ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО
Институт дополнительного профессионального образования

Кафедра естественно-математических дисциплин

ПРОСТЫЕ И СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

(направление – математика)

Выпускная квалификационная работа
слушателя группы 94.1,
ГНЕВАНОВА ВАСИЛИЯ ПАВЛОВИЧА

Научный руководитель,
д..физ.-мат.н,, профессор
ДУДОВ СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ

К защите допускается
Зав. кафедрой
д.физ.-мат.н, профессор
_______________ В.П. Рябухо
«____»__________ 2009 г.

САРАТОВ
2009

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Актуальность выбранной темы выпускной квалификационной работы (реферата) обусловлена широким применением количественных методов финансового анализа в сфере финансов и кредита на этапах разработки условий контрактов, при финансовом проектировании, при сравнении и выборе долгосрочных инвестиционных проектов, при расчетах в личном страховании и др.

Знание методов количественного анализа финансовых операций, которые используются в деятельности финансистов, бухгалтеров, экономистов, банкиров, необходимы при подготовке специалистов экономического профиля. Основные цели работы – изложить приемы финансовых расчетов на основе известных математических формул, в частности, - простых и сложных процентов; грамотное применение студентами в своей будущей практической деятельности категорий - наращенной суммы, дисконтирования, текущей стоимости, аннуитета и др.

Основная задача, решаемая в данной работе, – это представление учебного материала, относящегося к простым и сложным процентам, в его логической последовательности. Такая структура материала обеспечит более глубокое освоение студентами методов финансовых вычислений. Решение конкретных задач и анализ полученных результатов позволит студентам выработать навыки в принятии обоснованных экономических решений.

С экономической точки зрения метод сложных процентов является более обоснованным, так как он выражает возможность непрерывного реинвестирования (повторного вложения) денежных средств. Тем не менее, для краткосрочных (продолжительностью менее года) финансовых операций чаще всего используется метод простых процентов. Тому есть несколько причин:

1. Во-первых, и ещё несколько десятилетий назад это было достаточно актуально, расчёты с применением метода простых процентов намного проще, чем расчёты с применением метода сложных процентов.
2. Во-вторых, при небольших процентных ставках (в пределах 30%) и небольших промежутках времени (в пределах одного года) результаты, полученные с помощью метода простых процентов, довольно близки к результатам, полученным с применением метода сложных процентов (расхождение в пределах 1%).
3. В-третьих, задолженность, найденная с помощью метода простых процентов для промежутка времени меньше года, всегда *больше*, чем задолженность, найденная с применением метода сложных процентов. Так как правила игры всегда диктует кредитор, то понятно, что в таком случае он выберет первый метод.

Замечание: краткосрочные операции (продолжительностью менее года) составляют основную массу всех финансовых операций. Почему? Потому что долгосрочные кредиты, погашаемые по частям раз в месяц или раз в квартал (или даже раз в полугодие) — это не одна большая финансовая операция, а совокупность большого числа непродолжительных операций (длиною в месяц, квартал или полугодие). Именно поэтому в России для начисления процентов по любым кредитам используется метод простых процентов.

1. Простые проценты

1.1. Проценты, виды процентных ставок

Под процентными деньгами или ***процентами***, понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигации и т.д.

Под ***процентной ставкой*** понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени — отношение дохода (процентных денег) к сумме долга. Она измеряется в виде десятичной или обыкновенной дроби или в процентах. При выполнении расчетов процентные ставки обычно измеряются в десятичных дробях.

В финансовом анализе процентная ставка применяется как измеритель степени ***доходности*** (эффективности) любой финансовой, кредитной, инвестиционной или коммерческо-хозяйственной деятельности вне зависимости от того, имел место или нет факт непосредственного инвестирования денежных средств и процесс их наращения.

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют ***периодом начисления***. В качестве такого периода принимают год, полугодие, квартал, месяц или даже день. Чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками.

Проценты согласно договоренности между кредитором и заемщиком выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга (капитализация процентов). Процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов называют ***наращением***, или ***ростом***, этой суммы. В этом случае процентные ставки называют ***ставками наращения.***

При ***дисконтировании*** (сокращении) сумма денег, относящаяся к будущему, уменьшается на величину соответствующего ***дисконта*** (скидки). Соответственно говорят, что применяют ***дисконтные***, или ***учетные ставки***.

В финансовой литературе проценты, полученные по ставке наращения, принято называть ***декурсивными***, по учетной ставке — ***антисипативными***. Декурсивные проценты в большинстве случаев называют просто процентами.

Для начисления ***простых*** процентов применяют постоянную базу начисления. Когда за базу принимается сумма, полученная на предыдущем этапе наращения или дисконтирования, используют ***сложные процентные ставки.*** В этом случае база начисления последовательно изменяется, то есть проценты начисляются на проценты.

Процентные ставки могут быть ***фиксированными*** (в контракте указываются их размеры) или ***плавающими***. В последнем случае указывается не сама ставка, а изменяющаяся во времени база (базовая ставка) и размер надбавки к ней — ***маржи***. Размер маржи определяется рядом условий, финансовым положением заемщика, сроком кредита и т.д. Она может быть постоянной или переменной на протяжении срока ссудной операции.

При последовательном погашении задолженности возможны два способа начисления процентов. Согласно первому процентная ставка (простая или сложная) применяется к ***фактической сумме долга***. При втором способе, который применяется в потребительском кредите, простые проценты начисляются сразу на всю сумму долга без учета последовательного его погашения.

В практических расчетах применяют ***дискретные*** проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные интервалы времени (год, полугодие и т.д.). Если наращение или дисконтирование производится непрерывно, за бесконечно малые промежутки времени, применяют ***непрерывные*** проценты. Они используются в аналитических и теоретических финансовых расчетах.

1.2 Наращение по простым процентным ставкам

Под ***наращенной суммой*** ссуды (долга, депозита, других видов выданных в долг или инвестированных денег) понимают первоначальную ее сумму с начисленными процентами к концу срока начисления.

Обозначим:

I — проценты за весь срок ссуды;
P — первоначальная сумма долга;
S — наращенная сумма, т. е. сумма в конце срока;
i — ставка наращения процентов в виде десятичной дроби;
n — срок ссуды.

Начисленные за весь срок проценты составят

$$I = Pni.$$

Наращенная сумма представляет собой сумму первоначальной суммы и наращенных процентов:

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni). \qquad (1.1)$$

Выражение (1.1) называют ***формулой простых процентов***.

Выражение (1+ *ni)* называется ***множителем наращения простых процентов***, который показывает, во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной.

График роста по простым процентам представлен на рис. 1.

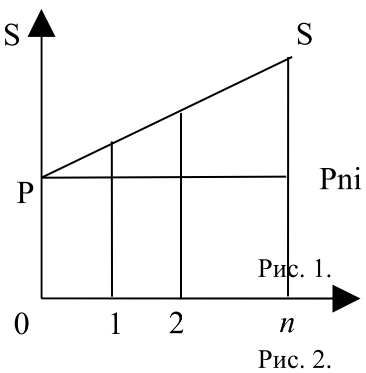

Рис. 1. График роста по простым процентам

ПРИМЕР 1.1. Определим проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 500 тыс.руб., срок 3 года, проценты простые по ставке 10% годовых (i = 0,1):

$$\boldsymbol{I} = 500 \times 5 \times 0{,}1 = 250 \textit{ тыс. руб.},$$
$$\mathbf{S} = 500 + 250 = 750 \textit{ тыс. руб.}$$

Рассмотрим случай, когда срок ссуды величина дробная. Срок n можно представить в виде дроби:

$$n = \frac{t}{K},$$

где t — число дней ссуды, K — число дней в году, или ***временная база начисления процентов***.

При расчете процентов применяют две временные базы.

Если K = 360 дней, то получают ***обыкновенные*** или ***коммерческие*** проценты, а при использовании действительной продолжительности года (365, 366 дней) рассчитывают ***точные проценты***.

Число дней ссуды берут ***приближенно*** и ***точно***.

При приближенном числе дней число дней в месяце берут равным 30 дням. Точное число дней ссуды определяется путем подсчета числа дней между датой выдачи ссуды и датой ее погашения. В соответствии с ГК РФ (п.1 ст. 839 Гражданского Кодекса РФ) дни открытия и закрытия вкладов не включаются в число дней, используемых для начисления процентов. Точное число дней между двумя датами можно подсчитать с помощью программы Microsoft Excel или по таблице дат (приложение 1).

На практике применяются три варианта расчета простых процентов.

1. ***Точные проценты с точным числом дней ссуды (***обозначается ***365/365*** или АСТ/АСТ). Применяется центральными банками и крупными коммерческими банками в Великобритании, США, дает самые точные результаты.

2. ***Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (365/360*** или АСТ/360). Этот метод, иногда называемый банковским, распространен в межстрановых ссудных операциях коммерческих банков, во внутристрановых — во Франции, Бельгии, Швейцарии. Дает несколько больший результат, чем применение точных процентов.

3. ***Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360)***. Такой метод принят в практике коммерческих банков Германии, Швеции, Дании. Применяется тогда, когда не требуется большой точности, например при промежуточных расчетах.

ПРИМЕР 1.2. Ссуда в размере 1 млн руб. выдана 02.02.03 до 15.11.03 включительно под 10% годовых. Какую сумму должен заплатить должник в конце срока при начислении простых процентов?

Определим число дней ссуды: точное — 285, приближенное — 282, исключая 02.02.03 и 15.11.03.

1. Точные проценты с точным числом дней ссуды (365/365):

$$S = 1\,000\,000(1 + \frac{285}{365} 0{,}1) = 1\,078082{,}19 \text{ } руб.$$

2. Обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды (360/365):

$$S = 1\,000\,000(1 + \frac{285}{360} 0{,}1) = 1\,079166{,}7 \, руб.$$

3. Обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды (360/360):

$$S = 1\,000\,000(1 + \frac{282}{360} 0{,}1) = 1078333{,}3 \, руб.$$

Если по вкладу проводились какие либо операции: снятие части средств или внесение дополнительной суммы, то проценты вычисляются несколько сложнее.

ПРИМЕР 1.3. Ссуда в размере 1 млн руб. выдана 02.02.03 до 15.11.03 включительно под 10% годовых. Однако вкладчик 25.05.03 снял со своего счета 500 тыс. руб., а 02.09.03 внес дополнительно 700 тыс. руб. Какой будет сумма вклада при закрытии счета, при условии начисления обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды?

В течение всего рассматриваемого периода основной вклад менял свою величину. В течение 03.02.-24.05.03 (110 дней) он составлял 1 млн руб., в течение 25.05.-01.09.03 (99 дней) он составлял 500 тыс.руб. и с 2.09 по 14.11.03 (73 дня) – 1200 тыс.руб.

Рассчитаем проценты двумя способами.

1. Найдем средневзвешенный остаток вклада

$$\frac{1\times 110+0{,}5\times 99+1{,}2\times 73}{285}=0{,}8670175\ \text{млн руб.}$$

Находим проценты за 285 дней с этой суммы:

$$I=8670175\times\frac{285}{365}0{,}1=67698{,}63\ \text{руб.}$$

2. Вычислим отдельно проценты за каждый из трех периодов и сложим их:

$$I=1\times\frac{110}{365}0{,}1+0{,}5\times\frac{99}{365}0{,}1+1{,}2\times\frac{73}{365}0{,}1=67698{,}63\ \text{руб.}$$

Как видно, получили один и тот же результат.

Наращенная сумма в этом случае составит:

$$S=1200000+67698{,}63=1267698{,}63\ \text{руб.}$$

В кредитных соглашениях иногда предусматриваются изменяющиеся во времени процентные ставки. Если это простые ставки, то наращенная на конец срока сумма определяется:

$$S=P(1+n_1i_1+n_2i_2+...+n_mi_m)=P(1+\sum_i n_ii_i),$$

где i_1 — ставка простых процентов в периоде t, n_1 — продолжительность периода с постоянной ставкой, $n=\sum_i n_i$.

ПРИМЕР 1.4. Контракт предусматривает начисление процентов в первый год 10%, в каждом последующем полугодии ставка повышается на 1%. Найти множитель наращения за 2 года.

$$1+\sum_i n_ii_i=1+1\times 0{,}1+0{,}5\times 0{,}11+0{,}5\times 0{,}12=1{,}215.$$

В практике при инвестировании средств в краткосрочные депозиты иногда прибегают к неоднократному последовательному повторению наращения по простым процентам в пределах заданного общего срока, то есть происходит ***реинвестирование*** средств, полученных на каждом этапе наращения, с помощью постоянной или переменной ставок. Наращенная сумма для всего срока составит

$$S = P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)...+(1+n_t i_t)..., \qquad (1.2)$$

где $i_1, i_2, ..., i_t$ — размер ставок, по которым производится реинвестирование.

Если промежуточные сроки начисления и ставки не изменяются во времени, то вместо (1.2) имеем

$$S = p(1+ni)^m,$$

где m — количество повторений реинвестирования.

ПРИМЕР 1.5. 1 млн руб. положен 1-го января на месячный депозит под 10% годовых. Какова наращенная сумма, если операция повторяется 3 раза?

Если начислять точные проценты (365/365), то

$$S = 1(1+\frac{31}{365}0{,}1)(1+\frac{28}{365}0{,}1)(1+\frac{31}{365}0{,}1) = 1{,}024856 \text{ \textit{млн руб.}}$$

Начисление обыкновенных процентов (360/360) при реинвестировании дает

$$S = 1(1+\frac{30}{360}0{,}1)^3 = 1{,}03375 \text{ \textit{млн руб.}}$$

1.3. Дисконтирование по простым процентным ставкам

В финансовой практике часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время n, необходимо определить сумму полученной ссуды P. Расчет P по S необходим и тогда, когда проценты с суммы S удерживаются вперед, т.е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В этих случаях говорят, что сумма S ***дисконтируется*** или ***учитывается***, сам процесс начисления процентов и их удержание называют ***учетом***, а удержанные проценты, т.е. разность $D = S - P$ — ***дисконтом*** или ***скидкой***. Необходимость дисконтирования возникает, например, при покупке векселей и других краткосрочных обязательств.

Дисконтирование можно рассматривать как определение любой стоимостной величины, относящейся к будущему, на более ранний момент времени.

Этот прием называют ***приведением*** стоимостного показателя к некоторому, обычно начальному, моменту времени.

Величину P, найденную с помощью дисконтирования, называют ***современной стоимостью***, или ***современной величиной*** будущего платежа S, а иногда — ***текущей***, или ***капитализированной***, ***стоимостью***.

В зависимости от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования — ***математическое дисконтирование*** и ***банковский (коммерческий) учет***. В первом случае применяется ставка наращения, во втором — учетная ставка.

Математическое дисконтирование представляет собой нахождение первоначальной суммы по наращенной. То есть из формулы

$$S = P(1+ni)$$

находим P

$$P = \frac{S}{1+ni}. \tag{1.3}$$

Установленная таким путем величина P является ***современной величиной*** суммы S, которая будет выплачена спустя n лет.

Дробь $\frac{1}{(1+ni)}$ называют ***дисконтным***, или ***дисконтирующим***, ***множителем***. Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная величина долга в окончательной его сумме.

ПРИМЕР 1.6. Через 180 дней после подписания договора должник уплатит 1 млн руб. Кредит выдан под 10% годовых. Какова первоначальная сумма долга при условии, что временная база равна 360 дням?

По формуле (1.3) находим

$$P = \frac{1}{1+0{,}5\times 0{,}1} = 0{,}952380 \text{ млн руб.}$$

Дисконт составляет $D=S-P=1-0{,}95238=0{,}047619$ млн руб.

При ***банковском учете*** банк или другое финансовое учреждение до наступления срока платежа по векселю или иному платежному обязательству приобретает его у владельца по цене, которая меньше суммы, указанной на векселе, т.е. покупает (учитывает) его с дисконтом. Получив при наступлении срока векселя деньги, банк реализует процентный доход в виде дисконта. Владелец векселя с помощью его учета имеет возможность получить деньги ранее указанного на нем срока.

Вексель - это ценная бумага, представляющая собой долговую расписку, выполненную в соответствии с требованиями законодательства, то есть на бланке, содержащем наименование, указание срока платежа, места, в котором должен быть совершен платеж, наименование того, кому платеж должен быть совершен, дата и место составления векселя, подпись векселедателя. Выделяют два основных вида векселя – простые и переводные.

Простой вексель – это документ, удостоверяющий безусловное денежное обязательство векселедателя уплатить по наступлению срока обязательства определенную сумму владельцу векселя.

Переводной вексель (тратта) – документ, который выписывается заемщиком (векселедателем) и представляет собой особый приказ непосредственному плательщику (обычно банку) об уплате в указанный срок суммы денег третьему лицу (векселедержателю).

При учете векселя применяется ***банковский***, или ***коммерческий***, учет. Согласно этому методу проценты за пользование ссудой в виде дисконта начисляются на сумму, подлежащую уплате в конце срока. При этом применяется ***учетная ставка*** d.

Размер дисконта, или суммы учета, равен Snd; если d — годовая учетная ставка, то n измеряется в годах. Таким образом,

$$P = S - Snd = S(1 - nd), \tag{1.4}$$

где n — срок от момента учета до даты погашения векселя.

Дисконтный множитель равен $(1 - nd)$.

Учет посредством учетной ставки чаще всего осуществляется при временной базе $K = 360$ дней, число дней ссуды обычно берется точным, ACT/360.

ПРИМЕР 1.7. Вексель выдан на сумму 1 млн руб. с уплатой 17.11.2003. Владелец векселя учел его в банке 23.09.2003 по учетной ставке 10% (ACT/360). Оставшийся до конца срока период равен 55 дням. Полученная при учете сумма (без уплаты комиссионных) равна

$$P = 1\left(1 - \frac{55}{360}0{,}1\right) = 984722{,}2 \ руб \, .$$

Дисконт составит 100000-984722,2=15277,8 руб.

1.4. Определение срока ссуды и величины процентной ставки

Необходимые для расчета продолжительности ссуды в годах и днях формулы получим из формул (1.1) и (1.4) относительно n.

Срок в годах:

$$n = \frac{S - P}{Pi} = \frac{S/P - 1}{i},$$

$$n = \frac{S - P}{Sd} = \frac{1 - P/S}{d}.$$

Срок в днях, учитывая, что $n = t/K$, где K — временная база):

$$t = \frac{S - P}{Pi}K, \qquad (1.5)$$

$$t = \frac{S - P}{Sd}K.$$

ПРИМЕР 1.8. Какова должна быть продолжительность ссуды в днях для того, чтобы долг, равный 10 тыс. руб., вырос до 15 тыс. руб. при условии, что начисляются простые проценты по ставке 10% годовых (ACT/ACT)? По формуле (1.5) находим

$$t = \frac{15 - 10}{10 \times 0{,}1}365 = 1825 \ дня = 5 \ лет..$$

Для определения финансовой эффективности операции и при сравнении контрактов по их доходности в случаях, когда процентные ставки в явном виде не указаны, применяем следующие формулы для сроков, измеренных в годах и днях:

$$i = \frac{S - P}{Pn} = \frac{S - P}{Pt}K, \qquad (1.6)$$

$$d = \frac{S - P}{Sn} = \frac{S - P}{St}K. \qquad (1.7)$$

ПРИМЕР 1.9. В контракте предусматривается погашение обязательства в сумме 100 тыс. руб. через 180 дней. Первоначальная сумма долга 80 тыс. руб. (АСТ/360). Определить доходность ссудной операции для кредитора в виде ставки процента и учетной ставки.

По формулам (1.6) и (1.7) находим

$$i = \frac{100 - 80}{80 \times 180} 360 = 0{,}5 \text{ или } 50\%,$$

$$d = \frac{100 - 80}{100 \times 180} 360 = 0{,}4 \text{ или } 40\%.$$

1.5. Наращение процентов в потребительском кредите

В потребительском кредите проценты, как правило, начисляются на всю сумму кредита и присоединяются к основному долгу уже в момент открытия кредита.

Погашение долга с процентами производится частями, обычно равными суммами на протяжении всего срока кредита.

Таким образом, наращенная сумма на весь срок равна

$$S = P(1 + ni),$$

величина разового погасительного платежа составит

$$R = \frac{S}{nm}, \tag{1.8}$$

где n — срок кредита в годах, m — число платежей в году.

В связи с тем, что проценты здесь начисляются на первоначальную сумму долга, а его фактическая величина систематически уменьшается во времени, действительная стоимость кредита заметно превышает договорную процентную ставку.

ПРИМЕР 1.10. Кредит для покупки товара на сумму 1млн руб. открыт на 4 года, процентная ставка — 10% годовых, выплаты в конце каждого месяца. Сумма долга с процентами

$$S = 1(1 + 4 \times 0{,}1) = 1{,}4 \text{ млн руб}.$$

Ежемесячные платежи:

$$R = \frac{1400}{4 \times 12} = 29{,}17 \text{ тыс. руб}.$$

1.6. Замена платежей

На практике возникают случаи, когда необходимо заменить одно денежное обязательство другим, например, с более отдаленным сроком платежа, объединить несколько платежей в один (консолидировать платежи) и т.п. Возникает вопрос о ***финансовой эквивалентности обязательств***.

Эквивалентными считаются такие платежи, которые, будучи приведенными к одному моменту времени, оказываются равными. То есть две суммы S_1 и S_2, выплачиваемые в разные моменты времени, считаются эквивалентными, если их современные (или наращенные) величины, рассчитанные по одной и той же процентной ставке и на один момент времени, одинаковы.

Допустим, сравниваются два платежа S_1 и S_2 со сроками n_1 и n_2, причем $S_1 < S_2$ и $n_1<n_2$. С ростом i размеры современных стоимостей P_1, P_2 уменьшаются. На основе равенства

$$\frac{S_1}{1+n_1 i_0} = \frac{S_2}{1+n_2 i_0}$$

находим

$$i_0 = \frac{1-\frac{S_1}{S_2}}{\frac{S_1}{S_2}n_2 - n_1}.$$

При ставке $i = i_0$ наблюдается равенство $P_1 = P_2$. Назовем ставку i_0, при которой достигается равенство первоначальных сумм, ***критической*** или ***барьерной***.

ПРИМЕР 1.11. Имеются два обязательства. Условия первого: выплатить 400 тыс. руб. через 4 месяца; условия второго: выплатить 450 тыс. рублей через 8 месяцев. Можно ли считать их равноценными?

Так как платежи краткосрочные, то при дисконтировании на начало срока применим простую ставку, равную, допустим, 20%. Получим

$$P_1 = \frac{400}{1+\frac{4}{12}0{,}2} = 375{,}00 \text{ } \textit{тыс. руб.},$$

$$P_2 = \frac{450}{1+\frac{8}{12}0{,}2} = 397{,}06 \text{ } \textit{тыс. руб.}$$

Как видим, сравниваемые обязательства не являются эквивалентными при заданной ставке и в силу этого не могут адекватно заменять друг друга.

Определим барьерную ставку:

$$i_0 = \frac{1 - \frac{400}{450}}{\frac{400}{450} \times \frac{8}{12} - \frac{4}{12}} = 0{,}428 \text{ или } 42{,}8\%$$

Таким образом, соотношение $P_1 < P_2$ справедливо при любом уровне процентной ставки, который меньше 42,8%.

Одним из распространенных случаев изменения условий контрактов является ***консолидация*** (объединение) платежей. Пусть платежи S_1, S_2, …, S_m со сроками $n_1, n_2, \ldots n_m$ заменяются одним S_0 и сроком n_0.

При применении простых процентных ставок сумму консолидированного платежа можно найти по формулам:

- $S_0 = \sum_j S_j(1 + t_j i), \quad при\ n_0 \geq n_1, n_2, \ldots, n_m$, где $t_j = n_0 - n_j$;
- $S_0 = \sum_j S_j(1 + t_j i) + \sum_k S_k(1 + t_k i)^{-1}, \qquad при\ n_1 \leq n_0 \leq n_m$,

где $t_j = n_0 - n_j$, $t_k = n_k - n_0$,

S_j – сумма объединяемых платежей со сроком n_j ($n_j \leq n_0$),

S_k – сумма объединяемых платежей со сроком n_k ($n_k \geq n_0$).

ПРИМЕР 1.12. Два платежа 1 и 0,5 млн руб. со сроками уплаты соответственно 150 и 180 дней объединяются в один со сроком 200 дней. Пусть стороны договорились на применение простой ставки, равной 20%. Консолидированная сумма долга составит

$$S_0 = 1000\left(1 + \frac{200 - 150}{365}0{,}2\right) + 500\left(1 + \frac{200 - 180}{365}0{,}2\right) = 1532{,}87 \text{ тыс. руб}.$$

1.7. Контур финансовой операции

Пусть выдана ссуда на срок T размере P. На протяжении этого срока в счет погашения задолженности производятся, допустим, два платежа R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается остаток задолженности в сумме R_3 На интервале t_1 задолженность возрастает, в силу начисления процентов, до величины P_1 . В конце этого периода выплачивается в счет погашения задолженности сумма R_1. Долг уменьшается до K_1 и т.д. Заканчивается операция получением кредитором в окончательный расчет суммы R_3. В этот момент задолженность должна быть равна нулю. Такой график называется ***контуром операции***.

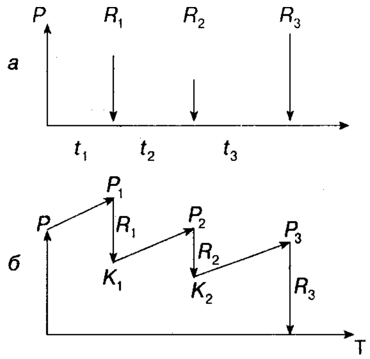

Рис. 2. Контур операции

Сбалансированная операция, при которой последняя выплата полностью покрывает остаток задолженности, обязательно имеет замкнутый контур (рис. 2).

2. Сложные проценты

2.1. Начисление сложных годовых процентов

Если проценты не выплачиваются сразу после их начисления, а присоединяются к сумме долга, применяют сложные проценты. Присоединение начисленных процентов к сумме базы начисления называют ***капитализацией процентов***.

Применим те же обозначения, что и в формуле наращения по простым процентам.

В конце первого года проценты равны величине Pi, а наращенная сумма составит $P + Pi = P(1 + i)$. К концу второго года она достигнет величины $P(1 + i) + P(1 + i)i = P(1 + i)^2$ и т.д. В конце n-го года наращенная сумма будет равна

$$S = P(1 + i)^n. \quad (2.1)$$

Проценты за этот срок:

$$I = S - P = P[(1 + i)^n - 1].$$

Величину $(1 + i)^n$ называют ***множителем наращения*** по сложным процентам. Значения этого множителя для целых чисел n приводятся в таблицах сложных процентов.

Время при наращении по сложной ставке обычно измеряется как ACT/ACT.

ПРИМЕР 2.1. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб. через 3 года при росте по сложной ставке 10% годовых?

По формуле (2.1) находим

$$S = 1\,(1 + 0{,}1)^3 = 1{,}331 \text{ млн руб.}$$

Если в контракте ставка процентов изменяется, то применяют формулу:

$$S = P(1 + i_1)^{n_1}(1 + i_2)^{n_2} \dots (1 + i_k)^{n_k},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ — последовательные значения ставок; $n_1, n_2, \dots, n_k$ - периоды для соответствующих ставок.

ПРИМЕР 2.2. Срок ссуды — 3 года, базовая процентная ставка — 10% годовых плюс маржа 1% в оставшиеся годы. Множитель наращения в этом случае составит

$$q = (1 + 0,1)^1\ (1 + 0,1)^2 = 1,4641.$$

Часто для начисления процентов срок не является целым числом.

Применяют три метода начисления процентов.

1. Наращенная сумма находится по формуле:

$$S = P(1+i)^{n_a}(1+i)^{n_b},$$

где n_a - целая часть периода начисления, n_b – дробная часть периода начисления.

2. Предполагает начисление процентов за целое число лет по формуле сложных процентов и за дробную часть срока по формуле простых процентов:

$$S = P(1+i)^{n_a}(1+n_b i)\ .$$

3. В правилах ряда коммерческих банков для некоторых операций проценты начисляются только за целое число лет или других периодов начисления. Дробная часть периода отбрасывается:

$$S = P(1+i)^{n_a}\ .$$

ПРИМЕР 2.3. Кредит в размере 1 млн руб. выдан на 2 года и 180 дней под 10% сложных годовых.

Найдем сумму долга на конец срока определим тремя методами:

1. $S = 1 \times 1,1^{2,5} = 1,269058706$ *млн руб.*

2. $S = 1 \times 1,1^2 \times (1 + 0,5 \times 0,1) = 1,2705$ *млн руб.*

3. $S = 1 \times 1,1^2 = 1,21$ *млн руб.*

Для того чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. При одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока. При $n > 1$ с увеличением срока различие в простых и сложных процентов увеличивается. Соотношение множителей наращения представлено на рис. 3.

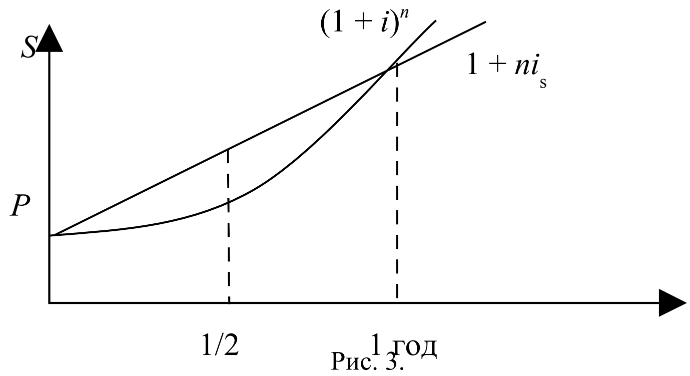

Рис. 3. Соотношение множителей наращения по простым и сложным процентам

2.2. Формулы удвоения

На основе формул для простых и сложных процентов

$$S = P + I = P + Pni = P(1 + ni),$$

$$S = P(1 + i)^n$$

получим следующие формулы удвоения:

- удвоение по простым процентам:

$$2 = 1 + ni \Rightarrow n = \frac{1}{i},$$

- удвоение по сложным процентам:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1+i)} = \frac{0{,}69315}{\ln(1+i)}.$$

В общем случае для увеличения первоначальной суммы в N раз:

- по простым процентам:

$$N = 1 + ni \Rightarrow n = \frac{N-1}{i},$$

- удвоение по сложным процентам:

$$N = (1+i)^n \Rightarrow n = \frac{\ln N}{\ln(1+i)}.$$

ПРИМЕР 2.4. Годовая ставка сложных процентов равна 8%. Через сколько лет начальная сумма удвоится?

Надо решить неравенство $(1+0{,}08)^n \geq 2$. Логарифмируем по основанию натуральных логарифмов и $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1{,}08)} = \frac{0{,}693}{0{,}076} \approx 9$.

Через 9 лет начальная сумма удвоится.

При работе со сложными процентами применяют ***правило 72***: если процентная ставка есть i, то удвоение капитала происходит примерно за 72/ i лет.

Например, при ставке в 12% удвоение капитала происходит через 6 лет.

2.3. Наращение процентов m раз в году. Номинальная и эффективная ставки

В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не один, а несколько раз в году — по полугодиям, кварталам и т.д. Некоторые зарубежные коммерческие банки практикуют даже ежедневное начисление процентов.

Пусть годовая ставка равна j, число периодов начисления в году — m. Каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Ставку j называют ***номинальной***. Формула наращения:

$$S = P(1 + \frac{j}{m})^{mn}, \tag{2.2}$$

где $N=nm$ — общее количество периодов начисления.

ПРИМЕР 2.5. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн руб. через 3 года при росте по сложной ставке 10% годовых, если проценты начисляются поквартально?

Период начисления n = 3 года, количество начислений процентов в течение года m = 4 . Наращенная сумма:

$$S = 1(1 + \frac{0{,}1}{4})^{12} = 1{,}344889 \, млн\ руб.$$

Действительная, или ***эффективная ставка процента*** — это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и m - разовое начисление процентов по ставке j/m. Она измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год.

Обозначим эффективную ставку через i. Множители наращения, рассчитанные по эффективной и номинальной ставкам, должны быть равны друг другу:

$$(1+i)^n = (1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Отсюда

$$i = (1+\frac{j}{m})^m - 1.$$

Эффективная ставка при $m > 1$ больше номинальной.

Определение номинальной ставки j по заданным значениям i и m:

$$j = m(\sqrt[m]{1+i} - 1).$$

2.4. Дисконтирование по сложной ставке

Определим первоначальную сумму по наращенной через математическое дисконтирование:

$$P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

и когда проценты начисляются m раз в году:

$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}.$$

ПРИМЕР 2.6. Сумма в 5 млн руб. выплачивается через 5 лет. Необходимо определить ее современную величину при условии, что применяется ставка сложных процентов, равная 12% годовых. Современная величина равна

$$P = \frac{5000}{(1+0{,}12)^5} = 2837{,}1 \text{ } руб,$$

т.е. первоначальная сумма сократилась почти на 44%.

При банковском учете применяют сложную учетную ставку. В этих случаях процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме, а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге во времени. Дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для должника, чем по простой учетной ставке:

$$P = S(1-d)^n,$$

где d — сложная годовая учетная ставка.

ПРИМЕР 2.7. Долговое обязательство на сумму 5 млн руб., срок оплаты которого наступает через 5 лет, продано с дисконтом по сложной учетной ставке 15% годовых. Каков размер полученной за долг суммы и величина дисконта (в тыс. руб.)?

Имеем

$$P= 5000(1 - 0,15)^5 = 2218,5; \quad D = 5000 - 2218,5 = 2781,5.$$

Если применить простую учетную ставку того же размера, то

$$P = 5000(1 - 5 \times 0,15) = 1250; D = 5000 - 1250 = 3750.$$

2.5. Номинальная и эффективная учетные ставки

Дисконтирование может производиться не один, а m раз в году, т.е. каждый раз учет производится по ставке f/m. В этом случае

$$P = S(1 - \frac{f}{m})^{mn},$$

где f — номинальная учетная ставка.

Эффективная учетная ставка (d) характеризует степень дисконтирования за год. Определим ее на основе равенства дисконтных множителей:

$$(1 - d)^n = \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mn},$$

откуда

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^m.$$

Эффективная учетная ставка во всех случаях, когда $m > 1$, меньше номинальной.

ПРИМЕР 2.8. По данным примера 2.6 определим сумму, полученную при поквартальном учете по номинальной учетной ставке 15%, и эффективную учетную ставку. Имеем $f = 0,15$; $m = 4$; $mn = 20$;

$$P = 5000\left(1 - \frac{0,15}{4}\right)^{20} = 2328,0 \text{ тыс. руб}.$$

Эффективная учетная ставка составит

$$d = 1 - \left(1 - \frac{0,15}{4}\right)^4 = 0,14177, \quad \text{или} \ 14,177\%.$$

2.6. Определение срока ссуды и размера процентной ставки

При наращении по сложной годовой ставке i и по номинальной ставке j на основе формул (2.1) и (2.2) имеем

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1+i)}, \qquad (2.3)$$

$$n = \frac{\log(S/P)}{m \cdot \log(1+\frac{j}{m})}. \qquad (2.4)$$

При дисконтировании по сложной годовой учетной ставке d и по номинальной учетной ставке f получим

$$n = \frac{\log(S/P)}{\log(1-d)},$$

$$n = \frac{\log(S/P)}{m \cdot \log(1-\frac{f}{m})}.$$

ПРИМЕР 2.9. За какой срок в годах сумма, равная 75 млн руб., достигнет 200 млн руб. при начислении процентов по сложной ставке 15% раз в году и поквартально?

По формулам (2.3) и (2.4) получим следующие сроки:

$$n = \frac{\log(200/75)}{\log 1{,}15} = 7{,}0178 \text{ года},$$

$$n = \frac{\log(200/75)}{4 \cdot \log(1+\frac{0{,}15}{4})} = 6{,}6607 \text{ года}.$$

При наращении по сложной годовой ставке процентов i и по номинальной ставке j получим эффективную и номинальную ставки:

$$i = \sqrt[n]{S/P} - 1, \qquad (2.5)$$

$$j = m(\sqrt[mn]{S/P} - 1).$$

При дисконтировании по сложным учетным ставкам

$$d = 1 - \sqrt[n]{P/S}), \qquad (2.6)$$

$$f = m(1 - \sqrt[mn]{P/S}).$$

ПРИМЕР 2.10. Сберегательный сертификат куплен за 100 тыс. руб., выкупная его сумма 160 тыс. руб., срок 2,5 года. Каков уровень доходности инвестиций в виде годовой ставки сложных процентов? По формуле (2.5) находим

$$i = \sqrt[2,5]{1,6/1} - 1 = 0,20684.$$

ПРИМЕР 2.11. Срок до погашения векселя равен 2 годам. Дисконт при его учете составил 30%. Какой сложной годовой учетной ставке соответствует этот дисконт?

Применим формулу (2.6). По данным задачи P/S=0,7, откуда

$$d = 1 - \sqrt{0,7} = 0,16334.$$

2.7. Конверсия валюты и наращение процентов

При возможности обмена рублевых средств на СКВ и обратной конверсии целесообразно сравнить доходы от непосредственного размещения имеющихся денежных средств в депозиты и через другую валюту. Возможны четыре варианта для наращения процентов с конверсией денежных ресурсов и без нее:

- без конверсии: **СКВ → СКВ**;
- с конверсией: **СКВ → Руб → Руб → СКВ**;
- без конверсии: **Руб → Руб**;
- с конверсией: **Руб → СКВ → СКВ → Руб**.

Обозначим:

P_v — сумма депозита в СКВ,
P_r — сумма депозита в рублях,
S_v — наращенная сумма в СКВ,
S_r — наращенная сумма в рублях,
K_0 — курс обмена в начале операции (курс СКВ в рублях),
K_1 — курс обмена в конце операции,
n — срок депозита,
i — ставка наращения для рублевых сумм,
j — ставка наращения для конкретного вида СКВ.

Вариант СКВ → Руб → Руб → СКВ.

Операция предполагает обмен валюты на рубли, наращение процентов на эту сумму и конвертирование в исходную валюту. Конечная (наращенная) сумма в валюте определяется как

$$S_v = P_v K_0 (1 + ni) \frac{1}{K_1}.$$

Множитель наращения m с учетом двойного конвертирования здесь имеет вид

$$m = K_0(1+ni)\frac{1}{K_1} = \frac{K_0}{K_1}(1+ni) = \frac{1+ni}{K_1/K_0}$$

ПРИМЕР 2.12. Предполагается поместить 1000 долл. на рублевом депозите. Курс продажи на начало срока депозита 30,12 руб. за $1, курс покупки доллара в конце операции 31,1 руб. Процентные ставки: на рублевом депозите i = 20%; на валютном j = 6% (360/360). Срок депозита — 1 квартал.

$$S_v = 1000 \times \frac{30{,}12}{31{,}1}(1+\frac{3}{12}\times 0{,}2) = 1016{,}91\,\textit{долл}.$$

В свою очередь прямое наращение исходной долларовой суммы по долларовой ставке процента дает

$$S_v = 1000(1+0{,}25\times 0{,}06) = 1015\,\textit{долл}.$$

Для определения доходности операции в целом примем простую годовую ставку процента $i_э$. Эта ставка характеризует рост суммы P_v до величины S_v:

$$i_э = \frac{S_v - P_v}{P_v n}.$$

Или:

$$i_э = \left[\frac{K_0}{K_1}(1+ni) - 1\right]/n = \frac{m-1}{n}.$$

Величину, характеризующую отношение последнего и первого курсов валюты, обозначим:

$$k = \frac{K_0}{K_1}.$$

С увеличением k эффективность операции падает. При $k = 1$ параметр $i_э = i$, при $k > 1$ параметр $i_э < i$, наконец, при самой благоприятной для владельца денег ситуации $k < 1$ имеем $i_э > i$.

Вариант Руб - СКВ - СКВ - Руб.

Наращенная сумма будет иметь вид:

$$S_r = \frac{P_r}{K_0}(1 - nj)K_1 = P_r(1+nj)\frac{K_1}{K_0}.$$

ПРИМЕР 2.13. Продолжим пример 2.12. Допустим, необходимо поместить на валютном депозите сумму в рублях (1 млн руб.). Наращенная сумма в рублях к концу срока составит:

$$S_r = 1000 \times (1 + 0{,}25 \times 0{,}06)\frac{31{,}1}{30{,}12} = 1048{,}02 \text{ \textit{тыс. руб}} .$$

Прямое инвестирование в рублевый депозит дает больше:

$$S_r = 1000 \times (1 + 0{,}25 \times 0{,}2) = 1050 \text{ \textit{тыс. руб}} .$$

Доходность операции определяется как

$$i_э = \frac{S_v - P_v}{P_v n} .$$

$$i_э = \left[\frac{K_1}{K_0}(1 + nj) - 1\right] / n = (k(1 + nj) - 1) / n .$$

Зависимость показателя эффективности от k, как видим, линейная. При $k = 1$ $i_э = j$, при $k > 1$ параметр $i_э > j$, наконец, при $k < 1$ параметр $i_э < j$.

Заключение

Сложные проценты, **реинвестирование** или **капитализация** — это очень важные явления в банковских финансах. В долгосрочном периоде, депозит со сложным начислением процентов может показать невиданное ускорение роста капитала, при этом сохраняя риск потерь на относительно низком уровне. *Сложные проценты могут превратить ваш сравнительно небольшой вклад в машину, которая зарабатывает вам приличный капитал.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухвалов А., Бухвалова В., Идельсон А. Финансовые вычисления для профессионалов. СПб.: БХВ-Петербург, 2001. –320 с.
2. Ершов Ю.С. Финансовая математика, ООО «Бизнес ПРАКТИКА», Новосибирск, 2002- 212с.
3. Малюгин В.И. Рынок ценных бумаг: Количественные методы анализа. Мн.: БГУ, 2001. – 318 с.
4. Малыхин В.И. Финансовая математика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 247 с.
5. Просветов Г.И. Финансовый менеджмент: задачи и решения. М: Альфа-Пресс, 2007 – 340 с.
6. Четыркин Е.М. Финансовая математика. М.: Дело, 2002. – 400 с.
7. Ширяев А.Н. Основы стохастической и финансовой математики. Т.1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998 - 489 с.