42$, (б) $P = 2, \gamma = 0.48$, (в) $P = 5, \gamma = 0.46$ и (г) $P = 5, \gamma = 0.48$. Другие параметры: $\varepsilon = 0.01, \beta = -0.5, N = 50$.

связи γ . Интересно отметить, что большая разница между пороговым уровнем наблюдается для случаев $P = 1$ (рис. 3.11(а)) и $P = 2$ (рис. 3.17(а)). Однако дальнейшее увеличение нелокальности связи P приводит лишь к слабому повышению пороговых значений по γ и τ .

В то же время, динамические режимы не претерпевают качественных изменений по сравнению со случаем локальной связи $P = 1$, показанным на рис. 3.12. Длительность импульсов и пространственные характеристики остаются весьма схожими. Пространственно-временная динамика этих режимов представлена пространственно-временными диаграммами для $P = 2$ и $P = 5$ на рис. 3.18(а, б) и 3.18(в, г), соответственно. Фрагменты (а) и (в) на рис. 3.18 соответствуют случаю, когда активируется только часть элементов кольца (малые значения силы связи), фрагменты (б) и (г) отражают ситуацию, когда зажигаются все нейроны сети. Таким образом, первый случай аналогичен показанному на рис. 3.12(б2), а второй – подобен режиму на рис. 3.12(в2) для сети с локальной связью $P = 1$. Как было показано [175], для нелокальной связи типично наличие множественных кластеров при слабой связи и одиночных кластеров при сильной связи.

3.4 Влияние типа межслойных связей на бегущие волны в двухслойной сети осцилляторов ФитцХью–Нагумо

3.4.1 Уравнения исследуемой системы

Объектом численного моделирования в рамках данного раздела является мультиплексная сеть из двух связанных слоёв. Каждый слой представляет собой кольцевую сеть связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо, предложенных в [108] и [109]. Исследуемая мультиплексная сеть описывается следующей

системой уравнений:

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x}_{i,k} &= x_{i,k} - \frac{x_{i,k}^3}{3} - y_{i,k} + \frac{\gamma_k}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} (x_{j,k} - x_{i,k}) + \sigma_i (x_{i,l} - x_{i,k}), \\ \dot{y}_{i,k} &= x_{i,k} + a,\end{aligned}\tag{3.30}$$

где $i = 1, 2, \dots, N$ – номер узла, а $N = 100$ – общее количество элементов в каждом слое. Индексы $k, l = 1, 2$, $k \neq l$ – номера слоев. Малый параметр ε задает отношение временных масштабов активатора к ингибитору. Параметр a определяет порог возбуждения отдельного нейрона. Осциллятор ФитцХью-Нагумо может демонстрировать как возбудимый ($|a| > 1$), так и колебательный ($|a| < 1$) режимы. В проведенном исследовании управляющие параметры выбраны и зафиксированы: $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$, что соответствует возбудимому режиму в каждом нейроне.

Четвёртый член в первом уравнении сети (3.30) отвечает за внутрислойную связь между осцилляторами с силой связи γ_k и радиусом связи P . Связи между нейронами являются электрическими [125]. Внутрислойная связь является притягивающей для первого слоя и её сила связи задана положительным значением $\gamma_1 = 0.1$. Для второго слоя выбрана отталкивающая внутрислойная связь и её сила связи отрицательна, $\gamma_2 = -0.1$.

Межслойная связь между двумя слоями организована симметрично и взаимно. Она вводится через переменные x и описывается последним членом в первом уравнении (3.30). Динамика двухслойной сети исследуется для трех различных случаев распределения силы межслойной связи (рис. 3.19). В первом случае межслойная связь является притягивающей и пространственно однородной, т.е. $\sigma_i = \sigma$ (зелёные крестики и линия на рис. 3.19). Во втором случае связь является отталкивающей и пространственно однородной, т.е. $\sigma_i = -\sigma$ (красные крестики и линия на рис. 3.19). В третьем случае используется периодически пространственно-модулированная межслойная связь, определяемая как

$\sigma_i = \pi\sigma \sin(6\pi i/N)/2$ (чёрные звёздочки и линия на рис. 3.19). Все управляющие параметры безразмерны.

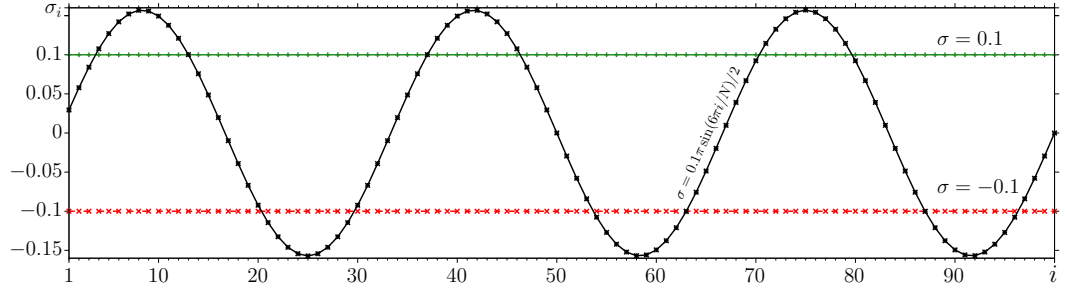


Рис. 3.19. Методы распределения силы межслойной связи σ_i для случаев притягивающих связей (зеленые плюсы и линия), отталкивающих связей (красные крестики и линия) и периодически модулированных связей (черные звездочки и линия) при одном и том же значении $|\sigma| = 0.1$ в двухслойной сети

(3.30)

Чтобы проанализировать «усредненное» поведение связанных колец, рассчитываются средние частоты следующим образом:

$$\langle f_k \rangle = \frac{Q_k}{T \cdot N}, \quad (3.31)$$

где Q_k – число спайков в k -ом кольце за время $T = 500$, N – число элементов в кольце, $k = 1, 2$.

Для оценки степени межслойного взаимодействия используется коэффициент корреляции Пирсона $R_{1,2}$ [176] между i -ми осцилляторами связанных колец:

$$R_{1,2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\left(\sum_t (x_{i,1}(t) - \langle x_{i,1} \rangle_t) \times (x_{i,2}(t) - \langle x_{i,2} \rangle_t) \right) / \right. \\ \left. / \left(\sqrt{\sum_t (x_{i,1}(t) - \langle x_{i,1} \rangle_t)^2} \times \sqrt{\sum_t (x_{i,2}(t) - \langle x_{i,2} \rangle_t)^2} \right) \right) \quad (3.32)$$

Эта мера характеризует степень корреляции (синхронизации) между взаимодействующими слоями. $R_{1,2}$ изменяется в интервале $[-1, 1]$. Граничные значения соответствуют противофазной и синфазной межслойной синхронизации

колебаний, соответственно, а $R_{1,2} = 0$ соответствует случаю полностью рассинхронизированной мультиплексной сети.

Разность фаз колебаний соседних осцилляторов в каждом слое и ее среднее значение определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\langle \varphi_i \rangle &= \left\langle \sum_j \Delta \varphi_{j,j-1} \right\rangle_t, j = 1, 2, \dots, i \\ \langle \varphi_i^{\text{even}} \rangle &= \left\langle \sum_j \Delta \varphi_{j,j-2} \right\rangle_t, j = 2, 4, \dots, i \\ \langle \varphi_i^{\text{odd}} \rangle &= \left\langle \sum_j \Delta \varphi_{j,j-2} \right\rangle_t, j = 1, 3, \dots, i,\end{aligned}\tag{3.33}$$

где $\Delta \varphi_{j,j-1}$ – разность фаз между осцилляторами $j, j-1$, $\langle \cdot \rangle_t$ – среднее по времени значение.

3.4.2 Динамика сети в отсутствие межслойной связи

В отсутствие межслойной связи каждое из колец может демонстрировать различные типы бегущих волн в зависимости от силы внутрислойной связи. Для первого слоя характерна волновая картина, показанная на рис. 3.20(а–в). Соответствующая пространственно-временная диаграмма $x_i(t) = x_{i,k}(t)$ и временные ряды $x(t)$ для трёх выбранных осцилляторов первого слоя приведены на рис. 3.20(а,б), соответственно. Этот режим получен при положительной силе внутрислойной связи $\gamma_1 = 0.1$ и представляет собой регулярную бегущую волну с небольшой разностью фаз колебаний соседних осцилляторов, которая в сумме составляет 2π за полный обход кольца. Зависимости $\langle \varphi_i \rangle, \langle \varphi_i^{\text{even}} \rangle, \langle \varphi_i^{\text{odd}} \rangle$ показывают схожие результаты (см. рис. 3.20(в)), а средняя частота составляет $f_1 \approx 0.22$.

Во втором слое наблюдается ярко выраженный режим бегущей волны, возникающий за счет отталкивающей внутрислойной связи $\gamma_2 = -0.1$. Его ха-

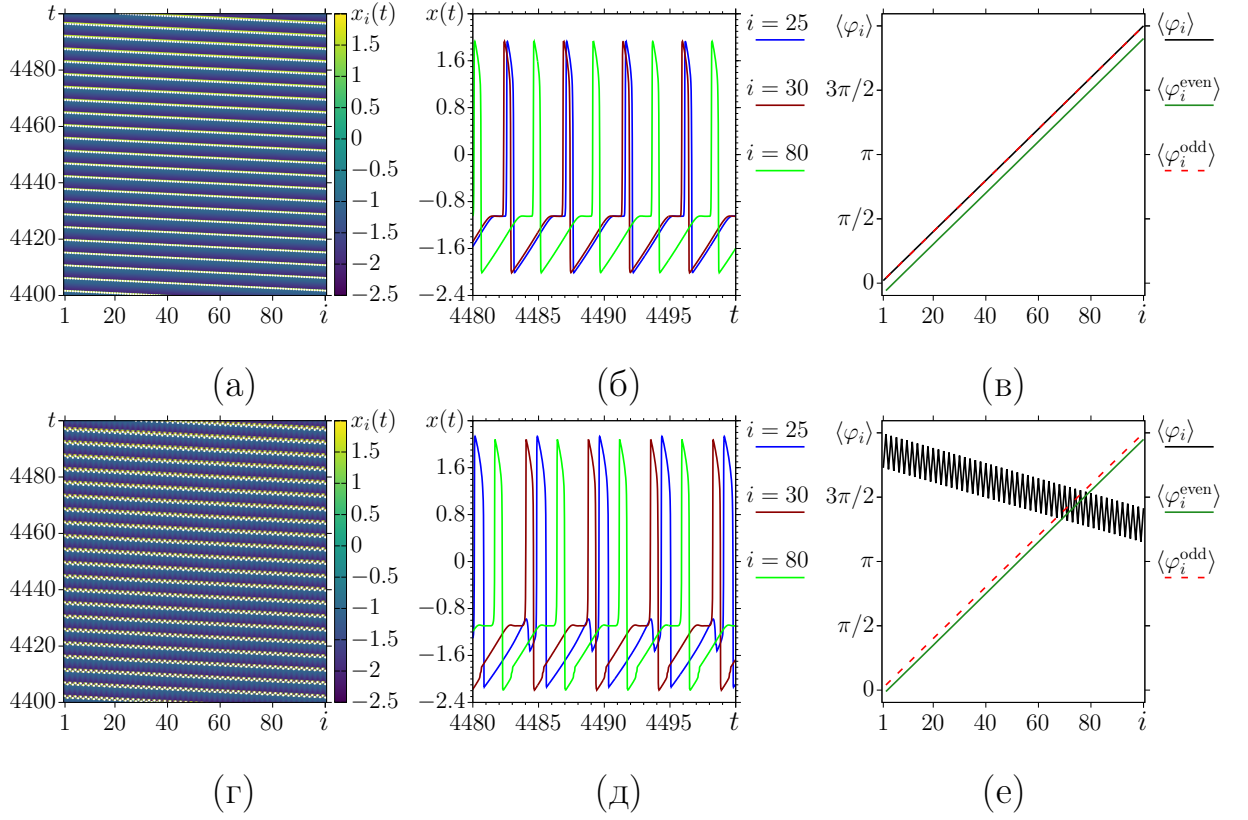


Рис. 3.20. Начальные волновые структуры в несвязанных слоях ($\sigma_i = 0$ в (3.30)). Пространственно-временные диаграммы $x_i(t) = x_{i,k}(t)$ (а, г), временные ряды $x(t)$ для выбранных отдельных осцилляторов (б,д) и разности фаз $\langle \varphi_i \rangle, \langle \varphi_i^{\text{even}} \rangle, \langle \varphi_i^{\text{odd}} \rangle$ (в,е) для первого слоя при $\sigma_1 = 0.1$ (а–в) и второго слоя при $\sigma_2 = -0.1$ (г–е). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01, a = 1.05, P = 1, N = 100$.

рактические характеристики показаны на рис. 3.20(г–е). Этот тип бегущей волны отличается от волнового режима в первом слое существенной разницей в фазах колебаний соседних осцилляторов (чёрная линия на рис. 3.20). При этом фазы колебаний элементов с разницей индексов i , равной 2, различаются незначительно, а сумма разностей фаз по всем чётным или нечётным нейронам равна 2π (красная и зелёная линии на рис. 3.20). Вычисления регулярных значений $\langle \varphi_i \rangle$ недостаточно для обнаружения особой бегущей волны, её можно диагностировать только по значениям $\langle \varphi_i^{\text{even}} \rangle, \langle \varphi_i^{\text{odd}} \rangle$. Средняя частота пиков узлов во втором слое составляет $f_2 \approx 0,21$.

3.4.3 Динамика сети с притягивающей межслойной связью

Рассмотрим взаимодействие бегущих волн в двухслойной сети (3.30). Начальные волновые режимы показаны на рис. 3.20(а,г). Влияние межслойной связи оценивается путём расчёта средней частоты (3.31) для каждого слоя и коэффициента корреляции (3.32) между связанными слоями. Соответствующие результаты представлены на рис. 3.21 для трёх различных типов межслойной связи: притягивающей плоской с $\sigma_i = \sigma \geq 0$ (рис. 3.21(а,г)), отталкивающей плоской с $\sigma_i = \sigma \leq 0$ (рис. 3.21(б,д)) и периодически модулированной с $\sigma_i = \pi\sigma \sin(6\pi i/N)/2$ (рис. 3.21(в,е)). Следует отметить, что все значения частот $\langle f_k \rangle$ становятся равными для любых $\sigma \neq 0, \sigma \in [-0.25, 0.25]$, хотя начальные значения частот в несвязанных слоях различаются.

В случае притягивающей межслойной связи средняя частота $\langle f_k \rangle$ линейно уменьшается с ростом силы связи σ (рис. 3.21(а)). При этом коэффициент корреляции Пирсона $R_{1,2}$ плавно увеличивается по мере увеличения σ до 0.075, но остаётся меньше 0.5 (рис. 3.21(г)). Таким образом, существует диапазон значений силы связи $\sigma \in (0, 0.075]$, в пределах которого частоты выравниваются, но колебания симметричных узлов слоев по-прежнему слабо коррелированы. Эта ситуация иллюстрируется на рис. 3.22(а–в) для фиксированного $\sigma = 0.07$ пространственно-временной диаграммой, временными рядами для 50-го узла слоев и разностями фаз (3.33) между узлами во втором кольце. Хорошо видно, что при слабой межслойной связи режим бегущей волны во втором кольце существенно не меняется.

Дальнейшее увеличение межслойной связи, $\sigma > 0.075$, показывает резкое увеличение значения коэффициента корреляции $R_{1,2}$, которое затем стремится к 1 с ростом σ (рис. 3.21(г)). Начиная с определенного значения притягивающей межслойной связи $\sigma \approx 0.15$, слои становятся синфазно синхронизированными.

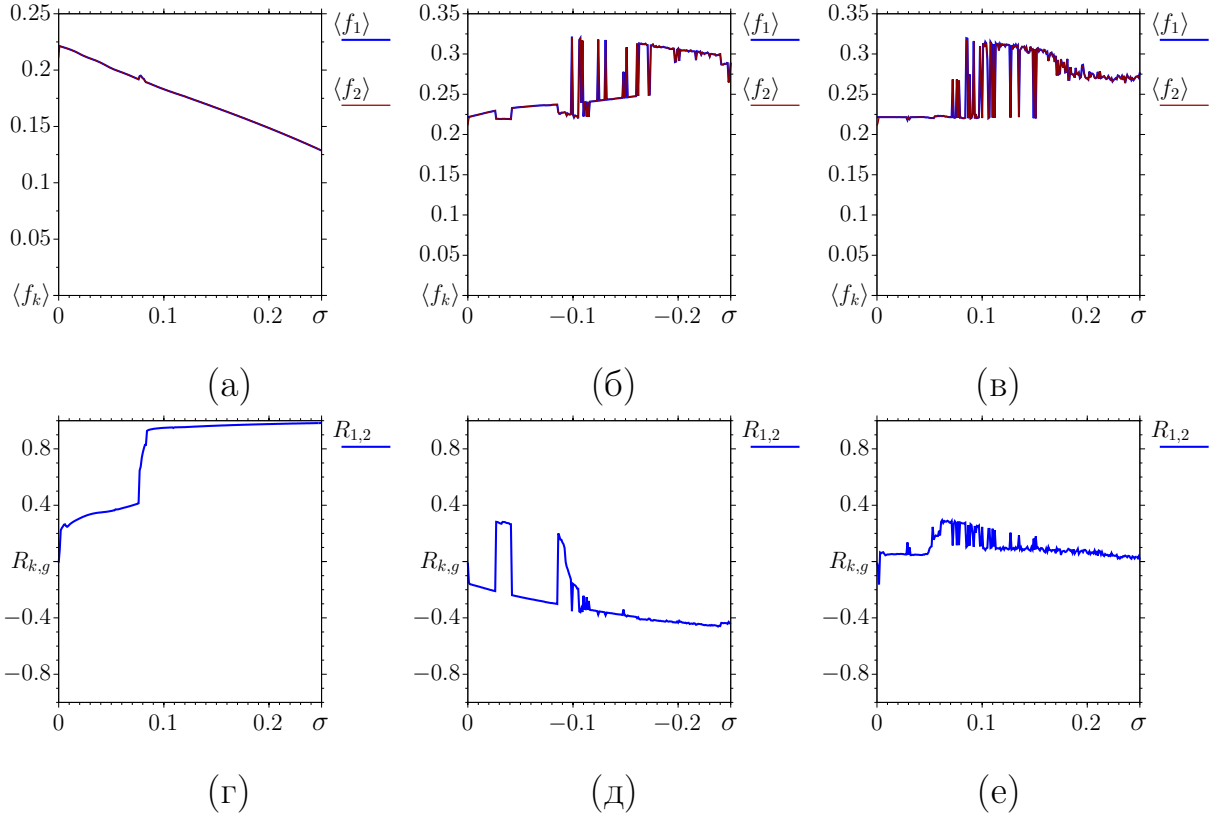


Рис. 3.21. Средние частоты f_k , $k = 1, 2$ (цвета и типы линий указаны в легендах) (а–в) и коэффициент корреляции Пирсона $R_{1,2}$ (г–е) для притягивающей плоской межслойной связи ($\sigma \geq 0$) (а,г), отталкивающей плоской межслойной связи ($\sigma \leq 0$) (б,д) и для периодически модулированной межслойной связи ($\pi\sigma \sin(6\pi i/N)/2$) (в,е) в двухслойной сети (3.30). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$, $P = 1$, $N = 100$.

Типичные пространственно-временные и фазовые характеристики установившегося синхронного режима в обоих слоях представлены на рис. 3.22(г–е) для $\sigma = 0.2$. Видно, что взаимодействующие слои синхронизированы в режиме регулярной бегущей волны, которая очень схожа с исходной волновой структурой в первом слое.

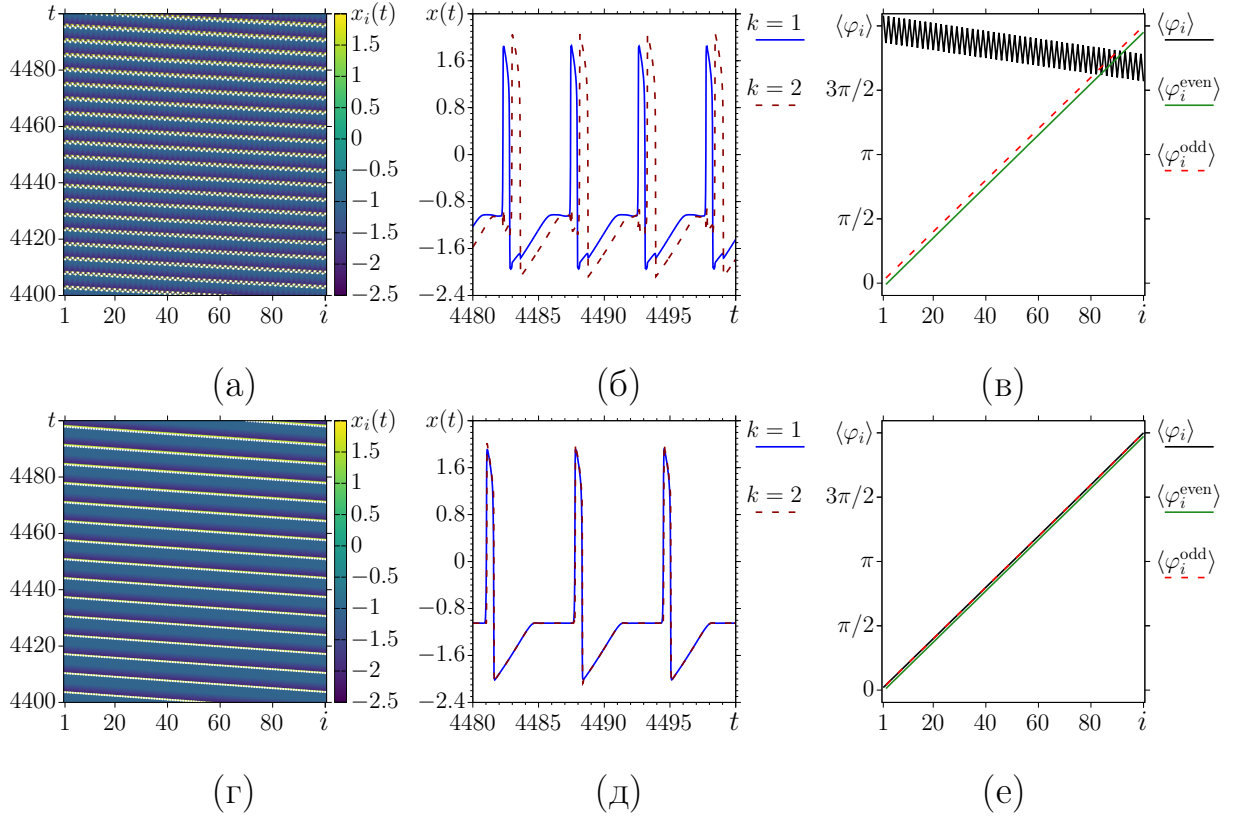


Рис. 3.22. Пространственно-временные диаграммы $x_i(t) = x_{i,2}(t)$ (а, г), временной ряд $x(t)$ для 50-го узла в каждом слое $k = 1, 2$ (б, д), и разности фаз $\langle \varphi_i \rangle, \langle \varphi_i^{\text{even}} \rangle, \langle \varphi_i^{\text{odd}} \rangle$ (в, е) для второго слоя ($k = 2$) при $\sigma = 0.07$ (а–в), и $\sigma = 0.2$ (г–е) в двухслойной сети с притягивающей плоской межслойной связью (3.30)). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01, a = 1.05, P = 1, N = 100$.

3.4.4 Динамика сети с отталкивающей межслойной

СВЯЗЬЮ

Как следует из (рис. 3.21(б,д)), зависимость средних частот $\langle f_k \rangle$ от σ в случае отталкивающей межслойной связи выглядит достаточно сложной (рис. 3.21(б)). Однако при уменьшении силы связи σ наблюдается тенденция к увеличению частот колебаний. При этом коэффициент корреляции Пирсона $R_{1,2}$ принимает отрицательные значения, уменьшающиеся с уменьшением σ (рис. 3.21(д)). Таким образом, можно заключить, что отталкивающая межслой-

ная связь может вызывать эффект, весьма схожий с эффективной (с конечной точностью) противофазной межслойной синхронизацией волновых структур в двухслойной мультиплексной сети.

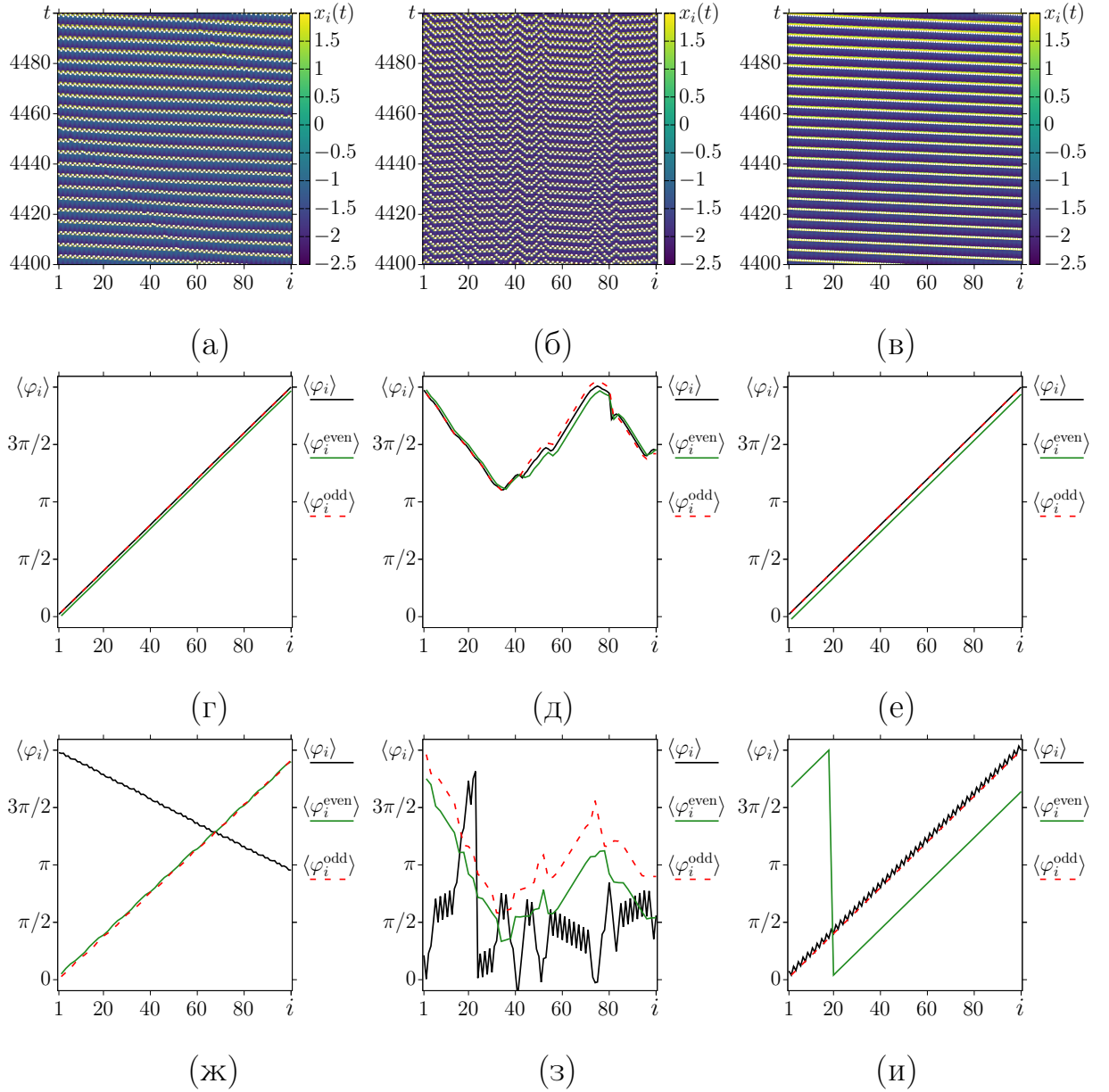


Рис. 3.23. Пространственно-временные диаграммы $x_i(t) = x_{i,2}(t)$ для второго слоя ($k = 2$) (а–в) и разности фаз $\langle \varphi_i \rangle$, $\langle \varphi_i^{\text{even}} \rangle$, $\langle \varphi_i^{\text{odd}} \rangle$ для первого слоя (г–е) и второго слоя (ж–и) в сети (3.30) в случае отталкивающей плоской межслойной связи для $\sigma = -0.035$ (а, г, ж), $\sigma = -0.099$ (б, д, з) и $\sigma = -0.155$ (в, е, и).

Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$, $P = 1$, $N = 100$.

Для последовательного исследования изменения в динамике связанных слоёв были рассчитаны и построены пространственно-временные диаграммы и разности фаз между узлами в каждом слое для трёх различных значений силы отталкивания между слоями (рис. 3.23). Видно, что в результате действия отталкивающей межслойной связи исходные бегущие волны в связанных кольцах могут искажаться (структура во втором слое, рис. 3.23(а,ж)) или даже разрушаться (структуры в обоих слоях, рис. 3.23(б,д,з)). Однако с увеличением абсолютной величины отталкивающей силы связи режим бегущей волны может восстановиться в обоих слоях, и наблюдаемые волновые структуры практически точно повторяют исходные бегущие волны (рис. 3.20). Такая особенность динамики мультиплексной сети возникает при изменении силы отталкивающих межслойных связей в интервалах: $\sigma \in [-0,0159 : -0,0152] \cup [-0,0145 : -0,0132] \cup [-0,0129 : -0,0127] \cup [-0,0121 : -0,0115] \cup [-0,084 : -0,041] \cup [-0,026 : 0]$.

Поведение второго слоя постепенно меняется с уменьшением σ , и во втором слое может установиться режим бегущей волны, очень похожий на обычную бегущую волну (рис. 3.23(в)). В то же время наблюдается существенное различие в фазах колебаний соседних осцилляторов (рис. 3.23(и)).

3.4.5 Динамика сети с периодически модулированной межслойной связью

Теперь перейдем к третьему случаю, когда межслойные связи периодически модулируются (черные звезды и линия на рис. 3.19). Результаты расчета средних частот и коэффициента корреляции показаны на рис. 3.21(в,е) соответственно. В этом случае невозможно обнаружить положительный или отрицательный тренд в зависимости $\langle f_k \rangle(\sigma)$, $k = 1, 2$ (рис. 3.21,в). При слабой межслойной связи, $\sigma < 0,07$, и когда сумма всех межслойных связей равна нулю

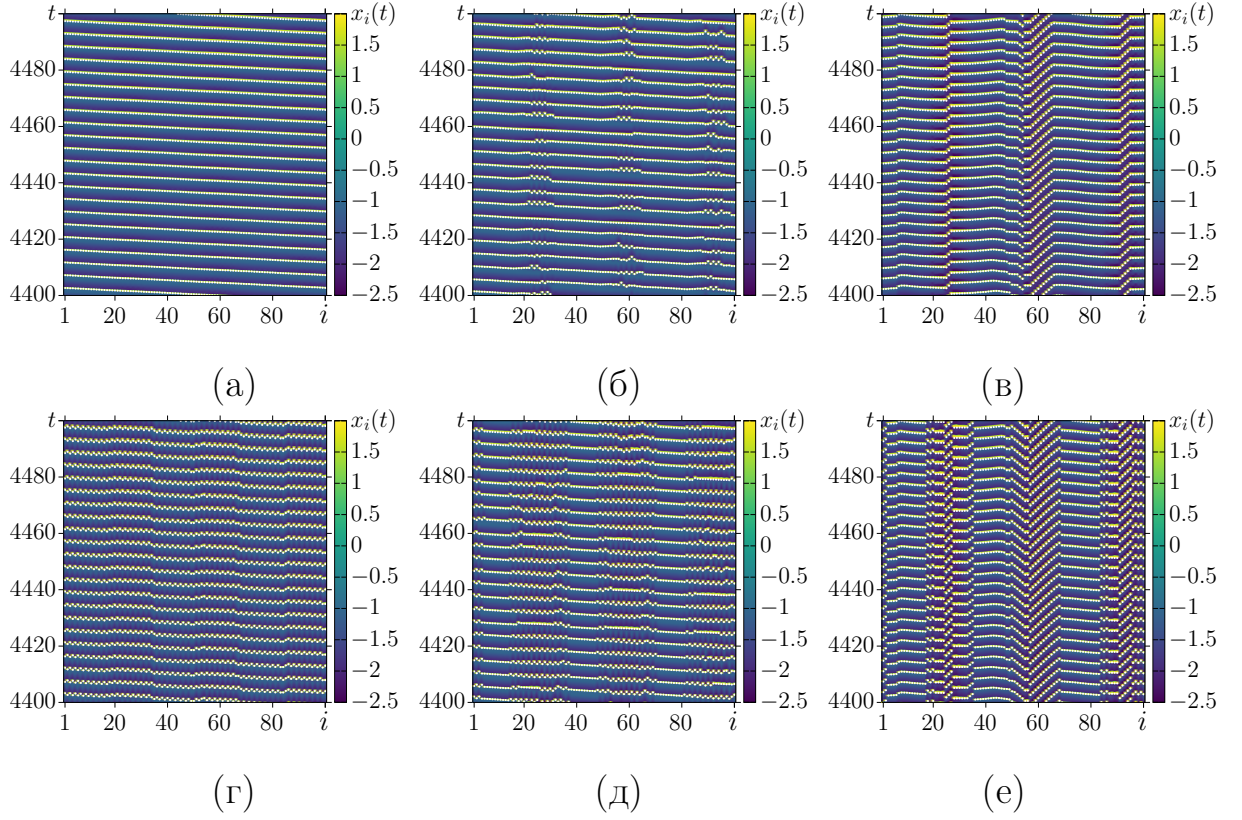


Рис. 3.24. Пространственно-временные диаграммы $x_i(t) = x_{i,1}(t)$ для первого слоя (а–в) и $x_i(t) = x_{i,2}(t)$ для второго слоя (г–е) в случае периодически модулированной межслойной связи для $\sigma = 0.04$ (а,г), $\gamma = 0.081$ (б,д) и $\sigma = 0.2$ (в,е). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$, $P = 1$, $N = 100$.

($\sum_i \sigma_i = 0$), средняя частота нейронных импульсов в сети остается неизменной и постоянной. При этом коэффициент корреляции Пирсона $R_{1,2}$ практически равен нулю (рис. 3.21(е)). В этом случае, как следует из рис. 3.24, где показаны пространственно-временные диаграммы и разности фаз при $\sigma = 0.04$ и для каждого слоя отдельно, регулярный режим бегущей волны в первом слое оказывает более существенное влияние на динамику второго слоя в случае слабой периодически модулированной межслойной связи. Такое же поведение мультиплексной сети наблюдалось и в двух предыдущих случаях (притягивающая плоская и отталкивающая плоская межслойные связи). Динамический режим в первом слое полностью сохраняется (рис. 3.24(а)), в то время как волновая структура во втором слое искажается (рис. 3.24(г)).

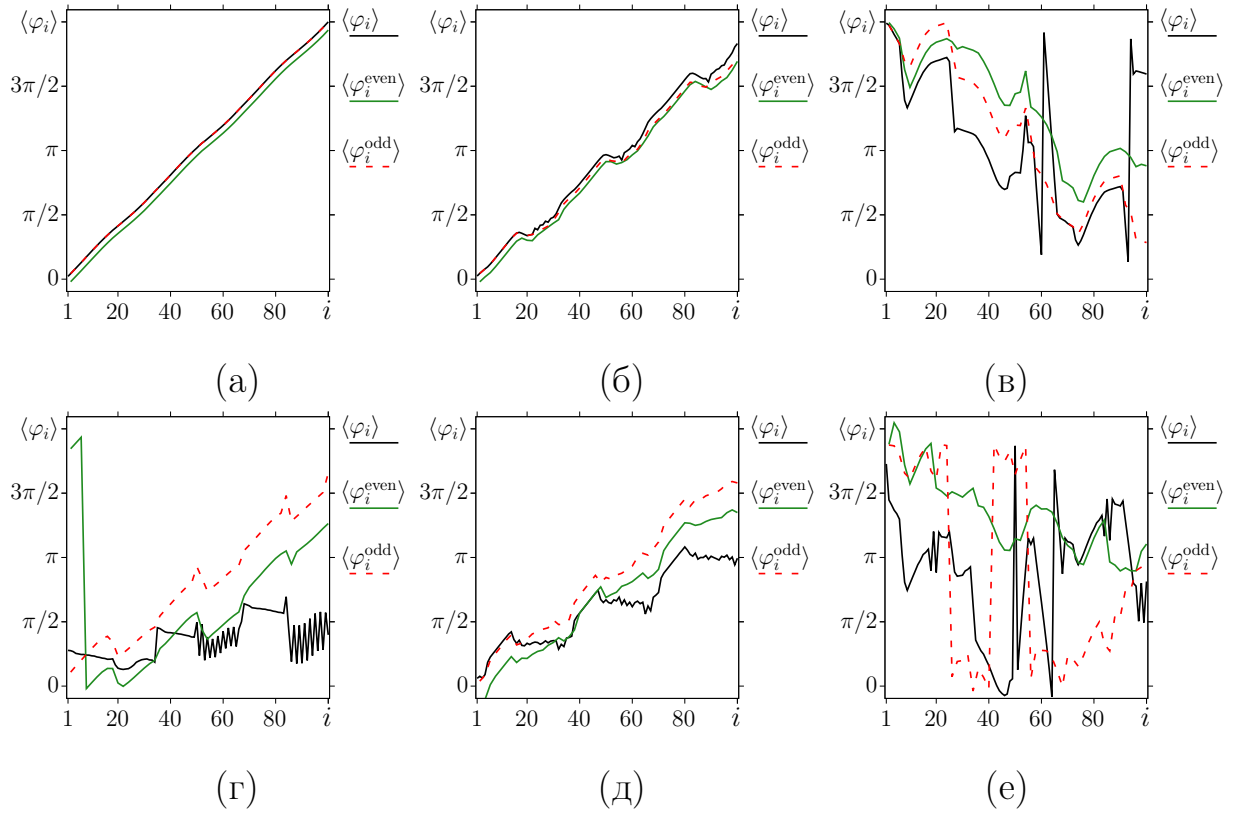


Рис. 3.25. Разности фаз $\langle \varphi_i \rangle$, $\langle \varphi_i^{\text{even}} \rangle$, $\langle \varphi_i^{\text{odd}} \rangle$ для первого слоя (а–в) и второго слоя (г–е) в случае периодически модулированной межслойной связи для $\sigma = 0.04$ (а,г), $\sigma = 0.081$ (б,д) и $\sigma = 0.2$ (в,е). Другие параметры: $\varepsilon = 0.01$, $a = 1.05$, $P = 1$, $N = 100$.

При дальнейшем росте силы связи, $\sigma \in [0.07, 0.152]$, средние частоты произвольно меняются между постоянным уровнем $f_1 \approx 0.22$ (как при слабой связи) и значением частоты из диапазона $f_1 \in [0.26, 0.35]$ (рис. 3.21(в)). Величина коэффициента корреляции $R_{1,2}$ также произвольно варьируется между 0.1 и 0.3 (рис. 3.21(е)), что соответствует слабо коррелированным колебаниям взаимодействующих слоев. Наименее коррелированный характер ($R_{1,2} \rightarrow 0$) и, следовательно, отсутствие синхронизации между двумя слоями наблюдается также при больших значениях межслойной связи, $\sigma > 0.15$ (рис. 3.21(е)).

Подобную динамику легко понять и объяснить, если обратиться к пространственно-временным и фазовым характеристикам для каждого слоя, представленным на рис. 3.25(б,д), для $\sigma = 0.081$ и рис. 3.24(в,е) для $\sigma = 0.2$.

Видно, что в обоих слоях (рис. 3.24(б,д)) появляется несколько кластеров осцилляторов, но они по-разному локализованы в пространстве кольца. Так, в первом слое нерегулярные (некогерентные) кластеры занимают области, соответствующие отталкивающим межслойным связям со вторым слоем, тогда как синхронные кластеры во втором слое появляются в местах, соответствующих притягивающим межслойным связям с первым слоем. Таким образом, в случае периодически модулированной межслойной связи кластеры пространственно-временной структуры, возникающие при притягивающей внутрислойной связи, передаются положительной межслойной связью, а кластеры пространственно-временной структуры, возникающие при отталкивающей внутрислойной связи, передаются отталкивающей межслойной связью. Наконец, когда периодически модулированная межслойная связь становится достаточно сильной, $\sigma > 0.15$, исходные пространственно-волновые структуры существенно искажаются, что можно видеть на соответствующих пространственно-временных диаграммах и разностях фаз для каждого слоя (рис. 3.24(в,е)).

3.5 Выводы по третьей главе

Проведенные численные исследования и анализ динамики малого (два элемента) и большого ансамблей осцилляторов ФитцХью–Нагумо с диссипацией и запаздывающей связью, а также мультиплексной сети осцилляторов ФитцХью–Нагумо с различными типами внутрислойной и межслойной связей позволяют сформулировать следующие основные результаты:

1. Численное моделирование динамики системы двух связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо с диссипацией в возбуждимом режиме и с запаздывающей связью показало, что порог возбуждения как синфазных, так и противофазных периодических колебаний в системе относительно силы связи

γ существенно зависит от параметра диссипации α при увеличении времени запаздывания τ . Чем больше α и, следовательно, меньше диссипация в нейроне, тем меньше порог по γ . Чем меньше диссипация, тем требуется существенно меньшая амплитуда импульса для возбуждения колебаний в осцилляторах ФитцХью–Нагумо. Начиная с определенного значения τ , порог γ остается неизменным с увеличением времени запаздывания. Порог колебательного режима относительно времени запаздывания τ не зависит от параметра диссипации и для возбуждения синфазных колебаний он больше, чем для противофазных.

2. Аналогичная зависимость порогового значения силы связи γ от параметра диссипации наблюдается для кольцевой сети осцилляторов ФитцХью–Нагумо с запаздывающей внутрислойной связью. Однако здесь синфазные колебания возникают при меньших значениях τ при малой диссипации (большое α) по сравнению со случаем большой диссипации.
3. В кольцевой сети локально связанных нейронов ФитцХью–Нагумо в возбужденном режиме и с запаздывающей связью установлен неравновесный фазовый переход первого рода из состояния покоя в полностью синхронное состояние посредством образования кластеров синхронизации при возрастающей силе связи (режим частичной синхронизации). Далее, при некотором пороговом значении силы связи несколько кластеров резко сливаются в один и реализуется эффект полной синхронизации синфазных автоколебаний. Выявлено, что диапазон изменения значения силы связи, в котором наблюдается режим частичной синхронизации, в три раза уже для больших значений параметра диссипации α (малые потери) по сравнению со случаем меньших значений α .
4. Установлено, что в двухслойной сети связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо при слабой межслойной притягивающей связи средние частоты

нейронных импульсов выравниваются, но колебания связанных пар осцилляторов остаются слабокоррелированными. Начиная с определённого значения межслойной связи, коэффициент корреляции Пирсона резко возрастает до 1, что свидетельствует об эффекте синфазной синхронизации бегущих волн в связанных слоях.

5. Показано, что отталкивающая межслойная связь в двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо сначала приводит к искажению и даже разрушению волновых структур, а затем, с ростом ее абсолютной величины, к воспроизведению исходных бегущих волн в слоях. Кроме того, при отталкивающем межслойном взаимодействии может реализовываться эффективная (с конечной точностью) противофазная синхронизация бегущих волн.
6. Выявлено, что при выборе периодически модулированной межслойной связи в обоих слоях двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо возникает несколько некогерентных кластеров, характеризующихся разной длиной и положением в кольцевом пространстве. Кластеры, возникающие вследствие притягивающей внутрислойной связи, передаются положительной межслойной связью, а кластеры, индуцированные отталкивающей внутрислойной связью, передаются отталкивающей межслойной связью.
7. Установлена возможность управление средней частотой колебаний в двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо путем введения положительных и отрицательных связей. Введение положительных связей приводит к снижению средней частоты колебаний, а введение отрицательных связей, наоборот, увеличивает среднюю частоту колебаний. Полученные результаты могут быть полезны и применимы при изучении и обучении спайковых нейронных сетей. При необходимости введения дополнительных положительных связей между нейронами для целей обучения, можно вводить и

отрицательные связи для поддержания среднего уровня спайковой активности. Такой подход к обучению позволит избежать существенного снижения или повышения спайковой активности нейронов сети в среднем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуется влияние запаздывания и топологии связи на динамику связанных нелинейных осцилляторов.

Основные результаты диссертационной работы:

- Проведен бифуркационный анализ для системы дифференциальных уравнений с запаздывающей связью между осцилляторами и соответствующей конечномерной модели обыкновенных дифференциальных уравнений, где время запаздывания выступает в качестве параметра. Впервые установлен и последовательно описан бифуркационный механизм формирования синхронной и асинхронной динамики с использованием минимального ансамбля из двух взаимодействующих автоколебательных осцилляторов с запаздывающей связью. Полученные результаты показали полное соответствие. Выявленные бифуркационные переходы подтверждены исследованием укороченных уравнений для амплитуд и фаз.
- Показано, что для всех трёх рассмотренных моделей бистабильность синхронных и асинхронных состояний, обусловленная запаздывающей связью, возникает с увеличением времени задержки в связи между осцилляторами. Область бистабильности формируется в основной области синхронизации за линией разрушения резонансного тора на плоскости параметров «расстройка частоты — сила связи». Она возникает при достаточно малом времени задержки, $\tau \approx 0.834$, и расширяется с ростом τ . При определённом наборе значений параметров (собственной частоты ω_2 и силы связи γ) и в зависимости от начальных условий в рассматриваемых системах наблюдается сосуществование синфазной и противофазной синхронизации. Этим режимам соответствуют устойчивые синфазный и противофазный

предельные циклы, соответственно. При выборе параметров управления из области, окружающей указанную выше область синхронной бистабильности, в системах взаимодействующих осцилляторов Ван дер Поля наблюдается сосуществование синфазной синхронизации (устойчивого предельного цикла) и асинхронной динамики (устойчивого двумерного тора, соответствующего квазипериодическим колебаниям).

- Для автоколебательной системы с двумя степенями свободы, состоящей из осциллятора Рэля и пассивного колебательного контура показано, что классическое явление затягивания частоты наблюдается только при небольших значениях параметра возбуждения ε . Область бистабильности, где сосуществуют два предельных цикла, соответствующие синфазным и противофазным режимам колебаний в связанных осцилляторах, ограничена не только по параметру расстройки, но и по ε . При малых значениях параметра возбуждения появление мультистабильности определяется двумя последовательными суперкритическими бифуркациями Андронова–Хопфа состояния равновесия и субкритической бифуркацией Неймарка–Сакера седлового предельного цикла. С увеличением ε , при переходе от квазигармонических колебаний к релаксационным бистабильность исчезает.
- При больших значениях параметра возбуждения мультистабильность возникает через седло-узловые бифуркации рождения пар устойчивого и неустойчивого предельных циклов. Формируются новые мультистабильные состояния. На плоскости параметров при $p < 1$ возникает ряд «полос бистабильности», ограниченных линиями складок для попарно сосуществующих устойчивых предельных циклов.
- В системе, состоящей из двух осцилляторов Ван дер Поля, связанных друг с другом через конечное число пассивных колебательных контуров, при увеличении степени диссипации колебательных контуров, независимо от

расстройки по собственным частотам при больших значениях коэффициента связи режимы синхронизации не наблюдаются, а происходит гашение автоколебаний.

- Увеличение количества высокочастотных пассивных осцилляторов в цепи связи между двумя автогенераторами приводит к уменьшению области гашения колебаний и увеличению области синхронизации через подавление, а именно к расширению “канала” синхронных колебаний по силе связи, разделяющего области квазипериодической динамики (снизу) и амплитудного вымирания (сверху). Установлено, что в такой системе можно управлять режимами синхронизации и амплитудного вымирания путем изменения силы связи между взаимодействующими осцилляторами и выборе определенного числа контуров и уровня их добротности.
- Для системы, состоящей из двух связанных осцилляторов ФитцХью–Нагумо с диссипацией в возбужденном режиме и с запаздывающей связью было показано, что порог возбуждения как синфазных, так и противофазных периодических колебаний в системе относительно силы связи γ , при увеличении времени задержки τ , существенно зависит от параметра диссипации α . Чем меньше диссипация в нейроне, тем меньше порог по γ . Начиная с определенного значения τ , с увеличением времени задержки, порог γ остается неизменным. Порог колебательного режима относительно времени запаздывания τ не зависит от параметра диссипации, для возбуждения синфазных колебаний он больше, чем для противофазных. Аналогичная зависимость порогового значения силы связи γ от параметра диссипации наблюдается для кольцевой сети осцилляторов ФитцХью–Нагумо с запаздывающей связью.
- В кольцевой сети локально связанных нейронов ФитцХью–Нагумо с запаздывающей связью в возбужденном режиме установлен неравновесный фа-

зовый переход первого рода из состояния покоя в полностью синхронное состояние посредством образования кластеров синхронизации при возрастающей силе связи. Далее, при некотором пороговом значении силы связи несколько кластеров резко сливаются в один и реализуется эффект полной синхронизации синфазных автоколебаний. Выявлено, что диапазон изменения значения силы связи, в котором наблюдается режим частичной синхронизации, в три раза уже для больших значений параметра диссипации α по сравнению со случаем меньших значений α .

- Установлено, что в двухслойной сети связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо при слабой межслойной притягивающей связи средние частоты нейронных импульсов выравниваются, но колебания связанных пар осцилляторов остаются слабокоррелированными. Начиная с определённого значения межслойной связи, достигается полная синфазная синхронизация бегущих волн в связанных слоях. Отталкивающая межслойная связь сначала приводит к искажению и даже разрушению волновых структур, а затем, с ростом ее абсолютной величины, к воспроизведению исходных бегущих волн в слоях. Кроме того, при отталкивающем межслойном взаимодействии может реализовываться частичная противофазная синхронизация бегущих волн.
- Показано, что при выборе периодически модулированной (в пространстве вдоль кольца) межслойной связи в обоих слоях двухслойной сети осцилляторов ФитцХью-Нагумо возникает несколько некогерентных кластеров, характеризующихся разной длиной и положением в кольцевом пространстве. Кластеры, возникающие вследствие притягивающей внутрислойной связи, передаются положительной межслойной связью, а кластеры, индуцированные отталкивающей внутрислойной связью, передаются отталкивающей межслойной связью.

Таким образом, поставленная цель диссертационной работы достигнута и основные задачи решены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pikovsky, A.* Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences / A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. — Cambridge University Press, 2001. — P. 411.
2. *Клиньшов, В. В.* Синхронизация автоколебательных сетей с запаздывающими связями / В. В. Клиньшов, В. И. Некоркин // *УФН*. — 2013. — Vol. 56, no. 12. — Pp. 1217–1229.
3. *Landa, P. S.* Nonlinear oscillations and waves in dynamical systems / P. S. Landa. — Springer Science & Business Media, 2013. — Vol. 360.
4. Nonlinear dynamics of chaotic and stochastic systems: tutorial and modern developments / Vadim S. Anishchenko, Vladimir V. Astakhov, Alexander B. Neiman et al. — Springer, 2007. — Vol. 111.
5. From simple to complex / A. Balanov, N. Janson, D. Postnov, O. Sosnovtseva. — Springer, 2009.
6. *Рубаник, В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / В. П. Рубаник. — М. Наука, 1969.
7. *Grigorieva, E V.* Antiphase and in-phase dynamics in laser chain models with delayed bidirectional couplings / E V Grigorieva, S A Kashchenko // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2024. — Vol. 467. — P. 134223.
8. Introduction to focus issue: time-delay dynamics / Thomas Erneux, Julien Javaloyes, Matthias Wolfrum, Serhiy Yanchuk // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 11. — P. 114201.

9. *Erneux, Thomas*. Applied delay differential equations / Thomas Erneux. — Springer, 2009.
10. *Driver, Rodney David*. Ordinary and delay differential equations / Rodney David Driver. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 20.
11. *Smith, Hal L*. An introduction to delay differential equations with applications to the life sciences / Hal L Smith. — springer New York, 2011. — Vol. 57.
12. *Kumar, Mohit*. Two mechanisms of remote synchronization in a chain of Stuart-Landau oscillators / Mohit Kumar, Michael Rosenblum // *Physical Review E*. — 2021. — Vol. 104, no. 5. — P. 054202.
13. Coexistence of multistable synchronous states in a three-oscillator system with higher-order interaction / Xuan Wang, Haihong Li, Qionglin Dai, Junzhong Yang // *Physical Review E*. — 2024. — Vol. 110, no. 3. — P. 034311.
14. *Mahdavi, Esmail*. Synchronization of two coupled massive oscillators in the time-delayed Kuramoto model / Esmail Mahdavi, Mina Zarei, Farhad Shahbazi // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2025. — Vol. 35, no. 1. — P. 013122.
15. *Wolfovich, Yuval*. Modal and wave synchronization in coupled self-excited oscillators / Yuval Wolfovich, O V Gendelman // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2025. — Vol. 35, no. 2. — P. 023139.
16. *Ashwin, Peter*. Weak chimeras in minimal networks of coupled phase oscillators / Peter Ashwin, Oleksandr Burylko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2015. — Vol. 25, no. 1. — P. 013106.
17. *Pisarchik, Alexander N*. Multistability in physical and living systems / Alexander N Pisarchik, Alexander E Hramov // *Cham: Springer*. — 2022.

18. *Pisarchik, Alexander N.* Control of multistability / Alexander N. Pisarchik, Ulrike Feudel // *Physics Reports*. — 2014. — Vol. 540, no. 4. — Pp. 167–218.
— Control of multistability. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157314000453>.
19. *Leonov, Gennady A.* Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits / Gennady A Leonov, Nikolay V Kuznetsov // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2013. — Vol. 23, no. 01. — P. 1330002.
20. Hidden attractors in dynamical systems / Dawid Dudkowski, Sajad Jafari, Tomasz Kapitaniak et al. // *Physics Reports*. — 2016. — Vol. 637. — Pp. 1–50.
21. Bifurcation, chaos, multistability, and organized structures in a predator–prey model with vigilance / Mainul Hossain, Shilpa Garai, Sajad Jafari, Nikhil Pal // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 6.
22. Noise-induced stabilization of the FitzHugh–Nagumo neuron dynamics: Multistability and transient chaos / Cesar Manchein, Luana Santana, Rafael M da Silva, Marcus W Beims // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 8.
23. Generalized multistability and its control in a laser / Riccardo Meucci, Jean Marc Ginoux, Mahtab Mehrabbeik et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 8.
24. Adaptive synapse-based neuron model with heterogeneous multistability and riddled basins / H Bao, J Zhang, N Wang et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 12.

25. *Skardal, Per Sebastian*. Multistability in coupled oscillator systems with higher-order interactions and community structure / Per Sebastian Skardal, Sabina Adhikari, Juan G Restrepo // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2023. — Vol. 33, no. 2.
26. *Perks, Joshua*. Dynamics, interference effects, and multistability in a Lorenz-like system of a classical wave-particle entity in a periodic potential / Joshua Perks, RN Valani // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2023. — Vol. 33, no. 3.
27. Multistability and evolution of chimera states in a network of type II Morris-Lecar neurons with asymmetrical nonlocal inhibitory connections / Olesia Dogonasheva, Dmitry Kasatkin, Boris Gutkin, Denis Zakharov // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 10.
28. Additional complex conjugate feedback induced explosive death and multistabilities / K Sathiyadevi, D Premraj, Tanmoy Banerjee, M Lakshmanan // *arXiv preprint arXiv:2208.12794*. — 2022.
29. Dynamics, multistability, and crisis analysis of a sine-circle nontwist map / Michele Mugnaine, Matheus Rolim Sales, Ricardo Luiz Viana, José Danilo Szezech Jr // *Physical Review E*. — 2022. — Vol. 106.
30. *Aronson, D G*. An analytical and numerical study of the bifurcations in a system of linearly-coupled oscillators / D G Aronson, E J Doedel, H G Othmer // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1987. — Vol. 25, no. 1-3. — Pp. 20–104.
31. Role of saddle tori in the mutual synchronization of periodic oscillations / A. Balanov, N. Janson, et al. // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2005. — Vol. 72, no. 2. — P. 026214.

32. *Aronson, D. G.* Amplitude response of coupled oscillators / D. G. Aronson, G. B. Ermentrout, N. Koppel // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1990. — Vol. 41, no. 3. — Pp. 403–449.
33. Synchronization of two non-scalar-coupled limit-cycle oscillators / M. V. Ivanchenko, G.V. Osipov, V.D. Shalfeev, J. Kurths // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2004. — Vol. 189, no. 1-2. — Pp. 8–30.
34. *Kuznetsov, Alexander P.* Properties of synchronization in the systems of non-identical coupled van der Pol and van der Pol–Duffing oscillators. Broadband synchronization / Alexander P Kuznetsov, Julia P Roman // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2009. — Vol. 238, no. 16. — Pp. 1499–1506.
35. *Kuznetsov, A P.* Coupled van der Pol–Duffing oscillators: Phase dynamics and structure of synchronization tongues / A P Kuznetsov, N V Stankevich, L V Tukurina // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2009. — Vol. 238, no. 14. — Pp. 1203–1215.
36. *Rayleigh, Lord.* The Theory of Sound. Mac Millan / Lord Rayleigh. — reprinted by Dover, New York, 1945.
37. *Bar-Eli, Kedma.* On the stability of coupled chemical oscillators / Kedma Bar-Eli // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1985. — Vol. 14, no. 2. — Pp. 242–252.
38. Peculiarities of the transitions to synchronization in coupled systems with amplitude death / V Astakhov, S Koblyanskii, A Shabunin, T Kapitaniak // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2011. — Vol. 21, no. 2. — P. 023127.
39. *Koseska, Aneta.* Oscillation quenching mechanisms: Amplitude vs. oscillation death / Aneta Koseska, Evgeny Volkov, Jürgen Kurths // *Physics Reports*. — 2013. — Vol. 531, no. 4. — Pp. 173–199.

40. *Balanov, Alexander G.* Control of noise-induced oscillations by delayed feedback / Alexander G Balanov, Natalia B Janson, E Schöll // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 2004. — Vol. 199, no. 1-2. — Pp. 1–12.
41. Delayed feedback control of noise-induced patterns in excitable media / AG Balanov, V Beato, NB Janson et al. // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2006. — Vol. 74, no. 1. — P. 016214.
42. Time-delayed feedback in neurosystems / Eckehard Schöll, Gerald Hiller, Philipp Hövel, Markus A Dahlem // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2009. — Vol. 367, no. 1891. — Pp. 1079–1096.
43. *Popovych, Oleksandr V.* Delay-and coupling-induced firing patterns in oscillatory neural loops / Oleksandr V Popovych, Serhiy Yanchuk, Peter A Tass // *Physical review letters*. — 2011. — Vol. 107, no. 22. — P. 228102.
44. *Kantner, Markus.* Delay-induced patterns in a two-dimensional lattice of coupled oscillators / Markus Kantner, Eckehard Schöll, Serhiy Yanchuk // *Scientific reports*. — 2015. — Vol. 5, no. 1. — P. 8522.
45. *Usacheva, SA.* Phase locking of two limit cycle oscillators with delay coupling / SA Usacheva, NM Ryskin // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2014. — Vol. 24, no. 2.
46. Bifurcation analysis of multistability of synchronous states in the system of two delay-coupled oscillators / AB Adilova, MI Balakin, SA Gerasimova, NM Ryskin // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2021. — Vol. 31, no. 11.
47. *Schuster, Heinz Georg.* Mutual entrainment of two limit cycle oscillators with time delayed coupling / Heinz Georg Schuster, Peter Wagner // *Progress of Theoretical Physics*. — 1989. — Vol. 81, no. 5. — Pp. 939–945.

48. *Wirkus, Stephen*. The dynamics of two coupled van der Pol oscillators with delay coupling / Stephen Wirkus, Richard Rand // *Nonlinear dynamics*. — 2002. — Vol. 30. — Pp. 205–221.
49. *Li, Xinye*. Dynamics of two delay coupled van der Pol oscillators / Xinye Li, J. C. Ji, Colin H. Hansen // *Mechanics Research Communications*. — 2006. — Vol. 33, no. 5. — Pp. 614–627.
50. *Reddy, D. V. Ramana*. Time delay effects on coupled limit cycle oscillators at Hopf bifurcation / D. V. Ramana Reddy, Abhijit Sen, George L Johnston // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1999. — Vol. 129, no. 1-2. — Pp. 15–34.
51. *Kyrychko, Y N*. Amplitude death in systems of coupled oscillators with distributed-delay coupling / Y N Kyrychko, KB Blyuss, E Schöll // *The European Physical Journal B*. — 2011. — Vol. 84. — Pp. 307–315.
52. *Sugitani, Yoshiki*. Robust design against frequency variation for amplitude death in delay-coupled oscillators / Yoshiki Sugitani, Kensei Kawahara, Keiji Konishi // *Physical Review E*. — 2024. — Vol. 109, no. 6. — P. 064213.
53. Synchronization in spiking neural networks with short and long connections and time delays / Lionel Kusch, Martin Breyton, Damien Depannemaecker et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2025. — Vol. 35, no. 1. — P. 013161.
54. *Janson, Natalia B*. Delayed feedback as a means of control of noise-induced motion / Natalia B Janson, Alexander G Balanov, E Schöll // *Physical review letters*. — 2004. — Vol. 93, no. 1. — P. 010601.
55. *Larger, Laurent*. Virtual chimera states for delayed-feedback systems / Laurent Larger, Bogdan Penkovsky, Yuri Maistrenko // *Physical review letters*. — 2013. — Vol. 111, no. 5. — P. 054103.

56. Delayed-feedback chimera states: Forced multiclusters and stochastic resonance / Vladimir Semenov, Anna Zakharova, Yuri Maistrenko, Eckehard Schöll // *Europhysics Letters*. — 2016. — Vol. 115, no. 1. — P. 10005.
57. Schöll, Eur. Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics / Eur Schöll // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2016. — Vol. 225, no. 6. — Pp. 891–919.
58. Birth and death of chimera: Interplay of delay and multiplexing / Saptarshi Ghosh, Anil Kumar, Anna Zakharova, Sarika Jalan // *Europhysics Letters*. — 2016. — Vol. 115, no. 6. — P. 60005.
59. Gjurchinovski, Aleksandar. Control of amplitude chimeras by time delay in oscillator networks / Aleksandar Gjurchinovski, Eckehard Schöll, Anna Zakharova // *Physical Review E*. — 2017. — Vol. 95, no. 4. — P. 042218.
60. Time-delayed feedback control of coherence resonance chimeras / Anna Zakharova, Nadezhda Semenova, Vadim Anishchenko, Eckehard Schöll // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2017. — Vol. 27, no. 11.
61. Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay / Jakub Sawicki, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, Eckehard Schöll // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2017. — Vol. 226, no. 9. — Pp. 1883–1892.
62. Delay controls chimera relay synchronization in multiplex networks / Jakub Sawicki, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, Eckehard Schöll // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 98, no. 6. — P. 062224.
63. Chimeras in multiplex networks: interplay of inter-and intra-layer delays / Jakub Sawicki, Saptarshi Ghosh, Sarika Jalan, Anna Zakharova // *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*. — 2019. — Vol. 5. — P. 19.

64. Complex partial synchronization patterns in networks of delay-coupled neurons / D Nikitin, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova et al. // *Philosophical Transactions of the Royal Society A*. — 2019. — Vol. 377, no. 2153. — P. 20180128.
65. Delay-induced chimeras in neural networks with fractal topology / Jakub Sawicki, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, Eckehard Schöll // *The European Physical Journal B*. — 2019. — Vol. 92, no. 3. — P. 54.
66. Role of coupling delay in oscillatory activity in autonomous networks of excitable neurons with dissipation / Andrei V Bukh, Igor A Shepelev, Evgeny M Elizarov et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2023. — Vol. 33, no. 7.
67. *Keener, J. Mathematical Physiology* / J. Keener, J. Sneyd. — Springer New York, 1998.
68. *Computational Cell Biology* / Ed. by C. P. Fall, E. S. Marland, J. M. Wagner, J. J. Tyson. — Springer New York, 2002.
69. *Ermentrout, G. B. Mathematical Foundations of Neuroscience* / G. B. Ermentrout, D. H. Terman. — Springer New York, 2010.
70. *Asl, M. M. Dendritic and Axonal Propagation Delays May Shape Neuronal Networks With Plastic Synapses* / M. M. Asl, A. Valizadeh, P. A. Tass // *Frontiers in Physiology*. — 2018. — Vol. 9.
71. Controlling synchrony by delay coupling in networks: From in-phase to splay and cluster states / C.-U. Choe, T. Dahms, P. Hövel, E. Schöll // *Phys. Rev. E*. — 2010. — Vol. 81, no. 2.

72. *Kyrychko, Y. N.* Amplitude death in systems of coupled oscillators with distributed-delay coupling / Y. N. Kyrychko, K. B. Blyuss, E. Schöll // *Eur Phys J B.* — 2011. — Vol. 84, no. 2. — Pp. 307–315.
73. Loss of synchronization in complex neuronal networks with delay / J. Lehnert, T. Dahms, P. Hövel, E. Schöll // *EPL.* — 2011. — Vol. 96, no. 6. — P. 60013.
74. Synchronization of coupled neural oscillators with heterogeneous delays / A. Panchuk, D. P. Rosin, P. Hövel, E. Schöll // *Int J Bifurcat Chaos.* — 2013. — Vol. 23, no. 12. — P. 1330039.
75. Synchronization in heterogeneous FitzHugh-Nagumo networks with hierarchical architecture / S. A. Plotnikov, J. Lehnert, A. L. Fradkov, E. Schöll // *Phys. Rev. E.* — 2016. — Vol. 94, no. 1.
76. *Wille, C.* Synchronization-desynchronization transitions in complex networks: An interplay of distributed time delay and inhibitory nodes / C. Wille, J. Lehnert, E. Schöll // *Phys. Rev. E.* — 2014. — Vol. 90, no. 3. — P. 032908.
77. *Esfahani, Z. G.* Zero-Lag Synchronization Despite Inhomogeneities in a Relay System / Z. G. Esfahani, A. Valizadeh // *PLoS One.* — 2014. — Vol. 9, no. 12. — P. e112688.
78. *Kyrychko, Y. N.* Synchronization of networks of oscillators with distributed delay coupling / Y. N. Kyrychko, K. B. Blyuss, E. Schöll // *Chaos.* — 2014. — Vol. 24, no. 4. — P. 043117.
79. *Gjurchinovski, A.* Amplitude death in oscillator networks with variable-delay coupling / A. Gjurchinovski, A. Zakharova, E. Schöll // *Phys. Rev. E.* — 2014. — Vol. 89, no. 3. — P. 032915.

80. *Esfahani, Z. G.* Stimulus-dependent synchronization in delayed-coupled neuronal networks / Z. G. Esfahani, L. L. Gollo, A. Valizadeh // *Sci. Rep.* — 2016. — Vol. 6, no. 1.
81. High frequency neurons determine effective connectivity in neuronal networks / A. Pariz, Z. G. Esfahani, S. S. Parsi et al. // *NeuroImage.* — 2018. — Vol. 166. — Pp. 349–359.
82. Frequency-dependent organization of the brain's functional network through delayed-interactions / A. Ziaemehr, M. Zarei, A. Valizadeh, C. R. Mirasso // *Neural Netw.* — 2020. — Vol. 132. — Pp. 155–165.
83. Synchronization transitions on scale-free neuronal networks due to finite information transmission delays / Q. Wang, M. Perc, Z. Duan, G. Chen // *Phys. Rev. E.* — 2009. — Vol. 80, no. 2. — P. 026206.
84. Delay and diversity-induced synchronization transitions in a small-world neuronal network / J. Tang, J. Ma, M. Yi et al. // *Phys. Rev. E.* — 2011. — Vol. 83, no. 4. — P. 046207.
85. *Dhamala, M.* Enhancement of Neural Synchrony by Time Delay / M. Dhamala, V. K. Jirsa, M. Ding // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 92, no. 7.
86. *Yang, X.* Partial coupling delay induced multiple spatiotemporal orders in a modular neuronal network / X. Yang, H. Li, Z. Sun // *PLoS One.* — 2017. — Vol. 12, no. 6. — P. e0177918.
87. Adaptive Synchronization of Time Delay Chaotic Systems with Uncertain and Unknown Parameters via Aperiodically Intermittent Control / Y. Wang, X. Zhang, L. Yang, H. Huang // *Int. J. Control Autom. Syst.* — 2020. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 696–707.

88. *Petkoski, S.* Transmission time delays organize the brain network synchronization / S. Petkoski, V. K. Jirsa // *Philos. Trans. Royal Soc. A.* — 2019. — Vol. 377, no. 2153. — P. 20180132.
89. *Kuramoto, Y.* Coexistence of Coherence and Incoherence in Nonlocally Coupled Phase Oscillators / Y. Kuramoto, D. Battogtokh // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.* — 2002. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 380–385.
90. *Abrams, D. M.* Chimera States for Coupled Oscillators / D. M. Abrams, S. H. Strogatz // *Phys. Rev. Lett.* — 2004. — Vol. 93, no. 17. — P. 174102.
91. *Larger, L.* Virtual Chimera States for Delayed-Feedback Systems / L. Larger, B. Penkovsky, Y. Maistrenko // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 111, no. 5. — P. 054103.
92. Delayed-feedback chimera states: Forced multiclusters and stochastic resonance / V. Semenov, A. Zakharova, Y. Maistrenko, E. Schöll // *EPL.* — 2016. — Vol. 115, no. 1. — P. 10005.
93. *Schöll, E.* Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics / E. Schöll // *Eur Phys J Spec Top.* — 2016. — Vol. 225, no. 6-7. — Pp. 891–919.
94. Birth and death of chimera: Interplay of delay and multiplexing / S. Ghosh, A. Kumar, A. Zakharova, S. Jalan // *EPL.* — 2016. — Vol. 115, no. 6. — P. 60005.
95. *Gjurchinovski, A.* Control of amplitude chimeras by time delay in oscillator networks / A. Gjurchinovski, E. Schöll, A. Zakharova // *Phys. Rev. E.* — 2017. — Vol. 95, no. 4. — P. 042218.

96. Time-delayed feedback control of coherence resonance chimeras / A. Zakharova, N. Semenova, V. Anishchenko, E. Schöll // *Chaos*. — 2017. — Vol. 27, no. 11. — P. 114320.
97. Chimera states in complex networks: interplay of fractal topology and delay / J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll // *Eur Phys J Spec Top*. — 2017. — Vol. 226, no. 9. — Pp. 1883–1892.
98. Delay controls chimera relay synchronization in multiplex networks / J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll // *Phys. Rev. E*. — 2018. — Vol. 98, no. 6. — P. 062224.
99. Chimeras in Multiplex Networks: Interplay of Inter- and Intra-Layer Delays / J. Sawicki, S. Ghosh, S. Jalan, A. Zakharova // *Front. Appl. Math. Stat.* — 2019. — Vol. 5.
100. Complex partial synchronization patterns in networks of delay-coupled neurons / D. Nikitin, I. Omelchenko, A. Zakharova et al. // *Philos. Trans. Royal Soc. A*. — 2019. — Vol. 377, no. 2153. — P. 20180128.
101. Delay-induced chimeras in neural networks with fractal topology / J. Sawicki, I. Omelchenko, A. Zakharova, E. Schöll // *Eur Phys J B*. — 2019. — Vol. 92, no. 3.
102. Spiking neural networks and their applications: A review / Kashu Yamazaki, Viet-Khoa Vo-Ho, Darshan Bulsara, Ngan Le // *Brain Sciences*. — 2022. — Vol. 12, no. 7. — P. 863.
103. *Kasabov, Nikola K.* Time-space, spiking neural networks and brain-inspired artificial intelligence / Nikola K Kasabov. — Springer, 2019.

104. *Hodgkin, Alan L.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve / Alan L Hodgkin, Andrew F Huxley // *The Journal of physiology*. — 1952. — Vol. 117, no. 4. — P. 500.
105. *Hindmarsh, James L.* A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations / James L Hindmarsh, RM Rose // *Proceedings of the Royal society of London. Series B. Biological sciences*. — 1984. — Vol. 221, no. 1222. — Pp. 87–102.
106. *Morris, Catherine.* Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber / Catherine Morris, Harold Lecar // *Biophysical journal*. — 1981. — Vol. 35, no. 1. — Pp. 193–213.
107. *Izhikevich, Eugene M.* Simple model of spiking neurons / Eugene M Izhikevich // *IEEE Transactions on neural networks*. — 2003. — Vol. 14, no. 6. — Pp. 1569–1572.
108. *FitzHugh, Richard.* Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane / Richard FitzHugh // *Biophysical journal*. — 1961. — Vol. 1, no. 6. — Pp. 445–466.
109. *Nagumo, Jinichi.* An active pulse transmission line simulating nerve axon / Jinichi Nagumo, Suguru Arimoto, Shuji Yoshizawa // *Proceedings of the IRE*. — 1962. — Vol. 50, no. 10. — Pp. 2061–2070.
110. *Doi, Shinji.* Generation of very slow neuronal rhythms and chaos near the Hopf bifurcation in single neuron models / Shinji Doi, Sadatoshi Kumagai // *Journal of Computational Neuroscience*. — 2005. — Vol. 19. — Pp. 325–356.
111. Further dynamical analysis of modified Fitzhugh–Nagumo model under the electric field / Bo Yan, Shirin Panahi, Shaobo He, Sajad Jafari // *Nonlinear Dynamics*. — 2020. — Vol. 101. — Pp. 521–529.

112. *Perc, Matjaž*. Spatial coherence resonance in excitable media / Matjaž Perc // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2005. — Vol. 72, no. 1. — P. 016207.
113. Time-delayed feedback in neurosystems / Eckehard Schöll, Gerald Hiller, Philipp Hövel, Markus A Dahlem // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2009. — Vol. 367, no. 1891. — Pp. 1079–1096.
114. *Semenov, Vladimir V*. Delay-induced self-oscillation excitation in the Fitzhugh–Nagumo model: Regular and chaotic dynamics / Vladimir V Semenov, Andrei V Bukh, Nadezhda Semenova // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2023. — Vol. 172. — P. 113524.
115. Noise-induced cooperative dynamics and its control in coupled neuron models / B Hauschildt, NB Janson, A Balanov, E Schöll // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2006. — Vol. 74, no. 5. — P. 051906.
116. *Rontogiannis, Alexandros*. Chimera states in FitzHugh–Nagumo networks with reflecting connectivity / Alexandros Rontogiannis, Astero Provata // *The European Physical Journal B*. — 2021. — Vol. 94, no. 5. — P. 97.
117. *Rybalova, EV*. Interplay between solitary states and chimeras in multiplex neural networks / EV Rybalova, A Zakharova, GI Strelkova // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2021. — Vol. 148. — P. 111011.
118. *Plotnikov, Sergei*. Controlled synchronization in two FitzHugh–Nagumo systems with slowly-varying delays / Sergei Plotnikov // *Cybernetics and Physics*. — 2015. — Vol. 4, no. 1. — Pp. 21–25.

119. *Takeuchi, Masashi*. Optimal feedback control of traveling wave in a piecewise linear FitzHugh–Nagumo model / Masashi Takeuchi, Keiji Konishi, Naoyuki Hara // *Cybernetics and Physics*. — 2012. — Vol. 1, no. 1. — Pp. 73–77.
120. *Schöll, Eur*. Synchronization patterns and chimera states in complex networks: Interplay of topology and dynamics / Eur Schöll // *The European Physical Journal Special Topics*. — 2016. — Vol. 225. — Pp. 891–919.
121. *Abrams, Daniel M*. Chimera states for coupled oscillators / Daniel M Abrams, Steven H Strogatz // *Physical review letters*. — 2004. — Vol. 93, no. 17. — P. 174102.
122. Periodic patterns in a ring of delay-coupled oscillators / P Perlikowski, S Yanchuk, OV Popovych, PA2788007 Tass // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2010. — Vol. 82, no. 3. — P. 036208.
123. Delay controls chimera relay synchronization in multiplex networks / Jakub Sawicki, Iryna Omelchenko, Anna Zakharova, Eckehard Schöll // *Physical Review E*. — 2018. — Vol. 98, no. 6. — P. 062224.
124. Effect of topology upon relay synchronization in triplex neuronal networks / Fenja Drauschke, Jakub Sawicki, Rico Berner et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2020. — Vol. 30, no. 5.
125. *Li, Xiumin*. Effects of chemical synapses on the enhancement of signal propagation in coupled neurons near the canard regime / Xiumin Li, Jiang Wang, Wuhua Hu // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2007. — Vol. 76, no. 4. — P. 041902.
126. When Nonlocal Coupling between Oscillators Becomes Stronger: Patched Synchrony or Multichimera States / Iryna Omelchenko, Oleh E Omel'chenko, Philipp Hövel, Eckehard Schöll // *Physical review letters*. — 2013. — Vol. 110, no. 22. — P. 224101.

127. Chimera States mediated by nonlocally attractive-repulsive coupling in FitzHugh–Nagumo neural networks / Yafei Jiang, Jian Wu, Hang Yang et al. // *Chinese Journal of Physics*. — 2020. — Vol. 66. — Pp. 172–179.
128. *Qu, Zhilin*. Nonlinear dynamics of cardiac excitation-contraction coupling: an iterated map study / Zhilin Qu, Yohannes Shiferaw, James N Weiss // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2007. — Vol. 75, no. 1. — P. 011927.
129. The role of coupling, noise and harmonic impact in oscillatory activity of an excitable FitzHugh–Nagumo oscillator network / Elena Vladislavovna Rybalova, Tatyana Romanovna Bogatenko, Andrey Vladimirovich Bukh, Tatyana Evgen'evna Vadivasova // *News of Saratov University. Ser. Physics*. — 2023. — Vol. 23, no. 4. — Pp. 294–306.
130. *Kumar, Mohit*. Route to synchronization in coupled phase oscillators with frequency-dependent coupling: Explosive or continuous? / Mohit Kumar, Sayan Gupta // *Physical Review E*. — 2022. — Vol. 106, no. 4. — P. 044310.
131. Blinking coupling enhances network synchronization / Fatemeh Parastesh, Karthikeyan Rajagopal, Sajad Jafari et al. // *Physical Review E*. — 2022. — Vol. 105, no. 5. — P. 054304.
132. *Lanza, Valentina*. Blinking networks of memristor oscillatory circuits in the flux-charge domain / Valentina Lanza, Jacopo Secco, Fernando Corinto // *Frontiers in Neuroscience*. — 2021. — Vol. 15. — P. 618607.
133. Neuronal synchronization in long-range time-varying networks / Sarbendu Rakshit, Soumen Majhi, Jürgen Kurths, Dibakar Ghosh // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2021. — Vol. 31, no. 7. — P. 073129.

134. *Petrov, V S.* Distant synchronization through a passive medium / V S Petrov, G V Osipov, Jürgen Kurths // *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. — 2010. — Vol. 82, no. 2. — P. 026208.
135. *Lin, Wei.* Using white noise to enhance synchronization of coupled chaotic systems / Wei Lin, Guanrong Chen // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2006. — Vol. 16, no. 1. — P. 013134.
136. Delay-induced amplitude death in multiplex oscillator network with frequency-mismatched layers / Keiji Konishi, Koki Yoshida, Yoshiki Sugitani, Naoyuki Hara // *Physical Review E*. — 2024. — Vol. 109, no. 1. — P. 014220.
137. *Kuramoto, Yoshiki.* Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators / Yoshiki Kuramoto, Dorjsuren Battogtokh // *J. Nonlinear Phenom. Complex Syst.* — 2002. — Vol. 5. — Pp. 380–385.
138. *Abrams, Daniel M.* Chimera states for coupled oscillators / Daniel M Abrams, Steven H Strogatz // *Physical review letters*. — 2004. — Vol. 93, no. 17. — P. 174102.
139. *Yeldesbay, Azamat.* Chimeralike states in an ensemble of globally coupled oscillators / Azamat Yeldesbay, Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum // *Physical review letters*. — 2014. — Vol. 112, no. 14. — P. 144103.
140. *Omel'chenko, Oleh E.* Mathematical framework for breathing chimera states / Oleh E Omel'chenko // *Journal of Nonlinear Science*. — 2022. — Vol. 32, no. 2. — P. 22.
141. *Guckenheimer, John.* Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields / John Guckenheimer, Philip Holmes. — Springer Science & Business Media, 2013. — Vol. 42.

142. *Kevrekidis, IG*. Forcing an entire bifurcation diagram: Case studies in chemical oscillators / IG Kevrekidis, R Aris, LD Schmidt // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. — 1986. — Vol. 23, no. 1-3. — Pp. 391–395.
143. Homoclinic bifurcation as a mechanism of chaotic phase synchronization / DE Postnov, AG Balanov, NB Janson, Erik Mosekilde // *Physical review letters*. — 1999. — Vol. 83, no. 10. — P. 1942.
144. *Lysyansky, Borys*. Coexistence of numerous synchronized and desynchronized states in a model of two phase oscillators coupled with delay / Borys Lysyansky, Yuri L Maistrenko, Peter A Tass // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2008. — Vol. 18, no. 06. — Pp. 1791–1800.
145. Bifurcation analysis of delay-coupling induced bistability in coupled van der Pol oscillators / Sergey Astakhov, Evgeny Elizarov, Galina Strelkova, Vladimir Astakhov // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2025. — Vol. 35, no. 10.
146. *Anischenko, V. S*. Regular and chaotic self-sustained oscillations / V. S. Anischenko, V. V. Astakhov, T. E. Vadivasova. — Intellect, 2009. — (in Russian).
147. Multistability and delayed recurrent loops / Jennifer Foss, André Longtin, Boualem Mensour, John Milton // *Physical Review Letters*. — 1996. — Vol. 76, no. 4. — P. 708.
148. *Baer, T*. Large-amplitude fluctuations due to longitudinal mode coupling in diode-pumped intracavity-doubled Nd: YAG lasers / T Baer // *Journal of the Optical Society of America B*. — 1986. — Vol. 3, no. 9. — Pp. 1175–1180.
149. *Томпсон, Дж М*. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике / Дж М Томпсон // пер. с англ./Дж. МТ Томпсон.-М.: Мир. — 1985.

150. *Kuznetsov, Yuri A.* Elements of applied bifurcation theory / Yuri A Kuznetsov. — Springer, 1998.
151. Мультистабильные состояния диссипативно связанных
фейгенбаумовских систем / В В Астахов, Борис Петрович Безручко,
Юрий Васильевич Гуляев, Евгений Петрович Селезнев // *Письма в
Журнал технической физики*. — 1989. — Vol. 15, no. 3. — Pp. 60–65.
152. Multistability formation and synchronization loss in coupled Hénon maps: Two
sides of the single bifurcational mechanism / V Astakhov, A Shabunin, W Uhm,
S Kim // *Physical Review E*. — 2001. — Vol. 63, no. 5. — P. 056212.
153. *van der Pol, Balth.* Lxxxv. on oscillation hysteresis in a triode generator with
two degrees of freedom / Balth van der Pol // *The London, Edinburgh, and
Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. — 1922. — Vol. 43, no.
256. — Pp. 700–719.
154. *Андронов, АА.* К математической теории автоколебательных систем
с двумя степенями свободы / АА Андронов, АА Витт // *Журнал
технической физики*. — 1934. — Vol. 4, no. 1. — P. 122.
155. Bifurcational mechanism of multistability formation and frequency entrainment
in a van der pol oscillator with an additional oscillatory circuit / Sergey As-
takhov, Oleg Astakhov, Vladimir Astakhov, Jürgen Kurths // *International
Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2016. — Vol. 26, no. 07. — P. 1650124.
156. The emergence of multistability and chaos in a two-mode van der Pol gener-
ator versus different connection types of linear oscillators / Oleg V Astakhov,
Sergey V Astakhov, Natalia S Krakhovskaya et al. // *Chaos: An Interdisci-
plinary Journal of Nonlinear Science*. — 2018. — Vol. 28, no. 6.
157. Влияние ангармоничности на мультистабильность в автоколебательной
системе с двумя степенями свободы / Сергей Владимирович Астахов,

- Олег Владимирович Астахов, Евгений Михайлович Елизаров et al. // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика.* — 2024. — Vol. 24, no. 1. — Pp. 4–18.
158. Андронов, АА. Теория колебаний, 2 изд / АА Андронов, АА Витт, СЭ Хайкин // М., Физматгиз. — 1959.
159. Кузнецов, Александр Петрович. Нелинейные колебания / Александр Петрович Кузнецов, Сергей Петрович Кузнецов, Никита Михайлович Рыскин. — 2002.
160. Atay, Fatihcan M. Total and partial amplitude death in networks of diffusively coupled oscillators / Fatihcan M Atay // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* — 2003. — Vol. 183, no. 1-2. — Pp. 1–18.
161. Nagumo, J. An Active Pulse Transmission Line Simulating Nerve Axon / J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa // *Proceedings of the IRE.* — 1962. — Vol. 50, no. 10. — Pp. 2061–2070.
162. Appali, R. A comparison of the Hodgkin–Huxley model and the soliton theory for the action potential in nerves / R. Appali, U. van Rienen, T. Heimburg // *Advances in Planar Lipid Bilayers and Liposomes Volume 16.* — Elsevier, 2012. — *Advances in planar lipid bilayers and liposomes.* — Pp. 275–299.
163. Lindner, B. Fluctuation-dissipation relations for spiking neurons / B. Lindner // *Phys. Rev. Lett.* — 2022. — Vol. 129, no. 19. — P. 198101.
164. Freire, J. G. Stern–Brocot trees in cascades of mixed-mode oscillations and canards in the extended Bonhoeffer–van der Pol and the FitzHugh–Nagumo models of excitable systems / J. G. Freire, J. A. C. Gallas // *Phys. Lett. A.* — 2011. — Vol. 375, no. 7. — Pp. 1097–1103.

165. Yao, Y. Logical stochastic and vibrational resonances induced by periodic force in the FitzHugh–Nagumo neuron / Y. Yao, J. Ma // *Eur. Phys. J. Plus.* — 2022. — Vol. 137, no. 11.
166. Knoblauch, A. Synaptic plasticity, conduction delays, and inter-areal phase relations of spike activity in a model of reciprocally connected areas / A. Knoblauch, F. T. Sommer // *Neurocomputing.* — 2003. — Vol. 52-54. — Pp. 301–306.
167. Knoblauch, A. Spike-timing-dependent synaptic plasticity can form “zero lag links” for cortical oscillations. / A. Knoblauch, F. T. Sommer // *Neurocomputing.* — 2004. — Vol. 58-60. — Pp. 185–190.
168. Desmedt, J. E. Central somatosensory conduction in man: Neural generators and interpeak latencies of the far-field components recorded from neck and right or left scalp and earlobes / J. E. Desmedt, G. Cheron // *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology.* — 1980. — Vol. 50, no. 5-6. — Pp. 382–403.
169. Manor, Y. Effect of geometrical irregularities on propagation delay in axonal trees / Y. Manor, C. Koch, I. Segev // *Biophysical Journal.* — 1991. — Vol. 60, no. 6. — Pp. 1424–1437.
170. Release-Dependent Variations in Synaptic Latency: A Putative Code for Short- and Long-Term Synaptic Dynamics / S. Boudkazi, E. Carlier, N. Ankri et al. // *Neuron.* — 2007. — Vol. 56, no. 6. — Pp. 1048–1060.
171. Stepan, G. Delay effects in brain dynamics / G. Stepan // *Philos. Trans. Royal Soc. A.* — 2009. — Vol. 367, no. 1891. — Pp. 1059–1062.
172. Transmission delays and frequency detuning can regulate information flow between brain regions / A. Pariz, I. Fischer, A. Valizadeh, C. Mirasso // *PLOS Computational Biology.* — 2021. — Vol. 17, no. 4. — P. e1008129.

173. Time-delayed feedback in neurosystems / E. Schöll, G. Hiller, P. Hövel, M. A. Dahlem // *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. — 2009. — Vol. 367, no. 1891. — Pp. 1079–1096.
174. Dynamics of delay-coupled excitable neural systems / M. A. Dahlem, G. Hiller, A. Panchuk, E. Schöll // *Int J Bifurcat Chaos*. — 2009. — Vol. 19, no. 02. — Pp. 745–753.
175. *Zakharova, A. Chimera Patterns in Networks* / A. Zakharova. — Springer International Publishing, 2020.
176. *Pearson, Karl*. On the laws of inheritance in man: I. Inheritance of physical characters / Karl Pearson, Alice Lee // *Biometrika*. — 1903. — Vol. 2, no. 4. — Pp. 357–462.
177. Role of coupling delay in oscillatory activity in autonomous networks of excitable neurons with dissipation / Andrei V Bukh, Igor A Shepelev, Evgeny M Elizarov et al. // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2023. — Vol. 33, no. 7.
178. Interaction of travelling waves in multilayer networks / AV Bukh, NN Nikishina, EM Elizarov, GI Strelkova // *CYBERNETICS AND PHYSICS Учредители: Институт проблем машиноведения РАН*. — 2024. — Vol. 13, no. 3. — Pp. 197–205.
179. Феномен уравнения ван дер Поля / Александр Петрович Кузнецов, Екатерина Сергеевна Селиверстова, Дмитрий Иванович Трубецков, Людмила Владимировна Тюрюкина // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2014. — Vol. 22, no. 4. — Pp. 3–42.

180. *Cveticanin, Livija*. On the Van der Pol oscillator: An overview / Livija Cveticanin // *Applied Mechanics and Materials*. — 2013. — Vol. 430. — Pp. 3–13.
181. *Kanamaru, Takashi*. Van der Pol oscillator / Takashi Kanamaru // *Scholarpedia*. — 2007. — Vol. 2, no. 1. — P. 2202.
182. *Журавлёв, Виктор Филиппович*. Двумерный осциллятор Ван дер Поля с внешним управлением / Виктор Филиппович Журавлёв // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2016. — Vol. 12, no. 2. — Pp. 211–222.
183. *Зайцев, Валерий Васильевич*. Дискретный осциллятор Ван дер Поля: конечные разности и медленные амплитуды / Валерий Васильевич Зайцев // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2017. — Vol. 25, no. 6. — Pp. 70–78.
184. *Bonhoeffer, KF*. Activation of passive iron as a model for the excitation of nerve / KF Bonhoeffer // *The Journal of general physiology*. — 1948. — Vol. 32, no. 1. — Pp. 69–91.
185. *Кузнецов, Сергей Петрович*. Гиперболический хаос в осцилляторе Бонхоффера-ван дер Поля с дополнительной запаздывающей обратной связью и периодически модулируемым параметром возбуждения / Сергей Петрович Кузнецов, Юлия Викторовна Седова // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2019. — Vol. 27, no. 1. — Pp. 77–95.
186. *Петров, Валентин Сергеевич*. Влияние пассивных элементов на синхронизацию осцилляторных ансамблей / Валентин Сергеевич Петров, Григорий Владимирович Осипов // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2010. — Vol. 18, no. 3. — Pp. 46–59.
187. Анализ модели нейрона Бонхоффера-Ван дер Поля / КС Дробот, ЕН Едемская, ЕВ Бычкова, ДВ Бельков // *Информатика, управляющие*

- системы, математическое и компьютерное моделирование (ИУСМКМ-2019). — 2019. — Рр. 243–246.
188. *Крюков, Алексей Константинович*. Мультистабильность синхронных режимов в ансамблях неидентичных осцилляторов: два элемента / Алексей Константинович Крюков, Григорий Владимирович Осипов, Андрей Владимирович Половинкин // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2009. — Vol. 17, no. 2. — Рр. 16–28.
189. *Крюков, Алексей Константинович*. Влияние свойств осцилляторной среды на распространение возбуждения / Алексей Константинович Крюков, Григорий Владимирович Осипов // *Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика*. — 2013. — Vol. 21, no. 2. — Рр. 188–200.
190. *Глызин, Сергей Дмитриевич*. Об одной модификации нейронной модели ФитцХью–Нагумо / Сергей Дмитриевич Глызин, Андрей Юрьевич Колесов, Николай Христович Розов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. — 2014. — Vol. 54, no. 3. — Рр. 430–449.
191. *Rocsoreanu, Carmen*. The FitzHugh-Nagumo model: bifurcation and dynamics / Carmen Rocsoreanu, Adelina Georgescu, Nicolaie Giurgiteanu. — Springer Science & Business Media, 2012. — Vol. 10.
192. Experimental active spike responses of analog electrical neuron: beyond “integrate-and-fire” transmission / A. S. Tchakoutio Nguetcho, S. Binczak, V. B. Kazantsev et al. // *Nonlinear Dyn.* — 2015. — Vol. 82, no. 3. — Рр. 1595–1604.

193. *Izhikevich, E. M.* FitzHugh-Nagumo model / E. M. Izhikevich, R. FitzHugh // *Scholarpedia*. — 2006. — Vol. 1, no. 9. — P. 1349.
194. *Dahlem, M. A.* Efficient control of transient wave forms to prevent spreading depolarizations / M. A. Dahlem, F. M. Schneider, E. Schöll // *J. Theor. Biol.* — 2008. — Vol. 251, no. 2. — Pp. 202–209.
195. Heteroclinic contours and self-replicated solitary waves in a reaction–diffusion lattice with complex threshold excitation / V. I. Nekorkin, D. S. Shapin, A. S. Dmitrichev et al. // *Physica D*. — 2008. — Vol. 237, no. 19. — Pp. 2463–2475.
196. *Kazantsev, V. B.* Selective communication and information processing by excitable systems / V. B. Kazantsev // *Phys. Rev. E*. — 2001. — Vol. 64, no. 5.
197. Dynamics of a neuron model with complex-threshold excitation / V. I. Nekorkin, A. S. Dmitrichev, D. S. Shchapin, V. B. Kazantsev // *Matematicheskoe modelirovanie*. — 2005. — Vol. 17, no. 6. — Pp. 75–91.
198. Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh–Nagumo neurons with diffusive coupling / I. A. Shepelev, D. V. Shamshin, G. I. Strelkova, T. E. Vadivasova // *Chaos Solitons Fractals*. — 2017. — Vol. 104. — Pp. 153–160.
199. Facilitating the propagation of spiking activity in feedforward networks by including feedback / H. Rezaei, A. Aertsen, A. Kumar, A. Valizadeh // *PLoS Comput. Biol.* — 2020. — Vol. 16, no. 8. — P. e1008033.
200. *Lenhert, S.* Adhesion of Lipid Multilayer Micro- and Nano-Structures Fabricated by Dip-Pen Nanolithography / S. Lenhert // *Biophys. J.* — 2011. — Vol. 100, no. 3. — P. 507a.

- 201. *Laing, C. R.* Moving bumps in theta neuron networks / C. R. Laing, O. Omel'chenko // *Chaos*. — 2020. — Vol. 30, no. 4. — P. 043117.
- 202. *Schmidt, H.* Bumps and oscillons in networks of spiking neurons / H. Schmidt, D. Avitabile // *Chaos*. — 2020. — Vol. 30, no. 3. — P. 033133.
- 203. Heterogeneous Nucleation in Finite-Size Adaptive Dynamical Networks / J. Fialkowski, S. Yanchuk, I. M. Sokolov et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2023. — Vol. 130, no. 6. — P. 067402.