САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

Введение в вычислительную математику

Учебное пособие для студентов механико-математического факультета

О.В. Сорокина, Я.А. Парфёнова

САРАТОВ 2011

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Современная математика достигла больших успехов. Однако до последнего времени ее усилия были направлены на создание строгой логической базы для выработанных ранее методов, расширение множества объектов, к которым эти методы применимы, изучение качественной природы математических объектов. Гораздо меньше внимания уделялось разработке методов доведения математических исследований до численного результата, а это является интересной, трудной и чрезвычайно важной для практики задачей.

В самых разнообразных областях современной науки и техники все чаще приходится встречаться с математическими задачами, для которых невозможно получить точное решение классическими методами. Кроме того решение может быть получено в таком сложном виде, который неприемлем для практического использования (задача решения систем линейных алгебраических уравнений с сотнями неизвестных, отыскание корней алгебраических уравнений высоких степеней и т.п.).

Количество задач такого рода особенно сильно возросло с развитием вычислительной техники. Вычислительные машины дали возможность запоминать большие (но конечные) массивы чисел и производить над ними арифметические операции и сравнения с большой (но конечной) скоростью по заданной вычислительной программе. Поэтому в последнее время начала складываться новая область математики.

<u>Определение .</u> Область математики, которая призвана разрабатывать методы доведения основных задач математического анализа, алгебры, геометрии до числового результата и пути использования для этих целей современных вычислительных средств называется **вычислительной математикой.**

Любые математические приложения начинаются с построения модели явления (изделия, действия, ситуации или другого объекта), к которому относится изучаемый вопрос. В традиционных областях математическими моделями служат функции, производные, интегралы, различные уравнения, неравенства. Для использования компьютеров эти исходные модели надо приближенно заменить такими, которые описываются конечными наборами чисел с указанием конечных последовательностей действий для их обработки. Например, функцию заменить таблицей, производную – приближенной формулой, определенный интеграл – суммой. Теория таких моделей и алгоритмов составляет **предмет вычислительной математики**.

В истории вычислительной математики можно выделить три основных периода.

I. 3-4 тыс. лет назад. Этот период связан с ведением конторских книг, вычислением площадей, объемов, расчетов простейших механизмов. Вычислительными средствами служили сначала собственные пальцы, а потом счеты. Исходные данные содержали мало цифр, вычисления проводились точно.

II. Начался с Ньютона. В этот период решались задачи астрономии, геодезии, расчета механических конструкций, сводящиеся либо к обыкновенным дифференциальным уравнениям, либо к системам алгебраических уравнений с большим числом неизвестных. Вычисления проводились с округлениями, нередко от результата требовалась высокая точность. Стали разнообразнее вычислительные средства: таблицы элементарных функций, арифмометр и логарифмическая линейка. Затем появились клавишные вычислительные машины с мотором.

III. Начался примерно с 1940 года. Военные задачи требовали недоступных человеку скоростей и привели к разработке электронных систем. Появились электронные вычислительные машины.

1. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

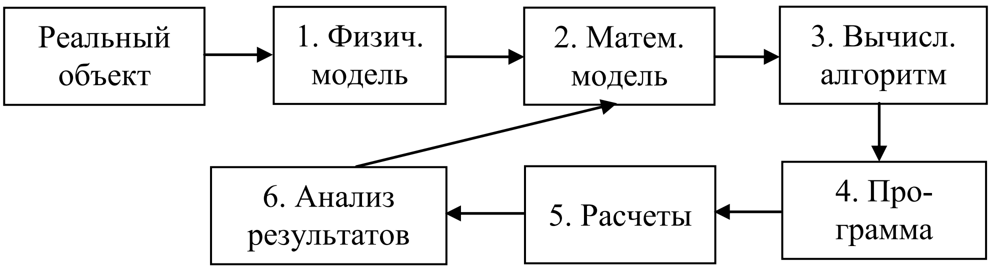
Вычислительный эксперимент, т.е. расчет в целях проверки гипотез, а также в целях наблюдения за поведением модели, когда заранее неизвестно, что именно заинтересует исследователя, стал возможен только с развитием вычислительной техники. В процессе численного эксперимента происходит, по существу, уточнение исходной постановки задачи.

Определение 1.1. **Вычислительный эксперимент –** это исследование естественнонаучных проблем средствами вычислительной математики.

Вычислительные эксперименты с моделями объектов позволяют, опираясь на мощь современных вычислительных методов и технических инструментов информатики, подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте, недоступной чисто теоретическим подходам.

Вычислительный эксперимент – это основной метод вычислительной математики.

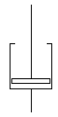
Схема вычислительного эксперимента



Описание вычислительного эксперимента

Исследование проблемы методом вычислительного эксперимента проводится в несколько этапов. Пусть требуется изучить некоторый физический процесс (объект, явление).

1. Вначале выбирается физическое приближение или **физическая модель** рассматриваемого процесса, решается вопрос о том, какие факторы надо учесть, а какими можно пренебречь.

Пример.  – модель идеально упругого тела;  – модель вязкой жидкости.

2. Далее физической модели ставится в соответствие **математическая модель,** т.е. математическое описание физического процесса с помощью алгебраических, дифференциальных, интегральных и др. уравнений или неравенств. [$\sigma = E\varepsilon$; $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$ представляют модель идеально упругого тела и модель вязкой жидкости, соответственно]. Эти уравнения обычно выражают законы сохранения основных физических величин или связь между некоторыми величинами. Полученную математическую модель необходимо исследовать методами математической физики. Надо установить, правильно ли поставлена задача, хватает ли исходных данных, не противоречат ли они друг другу, существует ли решение поставленной задачи, единственно ли оно. На этом этапе используются методы классической математики.
3. Следующий этап вычислительный эксперимента состоит в построении приближенного численного метода решения задачи, т.е. выборе **вычислительного алгоритма**.

Определение 1.2**. Вычислительный алгоритм** – это последовательность арифметических и логических операций, при помощи которых находится приближенное численное решение математической задачи.

4. На четвертом этапе осуществляется **программирование** вычислительного алгоритма для ЭВМ.
5. На пятом этапе проводятся *расчеты* на ЭВМ.
6. Шестой этап вычислительного эксперимента заключается в **анализе полученных численных результатов** и последующем **уточнении математической модели**. Может оказаться, что модель слишком груба – результат вычислений не согласуется с физическим экспериментом, или что модель слишком сложна, и решение с достаточной точностью можно получить при

более простых моделях. Тогда следует начать работу со второго этапа, т.е. уточнить математическую модель и снова пройти все этапы.

Технические, экологические, экономические и другие системы, изучаемые современной наукой, плохо поддаются исследованию обычными теоретическими методами. Прямой натурный эксперимент над ними долог, дорог, часто либо опасен, либо попросту невозможен, так как многие из этих систем существуют в ”единственном экземпляре”. Цена ошибок и просчётов в обращении с ними недопустимо высока. Поэтому вычислительный эксперимент является неизбежной составляющей научно-технического прогресса.

2. ИСТОЧНИКИ И КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

2.1 Источники погрешностей

При решении задачи на ЭВМ всегда получается не точное решение исходной задачи, а некоторое приближенное решение.

Можно выделить три основные причины возникновения погрешностей при численном решении исходной математической задачи и, как их следствие, три вида погрешностей.

1) Неточное описание математической задачи, в частности, неточное задание исходных данных описания (начальных условий, граничных условий, коэффициентов, правых частей уравнений). Погрешность в этом случае называется **неустранимой.**

Пример. Пусть указано, что величина напряжения составляет 6,4837569 *в*. Можно с уверенностью сказать, что по меньшей мере несколько младших цифр недостоверны, потому что невозможно измерить напряжение с такой точностью.

2) Применяемый для решения метод часто не является точным: получение точного решения математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций, поэтому вместо точного решения задачи приходится прибегать к приближенному. Возникает **погрешность метода.**

Пример. Общеизвестный ряд Тейлора для синуса

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

может использоваться для вычисления синуса любого угла x, выраженного в радианах. Однако невозможно использовать все члены ряда для вычислений, так как ряд бесконечен. Отброшенные члены ряда внесут некоторую ошибку в результат вычислений.

3) Так как вычислительные машины всегда работают с конечным количеством значащих цифр, то при выполнении арифметических

операций и при выводе данных производятся округления. Как следствие, возникает **погрешность округления.** Вопросы округления относятся только к действительным числам. При выполнении операций с целыми числами потребность в округлении не возникает.

Введем формальное определение.

Пусть: I – точное решение,

$\tilde{I}$ – решение, соответствующее математической модели,

$\tilde{I}_R$ – решение численным методом в предположении отсутствия округления,

$\tilde{I}_R^*$ – приближенное решение при реальных вычислениях.

Тогда: $\rho_1 = \tilde{I} - I$ – неустранимая погрешность,

$\rho_2 = \tilde{I}_R - \tilde{I}$ – погрешность метода,

$\rho_3 = \tilde{I}_R^* - \tilde{I}_R$ – вычислительная погрешность,

$\rho = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \tilde{I}_R^* - I$ – полная погрешность.

Очевидно, $|\rho| \le |\rho_1| + |\rho_2| + |\rho_3|$.

2.2 Абсолютная и относительная погрешности приближенных чисел

Пусть a – точное значение некоторой величины, а $\bar{a}$ – известное приближенное числовое значение этой величины.

Определение 2.1. Число $\Delta_a = |a - \bar{a}|$ называют **абсолютной погрешностью** приближенного числа $\bar{a}$, а величину $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|\bar{a}|}$ – его **относительной погрешностью**.

Последнее равенство можно записать в форме $\Delta_a = |\bar{a}|\delta$.

Пример. Пусть $a = 20{,}25$ и $\bar{a} = 20$, тогда $\Delta_a = 0{,}25$, а $\delta_a = \dfrac{0{,}25}{20} = 0{,}0125$.

Относительная погрешность обычно выражается в процентах.

На практике, как правило, точное значение величины неизвестно. Поэтому вместо теоретических понятий абсолютной и относительной погрешностей используют практические понятия предельной абсолютной и предельной относительной погрешностей.

Определение 2.2. Под **предельной абсолютной погрешностью** Δ_a^* приближенного числа $\bar{a}$ понимается всякое число, не меньшее абсолютной погрешности этого числа, т.е. $\Delta_a \le \Delta_a^*$.

На практике в качестве предельной абсолютной погрешности выбирают наименьшее из чисел Δ_a^*, удовлетворяющих последнему неравенству. Тогда для точного значения величины имеем оценку вида

$$\bar{a} - \Delta_a^* \le a \le \bar{a} + \Delta_a^*. \qquad (1.1)$$

Границы, в которых изменяется абсолютная погрешность, определяются на оновании способа получения приближенного числа.

Неравенство (1.1) часто записывают в другой форме

$$a = \bar{a} \pm \Delta_a^* = \bar{a}(1 \pm \delta_a^*). \qquad (1.2)$$

Пример. Оценить предельную абсолютную погрешность приближенного значения $\bar{a} = 2{,}75$ числа $e = 2{,}718281828...$

Решение. Очевидно, $\Delta_e = |e - \bar{a}| < 0{,}01$. Следовательно, $2{,}75 - 0{,}01 \le e \le 2{,}75 + 0{,}01$, т.е. $2{,}74 \le e \le 2{,}76$.

Определение 2.3. Под **предельной относительной погрешностью** приближенного числа δ_a^* понимается всякое число, не меньшее относительной погрешности этого числа, т.е. $\delta_a \le \delta_a^*$.

Так как $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|\bar{a}|} \le \dfrac{\Delta_a^*}{|\bar{a}|}$, то можно считать, что предельные абсолютная и относительная погрешности связаны отношением

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|\bar{a}|}, \quad \text{или} \quad \Delta_a^* = |\bar{a}|\delta_a^*. \qquad (1.3)$$

Пример. Пусть длина бруска измерена сантиметровой линейкой и получено приближенное значение $\bar{a} = 251$ см. Найти предельную относительную погрешность числа.

Решение. Так как сантиметровая линейка не содержит делений меньше сантиметра, то $\Delta^* = 1$ см, а точное значение будет находиться в диапазоне $250 \le a \le 252$. Для относительной погрешности справедливо неравенство

$$\delta_a^* = \frac{\Delta_a^*}{|\bar{a}|} = \frac{1}{251} < 0{,}004 .$$

Следовательно, $\delta_a^* = 0{,}004$.

Относительную погрешность иногда задают в процентах.

Пример. Определить предельную относительную погрешности значения $a = 125 \pm 5\%$.

Решение. Здесь $\delta_a^* = 5\% = 0{,}04$ и $\Delta_a^* = 0{,}05 \cdot 125 = 6{,}25$

2.3 Правила записи приближенных чисел

Определение 2.4. **Значащими цифрами** в записи приближенного числа называются первая слева, отличная от нуля цифра и все расположенные от нее справа цифры.

Пример. В следующих числах подчеркнуты значащие цифры:

$0{,}000\underline{3045}$ – 4 значащих цифры; $\underline{37{,}005007}$ – все цифры значащие; $0{,}0\underline{3045000}$ – 7 значащих цифр.

Определение 2.2. Значащую цифру называют **верной в узком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит половины единицы разряда, соответствующего этой цифры.

Определение 2.5. Значащую цифру называют **верной в широком смысле**, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифры.

Пример. Приближенные числа $\bar{a} = 0{,}0\underline{3045}$, $\bar{a} = 0{,}0\underline{3045000}$, различны. Для первого числа можно утверждать, что его абсолютная погрешность не превосходит 0,00001, а для второго – 0,000000001.

Если приближенное число записывается без указания его предельной абсолютной погрешности, то выписываются только верные цифры числа. При этом верные нули на правом конце не отбрасываются.

Пример. $\bar{a} = 0{,}0\underline{3045}$, $\bar{a} = 0{,}0\underline{3045000}$, –подчеркнутые цифры являются верными.

Рассмотренные числа могут быть записаны в нормализованном виде:

$$\bar{a} = 0{,}3045 \cdot 10^{-1} \ ; \ \bar{a} = 0{,}304500 \cdot 10^{-1} \ .$$

Часто употребляется запись вида (1.2). При этом величина Δ_a^* выписывается с одной или двумя значащими цифрами, а младший разряд в $\bar{a}$ должен соответствовать младшему разряду Δ^*.

Пример. $a = 2{,}730 \pm 0{,}017$ – верная запись,

$a = 2{,}73018 \pm 0{,}017$ или $a = 2{,}73018 \pm 0{,}01592$ неверные записи.

Можно говорить о числе верных значащих цифр и о числе верных цифр после запятой.

Пример. $\bar{a} = 25{,}030$ – 5 верных значащих цифр, 3 верные цифры после запятой;

$\bar{a} = 0{,}00404$ – 3 верные значащие цифры, 5 верных цифр после запятой.

Относительная погрешность приближенного числа связана с количеством его верных знаков.

Определение 2.6. **Количество верных знаков числа** отсчитывается от первой значащей цифры числа до первой значащей цифры его абсолютной погрешности.

Пример. Если $\bar{a} = 20{,}7426$, а $\Delta_a^* = 0{,}092$, то количество верных знаков равно 3 (2, 0, 7), остальные знаки сомнительные.

Теорема 2.1. Если положительное приближенное число $\bar{a}$ имеет n верных значащих цифр, то его относительная погрешность δ_a не превосходит величины 10^{1-n}, деленной на первую значащую цифру α_1:

$$\delta_a \le \frac{10^{1-n}}{\alpha_1}. \tag{2.1}$$

Тогда для предельной относительной погрешности справедливо равенство

$$\delta_a^* = \frac{10^{1-n}}{\alpha_1}.$$

Пример. Найти относительную и абсолютную погрешности приближенного числа $\bar{a} = 3{,}142$.

Решение. Здесь $n = 4,\quad \alpha_1 = 3$. Тогда $\delta_a^* = \frac{10^{1-n}}{\alpha_1} = \frac{0{,}001}{3} \approx 0{,}00033 = 0{,}033\%$. Определим абсолютную погрешность $\Delta_a^* = |\bar{a}|\delta_a^* = 3{,}142 \cdot 0{,}00033 \approx 0{,}001$.

Ориентировочно можно считать, что наличие только одного верного знака соответствует относительной погрешности порядка 10%, двух верных знаков – погрешности порядка 1%, трех верных знаков погрешности порядка 0,1%.

2.4 Правило округления чисел

Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все цифры, стоящие справа от n-ой значащей цифры, при этом:

1) если первая отброшенная цифра меньше 5, то оставшиеся десятичные цифры оставляют без изменения;

2) если первая отброшенная цифра больше 5, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

3) если первая отброшенная цифра равна 5 и среди остальных отброшенных цифр есть ненулевые, то к последней оставшейся цифре прибавляют единицу;

4) если первая отброшенная цифра равна 5 и все отброшенные цифры являются нулями, то последняя оставшаяся цифра остается неизменной, если она четная и увеличивается на единицу, если нет.

Это правило гарантирует, что сохраненные значащие цифры числа являются верными в узком смысле, т. е. погрешность округления не превосходит половины разряда, соответствующего последней оставленной значащей цифре.

В математических таблицах все числа округлены до верных знаков в узком смысле, т.е. абсолютная погрешность не превосходит половины единицы последнего оставленного разряда.

Пример. В таблице указано число $\bar{e} = 2{,}718$. Тогда абсолютная погрешность

$\Delta_e \le 0{,}5 \cdot 10^{-3}$.

2.5 Погрешности арифметических операций

Одним из наиболее важных вопросов в численном анализе является вопрос о том, как ошибка, возникающая в определенном месте в ходе вычислений, распространяется дальше, т.е. становится ли ее влияние больше или меньше по мере того, как производятся последующие операции. Крайним случаем является вычитание двух почти равных чисел.

При вычислении погрешности результата различных арифметических операций над приближенными числами справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.2. Абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел $\bar{u} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \ldots + \bar{x}_n$ не превосходит суммы абсолютных погрешностей этих чисел:

$$\Delta_u \le \Delta_{x_1} + \Delta_{x_2} + \ldots + \Delta_{x_n}. \qquad (2.2)$$

<u>Следствие.</u> Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\Delta_u^* = \Delta_{x_1}^* + \Delta_{x_2}^* + \ldots + \Delta_{x_n}^*.$$

Отсюда следует, что предельная абсолютная погрешность суммы не может быть меньше предельной абсолютной погрешности наименее точного слагаемого, т. е. сохранять лишние значащие цифры в более точных не имеет смысла.

Пример. Найти сумму приближенных чисел, все цифры которых являются верными в широком смысле, и ее абсолютную и относительную погрешности $\bar{u} = 0{,}259 + 45{,}12 + 1{,}0012.$

Решение. Предельные абсолютные погрешности слагаемых соответственно равны:

0,001; 0,01; 0,0001.

Суммирование производим, руководствуясь следующим правилом:

1) выделим наименее точные слагаемые (второе) и оставим их без изменения;

2) остальные числа округлим по образцу выделенных, оставляя один или два запасных знака;

3) сложим все числа, учитывая все сохраненные знаки;

4) полученный результат округлим до точности наименее точных слагаемых.

Имеем $\Delta_u^* = 0{,}001 + 0{,}01 + 0{,}0001 = 0{,}0111.$

$\bar{u} = 0{,}259 + 45{,}12 + 1{,}0012 \approx 0{,}26 + 45{,}12 + 1{,}00 = 46{,}38 \pm 0{,}01.$

Теорема 2.3. Если все слагаемые в сумме имеют один и тот же знак, то предельная относительная погрешность суммы $\bar{u} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + ... + \bar{x}_n$ не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых

$$\delta_u^* \le \max(\delta_{x_1}^* + \delta_{x_2}^* + ... + \delta_{x_n}^*). \qquad (2.3)$$

При вычислении разности двух приближенных чисел $\bar{u} = \bar{x} - \bar{y}$, $\Delta_u^* = \Delta_x^* + \Delta_y^*$, а $\delta_u^* = \dfrac{\Delta_x^* + \Delta_y^*}{|\bar{x} - \bar{y}|}$. Отсюда следует, что при вычитании близких чисел, предельная относительная погрешность результата будет большой. В этом случае необходимо преобразовать исходное выражение так, чтобы разность была исключена.

Пример. Даны числа $\bar{a} = 1{,}137$ и $\bar{b} = 1{,}073$ с абсолютными погрешностями $\Delta_a = \Delta_b = 0{,}011$. Оценить погрешность их разности $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$.

Решение. $\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = 0{,}064$, $\Delta_c = \Delta_a + \Delta_b = 0{,}022$, $\delta_c = \dfrac{0{,}022}{0{,}064} \cdot 100\% = 35\%$.

Таким образом, в результате нет ни одного верного знака, хотя сами числа имеют относительные погрешности $\delta_a \approx \delta_b \approx 1\%$.

Теорема 2.4. Относительная погрешность произведения нескольких не равных нулю приближенных чисел $\bar{u} = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{x}_n$ не превосходит суммы относительных погрешностей этих чисел:

$$\delta_u \le \delta_{x_1} + \delta_{x_2} + \ldots + \delta_{x_n}. \tag{2.4}$$

<u>Следствие:</u> Предельная относительная погрешность произведения равна сумме предельных относительных погрешностей сомножителей:

$$\delta_u^* = \delta_{x_1}^* + \delta_{x_2}^* + \ldots + \delta_{x_n}^*.$$

Пример. Найти произведение $\bar{c}$ приближенных чисел $\bar{a} = 12{,}45$ и $\bar{b} = 2{,}13$ и число верных знаков в нем, если все написанные цифры сомножителей верные в узком смысле.

Решение. По условию все предельные абсолютные погрешности сомножителей равны $\Delta_a = \Delta_b = 0{,}005$, $\delta_a = \dfrac{0{,}005}{12{,}45} = 0{,}0004$; $\delta_b = \dfrac{0{,}005}{2{,}13} = 0{,}0023$.

Тогда имеем $\delta_c = \delta_a + \delta_b = 0{,}0004 + 0{,}0023 = 0{,}0027 \approx 0{,}003$. Вычислим произведение $\bar{c} = 12{,}45 \cdot 2{,}13 = 26{,}5185$. $\Delta_c = 26{,}5185 \cdot 0{,}03 \approx 0{,}079 \approx 0{,}08$.

Таким образом, результат имеет только три верных значащих цифры в широком смысле и может быть записан в виде

$$\bar{c} = 26{,}5 \cdot (1 \pm 0{,}003).$$

Теорема 2.5. Относительная погрешность частного приближенных чисел $\bar{u} = \dfrac{\bar{x}}{\bar{y}}$ не превышает суммы относительных погрешностей делимого и делителя:

$$\delta_u \le \delta_x + \delta_y . \qquad (2.5)$$

<u>Следствие:</u> Предельная относительная погрешность частного равна сумме предельных относительных погрешностей делимого и делителя:

$$\delta_u^* = \delta_x^* + \delta_y^* .$$

Теорема 2.6. Предельная относительная погрешность m-ной степени приближенного числа в m раз больше предельной относительной погрешности самого числа:

$$\bar{u} = \bar{x}^m, \quad \delta_u^* = m\delta_x^* .$$

Теорема 2.7. Предельная относительная погрешность корня m-ной степени в m раз меньше предельной относительной погрешности подкоренного числа:

$$\bar{u} = \sqrt[m]{\bar{x}}, \quad \delta_u^* = \frac{\delta_x^*}{m} .$$

2.6 Погрешности вычисления значений функции

Пусть задана произвольная функция $\bar{u} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n$ – приближенные значения аргументов, а $\Delta_{x_1}^*, \Delta_{x_2}^*, ..., \Delta_{x_n}^*$ –их известные предельные абсолютные погрешности. Если функция дифференцируема по всем переменным, тогда предельная абсолютная погрешность функции для малых $\Delta_{x_i}^*$ вычисляется по формуле

$$\Delta_u^* = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta_{x_i}^* . \qquad (2.6)$$

Если значения функции положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta^*_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i} \right| \Delta^*_{x_i} \ . \tag{2.7}$$

Абсолютная погрешность дифференцируемой функции одного переменного $y = f(x)$, вызываемая достаточно малой погрешностью аргумента Δ^*_x, оценивается величиной

$$\Delta^*_y = \left| \frac{df}{dx} \right| \Delta^*_x \tag{2.8}$$

Если значения функции $f(x)$ положительны, то для относительной погрешности имеет место оценка

$$\delta_y = \frac{|f'(x)|}{f(x)} \Delta^*_x = \left| [\ln f(x)]' \right| \Delta^*_x . \tag{2.9}$$

Пример. Найти абсолютную и относительную погрешности степенной функции $y = x^a$.

Решение. Абсолютная погрешность степенной функции равна

$$\Delta^*_y = a x^{a-1} \Delta^*_x .$$

Относительная погрешность степенной функции равна

$$\delta_y = |a| \Delta^*_x .$$

Например, относительная погрешность квадрата $y = x^2$ вдвое больше относительной погрешности основания x, относительная погрешность квадратного корня $y = \sqrt{x}$ вдвое меньше относительной погрешности подкоренного числа x, относительная погрешность обратной величины $y = 1/x$ равна относительной погрешности самого числа x.

Пример. Вычислить значение функции $u = xy^2z^3$, если x=37,1, y=9,87, z=6,052, причём $\Delta^*_x = 0{,}3$, $\Delta^*_y = 0{,}11$, $\Delta^*_z = 0{,}016$.

Решение. Здесь относительные погрешности аргументов равны

$$\delta_x = \frac{3}{371} = 0{,}81\% , \ \delta_y = \frac{11}{987} = 1{,}12\% , \ \delta_z = \frac{16}{6052} = 0{,}26\% .$$

Относительная погрешность функции равна

$$\delta_u = \delta_x + 2\delta_y + 3\delta_z = 3{,}8\%;$$

Поэтому значение функции следует вычислять не более чем с двумя –тремя знаками:

$$u = 801 \cdot 10^3$$

(нельзя писать 801000, это имело бы другой смысл!).

Абсолютная погрешность при этом составляет

$$\Delta_u^* = u\delta_u = 801 \cdot 10^3 \cdot 0{,}038 = 30 \cdot 10^3.$$

Здесь целесообразно округлить результат до двух знаков:

$$u = 8{,}0 \cdot 10^5, \ \Delta_u^* = 0{,}3 \cdot 10^5.$$

3. ТЕОРИЯ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

3.1 Постановка задачи

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано дискретное множество несовпадающих точек x_i, которые будем называть **узлами,** в которых известны значения функции $f(x)$ и значения нескольких производных этой функции:

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_s \end{array} \qquad (3.1)$$

$$\begin{array}{ccccc} f(x_0) & f(x_1) & f(x_2) & \dots & f(x_s) \\ f'(x_0) & f'(x_1) & f'(x_2) & \dots & f'(x_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f^{(k_0-1)}(x_0) & f^{(k_1-1)}(x_1) & f^{(k_2-1)}(x_2) & \dots & f^{(k_s-1)}(x_s) \end{array} \qquad (3.2)$$

Требуется построить функцию $\varphi(x)$ такую, чтобы в точках (3.1) ее значения и значения ее производных совпадали бы со значениями (3.2):

$$\varphi^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i), \ i = \overline{0, s}, \ j = \overline{0, k_i - 1} \qquad (3.3)$$

<u>Определение 3.1</u>. Замена некоторой функции другой функцией, совпадающей с заданной в определенных точках называется **интерполированием**.

<u>Определение 3.2</u>. Функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условию (3.3) называется **интерполирующей** или **интерполяционной.** Числа k_i называются **кратностью узлов**. Если $k_i = 1$, то узел называется **простым**. При $k_i > 1$ узел называется **кратным**.

Рассмотрим случай простых узлов. Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах интерполирования $x_0, x_1, ..., x_n$ заданы значения функции $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Выберем в пространстве действительных функций, определенных на $[a, b]$ конечную или счетную совокупность $\{\varphi_i\}$ его элементов, причем будем предполагать, что любая конечная система этих элементов линейно независима. В качестве функции $\varphi(x)$ возьмем

$$\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\ldots+a_m\varphi_m(x).$$

Здесь a_i произвольные постоянные, которые выберем из условия $\varphi(x_i)=f(x_i),\ i=\overline{0,n}$. Это дает для определения a_i систему $n+1$ уравнения с $m+1$ неизвестным

$$\begin{cases} a_0\varphi_0(x_0)+a_1\varphi_1(x_0)+\ldots+a_m\varphi_m(x_0)=f(x_0),\\ a_0\varphi_0(x_1)+a_1\varphi_1(x_1)+\ldots+a_m\varphi_m(x_1)=f(x_1),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ a_0\varphi_0(x_n)+a_1\varphi_1(x_n)+\ldots+a_m\varphi_m(x_n)=f(x_n). \end{cases} \tag{3.4}$$

Матрица системы будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \vdots & \varphi_m(x_0)\\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \vdots & \varphi_m(x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \vdots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}.$$

Для возможности подбора коэффициентов при любой функции $f(x)$, необходимо, чтобы ранг матрицы был равен числу уравнений $n+1$. При этом $m\geq n$. Для однозначного решения системы $m=n$.

Будем предполагать, что $m=n$ и определитель системы

$$\Delta=\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \vdots & \varphi_n(x_0)\\ \varphi_0(x_1) & \varphi_1(x_1) & \vdots & \varphi_n(x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \vdots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}\neq 0 \tag{3.5}$$

В этом случае при любых $f(x_i),\ i=\overline{0,n}$ система будет иметь решение и притом единственное. Используя формулы Крамера, получим выражение для неизвестных a_i

$$a_i=\frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{3.5}$$

где Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-ого столбца столбцом правых частей системы (3.4). Тогда функция $\varphi(x)$ примет вид

$$\varphi(x)=\frac{\Delta_0}{\Delta}\varphi_0(x)+\frac{\Delta_1}{\Delta}\varphi_1(x)+\ldots+\frac{\Delta_n}{\Delta}\varphi_n(x). \tag{3.6}$$

Функцию $\varphi(x)$ можно записать в другой форме. Для этого разложим определитель Δ_i по элементам i-ого столбца. Получим

$$a_i = \frac{\sum_{j=0}^{n} f(x_j) A_{ij}}{\Delta}, \tag{3.7}$$

где A_{ij} – соответствующие алгебраические дополнения.

Подставляя эти выражения в $\varphi(x)$, и, собирая вместе члены с одинаковыми $f(x_j)$, будем иметь

$$\varphi(x) = f(x_0)\Phi_0(x) + f(x_1)\Phi_1(x) + \ldots + f(x_n)\Phi_n(x). \tag{3.8}$$

Здесь функции $\Phi_i(x)$ являются линейными комбинациями функций $\varphi_i(x)$. Они не зависят от функции $f(x)$ и целиком определяются функциями $\varphi_i(x)$ и узлами интерполирования. При этом при любых $f(x_j),\ j = \overline{0,n}$ должны выполняться равенства

$$f(x_j) = f(x_0)\Phi_0(x_j) + f(x_1)\Phi_1(x_j) + \ldots + f(x_n)\Phi_n(x_j), \quad j = \overline{0,n} \tag{3.8}$$

Отсюда следует, что функция $\Phi_j(x)$ удовлетворяют условиям

$$\Phi_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \tag{3.9}$$

Проанализируем вопрос о том, какие нужно наложить условия на систему функций $\{\varphi_i(x)\}$, чтобы выполнялось условие (3.5) при различном выборе узлов интерполирования.

Определение 3.3. Система функций $\{\varphi_i(x)\}$ ($i = \overline{0,n}$), для которой выполняется условие (3.5) при любых различных $x_i \in [a,b]$, называется **системой Чебышева** на $[a,b]$.

Таким образом, во-первых, функции $\{\varphi_i(x)\}$ должны составлять систему Чебышева. Вторым условием, которому надо подчинить систему функций $\{\varphi_i(x)\}$, связано с понятием полноты.

<u>Определение 3.4</u>. Семейство линейных комбинаций

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_n\varphi_n(x) \tag{3.10}$$

называется **полным** в классе F функций $f(x)$, если для всякой $f(x) \in F$ и для любого $\varepsilon > 0$, существует такое n и такие коэффициенты $a_0, a_1, ..., a_n$, что при любых $x \in [a,b]$ выполняется неравенство

$$|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon. \tag{3.11}$$

Если семейство $\varphi(x)$ не обладает этим свойством, то невозможно рассчитывать на то, чтобы с помощью комбинаций (3.10) можно было выполнить сколь угодно точное интерполирование всех функций $f(x)$. Следовательно, во-вторых, система функций $\{\varphi_i(x)\}$ должна быть такой, чтобы соответствующее ей семейство комбинаций (3.10) было полным в классе F функций $f(x)$, подлежащих интерполированию.

Рассмотрим частные случаи выбора функций $\{\varphi_i(x)\}$. При этом нас будут интересовать следующие вопросы:

1) об удобных способах фактического построения интерполяционных функций;

2) получение пригодных оценок отклонения интерполяционной функции от интерполируемой вне узлов интерполирования;

3) как выбирать узлы интерполирования для того, чтобы эти оценки были наиболее хорошими;

4) так как значения функции могут быть приближенными, то необходимо выяснить влияние этого фактора на погрешность интерполирования.

В качестве интерполирующих функций чаще всего используются многочлены. Это обосновывается гипотезой, что на небольшом отрезке изменения переменной x любая функция $f(x)$ заменяется параболой n-ной степени.

Теорема 3.1. Задача построения интерполяционного многочлена степени n однозначно разрешима, если сумма кратностей

$$k_0 + k_1 + \ldots + k_s = n + 1. \tag{3.12}$$

<u>**Доказательство** (от противного)</u>.

Покажем, что для каждой функции интерполяционный многочлен можно построить единственным образом.

Пусть для функции *f(x)* по системе узлов (3.1) при условии (3.2) нам удалось построить два интерполяционных многочлена $p_1(x)$ и $p_2(x)$ степени n. Значит для них выполнимо условие (3.3):

$$p_1^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i) = p_2^{(j)}(x_i) \ (i = \overline{0,s},\ j = \overline{0,k_i - 1}).$$

Рассмотрим функцию $p(x) = p_1(x) - p_2(x)$ – это многочлен n-ной степени. Подсчитаем его значения и значения его производных в точках x_i: $p(x_i) \equiv 0$, $p'(x_i) = 0, \ldots, p^{(k-1)}(x_i) = 0.$ Количество нулей: $k_0 + k_1 + \ldots + k_s = n + 1$. Многочлен $p(x)$ имеет $n+1$ ноль. Из алгебры известно, что это возможно в том случае, когда $p(x) \equiv 0 \Rightarrow p_1(x) = p_2(x)$. ■

<u>Замечание.</u> Интерполяционный многочлен единственен, но форм его записи существует много.

3.2 Интерполяционный многочлен Лагранжа

Возьмем в качестве $\{\varphi_i(x)\}$ последовательность

$$1, x, .x^2, .., x^n, \ldots \tag{3.13}$$

Функции этой последовательности линейно независимы на любом отрезке. Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \vdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \vdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \vdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j}(x_i - x_j) \neq 0\ . \tag{3.14}$$

Определитель (3.14) – определитель Вандермонда. Таким образом, функция $\varphi(x)$ однозначно определяется при любых $f(x_i),\ i=\overline{0,n}$ и, вообще говоря, может быть представлена в виде

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2.+..+a_nx^n \qquad (3.15)$$

Было показано, что функцию $\varphi(x)$ можно искать в виде

$$\varphi(x)=f(x_0)\Phi_0(x)+f(x_1)\Phi_1(x)+...+f(x_n)\Phi_n(x), \qquad (3.16)$$

где $\Phi_i(x)$ представляют линейную комбинацию $\{\varphi_i(x)\}$ $i=\overline{0,n}$ и удовлетворяют условию (3.9). Чтобы отыскать $\Phi_i(x)$, необходимо найти многочлен степени n, обращающийся в нуль в точках $x_0,x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n$ и равный единице в точке x_i.

Отсюда

$$\Phi_i(x)=A(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n).$$

Так как $\Phi_i(x_i)=1$, то

$$1=A(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)$$

и окончательно получаем

$$\Phi_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}$$

и

$$\begin{aligned}\varphi(x)=&\ f(x_0)\frac{(x-x_1)....(x-x_n)}{(x_0-x_1)...(x_0-x_n)}+\\&+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)....(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)}+...\\&...+f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)....(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}.\end{aligned} \qquad (3.17)$$

Многочлен (3.17) называется **интерполяционным многочленом Лагранжа.** Будем обозначать этот многочлен $L_n(x)$, где n – степень интерполяционного многочлена.

Введем обозначение

$$\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \qquad (3.18)$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа может быть записан в форме:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}f(x_i). \qquad (3.19)$$

Введем обозначение

$$l_i(x)=\frac{\omega_n(x)}{(x-x_i)\omega_n'(x_i)}. \qquad (3.20)$$

Введенные величины называют **множителями Лагранжа**. Тогда с использованием множителей Лагранжа (3.19) окончательно примет вид

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)f(x_i) \qquad (3.21)$$

Пример. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблично:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	1	2	3	5
$f(x)$	1	5	14	8

Решение. Исходя из условий задачи, интерполяционный многочлен будет иметь третью степень.

$$L_3(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$
$$+f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+f(x_3)\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=$$
$$=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)}+5\cdot\frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)}+14\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)}+$$
$$+8\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)}=\frac{(x-3)(x-5)(-34+37x)}{24}+\frac{(x-1)(x-2)(99-19x)}{6}$$

Пример. Пользуясь формулой интерполяционного многочлена Лагранжа, найти значение функции, заданной таблично в точке $x=4$.

Решение. Подставим значение $x=4$ в полученный интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_3(x)=1\frac{2\cdot1\cdot(-1)}{-1\cdot(-2)\cdot(-4)}+5\cdot\frac{3\cdot1\cdot(-1)}{1\cdot(-1)\cdot(-3)}+14\cdot\frac{3\cdot2\cdot(-1)}{2\cdot(-2)\cdot1}+8\cdot\frac{3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2}=18\frac{1}{4}$$

3.3. Интерполяционная схема Эйткена

Если требуется найти не общее выражение для интерполяционного многочлена Лагранжа, а лишь его значение при некоторых точках x, то удобно пользоваться **интерполяционной схемой Эйткена.** По этой схеме значение многочлена для какого-то значения x находятся путем последовательного применения единообразного процесса. Для сокращения записи введем обозначение $y_i = f(x_i),\ i = \overline{0,n}$. Рассмотрим выражение

$$L_{01}(x) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x \\ y_1 & x_1 - x \end{vmatrix}.$$

Это многочлен первой степени относительно x.

При $x = x_0$ получим: $$L_{01}(x_0) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ y_1 & x_1 - x_0 \end{vmatrix} = y_0.$$

При $x = x_1$ будем иметь: $$L_{01}(x_1) = \frac{1}{x_1 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0 - x_1 \\ y_1 & 0 \end{vmatrix} = y_1.$$

Так как многочлен первой степени, принимающий в точках x_0, x_1 значения y_0, y_1, единственный, то $L_{01}(x)$ решает задачу интерполирования по двум данным. Аналогично вычисляются $L_{12}(x), L_{23}(x)$ и т.д. При этом общий вид многочлена

$$L_{i,i+1}(x) = \frac{1}{x_{i+1} - x_i}\begin{vmatrix} y_i & x_i - x \\ y_{i+1} & x_{i+1} - x \end{vmatrix}$$

Рассмотрим, далее

$$L_{012}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0 - x \\ L_{12}(x) & x_2 - x \end{vmatrix}.$$

Это многочлен второй степени относительно x. При $x = x_0$ будем иметь:

$$L_{012}(x_0) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} y_0 & 0 \\ L_{12}(x_0) & x_2 - x_0 \end{vmatrix} = y_0.$$

При $x = x_1$ получим: $$L_{012}(x_1) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} y_1 & x_0 - x_1 \\ y_1 & x_2 - x_1 \end{vmatrix} = y_1,$$

а при $x = x_2$ $$L_{012}(x_2) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} L_{01}(x_2) & x_0 - x_2 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix} = y_2.$$

Следовательно, $L_{012}(x)$ совпадает с интерполяционным многочленом Лагранжа, принимающим в точках x_0, x_1, x_2 соответствующие значения y_0, y_1, y_2.

В общем случае,

$$L_{i,i+1,..i+k}(x) = \frac{1}{x_{i+k} - x_i}\begin{vmatrix} L_{i,i+1,..i+k-1}(x) & x_i - x \\ L_{i+1,i+2,...,i+k}(x) & x_{i+k} - x \end{vmatrix} \qquad (3.22)$$

будет интерполяционным многочленом Лагранжа, принимающим в точках $x_i, x_{i+1},..., x_{i+k}$ соответственно значения $y_i, y_{i+1},..., y_{i+k}$. Очевидно, что порядок и нумерация точек при этом значения не имеют. Вычислительная схема для получения интерполяционного многочлена будет выглядеть следующим образом:

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$
x_0	y_0	$x_0 - x$			
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$		
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$	
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$

Пример. Найти значение функции, заданной таблично в точке $x = 4$.

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	1	2	3	5
f(x)	1	5	14	8

Решение. Воспользуемся схемой Эйткена

x_i	y_i	$x_i - 4$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$
1	1	-3			
2	5	-2	13		
3	14	-1	23	28	
5	8	1	11	45/3	**73/4**

3.4 Интерполяционный многочлен Лагранжа для равноотстоящих узлов

Рассмотрим случай, когда значения x_i являются **равноотстоящими**, т.е.

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1} = h, \qquad h = const\,.$$

Тогда

$$x_i = x_0 + ih \quad \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{3.23}$$

Получим интерполяционный многочлен Лагранжа для таких узлов.

Введем обозначение $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, $\Rightarrow x = x_0 + th$ и пересчитаем множители, входящие в $\Phi_i(x)$

$$\left.\begin{array}{l} x - x_0 = x_0 + th - x_0 = th \\ x - x_1 = x_0 + th - x_0 - h = (t-1)h \\ \quad \ldots \qquad \ldots \\ x - x_{i-1} = x_0 + th - x_0 - (i-1)h = (t - i + 1)h \\ \quad \ldots \qquad \ldots \\ x - x_n = (t-n)h \end{array}\right\}\text{числитель}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_i - x_0 = x_0 + ih - x_0 = ih \\ \quad \ldots \qquad \ldots \\ x_i - x_{i-1} = h \\ x_i - x_{i+1} = -h \\ \quad \ldots \qquad \ldots \\ x_i - x_n = [-(n-i)h] \end{array}\right\}\text{знаменатель}$$

$$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} =$$

$$=\frac{th(t-1)h....(t-i+1)h(t-i-1)h...(t-n)h}{ih(i-1)h...h(-h)...(-(n-i)h)}=\frac{t(t-1)....(t-i+1)(t-i-1)...(t-n)}{i(i-1)...(-1)...(-(n-i))}\cdot\frac{(t-i)}{(t-i)}=$$

$$=\frac{t(t-1).......(t-n)}{t-i}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}=\left[C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}\right]=(-1)^{n-i}C_n^i\frac{1}{t-i}\frac{t(t-1).......(t-n)}{n!}.$$

Таким образом,

$$L_n(x)=L_n(x_0+th)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i\frac{t(t-1)...(t-n)}{(t-i)n!}y_i=(-1)^n\frac{t(t-1)...(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\frac{C_n^i}{t-i}y_i \quad (3.24)$$

В последнем выражении коэффициенты, стоящие перед y_i $(-1)^{n-i}C_n^i\frac{t(t-1)...(t-n)}{(t-i)n!}$, не зависят ни от функции, ни от шага $f(x)$ и их можно табулировать. Такие таблицы составлены и известны под названием **таблиц коэффициентов Лагранжа**.

3.5 Погрешность интерполяционной формулы Лагранжа

Если все вычисления произведены точно, то интерполяционный многочлен Лагранжа совпадает с заданной функцией $f(x)$ в узлах интерполирования $x_0, x_1,..., x_n$. Однако, в остальных точках он будет от нее отличен. Исключение составляет тот случай, когда функция $f(x)$ сама является многочленом степени $\le n$. В этом случае $L_n(x)\equiv f(x)$. Погрешность такого рода называется **погрешностью метода** или **погрешностью интерполирования** и определяется величиной $R_n(x)=f(x)-L_n(x)$, называемой **остаточным членом**.

В процессе вычислений за счет округлений возникнет также **погрешность округления**.

Рассмотрим погрешность метода. Здесь необходимо наложить на функцию $f(x)$ некоторые ограничения, чтобы иметь возможность получить достаточно удобные оценки погрешности. Будем считать, что интерполируемая функция $f(x)$ имеет на $[a,b]$ непрерывные производные до порядка n и производная $f^{(n)}(x)$ дифференцируема на $[a,b]$.

Для оценки погрешности рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(z) = f(z) - L_n(z) - K(z-x_0)(z-x_1)...(z-x_n),$$

где K некоторая постоянная. Очевидно, $\psi(x_0) = \psi(x_1) = ... = \psi(x_n) = 0$. Подберем K таким образом, чтобы в точке x, в которой производится оценка, $\psi(x) = 0$. Так как $x \neq x_i$, $\left(i = \overline{0,n}\right)$, тогда

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}.$$

Таким образом, функция $\psi(z)$ обращается в нуль на отрезке $[a,b]$ в $n+2$ точках: $x, x_0, x_1,..., x_n$. Следовательно, на основании теоремы Ролля $\psi'(z) = 0$ на (a,b) по крайней мере $n+1$ раз. Пусть это будут точки $\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \xi_2^{(1)},..., \xi_n^{(1)}$.

Применим теорему Ролля к функции $\psi'(z)$, для которой существуют, по крайней мере, n точек $\xi_0^{(2)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(1)},..., \xi_{n-1}^{(2)}$, в которых $\psi''(z)$ обращается в нуль. Продолжая, найдем, что существует точка $\xi \in (a,b)$, в которой

$$\psi^{(n+1)}(\xi) = 0,$$

но

$$\psi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - L_n^{(n+1)}(z) - K((z-x_0)(z-x_1)...(z-x_n))^{(n+1)}.$$

В последнем соотношении $L_n^{(n+1)}(z) = 0$, как $(n+1)$-ая производная от многочлена степени n имеет вид

$$((z-x_0)(z-x_1)...(z-x_n))^{(n+1)} = (n+1)!.$$

Следовательно,

$$\psi^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - K(n+1)! \qquad (3.25)$$

Положив в (3.25) $z = \xi$, получим

$$K = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Отсюда

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \qquad (3.26)$$

Полагая $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, и, учитывая, что $\omega_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$, получим оценку отклонения $f(x)$ от $L_n(x)$

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_n(x)| \qquad (3.27)$$

Если $A = \max\limits_{x \in [a,b]} |\omega_n(x)|$, то оценка (4.6) примет вид

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} A. \qquad (3.28)$$

Пример. С какой точностью можно вычислить по формуле Лагранжа $\sin 5^\circ$, если известны значения $\sin 0^\circ, \sin 30^\circ, \sin 45^\circ, \sin 60^\circ$.

Решение. В данном случае $f(x) = \sin x$, $n = 3$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{3}$, $f^{IV}(x) = \sin x$,

$$M_{n+1} = \sup\limits_{x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]} |\sin x| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$|R_4(x)| = |\sin 5^\circ - L_4(5^\circ)| \le \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{4!}\left|\left(\frac{5\pi}{180} - 0\right)\left(\frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{5\pi}{180} - \frac{\pi}{3}\right)\right| \approx 0{,}0009$$

В случае произвольного расположения узлов интерполирования о неустранимой погрешности мало что можно сказать. В случае равноотстоящих узлов получено, что неустранимая погрешность интерполяционной формулы Лагранжа невелика и незначительно возрастает при увеличении количества узлов.

Ошибки округления целиком определяются программой вычислений.

3.6 Разделенные разности и их свойства

Рассмотрим некоторую функцию $f(x) \in R$ и систему узлов интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $x_i \ne x_j$ при $i \ne j$ и $x_i \in [a,b]$.

Определение 3.5. **Разделенной разностью** первого порядка называется величина:

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \qquad (3.29)$$

Определение 3.6. **Разделенной разностью** k-ого порядка называется величина:

$$f(x_i;x_{i+1};...;x_{i+k})=\frac{f(x_{i+1};x_{i+2};...,x_{i+k})-f(x_i;x_{i+1};...;x_{i+k-1})}{x_{i+k}-x_i}. \qquad (3.30)$$

Разделенные разности можно расположить в виде таблицы

x_0	$f(x_0)$			
		$f(x_0;x_1)$		
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0;x_1;x_2)$	
		$f(x_1;x_2)$		$f(x_0;x_1;x_2;x_3)$
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1;x_2;x_3)$	
		$f(x_2;x_3)$		$f(x_1;x_2;x_3;x_4)$
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2;x_3;x_4)$	
		$f(x_3;x_4)$		
x_4	$f(x_4)$			

Теорема 3.2. Разделенная разность n-ого порядка выражается через значения функции в узлах интерполирования следующим образом:

$$f(x_0;x_1;...;x_n)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)} \qquad (3.31)$$

<u>Доказательство</u> <u>(по индукции)</u>.

1. $n=1$. $f(x_0;x_1)=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\dfrac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\dfrac{f(x_1)}{x_1-x_0}$, т.е формула (3.31) верна.
2. Пусть формула выполняется для $n=k-1$.
3. Покажем, что она выполнена для $n=k$.

$$f(x_0;x_1;...;x_k)\overset{df}{=}\frac{f(x_1;x_2;...,x_k)-f(x_0;x_1;...;x_{k-1})}{x_k-x_0}=\text{(по п.2 и (3.31))}$$

$$=\frac{1}{x_k-x_0}\{\sum_{i=1}^{k}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(x_i-x_j)}-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k-1}(x_i-x_j)}\}$$

Подсчитаем коэффициенты при $f(x_i)$ для $0 < i < k$

$$\frac{1}{x_k - x_0}\{\frac{1}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_k)} -$$

$$-\frac{1}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_{k-1})}\} =$$

$$= \frac{1}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_k)} = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k}(x_i - x_j)}$$

При $i = 0$: $$\frac{1}{x_k - x_0}\{0 - \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{k-1}(x_i - x_j)}\} = \frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{k}(x_0 - x_j)}$$

При $i = k$: $$\frac{1}{\prod\limits_{j=0}^{k-1}(x_i - x_j)}.\blacksquare$$

<u>Следствие.</u> Разделенная разность суммы (разности) функций равна сумме (разности) разделенных разностей слагаемых (уменьшаемого и вычитаемого).

<u>Следствие.</u> Постоянный множитель можно выносить за знак разделенной разности.

<u>Следствие.</u> Разделенная разность не зависит от порядка записи своих аргументов, т. е. не меняется при перестановке аргументов.

<u>Следствие</u>. Разделенные разности n-ого порядка от многочлена n-ой степени постоянны, а разности более высокого порядка равны нулю.

3.7 Интерполяционный многочлен Ньютона.

Пусть для функции $f(x) \in R$, $x_0, x_1, \ldots, x_n -$ узлы интерполирования, а $L_k(x) -$ интерполяционный многочлен Лагранжа построенный по узлам. $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Тогда

$$L_n(x) = L_0(x) + [L_1(x) - L_0(x)] + [L_2(x) - L_1(x)] + \ldots + [L_n(x) - L_{n-1}(x)] \tag{3.32}$$

Рассмотрим отдельно каждую разность в правой части. Многочлен $L_k(x)-L_{k-1}(x)$ является многочленом степени k и в точках $x_0, x_1, ..., x_{k-1}$ обращается в нуль. Тогда его можно представить в виде:

$$L_k(x)-L_{k-1}(x)=A_k(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{k-1})=A_k\omega_k(x) \quad (A_k - const).$$

Для определения величины A_k, положим $x=x_k$, тогда

$$L_k(x_k)-L_{k-1}(x_k)=A_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)...(x_k-x_{k-1})=A_k\omega_k(x_k),$$

$$f(x_k)-L_{k-1}(x_k)=A_k\omega_k(x_k)$$

Отсюда

$$A_k=\frac{f(x_k)}{\omega_k(x_k)}-\frac{L_{k-1}(x_k)}{\omega_k(x_k)}=\frac{f(x_k)}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})}-$$

$$-\frac{\sum_{j=0}^{k-1} f(x_j)\frac{(x_k-x_0)...(x_k-x_{j-1})(x_k-x_{j+1})...(x_k-x_{k-1})}{(x_j-x_0)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_{k-1})}}{(x_k-x_0)...(x_k-x_{k-1})}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_k)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_k)}=f(x_0;x_1;...;x_k).$$

Следовательно,

$$L_n(x)=f(x_0)+f(x_0;x_1)(x-x_0)+f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1)+...+f(x_0;x_1;...x_n)(x-x_0)...(x-x_{n-1})$$

Эта форма записи интерполяционного многочлена Лагранжа носит название **интерполяционного многочлена Ньютона.**

3.8 Остаточный член интерполяционной формулы Ньютона

Остаточный член формулы Ньютона такой же, как и у формулы Лагранжа, но его можно записать в другой форме. Для этого рассмотрим

$$f(x;x_0;x_1;...;x_n)=\frac{f(x)}{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)}+$$
$$+\frac{f(x_0)}{(x_0-x)(x_0-x_1)...(x_0-x_n)}+..+\frac{f(x_n)}{(x_n-x)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})} \quad (3.33)$$

Отсюда

$$f(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)}+$$
$$..+f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}+(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)f(x;x_0;x_1;...;x_n) \quad (3.34)$$

и, в конечном итоге

$$f(x) = L_n(x) + (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\, f(x;x_0;x_1;...;x_n) \qquad (3.35)$$

Таким образом,

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)\, f(x;x_0;x_1;...;x_n) \qquad (3.36)$$

Сравнивая полученный результат с выражением (3.26), получим

$$f(x;x_0;x_1;...;x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad \xi \in [a;b]\,. \qquad (3.37)$$

3.9 Конечные разности и их свойства

Пусть в точках $x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{1,n}, \quad h = const$ задана функция $f(x)$ своими значениями: $f(x_0) = f_0, \quad f(x_1) = f(x_0+h) = f_1, ..., f(x_n) = f(x_0+nh) = f_n$.

Определение 3.7. **Конечной разностью вперед первого порядка** будем называть разность следующего вида:

$$f(x_0 + ih + h) - f(x_0 + ih) = f_{i+1} - f_i = \Delta f_i. \quad i = \overline{0,(n-1)}$$

Определение 3.8. **Конечной разностью назад первого порядка** будем называть разность следующего вида:

$$f(x_0 + ih) - f(x_0 + ih - h) = f_i - f_{i-1} = \nabla f(x_i). \quad i = \overline{1,n}$$

Определение 3.9. **Центральной разностью первого порядка** будем называть разность следующего вида:

$$f(x_0 + ih + \frac{h}{2}) - f(x_0 + ih - \frac{h}{2}) = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}} = \delta f(x_i) = f_i^1. \quad i = \overline{1,(n-1)}$$

Очевидно следующее соотношение

$$f_{i+1} - f_i = \Delta f_i = \nabla f_{i+1} = \delta f_{i+\frac{1}{2}} = f^1_{i+\frac{1}{2}}.$$

Для разностей 1-го порядка можно построить соответствующие разности 2- го порядка.

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i; \quad \nabla^2 f_i = \nabla(\nabla f_i) = \nabla f_i - \nabla f_{i-1}; \quad f_i^2 = f^1_{i+\frac{1}{2}} - f^1_{i-\frac{1}{2}}$$

В общем случае $\forall n$ разности n-го порядка будут определяться следующим образом:

$$\Delta^n f_i = \Delta^{n-1} f_{i+1} - \Delta^{n-1} f_i; \qquad \nabla^n f_i = \nabla^{n-1} f_i - \nabla^{n-1} f_{i-1}; \qquad f_i^n = f_{i+\frac{1}{2}}^{n-1} - f_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}$$

Таблица конечных разностей.

x_0	f_0			
		$f_{1/2}^1$		
x_1	f_1		f_1^2	
		$f_{3/2}^1$		$f_{3/2}^3$
x_2	f_2		f_2^2	
		$f_{5/2}^1$		$f_{5/2}^3$
x_3	f_3		f_3^2	
		$f_{7/2}^1$		
x_4	f_4			

Пример. Построить таблицу конечных разностей для функции x^3.

Решение.

x_i	f_i	$f^1_{i+1/2}$	f_i^2	$f^3_{i+1/2}$
0	0			
		1		
1	1		6	
		7		6
2	8		12	
		19		6
3	27		18	
		37		6
4	64		24	
		61		
5	125			

Практические вычисления требуют наличия контролирующих вычислений на всех этапах работы. Очевидно,

$$f^1_{1/2} + f^1_{3/2} + \ldots + f^1_{n-1/2} = f_1 - f_0 + f_2 - f_1 + \ldots + f_n - f_{n-1} = f_n - f_0,$$

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f^2_{n-1} = f^1_{3/2} - f^1_{1/2} + f^1_{5/2} - f^1_{3/2} + \ldots + f^1_{n-1/2} - f^1_{n-3/2} = f^1_{n-1/2} - f^1_{1/2},$$

т.е. сумма чисел в каждом столбце разностей равна разности крайних чисел предыдущего столбца. Поэтому целесообразно ввести в дополнение к таблице разностей еще 2 строки: строку S, равную сумме чисел столбца и строку D, равную разности крайних чисел столбца и использовать предыдущие рассуждения. Для примера эти строки будут

S		125	60	18
D	125	60	18	0

Найдем выражение разности любого порядка непосредственно через значения функции. Будем иметь

$$f^1_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+1} - f_i;$$

$$f^2_i = f^1_{i+1/2} - f^1_{i-1/2} = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1};$$

$$f^3_{i+1/2} = f^2_{i+1} - f^2_i = f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}.$$

Теорема 3.3. Конечные разности n-ого порядка выражаются через значения функции в узлах интерполирования по формуле:

$$f^n_i = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C^j_n f_{i+n/2-j} \tag{3.38.}$$

(при четном n $i-$ целое, при нечетном n $i-$ полуцелое).

<u>**Доказательство**: (по индукции)</u>

1) При $n = 1,2,3$ формула верна, что видно из предыдущих выражений.

2) Пусть формула верна для $n = k$, т.е.

$$f^k_i = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C^j_k f_{i+k/2-j} = f_{i+k/2} - C^1_k f_{i-1+k/2} + C^2_k f_{i-2+k/2} + \ldots + (-1)^j C^j_k f_{i-j+k/2} + \ldots + (-1)^k f_{i-k/2}.$$

3) Покажем, что формула верна $n = k+1$.

$$f^{k+1}_i = f^k_{i+1/2} - f^k_{i-1/2} \overset{n.2}{=}$$
$$= (f_{i+1/2+k/2} - C^1_k f_{i-1/2+k/2} + C^2_k f_{i-3/2+k/2} + \ldots + (-1)^j C^j_k f_{i+1/2-j+k/2} + \ldots + (-1)^k f_{i+1/2-k/2}) -$$
$$-(f_{i-1/2+k/2} - C^1_k f_{i-3/2+k/2} + C^2_k f_{i-5/2+k/2} + \ldots + (-1)^j C^j_k f_{i-1/2-j+k/2} + \ldots + (-1)^k f_{i-1/2-k/2}).$$

Собирая коэффициенты при одинаковых значениях функций, и пользуясь равенством

$$C^m_k + C^{m+1}_k = \frac{k!}{m!(k-m)!} + \frac{k!}{(m+1)!(k-m-1)!} = \frac{(k+1)!}{(m+1)!(k-m)!} = C^{m+1}_{k+1},$$

получим

$$f^{k+1}_i = f_{i+(k+1)/2} - C^1_{k+1} f_{i-1+(k+1)/2} + \ldots + (-1)^j C^j_{k+1} f_{i-j+(k+1)/2} + \ldots + (-1)^{k+1} f_{i-(k+1)/2}$$

$$f^{k+1}_i = \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j C^j_{k+1} f_{i+(k+1)/2-j}\ .\blacksquare$$

<u>Следствие.</u> Конечная разность n-го порядка f^n_i суммы или разности функций равна сумме или разности конечных разностей функций:

$$f = \varphi \pm g \;\Rightarrow\; f^n_i = \varphi^n_i \pm g^n_i .$$

Следствие. При умножении функции на постоянный множитель, конечные разности умножаются на этот же множитель.

Следствие. Конечная разность m-го порядка от конечной разности n-го порядка равна разности $(m+n)$го порядка:

Следствие. Конечные разности n-го порядка от многочлена n-ой степени постоянны, а конечные разности $(n+1)$-го порядка от него равны нулю.

Замечание. Пусть все значения $f(x)$ определены с предельной абсолютной погрешностью α, тогда предельная абсолютная погрешность разностей первого порядка равна 2α, предельная абсолютная погрешность разностей второго порядка равна 4α, третьего порядка – 8α, …, k-го порядка – $2^k\alpha$.

Установим связь между разделенными и конечными разностями в случае, если $x_i - x_{i-1} = h, \quad h = const$, то есть узлы интерполирования равноотстоящие.

Теорема 3.4. Разделенную разность по узлам $x_i = x_0 + ih$ можно выразить через центральную разность:

$$f(x_i; x_{i+1}; ...; x_{i+k}) = \frac{f_{i+k/2}^k}{k!h^k}. \tag{3.39}$$

Доказательство: (по индукции)

1) $k = 1$

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1/2}^1}{h}.$$

– это формула (3.39) при $k = 1$.

2) Пусть формула (3.39) верна при $k = m$, т.е.

$$f(x_i; x_{i+1}; ...; x_{i+m}) = \frac{f_{i+m/2}^m}{m!h^m}. \tag{3.40}$$

3) Покажем, что формула верна при $k = m+1$.

Рассмотрим

$$f(x_i;x_{i+1};...;x_{i+m+1}) \overset{df}{=} \frac{f(x_{i+1};...;x_{i+m+1}) - f(x_i;x_{i+1};...;x_{i+m})}{x_{i+m+1}-x_i} \overset{(6.2)}{=} \frac{1}{x_{i+m+1}-x_i}\left[\frac{f^{m}_{i+1+m/2}}{m!h^m} - \frac{f^{m}_{i+m/2}}{m!h^m}\right] =$$

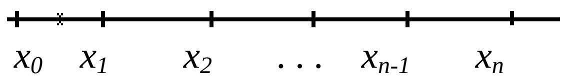
$$= \frac{1}{(m+1)hm!h^m}\left[f^{m}_{i+1+m/2} - f^{m}_{i+m/2}\right] = \frac{1}{(m+1)!h^{m+1}}\, f^{m+1}_{i+m/2+1/2} = \frac{f^{m+1}_{i+(m+1)/2}}{(m+1)!h^{m+1}}.\blacksquare$$

Связь между конечными разностями устанавливается соотношением

$$\Delta^n f_i = \nabla^n f_{i+n} = \delta^n_{i+n/2} = f^n_{i+n/2}. \tag{3.41}$$

3.10 Интерполяционная формула Ньютона для интерполирования вперед

Пусть функция $f(x)$ задана в равноотстоящих узлах $x_i = x_0 + ih,\quad i=\overline{1,n},\quad h = const$ своими значениями $f_0, f_1, ..., f_n$.



Надо найти значение $f(x)$ в точке $x \in [x_0, x_1]$.

Построим интерполяционный многочлен Ньютона по узлам $x_0, x_1, ..., x_n$

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0;x_1)(x-x_0) + f(x_0;x_1;x_2)(x-x_0)(x-x_1) + ... + f(x_0;x_1;...x_n)(x-x_0)...(x-x_{n-1})$$

Заменив разделенные разности их выражениями через конечные разности, получим

$$\begin{aligned} P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{h} f^1_{1/2} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2} f^2_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{3!h^3} f^3_{3/2} + \\ ....+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{n!h^n} f^n_{n/2}. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Полагаем, $t = \dfrac{x-x_0}{h}, \Rightarrow x = x_0 + th$,

Тогда формула (3.42) примет вид

$$P_n(x_0+th) = f_0 + tf^1_{1/2} + \frac{t(t-1)}{2!} f^2_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f^3_{3/2} + ... + \frac{t(t-1)...(t-(n-1))}{n!} f^n_{n/2}. \tag{3.43}$$

Полученную формулу называют **формулой Ньютона для интерполирования вперед**. Используемые в ней разности расположены в таблице конечных разностей по диагонали вниз, начиная с f_0. Эта формула применяется, когда необходимо найти значение функции вначале таблицы.

x_i	f_i	$f^1_{i+1/2}$	f_i^2	$f^3_{i+1/2}$	f_i^4
x_0	$\underline{f_0}$				
		$\underline{f^1_{1/2}}$			
x_1	f_1		$\underline{f_1^2}$		
		$f^1_{3/2}$		$\underline{f^3_{3/2}}$	
x_2	f_2		f_2^2		$\underline{f_2^4}$
		$f^1_{5/2}$		$f^3_{5/2}$	
x_3	f_3		f_3^2		
		$f^1_{7/2}$			
x_4	f_4				

Учитывая связь центральных разностей и конечных разностей вперед (3.41) получим формулу Ньютона для интерполирования вперед, выраженную через конечные разности вперед

$$P_n(x_0+th)=f_0+t\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 f_0+....+\frac{t(t-1)...(t-(n-1))}{n!}\Delta^n f_0.$$

3.11 Остаточный член формулы Ньютона для интерполирования вперед

Используя полученную оценку для остаточного члена

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_0-h)...(x-x_0-nh)$$

Учитывая, что $x-x_0=th$, $x_i=x_0+ih,\quad i=\overline{1,n},\quad h=const$, получим

$$R_n=\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t-1)(t-2)...(t-n) \tag{3.44}$$

В некоторых случаях, когда значения функции получены из эксперимента, бывает трудно оценить величину производной $f^{(n+1)}(\xi)$, тогда можно использовать грубый способ оценки. Было получено

$$f(x_0; x_1; ...; x_{n+1}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{3.45}$$

С другой стороны, для равноотстоящих узлов

$$f(x_0; x_1; ...; x_{n+1}) = \frac{f^{n+1}_{(n+1)/2}}{(n+1)!h^{n+1}}. \tag{3.46}$$

Считая, что на рассматриваемом отрезке производная $f^{(n+1)}(x)$, а, следовательно, и разности f_i^{n+1} меняются не сильно, можем заменить производную разностью и считать, что

$$R_n \approx \frac{t(t-1)(t-2)...(t-n)}{(n+1)!} f^{n+1}_{(n+1)/2}. \tag{3.47}$$

Нужно еще раз подчеркнуть, что полученные формулы очень грубы и применять их можно только в случае крайней необходимости. Если не выполнено условие, что производная меняется незначительно, можно получить нелепый результат.

Пример. Найти значение $\sin 6^\circ$, если известны значения

$\sin 5^\circ, \sin 7^\circ, \sin 9^\circ, \sin 11^\circ, \sin 13^\circ, \sin 15^\circ$.

Решение. Составим таблицу разностей. При этом в таблицу будем для сокращения вносить лишь значащие цифры.

x_i	$\sin x_i$	$f^1_{i+1/2}$	f_i^2	$f^3_{i+1/2}$	f_i^4
5°	0,087156				
		34713			
7°	0,121869		-148		
		34565		-42	
9°	0,156434		-190		-1
		34375		-43	

11°	0,190809		-233		+2
		34142		-41	
13°	0,225951		-274		
		33868			
15°	0,258819				

Изучая таблицу, можно видеть, что разности третьего порядка почти постоянны, а разности четвертого и следующих порядков меняются неправильно. Это объясняется использованием приближенных значений $\sin x$. В дальнейших вычислениях будем использовать только третьи разности. За x_0 примем ближайшее к 6° значение, т.е. $x_0 = 5^\circ$. Тогда $t = \dfrac{x - x_0}{h} = 1/2$ и вычисления по формуле (3.43) примут вид

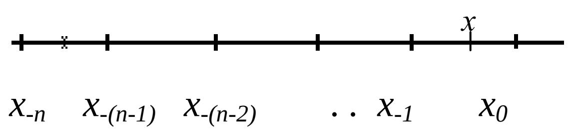
$$f_0 = \sin 5^\circ = 0{,}087156, \quad tf^1_{1/2} = 0{,}5 \cdot 0{,}034713 = 0{,}0073565, \quad \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 = \frac{1}{8} \cdot 0{,}000148 = 0{,}0000185$$

$$\frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f^3_{3/2} = -\frac{1}{16} \cdot 0{,}000042 = -0{,}0000026.$$

Просуммировав полученные значения, получим $P_3(6^\circ) = 0{,}104528$. Значение $\sin 6^\circ$ с шестью верными знаками равно 0,104528.

3.12 Интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад

Пусть функция $f(x)$ задана в равноотстоящих узлах $x_i = x_0 + ih,\ i = \overline{1,n},\ h = const$ своими значениями $f_0, f_1, ..., f_n$. Нужно найти $f(x)$ в точке $x \in (x_{n-1}, x_n)$. Перенумеруем узлы:



Построим интерполяционный многочлен Ньютона по узлам $x_0; x_{-1}; ...; x_{-n}$.

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0;x_{-1})(x-x_0) + f(x_0;x_{-1};x_{-2})(x-x_0)(x-x_{-1}) + \ldots$$
$$+ f(x_0;x_{-1};\ldots x_{-n})(x-x_0)\ldots(x-x_{-(n-1)})$$

Представим разделенную разность через конечную разность:

$$f(x_0;x_{-1};\ldots;x_{-k}) = f(x_{-k};x_{-(k-1)};\ldots;x_0) = \frac{f^k_{-k+k/2}}{k!h^k} = \frac{f^k_{-k/2}}{k!h^k}.$$

Отсюда

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{h} f^1_{-1/2} + \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})}{2!h^2} f^2_{-1} + \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_{-2})}{3!h^3} f^3_{-3/2} +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})\ldots(x-x_{-(n-1)})}{n!h^n} f^n_{-n/2}.$$

Положим $x = x_0 + t\,h$, тогда

$$P_n(x_0+th) = f(x_0) + tf^1_{-1/2} + \frac{t(t+1)}{2!} f^2_{-1} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} f^3_{-3/2} + \ldots.. + \frac{t(t+1)\ldots[t+(n-1)h]}{n!} f^n_{-n/2}. \quad (3.48)$$

Формула (3.48) называется **интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад**.

x_i	f_i	$f^1_{i+1/2}$	f_i^2	$f^3_{i+1/2}$	f_i^4
x_{-4}	f_{-4}				
		$f^1_{-7/2}$			
x_{-3}	f_{-3}		f^2_{-3}		
		$f^1_{-5/2}$		$f^3_{-1/2}$	
x_{-2}	f_{-2}		f^2_{-2}		$\underline{f^4_{-2}}$
		$f^1_{-3/2}$		$\underline{f^3_{-3/2}}$	
x_{-1}	f_{-1}		$\underline{f^2_{-1}}$		
		$\underline{f^1_{-1/2}}$			
x_0	$\underline{f_0}$				

Используемые в ней разности расположены в таблице конечных разностей по диагонали вверх, начиная с f_0, как это показано в таблице. Формула (3.48) применяется, когда необходимо найти значение функции в конце таблицы.

Учитывая связь центральных разностей и конечных разностей вперед (3.41) получим формулу Ньютона для интерполирования вперед, выраженную через конечные разности вперед

$$P_n(x_0+th)=f_0+t\nabla f_0+\frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_0+\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}\nabla^3 f_0+....+\frac{t(t+1)...(t+(n-1))}{n!}\nabla^n f_0.$$

3.13 Остаточный член формулы Ньютона для интерполирования назад

Используя полученную оценку для остаточного члена

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_{-1})...(x-x_{-n})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_0+h)...(x-x_0+nh)$$

Учитывая, что $x-x_0=th$, $x_{-i}=x_0-ih,\quad i=\overline{1,n},\quad h=const$, получим

$$R_n=\frac{h^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}t(t+1)(t+2)...(t+n) \qquad (3.49)$$

В некоторых случаях, когда значения функции поучены из эксперимента, бывает трудно оценить величину производной $f^{(n+1)}(\xi)$, тогда можно использовать грубый способ оценки. Используя формулы (3.45) и (3.46) можно считать, что

$$R_n\approx\frac{t(t+1)(t+2)...(t+n)}{(n+1)!}f^{n+1}_{-(n+1)/2}. \qquad (3.50)$$

Пример. Найти значение $\sin 14^\circ$, если известны значения

$\sin 5^\circ,\sin 7^\circ,\sin 9^\circ,\sin 11^\circ,\sin 13^\circ,\sin 15^\circ$.

Решение. Для решения будем использовать таблицу разностей из предыдущего примера. За x_0 примем ближайшее к 14° значение, т.е. $x_0=15^\circ$. Тогда $t=\frac{14^\circ-15^\circ}{2^\circ}=-1/2$ и вычисления по формуле (3.48) примут вид

$$f_0=\sin 15^\circ=0{,}258819,$$

$$tf^1_{-1/2}=-0{,}5\cdot 0{,}033868=-0{,}016934,$$

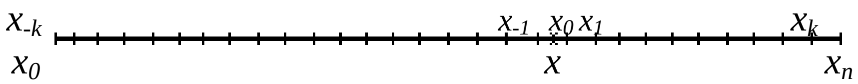
$$\frac{t(t+1)}{2!}f^2_{-1}=\frac{1}{8}\cdot 0{,}000274=0{,}00003425,$$

$$\frac{t(t+1)(t+2)}{3!}f^3_{-3/2}=\frac{1}{16}\cdot 0{,}000041=0{,}0000025.$$

Просуммировав полученные значения, получим $P_3(14^\circ)=0{,}241922$. Ответ получили с шестью верными знаками.

3.14 Интерполяционная формула Гаусса для интерполирования вперед

Пусть функция $f(x)$ задана в равноотстоящих узлах $x_i=x_0+ih,\quad i=\overline{1,n},\quad h=const$ своими значениями $f_0, f_1,\ldots, f_n$. Надо найти значение функции $f(x)$ в точке x, расположенной ближе к левому узлу.



Перенумеруем узлы, выбрав за x_0 ближайший к x узел.

Построим интерполяционный многочлен Ньютона по системе узлов $x_0, x_1, x_{-1}, x_2,\ldots, x_k, x_{-k}$:

$$
\begin{aligned}
P(x)=f(x_0)&+f(x_0;x_1)(x-x_0)+f(x_0;x_1;x_{-1})(x-x_0)(x-x_1)+\\
&+f(x_0;x_1;x_{-1};x_2)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})+\ldots\\
&+f(x_0;x_1;x_{-1};\ldots;x_{-(k-1)};x_{k)})(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{-(k-1)})+\\
&+f(x_0;x_1;x_{-1};\ldots;x_k;x_{-k})(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)+\ldots
\end{aligned}
$$

Заменим разделенные разности, входящие в интерполяционный многочлен, через конечные разности.

$$
\begin{aligned}
f(x_0;x_1;\ldots;x_{-(k-1)};x_k)&=f(x_{-(k-1)};\ldots;x_{-1};x_0;..;x_k)=\\
&=\frac{f^{2k-1}_{-(k-1)+(2k-1)/2}}{(2k-1)!h^{2k-1}}=\frac{f^{2k-1}_{1/2}}{(2k-1)!h^{2k-1}}\quad (k=-(k-1)+2k-1)
\end{aligned}
$$

$$
f(x_0;x_1;\ldots;x_k;x_{-k})=f(x_{-k};\ldots;x_{-1};x_0;..;x_k)=\frac{f^{2k}_{-k+2k/2}}{(2k)!h^{2k}}=\frac{f_0^{2k}}{(2k)!h^{2k}}\quad (k=-k+2k).
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
P(x)=f(x_0)&+\frac{(x-x_0)}{h}f^1_{1/2}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!h^2}f_0^2+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})}{3!h^3}f^3_{1/2}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)}{(2k-1)!h^{2k-1}}f^{2k-1}_{1/2}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_k)}{(2k)!h^{2k}}f_0^{2k}+\ldots
\end{aligned}
$$

Сделав замену переменных: $x=x_0+th$, учитывая, что $x-x_i=(t-i)h,$

$$P(x_0+th)=f_0+tf^1_{-1/2}+\frac{t(t-1)}{2!}f_0^2+\frac{t(t^2-1)}{3!}f^3_{-1/2}+$$
$$\text{............}+\frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)...(t^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!}f^{2k-1}_{1/2}+\frac{t(t^2-1)...(t^2-(k-1)^2)(t-k)}{(2k)!}f_0^{2k}+... \qquad (3.51)$$

Формула (3.51) это **интерполяционная формула Гаусса для интерполирования вперед.**

В ней используются разности, подчеркнутые в следующей таблице.

x_i	f_i	$f^1_{i+1/2}$	f_i^2	$f^3_{i+1/2}$	f_i^4
x_{-3}	f_{-3}				
		$f^1_{-5/2}$			
x_{-2}	f_{-2}		f^2_{-2}		
		$f^1_{-3/2}$		$f^3_{-3/2}$	
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		f^4_{-1}
		$f^1_{-1/2}$		$f^3_{-1/2}$	
x_0	$\underline{f_0}$		$\underline{f_0^2}$		$\underline{f_0^4}$
		$\underline{f^1_{1/2}}$		$\underline{f^3_{1/2}}$	
x_1	f_1		f_1^2		f_1^4
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$	
x_2	f_2		f_2^2		
		$f^1_{5/2}$			
x_3	f_3				

3.15 Остаточный член формулы Гаусса для интерполирования вперед

Для формул Гаусса для интерполирования вперед узлы брались в следующем порядке: $x_0, x_0+h, x_0-h, x_0+2h,..., x_0+kh, x_0-kh,...$ Поэтому

$$R_{2k}=\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{-k})=\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}(x-x_0)(x-x_0-h)...(x-x_0+kh),$$

$$R_{2k-1} = \frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_k) = \frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}(x-x_0)(x-x_0-h)...(x-x_0-kh)$$

или

$$R_{2k} = \frac{h^{2k+1} f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!} t(t^2-1)(t^2-2^2)...(t^2-k^2).$$

$$R_{2k-1} = \frac{h^{2k} f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!} t(t^2-1)(t^2-2^2)...[t^2-(k-1)^2](t-k).$$

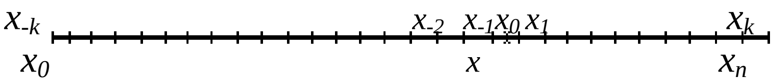
Если производные заменить конечными разностями, как это делалось при выводе остаточных членов формулы Ньютона, то получим

$$R_{2k} \approx \frac{f_{1/2}^{2k+1}}{(2k+1)!} t(t^2-1)(t^2-2^2)...(t^2-k^2), \tag{3.52}$$

$$R_{2k-1} \approx \frac{f_0^{2k}}{(2k)!} t(t^2-1)(t^2-2^2)...[t^2-(k-1)^2](t-k). \tag{3.53}$$

3.16 Интерполяционная формула Гаусса для интерполирования назад

Пусть функция $f(x)$ задана в равноотстоящих узлах $x_i = x_0 + ih, \quad i = \overline{1,n}, \quad h = const$ своими значениями $f_0, f_1, ..., f_n$.



Надо найти значение функции $f(x)$ в точке x, расположенной ближе к правому узлу. Перенумеруем узлы, выбрав за x_0 ближайший узел. Решение ищем для $x \in \left[x_0 - \frac{h}{2}, x_0\right)$.

Построим интерполяционный многочлен Ньютона по системе узлов $x_0, x_{-1}, x_1, x_{-2}, ..., x_{-k}, x_k$:

$$\begin{aligned} P(x) = f(x_0) &+ f(x_0;x_{-1})(x-x_0) + f(x_0;x_{-1};x_1)(x-x_0)(x-x_{-1}) + \\ &+ f(x_0;x_{-1};x_1;x_{-2})(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1) + ... \\ &+ f(x_0;x_{-1};x_1;...;x_{k-1};x_{-k})(x-x_0)(x-x_{-1})...(x-x_{k-1}) + \\ &+ f(x_0;x_{-1};x_1;...;x_{-k};x_k)(x-x_0)(x-x_{-1})...(x-x_{-k}) + ... \end{aligned}$$

Заменим разделенные разности через конечные разности.

$$f(x_0;x_{-1};...;x_{k-1};x_{-k}) = f(x_{-k};...;x_{-1};x_0;..;x_{k-1}) = \frac{f^{2k-1}_{-k+(2k-1)/2}}{(2k-1)!h^{2k-1}} = \frac{f^{2k-1}_{-1/2}}{(2k-1)!h^{2k-1}} \quad (k-1=-k+2k-1)$$

$$f(x_0;x_{-1};...;x_{-k};x_k) = f(x_{-k};...;x_{-1};x_0;..;x_k) = \frac{f^{2k}_{-k+2k/2}}{(2k)!h^{2k}} = \frac{f^{2k}_0}{(2k)!h^{2k}} \quad (k=-k+2k)$$

Тогда

$$P(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{h} f^1_{-1/2} + \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})}{2!h^2} f_0^2 + \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)}{3!h^3} f^3_{-1/2} +$$
$$................ + \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})...(x-x_{k-1})}{(2k-1)!h^{2k-1}} f^{2k-1}_{-1/2} + \frac{(x-x_0)(x-x_{-1})...(x-x_{-k})}{(2k)!h^{2k}} f_0^{2k} + ...$$

Делаем замену переменных: $x = x_0 + th$.

$$P(x_0+th) = f_0 + tf^1_{-1/2} + \frac{t(t+1)}{2!} f_0^2 + \frac{t(t^2-1)}{3!} f^3_{-1/2} +$$
$$............. + \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)...(t^2-(k-1)^2)}{(2k-1)!} f^{2k-1}_{-1/2} + \frac{t(t^2-1)...(t^2-(k-1)^2)(t+k)}{(2k)!} f_0^{2k} + ... \qquad (3.54)$$

Формула (3.54) это **интерполяционная формула Гаусса для интерполирования назад.**

В ней используются разности, подчеркнутые в следующей таблице.

x_i	f_i	$f^1_{i+1/2}$	f_i^2	$f^3_{i+1/2}$	f_i^4
x_{-3}	f_{-3}				
		$f^1_{-5/2}$			
x_{-2}	f_{-2}		f^2_{-2}		
		$f^1_{-3/2}$		$f^3_{-3/2}$	
x_{-1}	f_{-1}		f^2_{-1}		f^4_{-1}
		$\underline{f^1_{-1/2}}$		$\underline{f^3_{-1/2}}$	
x_0	$\underline{f_0}$		$\underline{f_0^2}$		$\underline{f_0^4}$
		$f^1_{1/2}$		$f^3_{1/2}$	
x_1	f_1		f_1^2		f_1^4
		$f^1_{3/2}$		$f^3_{3/2}$	
x_2	f_2		f_2^2		

		$f^{1}_{5/2}$			
x_3	f_3				

3.17 Остаточный член формулы Гаусса для интерполирования назад

При выводе формул Гаусса для интерполирования назад узлы брались в следующем порядке: $x_0, x_0-h, x_0+h, x_0-2h, ..., x_0-kh, x_0+kh, ...$ Поэтому

$$R_{2k}=\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}(x-x_0)(x-x_{-1})...(x-x_{-k})(x-x_k)=\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}(x-x_0)(x-x_0+h)...(x-x_0-kh)$$

$$R_{2k-1}=\frac{f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}(x-x_0)(x-x_{-1})(x-x_1)...(x-x_{-(k-1)})(x-x_{k-1})(x-x_{-k})=$$

$$=\frac{f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}(x-x_0)(x-x_0+h)(x-x_0-h)...[x-x_0+(k-1)h][x-x_0-(k-1)h](x-x_0+kh)$$

или

$$R_{2k}=\frac{h^{2k+1}f^{(2k+1)}(\xi)}{(2k+1)!}t(t^2-1)(t^2-2^2)...(t^2-k^2)$$

$$R_{2k-1}=\frac{h^{2k}f^{(2k)}(\xi)}{(2k)!}t(t^2-1)(t^2-2^2)...[t^2-(k-1)^2](t+k)$$

Грубые оценки примут вид

$$R_{2k}\approx\frac{f^{2k+1}_{-1/2}}{(2k+1)!}t(t^2-1)(t^2-2^2)...(t^2-k^2), \qquad (3.55)$$

$$R_{2k-1}\approx\frac{f^{2k}_{0}}{(2k)!}t(t^2-1)(t^2-2^2)...[t^2-(k-1)^2](t+k). \qquad (3.56)$$

Пример. Пусть функция задана таблично:

x	0	0	2	3	4	5	6	7	8
y	30	25	22	17	10	1	-1	-5	-8

Найти $\bar{x}$, для которого $f(\bar{x})=0$.

Решение. Из таблицы видно, что $5<\bar{x}<6$. Тогда можно применить каждую из рассмотренных формул интерполирования, при этом узлы интерполирования выбираются следующим образом:

1) метод Ньютона вперед:

$x_0=5,\ x_1=6,\ x_2=7,\ x_3=8.$ (погрешность будет минимальна);

2) метод Ньютона назад:

$x_0=6,\ x_{-1}=5,\ x_{-2}=4,\ x_{-3}=3.$

3) метод Гаусса вперед:

$x_0=5,\ x_1=6,\ x_{-1}=4,\ x_2=7,\ x_{-2}=3,...$

4) Метод Гаусса назад:

$x_0=6,\ x_{-1}=5,\ x_1=7,\ x_{-2}=4,...$

3.18 Интерполяционный многочлен Эрмита

Рассмотрим общую задачу интерполирования (3.1)-(3.2). Если сумма кратностей $k_0+k_1+...+k_s=n+1$, то интерполяционный многочлен степени не выше n, называется **интерполяционным многочленом Эрмита** и имеет вид:

$$P(x)=\sum_{i=0}^{s}\sum_{j=0}^{k_i-1}\sum_{l=0}^{k_i-j-1}\frac{1}{j!l!}\frac{d^l}{dx^l}\left[\frac{(x-x_i)^{k_i}}{\Omega(x)}\right]\Bigg|_{x=x_i}\frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{k_i-l-j}}f^{(j)}(x_i),$$

где $\Omega(x)=(x-x_0)^{k_0}(x-x_1)^{k_1}...(x-x_s)^{k_s}$ – многочлен степени $n+1$.

3.19 Сходимость интерполяционного процесса

При практическом использовании интерполирования не всегда удается произвести оценку остаточных членов. Высшие производные, входящие в остаточные члены не всегда доступны. Поэтому уверенность в том, что, выбрав достаточно большое количество узлов, мы хорошо приблизимся к интерполируемой функции, была бы полезна в практическом интерполировании. В связи с этим возникает задача сходимости интерполяционного процесса.

Пусть на отрезке $[a,b]$ рассматривается функция $f(x)$ с конечными значениями. Предположим, что задана бесконечная треугольная таблица узлов, определяющая интерполяционный процесс

$$
\begin{array}{l}
x_0^0, \\
x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \\
x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
\tag{3.57}
$$

По заданным значениям узлов и соответствующим значениям функции на каждом шаге строится интерполяционный многочлен Лагранжа. На каждом шаге в качестве узлов используются все элементы строки таблицы (3.57). В результате имеем последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа $L_n(x), \quad n = 0,1,2,...$

Определение 3.10. Интерполяционный процесс называется **сходящимся**, если

$$
\forall x \in [a,b] \quad \lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x). \tag{3.58}
$$

Определение 3.11. Интерполяционный процесс называется **равномерно сходящимся**, если сходимость выражения (8.9) равномерная.

Практическая полезность задачи сходимости интерполяционного процесса очевидна, т.к. в ней выясняются условия, при которых возможно сколь угодно точное вычисление функции $f(x)$, если число узлов взято достаточно большим. Однако нет общего правила для нахождения числа узлов n, при котором погрешность интерполирования была бы сколь угодно малой. На практике часто бывает заранее известны некоторые свойства функции $f(x)$, по которым необходимо избрать способ интерполирования. Укажем некоторые теоремы о сходимости интерполяционных процессов.

Теорема3.5. Для каждой функции $f(x)$, непрерывной на конечном отрезке $[a,b]$, существует такая таблица узлов (3.57), что соответствующий ей интерполяционный процесс равномерно сходится к $f(x)$ на $[a,b]$.

В связи с этой теоремой возникает вопрос: существует ли таблица узлов (3.57) такая, чтобы соответствующий ей интерполяционный процесс сходился равномерно на $[a,b]$ для всякой непрерывной там функции.

Теорема 3.6. Не существует таблицы узлов (3.57), для которой интерполяционный процесс был бы равномерно сходящимся на $[a,b]$ для всякой непрерывной на этом отрезке функции $f(x)$.

Множество непрерывных функций является слишком широким, чтобы для него существовала единственная таблица узлов, обеспечивающая равномерную сходимость для всех функций множества. Существование такой таблицы возможно только для более узких множеств функций.

3.20 Сплайн-интерполирование

Для получения сходящегося интерполяционного процесса часто отрезок $[a,b]$ разделяют на части точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ и интерполируют функцию $f(x)$ не при помощи одного многочлена на всем отрезке $[a,b]$, а для каждого частичного отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ избирают свои узлы и строят свой интерполяционный многочлен $P_{k_i}^{i}(x)$ некоторой степени k_i. Построенные таким образом многочлены дают интерполирование функции $f(x)$ на всем отрезке. Необходимо отметить, что в точках x_i, где стыкуются соседние отрезки, интерполирование будет, вообще говоря, негладким и может быть даже разрывным, если точка x_i не принята за узел интерполирования при составлении многочленов $P_{k_{i-1i}}^{i-1}(x)$ и $P_{k_i}^{i}(x)$.

Чтобы устранить этот недостаток и построить составную функцию, гладко интерполирующую $f(x)$, обычно увеличивают степени многочленов $P_{k_i}^{i}(x)$ и берут их больше, чем нужно для интерполирования по взятым на $[x_i, x_{i+1}]$ узлам. При этом некоторые коэффициенты или другие параметры остаются произвольными. Их выбирают так, чтобы следующий многочлен

$P_{k_i}^i(x)$ был достаточно гладким продолжением с $[x_{i-1}, x_i]$ на $[x_i, x_{i+1}]$ предыдущего многочлена $P_{k_{i-1_i}}^{i-1}(x)$. Такое интерполирование называют **сплайн-интерполированием** (сплайн-приспособление, позволяющее плавно соединить дуги разных кривых, аналогичное по роли лекалу).

Определение 3.12. **Сплайн**–гладкая кривая, проходящая через точки (x_i, y_i), $i = 0,1,...,n$.

Пример. На отрезке $[0,1]$ функция $f(x)$ задана своими значениями $f_k = f(k/n)$ в равноотстоящих точках $x_k = k/n$, $k = 0,1,...,n$. Провести сплайн-интерполирование функции $f(x)$.

Решение. Рассмотрим многочлен второй степени $P_i(x) = ax^2 + bx + c$ на отрезке $[i/n, (i+1)/n]$. Выберем его так, чтобы в точках $x_i = i/n$, $x_{i+1} = (i+1)/n$, он принимал такие же значения, как и $f(x)$. Очевидно, многочлен $P_i(x)$ можно представить в виде суммы линейного многочлена, принимающего на концах отрезка такие же значения, как и $f(x)$, и многочлена второй степени, обращающегося в нуль на концах отрезка. Легко проверить, что такое представление имеет вид

$$P_i(x) = (nx - i) f_{i+1} - (nx - i - 1) f_i + A_i (nx - i)(nx - i - 1). \qquad (3.59)$$

В каждом многочлене $P_i(x)$ остается произвольным параметр A_i. Выберем эти параметра так, чтобы производные от многочленов $P_{i-1}(x)$ и $P_i(x)$ в точке $x_i = i/n$, где соединяются отрезки $[(i-1)/n, i/n]$ и $[i/n, (i+1)/n]$, были разными. Это даст уравнение

$$P_i'(i/n) = nf_{i+1} - nf_i - nA_i = P_{i-1}'(i/n) = nf_i - nf_{i-1} - nA_{i-1},$$

или

$$A_{i-1} + A_i = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1} = \Delta^2 f_{i-1}, \quad i = 1,2,...,n-1. \qquad (3.60)$$

Число параметров A_i равно n, тогда как число уравнений на единицу меньше. Один из параметров A_i остается произвольным и может быть выбран из дополнительного условия или задан произвольно. Например, если известно значение $f'(0)$, то параметр A_0 может быть найден из условия

$$P_0'(0) = nf_1 - nf_0 - nA_0 = f'(0), \qquad \to \quad -A_0 = \frac{1}{n} f_0' + f_0 - f_1 .$$

Наиболее часто применяется многочлен третьей степени. Интерполяция кубическими сплайнами представляет собой локальную интерполяцию, когда на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,...,n$, используется кубическая кривая, удовлетворяющая некоторым условиям гладкости, а именно, непрерывности функции и ее первой и второй производных в узловых точках. Использование кубической функции вызвано следующими соображениями. Если предположить, что интерполяционная кривая соответствует упругой линейке, закрепленной в точках (x_i, y_i), то из курса сопротивления материалов известно, что эта кривая определяется как решение дифференциального уравнения $f^{(IV)}(x) = 0$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Общим решением такого уравнения является многочлен третьей степени, который удобно записать в виде

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c_i(x - x_{i-1})^2 + d_i(x - x_{i-1})^3, \quad x_{i-1} \le x \le x_i, \quad i = 1,...,n \tag{3.61}$$

Коэффициенты функций $P_i(x)$ определяются из условий непрерывности функции и ее первой и второй производных во внутренних узлах x_i, $i = 1,...,n-1$.

Из формул (3.61) при $x = x_{i-1}$, получим

$$P_i(x_{i-1}) = y_{i-1} = a_i, \quad i = 1,...,n, \tag{3.62}$$

а при $x = x_i$

$$P_i(x_i) = a_i + b_i h_i + c_i h_i^2 + d_i h_i^3 = y_i, \quad i = 1,...,n. \tag{3.63}$$

Условия непрерывности интерполяционной функции записываются в виде

$$P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i), \quad i = 1,...,n-1$$

и из условий (3.62) и (3.63) следует, что они выполнимы.

Найдем производные функции $P_i(x)$:

$$P_i'(x) = b_i + 2c_i(x - x_{i-1}) + 3d_i(x - x_{i-1})^2, \qquad P_i''(x) = 2c_i + 6d_i(x - x_{i-1}).$$

При $x = x_i$ получим $P_i'(x_i) = b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2$, $P_i''(x_i) = 2c_i + 6d_i h_i$.

Условия непрерывности производных приводят к уравнениям

$$P_i'(x_i) = P_{i+1}''(x_i) \Rightarrow b_i + 2c_i h_i + 3d_i h_i^2 = b_{i+1}, \quad i = 1,\dots,n-1. \tag{3.64}$$

$$P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i) \Rightarrow 2c_i + 6d_i h_i = 2c_{i+1}, \quad i = 1,\dots,n-1. \tag{3.65}$$

Всего имеем $4n-2$ уравнений для определения $4n$ неизвестных. Чтобы получить еще два уравнения, используют краевые условия, например, требование нулевой кривизны интерполяционной кривой в краевых точках, т.е. равенства нулю второй производной на концах отрезка $[a,b]$, $x_0 = a$, $x_n = b$:

$$P_1''(x_0) = 2c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \qquad P_n''(x_n) = 2c_n + 6d_n h_n = 0 \Rightarrow c_n + 3d_n h_n = 0. \tag{3.66}$$

Систему уравнений (3.62)-(3.66) можно упростить и получить рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов сплайна.

4. ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

4.1 Обратное интерполирование

Задача отыскания значения аргумента по заданному значению функции решается методами обратного интерполирования. При этом возможны два случая.

1. Если заданная функция монотонна, то обратное интерполирование осуществляется путем замены функции аргументом и обратно и последующего интерполирования. Оценка остаточного члена в данном случае будет такова же, как и при прямом интерполировании, только производные от прямой функции заменятся на производные от обратной функции.

Пример. По заданным значениям функции найти значение x, для которого $y = 0$.

x	1	2	2,5	3
y	-6	-1	15,625	16

Решение. Из таблицы видно, что функция монотонна. Тогда

$$L_3(y) = 1\frac{(y+1)(y-15{,}625)(y-16)}{(-5)(-21{,}625)(-22)} + 2\frac{(y+6)(y-16_2)(y-15{,}625)}{5(-17)(-16{,}625)} +$$
$$+2{,}5\frac{(y+6)(y+1)(y-16)}{21{,}625\cdot 16{,}625(-0{,}375)} + 3\frac{(y+6)(y+1)(y-15{,}625)}{22\cdot 17\cdot 0{,}375}.$$

Полагая $y = 0$, получим $x = 1{,}793$.

2. Если заданная функция не монотонна, то, не меняя ролями функцию и аргумент, записывают интерполяционную формулу, используя известные значения аргумента. Считая функцию известной, решают полученное уравнение относительно аргумента.

$$f(x) = y. \tag{4.1}$$

По узлам $x_0, x_1, \dots, x_n$ строится интерполяционный многочлен $L_n(x)$. Решается уравнение

$$L_n(x) = y. \tag{4.2}$$

Оценим ошибку в этом случае.

$$f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n) \tag{4.3}$$

Предположим, что необходимо найти значение $\bar{x}$, при котором $f(\bar{x})=\bar{y}$ ($\bar{y}$ задано). Будем решать уравнение $L_n(x)=\bar{y}$. В результате решения получим некоторое значение $\bar{\bar{x}}$. Подставляя в предыдущее равенство, получим

$$f(\bar{\bar{x}})-L_n(\bar{\bar{x}})=f(\bar{\bar{x}})-\bar{y}=f(\bar{\bar{x}})-f(\bar{x})=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(\bar{\bar{x}}).$$

Применяя формулу конечных приращений:

$$(\bar{\bar{x}}-\bar{x})f'(\eta)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(\bar{\bar{x}}), \tag{4.4}$$

где $\eta\in(\bar{x},\bar{\bar{x}})$.

Если (a,b) интервал, содержащий $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$, и $\min\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|=m_1\neq 0$, то из (4.4) следует

$$|\bar{\bar{x}}-\bar{x}|\le\frac{M_{n+1}}{m_1(n+1)!}\omega_n(\bar{\bar{x}}). \tag{4.5}$$

При этом предполагается, что уравнение $L_n(x)=\bar{y}$ решено точно.

Пример. По заданным значениям функции найти значение x, для которого $y=-2$.

x	0	-1	2
y	-5	-4	-1

Решение. Из таблицы видно, что функция не монотонна. Тогда

$$L_2(x)=-5\frac{(x+1)(x-2)}{1\cdot(-2)}-4\frac{x(x-2)}{(-1)(-3)}-1\frac{x(x+1)}{2\cdot 3}=x^2-5.$$

Полагая $L_2(x)=-2$, получим уравнение для определения x:

$$x^2-3=0.$$

Отсюда, $x=\pm\sqrt{3}$.

Если число узлов велико, то применение этого способа приведет к решению алгебраического уравнения высокой степени. Для решения таких уравнений применяются специальные методы.

Метод обратного интерполирования используется для нахождения корней уравнений. Пусть требуется решить уравнение

$$f(x)=0.$$

Рассмотрим функцию $y=f(x)$ и составим таблицу её значений, близких к нулю. При этом количество узлов выбираем в зависимости от требуемой точности корня. В качестве x_0 и x_1 берём те соседние узлы, в которых

$$f(x_0)f(x_1)<0,$$

и применяя метод обратного интерполирования, отыскиваем значение x, при котором $y=0$. В данном случае для расчётов удобно применять схему Эйткена.

4.2 Численное дифференцирование

К численному дифференцированию приходится прибегать в том случае, когда функция $f(x)$, для которой нужно найти производную, задана таблично, или функциональная зависимость имеет сложное аналитическое выражение. В этом случае вместо функции $f(x)$ рассматривают интерполирующую функцию $\varphi(x)$ и считают производную функции $f(x)$ приближенно равной производной $\varphi(x)$. Тогда

$$f(x)=\varphi(x)+R(x),$$

$$f^{(k)}(x)=\varphi^{(k)}(x)+R^{(k)}(x).$$

Отсюда $f^{(k)}(x)\approx\varphi^{(k)}(x)$, и погрешность такого приближения определяется $R^{(k)}(x)$. Вообще говоря, если величина $R(x)$ мала, это еще не значит, что будет мала величина $R^{(k)}(x)$. Практика показывает, что при таком способе вычисления производных получается сравнительно большая погрешность.

Возьмем в качестве интерполирующей функции интерполяционный многочлен Ньютона для интерполирования вперед:

$$f(x) = P_n(x_0 + th) = f_0 + tf_{1/2}^1 + \frac{t(t-1)}{2!} f_1^2 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f_{3/2}^3 + ... \qquad (4.6)$$

В результате последовательного дифференцирования, получим

$$f'(x) = \frac{df}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \left[t = \frac{x - x_0}{h} \right] = \frac{1}{h} \left[f_{1/2}^1 + \frac{2t-1}{2!} f_1^2 + \frac{3t^2 - 6t + 2}{3!} f_{3/2}^3 + ... \right],$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2} \left[f_1^2 - \frac{6t-6}{3!} f_{3/2}^3 + ... \right].$$

В частности при $x = x_0$ будем иметь

$$f'(x_0) = \frac{1}{h} \left[f_{1/2}^1 - \frac{1}{2!} f_1^2 + \frac{1}{3} f_{3/2}^3 - \frac{1}{4} f_2^4 + ... \right],$$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2} \left[f_1^2 - f_{3/2}^3 + \frac{11}{12} f_4^2 - ... \right].$$

Если использовать оператор конечных разностей Δ, то

$$\left(h \cdot \frac{d}{dx} \right)^n f(x_0) = \{\ln(1+\Delta)\}^n f(x_0), \qquad (4.7)$$

где $\ln(1+\Delta) = \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - ...$ формально возводится в степень как многочлен.

Пример. Найти производные функции $f(x) = x^3 - 2x - 5$ при $x_0 = 1$.

Решение. Построим таблицу конечных разностей

x_i	f_i	Δf	$\Delta^2 f$	$\Delta^3 f$
1	-6			
		5		
2	-1		12	
		17		6
3	16		18	
		35		6
4	51		24	
		59		
5	110			

Используя соотношение (4.7) и значения таблицы, получим

$$h \cdot \frac{df(x_0)}{dx} = \Delta f_0 - \frac{\Delta^2 f_0}{2} + \frac{\Delta^3 f_0}{3} \;\rightarrow\; f'(1) = 5 - 6 + 2 = 1.$$

$$h^2 \cdot \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2} = \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \ldots\right)^2 f_0 = \Delta^2 f_0 - \Delta^3 f_0 \;\rightarrow\; f''(1) = 12 - 6 = 6.$$

$$h^3 \cdot \frac{d^3 f(x_0)}{dx^3} = \left(\Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \ldots\right)^3 f_0 = \Delta^3 f_0 \;\rightarrow\; f'''(1) = 6.$$

Заметим, что с ростом порядка производной обычно резко падает точность численного дифференцирования. Поэтому на практике редко применяют формулы численного дифференцирования для производных выше второго порядка.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2003.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы.,т.1, М.: Наука, 1975.
3. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1966.
4. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002.
5. Копчёнов Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.
6. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы, т.1, - М.: Наука, 1976.
7. Самарский А.А. Введение в численные методы. М.: Наука, 1987.
8. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные лекции по прикладной математике. М.: Наука, 1984.