Модуль 3. Случайные величины и их распределения в вероятностном пространстве общего вида

Тема 7. Вероятностные пространства общего вида

Откажемся теперь от конечности и счетности пространства элементарных исходов и перейдем к общему случаю. Итак, пусть имеется пространство элементарных исходов Ω произвольной мощности. В общей аксиоматике сохраняется понятие события как подмножества множества Ω. Однако теперь не требуется, чтобы любое подмножество $A \subset \Omega$ было событием. Требуется лишь, чтобы теоретико-множественные операции, производимые над счетным числом событий, приводили опять к событиям.

Определение 7.1. Система A подмножеств множества Ω называется σ-алгеброй, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Omega \in \mathrm{A}$, $\varnothing \in \mathrm{A}$;

2) если $A \in \mathrm{A}$, то $\overline{A} \in \mathrm{A}$;

3) если $\{A_i\}_{i \in I}$ – некоторое счетное семейство подмножеств Ω и при всех $i \in I$ $A_i \in \mathrm{A}$, то подмножества $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ и $\bigcap\limits_{i \in I} A_i$ также принадлежат A.

Следующее определение дает нам способ задания интересующих нас σ-алгебр.

Определение 7.2. Пусть A – некоторый класс подмножеств Ω. σ-алгеброй, порожденной данным классом, называется наименьшая σ-алгебра $\mathrm{B} = \sigma(\mathrm{A})$, содержащая данный класс.

Таким образом, если $\mathrm{B} = \sigma(\mathrm{A})$, то B – σ-алгебра, $\mathrm{B} \supset \mathrm{A}$, и если B' – другая σ-алгебра, обладающая этим свойством, то $\mathrm{B}' \supset \mathrm{B}$.

Можно показать, что для любого класса A подмножеств Ω σ-алгебра, порожденная данным классом, существует и единственна.

Воспользуемся описанной выше конструкцией для определения борелевской σ-алгебры на числовой прямой (аналогичным образом можно определить борелевскую σ-алгебру на любом отрезке числовой прямой).

Определение 7.3. Пусть A – класс всех открытых интервалов числовой прямой. σ-алгебра, порожденная данным классом, называется борелевской σ-алгеброй.

ТЕОРЕМА 7.1. Борелевская σ-алгебра на числовой прямой содержит следующие подмножества:

1) отдельные точки;
2) полуоткрытые и замкнутые интервалы;
3) множество рациональных точек;
4) множество иррациональных точек;
5) открытые множества;
6) замкнутые множества;

7) множества вида $\{x : f(x) \le c\}$, где f – непрерывная функция, c – константа.

Доказательство

1) каждую точку $a \in R$ можно представить в виде $a = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right)$. Все интервалы – борелевские множества, и их счетное пересечение – также борелевское;
2) утверждение следует из 1) и равенств $[a,b) = (a,b) \cup \{a\}$, $(a,b] = (a,b) \cup \{b\}$, $[a,b] = (a,b) \cup \{a\} \cup \{b\}$;
3) множество рациональных точек является борелевским как счетное объединение отдельных точек;
4) множество иррациональных точек является борелевским как дополнение к множеству рациональных точек;
5) каждое открытое множество является борелевским как объединение счетного числа интервалов;
6) каждое замкнутое множество является борелевским как дополнение к открытому множеству.
7) каждое множество вида $\{x : f(x) \le c\}$ является борелевским как замкнутое множество.

Пример множества, не являющегося борелевским, привести трудно. Все множества, имеющие практический интерес, являются борелевскими.

Определение 7.4. Пусть Ω – пространство элементарных исходов, A – σ-алгебра событий. Вероятностью называется функция $P : \Omega \to R$, обладающая свойствами:

1) $P(\Omega) = 1$, $P(\varnothing) = 0$,

2) если $\{A_i\}_{i \in I}$ – класс событий, I не более чем счетно, при всех $i \ne j$ $A_i \cap A_j = \varnothing$, то верно равенство $P\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \sum\limits_{i \in I} P(A_i)$.

Последнее равенство называется *свойством счетной аддитивности вероятности*.

Замечание. Условия 1) и 2) называются *аксиомами Колмогорова*.

Определение 7.5. Тройка (Ω, A, P), где Ω – множество (называемое множеством элементарных исходов), A – σ-алгебра (называемая σ-алгеброй событий), P – функция, обладающая свойствами 1) – 2) предыдущего определения (называемая вероятностью), называется вероятностным пространством.

ТЕОРЕМА 7.2. Вероятность обладает следующими свойствами:

1) $0 \le P(A) \le 1$; 2) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

3) $A \subset B \Rightarrow P(A) \le P(B)$; 4) $P\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) \le \sum\limits_{i \in I} P(A_i)$.

Доказательство

1) – 3) доказывается точно так же, как в конечном случае; 4) примем без доказательства.

Определение 7.6. Говорят, что имеется задача на геометрическую вероятность, если Ω – некоторая область в R^n, $n = 1,2,3$, имеющая конечную лебеговскую меру, A – класс борелевских подмножеств R^n, а вероятность P определяется формулой $\forall A \in \mathrm{A} \quad P(A) = \dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, где $\mu(A)$ – лебеговская мера множества A.

Замечание. При $n = 1$, то есть на прямой, μ – это длина или сумма длин; при $n = 2$, то есть на плоскости, μ – это площадь или сумма площадей; при $n = 3$, то есть в пространстве, μ – это объем или сумма объемов.

Тема 8. Случайные величины. Математическое ожидание

Для вероятностного пространства общего вида сохраняется определение случайной величины как функции $\xi(\omega)$, однако добавляется требование, заключающееся в том, что прообраз каждого борелевского множества должен являться событием.

Определение 8.1. Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство, R – множество действительных чисел, B – σ-алгебра борелевских множеств. Случайной величиной называется отображение $\xi : \Omega \to R$, обладающее свойством $\forall x \in \mathrm{B} \quad \xi^{-1}(x) \in \mathrm{A}$, где $\xi^{-1}(x) = \{\omega : \xi(\omega) \in X\}$ – прообраз множества X при отображении ξ.

Определение 8.2. Случайная величина ξ называется простой, если ее можно представить в виде $\xi = \sum_i x_i \mathrm{I}_{A_i}$, где $x_1, \ldots, x_i, \ldots$ – действительные числа, $\mathrm{I}_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A_i, \\ 0, & \omega \notin A_i, \end{cases}$ $i = 1,2,\ldots$ (I_{A_i} называется индикатором события A_i), система множеств $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ является разбиением Ω, то есть обладает свойствами:

1) $\forall i \quad A_i \neq \varnothing$, 2) $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \varnothing$, 3) $\bigcup_i A_i = \Omega$.

Определение 8.3. Интегралом Лебега от простой случайной величины $\xi = \sum_i x_i \mathrm{I}_{A_i}$ (или математическим ожиданием этой случайной величины) называется выражение

$$\mathrm{M}\xi = \int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega) = \int_\Omega \xi dP = \sum_i x_i P(A_i),$$

если ряд в правой части сходится абсолютно.

ЛЕММА. Значение $\int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega)$ не зависит от способа представления ξ в виде $\sum_i x_i \mathrm{I}_{A_i}$, то есть, если $\xi = \sum_i x_i \mathrm{I}_{A_i} = \sum_j y_j \mathrm{I}_{B_j}$, то $\sum_i x_i P(A_i) = \sum_j y_j P(B_j)$.

Без доказательства.

ТЕОРЕМА 8.1. Если ξ и η – простые случайные величины и существуют интегралы $\int_\Omega \xi dP$ и $\int_\Omega \eta dP$, то $\xi + \eta$ – также простая случайная величина и справедливо равенство $\int_\Omega (\xi + \eta) dP = \int_\Omega \xi dP + \int_\Omega \eta dP$.

Доказательство. Пусть $\xi = \sum_i x_i \mathrm{I}_{A_i}$, $\eta = \sum_j y_j \mathrm{I}_{B_j}$. Тогда ξ и η можно представить в виде $\xi = \sum_k a_k \mathrm{I}_{D_k}$, $\eta = \sum_k b_k \mathrm{I}_{D_k}$ соответственно, где $\{D_k\}_{k=1,2,\ldots} = \{A_i \cap B_j\}_{\substack{i=1,2,\ldots \\ j=1,2,\ldots}}$. Таким образом, справедливо равенство $\xi + \eta = \sum_k a_k \mathrm{I}_{D_k} + \sum_k b_k \mathrm{I}_{D_k} = \sum_k (a_k + b_k) \mathrm{I}_{D_k}$, то есть $\xi + \eta$ является простой случайной величиной. Имеем далее

$$\int_\Omega \xi dP + \int_\Omega \eta dP = \sum_k a_k P(D_k) + \sum_k b_k P(D_k) = \sum_k (a_k + b_k) P(D_k) = \int_\Omega (\xi + \eta) dP,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

ТЕОРЕМА 8.2. Для простой случайной величины ξ и действительного числа C справедливо равенство $\int_\Omega (C\xi) dP = C \int_\Omega \xi dP$.

Доказательство. Имеем $\xi = \sum_i x_i \mathrm{I}_{A_i}$, $C\xi = \sum_i C x_i \mathrm{I}_{A_i}$,

$$\int_\Omega (C\xi) dP = \sum_i (C x_i) P(A_i) = C \sum_i x_i P(A_i) = C \int_\Omega \xi dp,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 8.3. Если ξ – простая случайная величина, то справедливо неравенство $\left| \int_\Omega \xi(\omega) P(d\xi) \right| \leq \sup_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)|$.

Доказательство. Пусть $\xi = \sum_i x_i \mathrm{I}_{A_i}$. Имеем

$$\left| \int_\Omega \xi(\omega) P(d\xi) \right| = \left| \sum_i x_i P(A_i) \right| \leq \sum_i |x_i| P(A_i) \leq \sup_j |x_j| \sum_i P(A_i) =$$

$$= \sup_j |x_j| \leq \sup_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)|,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 8.4. Если последовательность простых случайных величин $\{\xi_n\}$ равномерно сходится к случайной величине ξ, то последовательность интегралов $\int\limits_\Omega \xi_1 dP$, $\int\limits_\Omega \xi_2 dP$, …, $\int\limits_\Omega \xi_n dP$ фундаментальна в смысле Коши.

Доказательство. В самом деле, имеем

$$\left|\int\limits_\Omega \xi_n(\omega)P(d\omega) - \int\limits_\Omega \xi_m(\omega)P(d\omega)\right| = \left|\int\limits_\Omega (\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega))P(d\omega)\right| \le$$

$$\le \sup_{\omega\in\Omega}|\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \to 0, n \to 0, m \to 0.$$

ТЕОРЕМА 8.5. Для любой случайной величины ξ существует последовательность ξ_n простых случайных величин, сходящихся к ξ равномерно.

Доказательство. Определим при всех натуральных n и целых k множества $A_k^{(n)} = \left\{\omega : \frac{k}{n} \le \xi(\omega) < \frac{k+1}{n}\right\} = \xi^{-1}\left\{\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right)\right\}$. Положим $\xi_m(\omega) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} 1_{A_k^{(n)}}(\omega)$, $n = 1,2,\ldots$. Тогда из неравенства $\forall\omega\in\Omega \quad |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \le \frac{1}{n}$ вытекает, что $\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$ при $n \to \infty$ равномерно по ω, что и требовалось доказать.

Определение 8.4. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность простых случайных величин, сходящаяся к случайной величине ξ равномерно. Положим $\int\limits_\Omega \xi(\omega)P(d\omega) \overset{df}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega \xi_n(\omega)P(d\omega)$ (если предел правой части существует).

Замечание. Можно показать, что значение $\int\limits_\Omega \xi dP$ не зависит от способа представления ξ в виде $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$. В частности, с учетом теоремы справедливо равенство $\int\limits_\Omega \xi(\omega)P(d\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} P\left\{\frac{k}{n} \le \xi < \frac{k+1}{n}\right\}$.

ТЕОРЕМА 8.6. Пусть ξ и η – случайные величины, $M\xi$ и $M\eta$ существуют. Тогда $M(\xi+\eta)$ также существует и справедливо равенство $M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta$.

Доказательство. Пусть $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n$. Тогда имеем

$$M\xi + M\eta = \lim_{n\to\infty} M\xi_n + \lim_{n\to\infty} M\eta_n = \lim_{n\to\infty} M(\xi_n + \eta_n) = M(\xi+\eta),$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 8.7. Справедливо равенство $M(C\cdot\xi) = C\cdot M\xi$.

Доказательство. Справедливость утверждений вытекает из цепочки равенств

$$M(C\cdot\xi) = \lim_{n\to\infty} M(C\cdot\xi_n) = C\cdot \lim_{n\to\infty} M\xi_n = C\cdot M\xi.$$

Тема 9. Распределения случайных величин. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения

Определение 9.1. Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство, R – множество действительных чисел, B – борелевская σ-алгебра, ξ – случайная величина. Распределением случайной величины ξ называется отображение $P_\xi : \mathrm{B} \to R$, определенное по формуле

$$\forall X \in \mathrm{B} \quad P_\xi(X) = P\left(\xi^{-1}(X)\right) = P\{\omega : \xi(\omega) \in X\}.$$

ТЕОРЕМА 9.1. Распределение P_ξ обладает свойствами:

1) $P_\xi(\varnothing) = 0$, $P_\xi(R) = 1$;

2) $P_\xi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P_\xi(X_i)$, если $X_i \cap X_j = \varnothing, i \ne j$.

Доказательство

1) $P_\xi(\varnothing) = P\left(\xi^{-1}(\varnothing)\right) = P(\varnothing) = 0$, $P_\xi(R) = P\left(\xi^{-1}(R)\right) = P(\Omega) = 1$.

2) $P_\xi\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i\right) = P\left(\xi^{-1}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} X_i\right)\right) = P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \xi^{-1}(X_i)\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P\left(\xi^{-1}(X_i)\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P_\xi(X_i)$,

что и требовалось доказать.

Таким образом, P_ξ является вероятностью, а пространство (R, B, P_ξ) – вероятностным пространством.

Замечание. Вместо R можно было бы взять R^n, а вместо B – соответствующую борелевскую σ-алгебру.

Определение 9.2. Функция $f : R \to R$ называется измеримой по Борелю, если выполняется условие $\forall X \in \mathrm{B} \quad f^{-1}(X) \in \mathrm{B}$, где $f^{-1}(X) = \{x : f(x) \in X\}$, то есть прообраз любого борелевского множества является борелевским.

Практически все встречающиеся функции являются измеримыми по Борелю.

ТЕОРЕМА 9.2. Пусть ξ – случайная величина, f – измеримая функция. Тогда $\eta = f(\xi)$ является случайной величиной.

Доказательство. Пусть $X \in \mathrm{B}$. Имеем

$$\eta^{-1}(X) = \xi^{-1}(f^{-1}(X)) \in \mathrm{B},$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть ξ – случайная величина, f – измеримая функция. Справедливо равенство $\int\limits_{\Omega} f(\xi(\omega))P(d\omega) = \int\limits_{R} f(x)P_{\xi}(dx)$, причем левая и правая части равенства существуют или нет одновременно.

Доказательство. Имеем

$$\int\limits_{\Omega} f(\xi(\omega))P(d\omega) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}P\left\{\omega : f(\xi(\omega)) \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}P\left\{\omega : \xi(\omega) \in f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right)\right\}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\Omega} f(x)P_{\xi}(dx) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}P_{\xi}\left\{x : \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n}\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}P\left\{\xi \in f^{-1}\left(\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)\right)\right\}.$$

Таким образом, интересующие нас интегралы являются пределами равных между собой сумм. Следовательно, они существуют или нет одновременно, а если существуют, то совпадают.

Теорема доказана.

Следствие. Справедливы равенства

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xP_{\xi}(dx), \quad D\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(x - M\xi)^2 P_{\xi}(dx).$$

Определение 9.3. Распределение P_{ξ} называется дискретным, если в пространстве R имеется не более чем счетное множество точек $Q = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$, на котором сосредоточена мера P_{ξ} (то есть $P_{\xi}(\overline{Q}) = 0$).

В дискретном случае P_{ξ} полностью определяется мерами $P_{\xi}(x_i)$, $i = 1,2,\ldots$, приписанными отдельным точкам x_i.

ЛЕММА. Пусть P_{ξ} – дискретное распределение, сосредоточенное на множестве $Q = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$. тогда для любого борелевского множества X справедливо равенство $P_{\xi} = \sum\limits_{i: x_i \in X} P_{\xi}(x_i)$.

Доказательство. В самом деле,

$$P_{\xi}(X) = P_{\xi}(X \cap Q) + P_{\xi}(X \cap Q) = \sum_{i: x_i \in X \cap Q} P_{\xi}(x_i) = \sum_{i: x_i \in X} P_{\xi}(x_i),$$

что и требовалось доказать.

Случайная величина ξ, имеющая дискретное распределение P_{ξ}, сосредоточенное на Q, устроена следующим образом: ξ принимает значения лишь из $Q = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$, причем $P_{\xi}(x_i) = P(\xi = x_i) = p_i$, является вероятностями отдельных значений. Такое распределение можно задать таблицей

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \xi & x_1 & \ldots & x_i & \ldots \\ \hline p & p_1 & \ldots & p_i & \ldots \end{array}.$$

ТЕОРЕМА 9.4. Пусть ξ – случайная величина, имеющая дискретное распределение P_{ξ}, f – измеримая функция. Тогда справедливо равенство

$$Mf(\xi) = \sum_i f(x_i)P_{\xi}(x_i) = \sum_i f(x_i)p_i, \text{ где } p_i = P_{\xi}(x_i) = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}.$$

Теорему примем без доказательства.

Следствие 1. $M\xi = \sum\limits_i x_i p_i$.

Следствие 2. $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sum\limits_i (x_i - M\xi)^2 p_i$.

Замечание. Данная формула и таблица распределения совпадают с теми, что мы имели в случае дискретного пространства Ω. Сейчас Ω может иметь любую мощность, но случайная величина ξ принимает не более чем счетное число значений.

Определение 9.4. Распределение P_{ξ} называется абсолютно непрерывным, если для любого борелевского множества $X \in \mathrm{B}$ справедливо равенство $P_{\xi}(x) = \int\limits_X f_{\xi}(x)dx$, где $f_{\xi}(x)$ – измеримая функция, называемая плотностью распределения.

ТЕОРЕМА 9.5. Плотность распределения $f_{\xi}(x)$ обладает следующими свойствами:

1) $f_{\xi}(x) \ge 0$ (с точностью до множества меры нуль);

2) $\int\limits_R f_{\xi}(x)dx = 1$.

Доказательство

1) в самом деле, $\forall X \in \mathrm{B}$ $\int\limits_X f_{\xi}(x)dx = P_{\xi}(X) = P(\xi \in X) \ge 0$. Следовательно, $f_{\xi}(x)$ может быть отрицательной только на множестве нулевой меры;

2) $\int\limits_R f_{\xi}(x)dx = P_{\xi}(R) = 1$.

ТЕОРЕМА 9.6. Пусть P_{ξ} – абсолютно непрерывное распределение, f_{ξ} – его плотность, g – измеримая функция. Тогда справедливо равенство $Mg(\xi) = \int\limits_R g(x)f_{\xi}(x)dx$.

Доказательство. Сначала предположим, что g является простой функцией, то есть принимает лишь счетное множество значений: $g(x) = \sum c_i 1_{X_i}$, $i = 1,2,\ldots$ где $X_i = \{x : g(x) = c_i\}$. Тогда случайная величина

$\eta = g(\xi)$ имеет дискретное распределение. Следовательно, справедлива цепочка равенств

$$Mg(\xi) = \int_R g(x) P_\xi(dx) = \sum_i c_i P(g(\xi) = c_i) = \sum_i c_i P(\xi \in g^{-1}\{c_i\}) =$$

$$= \sum_i c_i \int_{g^{-1}(\{c_i\})} f_\xi(x)\,dx = \sum_i \int_{g^{-1}(\{c_i\})} c_i f_\xi(x)\,dx = \sum_i \int_{g^{-1}(\{c_i\})} g(x) f_\xi(x)\,dx = \int_R g(x) f_\xi(x)\,dx.$$

Таким образом, требуемое равенство справедливо для простых функций g. Для произвольных измеримых функций оно получается путем предельного перехода.

Следствие. В условиях теоремы справедливы равенства

$$M\xi = \int_R x f_\xi(x)\,dx,\ D\xi = \int_R (x - M\xi)^2 f_\xi(x)\,dx.$$

Рассмотрим некоторые абсолютно непрерывные распределения.

1. Равномерное распределение на отрезке $[a,b]$.

Данное распределение задается плотностью $f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$

Найдем $M\xi$ и D_ξ.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\,dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \int_a^b x^2 f_\xi(x)\,dx - (M\xi)^2 = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx - (M\xi)^2 =$$

$$= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Нормальное распределение с параметрами a, σ.

Плотность данного распределения имеет вид $f(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Нетрудно проверить, что смысл параметров a и σ таков: $a = M\xi$, $\sigma^2 = D\xi$. С нормальным распределением мы еще встретимся, так как оно играет в теории вероятностей очень важную роль.

3. Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$.

Показательное распределение имеет плотность $f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Справедливы равенства $M\xi = \dfrac{1}{\lambda}$, $D\xi = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Постоянные множители находятся из условия $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Например, если бы нам было известно, что плотность имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} Ce^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$

то C мы нашли бы таким образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = C\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx = -\frac{C}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = -\frac{C}{\lambda}(-1) = \frac{C}{\lambda} = 1 \Rightarrow C = \lambda.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое индикатор события?
2. Как определяется простая случайная величина?
3. Как вычисляется математическое ожидание простой случайной величины?
4. Какими свойствами обладает математическое ожидание простой случайной величины?
5. Какими свойствами обладает математическое ожидание случайной величины?
6. Что такое распределение случайной величины?
7. Какими свойствами обладает распределение случайной величины?
8. Как определяется дискретное распределение?
9. По какой формуле вычисляется математическое ожидание дискретной случайной величины ξ?
10. По какой формуле вычисляется математическое ожидание квадрата дискретной случайной величины ξ?
11. По какой формуле вычисляется дисперсия дискретной случайной величины ξ?
12. Как определяется абсолютно непрерывное распределение?
13. Какими свойствами обладает плотность распределения?
14. По какой формуле вычисляется математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины ξ?
15. По какой формуле вычисляется математическое ожидание квадрата абсолютно непрерывной случайной величины ξ?
16. По какой формуле вычисляется дисперсия абсолютно непрерывной случайной величины ξ?
17. Как определяется плотность равномерного распределения на отрезке $[a,b]$?
18. Чему равно математическое ожидание случайной величины ξ, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a,b]$?
19. Чему равна дисперсия случайной величины ξ, имеющей равномерное распределение на отрезке $[a,b]$?

20. Как определяется плотность нормального распределения с параметрами a, σ?
21. Чему равно математическое ожидание случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение с параметрами a, σ?
22. Чему равна дисперсия случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение с параметрами a, σ?
23. Как определяется плотность показательного распределения с параметром $\lambda > 0$?
24. Чему равно математическое ожидание случайной величины ξ, имеющей показательное распределение с параметром $\lambda > 0$?
25. Чему равна дисперсия случайной величины ξ, имеющей показательное распределение с параметром $\lambda > 0$?

Тестовые задания

1. Плотность распределения случайной величины ξ обладает свойствами:

а) $f_\xi(x) \le 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1;$ б) $f_\xi(x) \ge 0, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1;$

в) $f_\xi(x) \le 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 1;$ г) $f_\xi(x) \ge 1, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx = 0.$

2. Следующая функция может быть плотностью распределения случайной величины ξ:

а) $f_\xi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]; \end{cases}$ б) $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], \\ 1, & x \notin [0,1]; \end{cases}$

в) $f_\xi(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]; \end{cases}$ г) $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], \\ -1, & x \notin [0,1]. \end{cases}$

3. Если ξ имеет распределение, задаваемое таблицей $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \xi & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ \hline p & p_1 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{array}$, то дисперсию ξ можно вычислить по формуле:

а) $D\xi = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M\xi) p_i \right)^2;$ б) $D\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M\xi) p_i^2;$

в) $D\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} ((x - M\xi) p_i)^2;$ г) $D\xi = \sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - M\xi)^2 p_i.$

4. Случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$. Тогда $M(\xi^7)$ можно вычислить по формуле:

а) $M(\xi^7) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x f_\xi(x))^7 dx;$ б) $M(\xi^7) = (\int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x) dx)^7;$

в) $M(\xi^7) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^7 f_\xi(x) dx;$ г) $M(\xi^7) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x (f_\xi(x))^7 dx.$

5. Если случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, то верно равенство:

а) $f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b+a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]; \end{cases}$ б) $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,b], \\ \dfrac{1}{a+b}, & x \notin [a,b]; \end{cases}$

в) $f_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b], \\ 0, & x \notin [a,b]; \end{cases}$ г) $f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a,b], \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \notin [a,b]. \end{cases}$

6. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[2,8]$. Тогда выполняется равенство:

а) $M\xi = 5;$ б) $M\xi = 4;$ в) $M\xi = 6;$ г) $M\xi = 0.$

7. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[2,14]$. Тогда выполняется равенство:

а) $D\xi = 196;$ б) $D\xi = 10;$ в) $D\xi = 36;$ г) $D\xi = 12.$

8. Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид $f_\xi(x) = \begin{cases} 5e^{-5x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$ Тогда верны равенства:

а) $M\xi = 5, \quad D\xi = 5;$ б) $M\xi = \dfrac{1}{5}, \quad D\xi = \dfrac{1}{5};$

в) $M\xi = 5, \quad D\xi = 25;$ г) $M\xi = \dfrac{1}{5}, \quad D\xi = \dfrac{1}{25}.$

9. Плотность распределения нормальной случайной величины имеет вид $f_\xi(x) = \dfrac{1}{7\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{98}}$. Тогда верны равенства:

а) $M\xi = 7, \quad D\xi = 5;$ б) $M\xi = 5, \quad D\xi = 7;$

в) $M\xi = 5, \quad D\xi = 49;$ г) $M\xi = 5, \quad D\xi = 98.$

10. Если случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,4]$, а случайная величина η – показательное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{3}$, то верно равенство:

а) $M(\xi+\eta)=5$; б) $M(\xi+\eta)=\frac{5}{6}$;

в) $M(\xi+\eta)=2\frac{1}{3}$; г) $M(\xi+\eta)=3\frac{1}{3}$.

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
б	а	г	в	в	а	г	г	в	а

Модуль 4. Функции распределения и характеристические функции случайных величин

Тема 10. Функция распределения случайной величины, ее свойства

Определение 10.1. Функцией распределения случайной величины ξ называется функция, определяемая формулой

$$F_\xi(x) = P_\xi((-\infty,x)) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}.$$

ТЕОРЕМА 10.1. Функция распределения случайной величины обладает следующими свойствами:

1) $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to\infty} F_\xi(x) = 1$;

3) $P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;

4) $P(a < \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a+0)$;

5) $P(\xi = a) = F_\xi(a+0) - F_\xi(a)$;

6) $\lim\limits_{x\to a-0} F_\xi(x) = F_\xi(a)$ (то есть функция распределения является непрерывной слева);

7) если P_ξ – абсолютно непрерывно, и f_ξ – плотность распределения, то $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$;

8) если P_ξ – абсолютно непрерывно, F_ξ – функция распределения, f_ξ – плотность распределения, то во всех точках непрерывности F_ξ справедливо равенство $f_\xi(x) = F_\xi(x)'$.

Предварительно сформулируем (без доказательства) следующую лемму.

ЛЕММА. Если события $A_1,\dots,A_n,\dots$ образуют возрастающую последовательность, то есть $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots$ и $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$. Если события $A_1,\dots,A_n,\dots$ образуют убывающую последовательность, то есть $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ и $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, то $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$.

Вернемся к доказательству теоремы:

1) если $x_1 < x_2$, то $\{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \subset \{\omega : \xi(\omega) < x_2\}$, следовательно, $P\{\omega : \xi(\omega) < x_1\} \le P\{\omega : \xi(\omega) < x_2\}$, то есть $F(x_1) \le F(x_2)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\xi(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} P(\xi < x) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\xi < -n) = P\left\{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega : \xi(\omega) < -n\}\right\} =$
$= P(\varnothing) = 0$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} F_\xi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} P(\xi < x) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\xi < n) = P\left\{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{\omega : \xi(\omega) < n\}\right\} =$
$= P(R) = 1$;

3) пусть $a < b$, $\{\omega : \xi(\omega) < b\} = \{\omega : \xi(\omega) < a\} \bigcup \{\omega : a \le \xi(\omega) < b\}$, тогда
$P\{\omega : \xi(\omega) < b\} = P\{\omega : \xi(\omega) < a\} + P\{\omega : a \le \xi(\omega) < b\}$,
$P(a \le \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;

4) $\{a < \xi < b\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{a + \frac{1}{n} \le \xi < b\right\}$,

$P\{a < \xi < b\} = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(a + \frac{1}{n} \le \xi < b\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(F_\xi(b) - F_\xi\left(a + \frac{1}{n}\right)\right) =$
$= F_\xi(b) - F_\xi(a+0)$;

5) $\{\xi = a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left\{a \le \xi < a + \frac{1}{n}\right\}$,

$P\{\xi = a\} = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(a \le \xi < a + \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(F_\xi\left(a + \frac{1}{n}\right) - F_\xi(a)\right) =$
$= F_\xi(a+0) - F_\xi(a)$;

6) $\lim\limits_{x\to a-0} F_\xi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} F_\xi\left(a-\frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\xi < a-\frac{1}{n}\right) = P\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\xi < a-\frac{1}{n}\right\}\right) =$

$= P(\xi < a) = F_\xi(a)$;

7) пусть P_ξ – абсолютно непрерывно, f_ξ – плотность распределения, тогда $F_\xi(x) = P(\xi < x) = P_\xi((-\infty, x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$;

8) вытекает из 7).

Теорема доказана.

<u>Пример 10.1.</u> Пусть ξ имеет дискретное распределение, задаваемое таблицей: $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \xi & x_1 & \dots & x_i & \dots & x_n \\ \hline p & p_1 & \dots & p_i & \dots & p_n \end{array}$, где $p_i = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$. Найти $F_\xi(x)$.

Рассмотрим значения функции распределения в каждом интервале, на которые разбивается числовая ось значениями случайной величины.

$x \le x_1$,

$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = 0$;

$x_1 < x \le x_2$,

$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = P\{\omega : \xi(\omega) = x_1\} = p_1$;

$x_2 < x \le x_3$,

$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = P\{\omega : \xi(\omega) = x_1\} + P\{\omega : \xi(\omega) = x_2\} = p_1 + p_2$;

...

$x_i < x \le x_{i+1}$,

$F_\xi(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_i$;

...

$x_{n-1} < x \le x_n$,

$F_\xi(x) = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$;

$x_n < x$,

$F_\xi(x) = 1$.

Таким образом, получаем функцию распределения в виде

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1; \\ p_1, & x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \le x_3; \\ \dots & \\ p_1 + \dots + p_i, & x_i < x \le x_{i+1}; \\ \dots & \\ p_1 + \dots + p_{n-1}, & x_{n-1} < x \le x_n; \\ 1, & x_n < x. \end{cases}$$

График функции распределения дискретной случайной величины представлен на рис. 1.

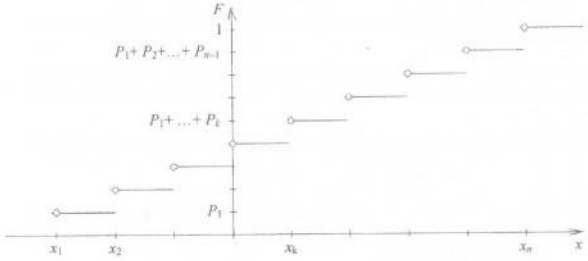

Рис. 1

Пусть случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$. Тогда

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = P\{\omega : \xi(\omega) \in (-\infty, x)\} = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt.$$

<u>Пример 10.2.</u> Пусть случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a,b]$, то есть $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]. \end{cases}$

Подсчитаем $F_\xi(x)$.

Пусть $x < a$, тогда $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$.

Пусть $a \le x \le b$, тогда

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\,dt = \frac{1}{b-a}\,t\Big|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Пусть $b < x$, тогда

$$F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{a} 0\,dt + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,dt + \int\limits_{b}^{x} 0\,dt = \frac{1}{b-a}\,t\Big|_a^b = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Получаем функцию распределения в виде $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b; \\ 1, & x > b. \end{cases}$

На рис. 2 изображен график функции распределения равномерно распределенной абсолютно непрерывной случайной величины.

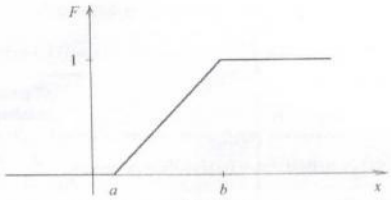

Рис. 2

Пример 10.3. Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, то есть выполняется равенство

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad x \ge 0; \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Подсчитаем $F_\xi(x)$ при $x \ge 0$. Очевидно, что при $x < 0$ $F_\xi(x) = 0$.

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \int_0^x e^{-\lambda t} d(\lambda t) = (-e^{-\lambda t})\Big|_0^x = -e^{-\lambda x} + 1.$$

Таким образом, получили

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если} \quad x \ge 0; \\ 0, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$$

Тема 11. Случайные векторы

Определение 11.1. Борелевской σ-алгеброй в пространстве R^n называется σ-алгебра, порожденная классом всех открытых параллелепипедов, то есть множеств вида $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \ldots \times (a_n, b_n)$. Данная σ-алгебра обозначается $\mathrm{B}(R^n)$ и множества из борелевской σ-алгебры называются борелевскими множествами. Таким образом будем рассматривать измеримое пространство $(R^n, \mathrm{B}(R^n))$.

Определение 11.2. Пусть (Ω, A, P) – вероятностное пространство. Случайным вектором называется отображение $\overline{\xi} : \Omega \to R^n$, обладающее свойством $\overline{\xi}^{-1}(T) \in \mathrm{A}$.

Замечание. Каждый случайный вектор ξ представляет собой упорядоченный набор n случайных величин: $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots, \xi_n)$.

Определение 11.3. Пусть ξ – некоторый случайный вектор. Распределением данного случайного вектора называется отображение $P_{\overline{\xi}} : \mathrm{B}(R^n) \to R$, удовлетворяющее равенствам

$$\forall T \in \mathrm{B}(R^n) \;\; P_{\overline{\xi}}(T) = P(\overline{\xi}^{-1}(T)) = P\{\omega : \overline{\xi}(\omega) \in T\}.$$

ТЕОРЕМА 11.1. Распределение $P_{\overline{\xi}}$ удовлетворяет аксиомам Колмогорова и, следовательно, является вероятностью.

Теорему примем без доказательства.

Определение 11.4. Распределение $P_{\overline{\xi}}$ случайного вектора $\overline{\xi}$ называется дискретным, если существует такое не более чем счетное множество $X \in \mathrm{B}(R^n)$, для которого $P_{\overline{\xi}}(X) = 1$.

Двумерный случайный вектор обычно обозначается (ξ, η). Дискретное распределение двумерного случайного вектора задается следующей таблицей

$\xi \backslash \eta$	y_1	$\ldots$	y_j	$\ldots$
x_1	r_{11}	$\ldots$	r_{1j}	$\ldots$
$\vdots$				
x_i	r_{i1}	$\ldots$	r_{ij}	$\ldots$
$\vdots$				

Здесь $x_1, \ldots, x_i, \ldots$ – значения, которые может принимать случайная величина ξ, $y_1, \ldots, y_i, \ldots$ – значения, которые может принимать случайная величина η, и $\forall i \;\; \forall j \;\; r_{ij} = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_i\}$.

Определение 11.5. Распределение $P_{\overline{\xi}}$ случайного вектора ξ называется абсолютно непрерывным, если существует такая измеримая функция $f_{\overline{\xi}}(\overline{x}) = f_{\xi_1 \ldots \xi_i \ldots \xi_n}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$, называемая плотностью распределения, для которой выполняется условие

$$\forall T \in \mathrm{B}(R^n) \;\; P_{\overline{\xi}}(T) = P\{\omega : \overline{\xi}(\omega) \in T\} = \int_T f_{\overline{\xi}}(\overline{x})\,d\overline{x}.$$

ТЕОРЕМА 11.2. Плотность распределения $f_{\overline{\xi}}(\overline{x})$ случайного вектора $\overline{\xi}$ обладает свойствами:

1) $\int_{R^n} f_{\overline{\xi}}(\overline{x})\,d\overline{x} = 1$; 2) $f_{\overline{\xi}}(\overline{x}) \ge 0$ почти всюду.

ТЕОРЕМА 11.3. Пусть случайный вектор (ξ, η) имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$. Тогда каждая компонента данного случайного вектора также имеет абсолютно непрерывное распределение, причем справедливы равенства:

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\,dy, \quad f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x, y)\,dx.$$

Доказательство. Если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$, то выполняется условие

$$\forall T \in \mathrm{B}(R)\ \ P\{\omega : \xi(\omega) \in T\} = \int_T f_\xi(x)\,dx.$$

Подсчитаем

$$P\{\omega : \xi(\omega) \in T\} = P\{\omega : \xi(\omega) \in T,\quad \eta(\omega) \in R\} = P\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in T \times R\} =$$

$$= \iint_{T\times R} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy = \int_T \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy \right) dx. \qquad (***)$$

Равенство (***) означает, что ξ имеет абсолютно непрерывное распределение и $f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dy$. Второе равенство доказывается аналогично.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 11.4. Пусть случайный вектор (ξ, η) имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_{\xi,\eta}(x,y)$. Тогда для того чтобы случайные величины ξ и η были независимы, необходимо и достаточно выполнение условия $f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$.

Доказательство

$$\xi \text{ и } \eta \text{ независимы} \overset{\det}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\det}{\Leftrightarrow} \forall S, T\ P\{\omega : \xi(\omega) \in S, \eta(\omega) \in T\} = P\{\omega : \xi(\omega) \in S\} \cdot P\{\omega : \eta(\omega) \in T\}.$$

Предположим, что $f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)$. Подсчитаем

$$P\{\omega : \xi(\omega) \in S, \eta(\omega) \in T\} = P\{\omega : (\xi(\omega), \eta(\omega)) \in S \times T\} =$$

$$= \iint_{S\times T} f_{\xi,\eta}(x,y)\,dxdy = \iint_{S\times T} f_\xi(x) \cdot f_\eta(y)\,dxdy = \left(\int_S f_\xi(x)\,dx \right) \cdot \left(\int_T f_\eta(y)\,dy \right) =$$

$$= P\{\omega : \xi(\omega) \in S\} \cdot P\{\omega : \eta(\omega) \in T\}.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 11.5. Если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$, а случайная величина η имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_\eta(y)$ и случайные величины ξ и η независимы, то $\xi + \eta$ также имеет абсолютно непрерывное распределение, плотность которого выражается равенством

$$f_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x-y) \cdot f_\eta(y)\,dy.$$

Данная формула называется *формулой свертки*, или *композицией распределений* (приводится без доказательства).

Тема 12. Характеристические функции. Центральная предельная теорема и теорема Муавра – Лапласа, их применение

Определение 12.1. Пусть случайная величина ξ обозначается $\varphi_\xi(t)$ и определяется равенством $\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi}$, $i^2 = -1$.

ТЕОРЕМА 12.1. Характеристическая функция обладает следующими свойствами:

1) $\varphi_\xi(0) = 1$;

2) $|\varphi_\xi(t)| \le 1$;

3) если $\eta = a\xi + b$, то $\varphi_\eta(t) = e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$;

4) если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимы, то выполняется равенство

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n}(t);$$

5) пусть у характеристической функции $\varphi_\xi(t)$ существуют производные до порядка m включительно, тогда $\forall k = \overline{1,m}$ выполняется равенство $\varphi_\xi^{(k)}(t)\big|_{t=0} = i^k \cdot M\xi^k$.

Доказательство

1) $\varphi_\xi(0) = Me^{i0\xi} = M1 = 1$;

2) $|\varphi_\xi(t)| = |Me^{it\xi}| \le M|e^{it\xi}| = M1 = 1$;

3) $\eta = a\xi + b$, $\varphi_\eta(t) = Me^{it\eta} = Me^{it(a\xi+b)} = M(e^{ita\xi} \cdot e^{itb}) = e^{itb} \cdot Me^{i(at)\xi} =$
$= e^{itb} \cdot \varphi_\xi(at)$;

4) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ – независимы $\Rightarrow$ $e^{it\xi_1}, e^{it\xi_2}, \ldots, e^{it\xi_n}$ тоже независимы,

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t) = Me^{it(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)} = M(e^{it\xi_1} \cdot e^{it\xi_2} \cdot \ldots \cdot e^{it\xi_n}) =$$
$$= (Me^{it\xi_1}) \cdot (Me^{it\xi_2}) \cdot \ldots \cdot (Me^{it\xi_n}) = (\varphi_{\xi_1}(t) \cdot \varphi_{\xi_2}(t) \cdot \ldots \cdot \varphi_{\xi_n}(t);$$

5) докажем для случая, когда случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$:

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \cdot f_\xi(x)\,dx; \quad \varphi'_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix) f_\xi(x)\,dx;$$

$$\varphi'_\xi(t)\big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} (ix) f_\xi(x)\,dx = i \int_{-\infty}^{\infty} x f_\xi(x)\,dx = i \cdot M\xi;$$

$$\varphi_\xi''(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix)^2 f_\xi(x)\,dx;$$

$$\varphi_\xi''(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty}(ix)^2 f_\xi(x)\,dx = i^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f_\xi(x)\,dx = i^2\cdot M\xi^2;$$

...

$$\varphi_\xi^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}(ix)^k f_\xi(x)\,dx;$$

$$\varphi_\xi^{(k)}(t)\Big|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty}(ix)^k f_\xi(x)\,dx = i^k\int_{-\infty}^{\infty}x^k f_\xi(x)\,dx = i^k\cdot M\xi^k.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 12.2. Если у двух случайных величин совпадают характеристические функции, то распределения данных случайных величин также совпадают.

Замечание. Если случайная величина ξ имеет дискретное распределение, задаваемое таблицей $\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} \xi & x_1 & \dots & x_k & \dots \\ \hline p & p_1 & \dots & p_k & \dots \end{array}$, то характеристическую функцию данной случайной величины можно вычислять по формуле

$$\varphi_\xi(t) = \sum_k e^{itx_k}\cdot p_k.$$

<u>Пример 11.1</u>. Вычислим характеристическую функцию для распределения Пуассона с параметром λ.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} \xi & 0 & 1 & \dots & m & \dots \\ \hline p & p_0 & p_1 & \dots & p_m & \dots \end{array}$$

$$\forall m \quad p_m = P\{\omega : \xi(\omega) = m\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}.$$

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm}p_m = \sum_{m=0}^{\infty} e^{itm}\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(e^{it}\cdot\lambda)^m}{m!} = e^{-\lambda}\cdot e^{e^{it}\cdot\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Таким образом, для распределения Пуассона $\varphi_\xi(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

Пусть имеем распределение Пуассона с параметром λ. Вычислим $M\xi$ и $D\xi$.

$$\varphi'(t) = (e^{\lambda(e^{it}-1)})' = e^{\lambda(e^{it}-1)}\cdot\lambda e^{it}\cdot i;$$

$$\varphi_\xi'(t)\Big|_{t=0} = \lambda\cdot i = iM\xi \Rightarrow M\xi = \lambda;$$

$$\varphi_\xi''(t) = \lambda i(e^{\lambda(e^{it}-1)}\cdot(e^{it})^2\cdot\lambda i + e^{\lambda(e^{it}-1)}\cdot e^{it}\cdot i);$$

$$\varphi_\xi''(t)\Big|_{t=0} = \lambda^2 i^2 + \lambda i^2 = i^2\cdot M\xi^2 \Rightarrow M\xi^2 = \lambda^2 + \lambda;$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

ТЕОРЕМА 12.3. Пусть случайная величина ξ_1 имеет распределение Пуассона с параметром λ_1, случайная величина ξ_2 имеет распределение Пуассона с параметром λ_2, тогда случайная величина $\xi_1+\xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

Доказательство 1. Рассмотрим

$$P\{\xi_1+\xi_2 = m\} = \sum_{k=0}^{m} P\{\xi_1 = k, \xi_2 = m-k\} = \sum_{k=0}^{m} P\{\xi_1 = k\}\cdot P\{\xi_2 = m-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda_1}\frac{(\lambda_1)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda_2}\frac{(\lambda_2)^{m-k}}{(m-k)!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot(\lambda_1+\lambda_2)^m\sum_{k=0}^{m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\cdot\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{m-k}\cdot C_m^k\cdot\frac{1}{m!} =$$

$$= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}\cdot\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^m = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\cdot\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^m}{m!}.$$

Доказательство 2

$$\varphi_{\xi_1}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}; \quad \varphi_{\xi_2}(t) = e^{\lambda_2(e^{it}-1)};$$

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\cdot\varphi_{\xi_2}(t) = e^{\lambda_1(e^{it}-1)}\cdot e^{\lambda_2(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{it}-1)}.$$

Получили характеристическую функцию распределения Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$. Таким образом, $\xi_1+\xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1+\lambda_2$.

Теорема доказана.

Замечание. Если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$, то выполняется равенство

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f_\xi(x)\,dx.$$

<u>Пример 11.2</u>. Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами (a,σ). Подсчитаем $\varphi_\xi(t)$.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

тогда

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi}f_\xi(x)\,dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx = (\text{рассмотрим показатель}$$

$$itx-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}=itx-\frac{x-2ax+a^2}{2\sigma^2}=\frac{2\sigma^2itx-x^2+2ax-a^2}{2\sigma^2}=$$

$$=-\frac{x^2-2(a+\sigma^2it)x+a^2}{2\sigma^2}=$$

$$=-\frac{x^2-2(a+\sigma^2it)x+(a^2+\sigma^2it)^2-(a+\sigma^2it)^2+a^2}{2\sigma^2}=$$

$$=-\frac{(x-a-\sigma^2it)^2-a^2-2a\sigma^2it-\sigma^4i^2t^2+a^2}{2\sigma^2}=$$

$$=-\frac{\left(\frac{x-a}{\sigma}-\sigma it\right)^2-2ait+\sigma^2t^2}{2})=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\left(\frac{x-a}{\sigma}-\sigma it\right)^2-2ait+\sigma^2t^2}{2}}dx=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\left(\frac{x-a}{\sigma}-\sigma it\right)^2}{2}}e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}dx=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\left(\frac{x-a}{\sigma}-\sigma it\right)^2}{2}}dx=$$

$$=(\text{обозначим } z=\frac{x-a}{\sigma}-\sigma it,\ dz=\frac{dx}{\sigma},\ dx=\sigma\,dz)=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma dz=(\text{так как } \int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}\ \text{– интеграл Пуассона})=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot\sqrt{2\pi}=e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}.$$

Таким образом, $\varphi_\xi(t)=e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$.

Пусть ξ имеет нормальное распределение с параметрами (a,σ). Подсчитаем $M\xi$ и $D\xi$.

$$\varphi'_\xi(t)=\left(e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\right)'=e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot\left(ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)'=e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot(ai-\sigma^2t);$$

$$\varphi'_\xi(t)\big|_{t=0}=ai=iM\xi\ \Rightarrow\ M\xi=a.$$

$$\varphi''_\xi(t)=e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}=e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}\cdot(ai-\sigma^2t)^2+e^{ait-\frac{\sigma^2t^2}{2}}(-\sigma^2);$$

$$\varphi''_\xi(t)\big|_{t=0}=a^2i^2+i^2\sigma^2=i^2M\xi^2\ \Rightarrow\ M\xi^2=a^2+\sigma^2.$$

$$D\xi=a^2+\sigma^2-a^2=\sigma^2.$$

ТЕОРЕМА 12.4. Если случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $(0,1)$ и $\eta=\sigma\xi+a$, то случайная величина η имеет нормальное распределение с параметрами (a,σ).

Доказательство. Если ξ имеет нормальное распределение с параметрами (0,1), то $a=0$, $\sigma=1$ и тогда $\varphi_\xi(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Если $\eta=\sigma\xi+a$, то $\varphi_\eta(t)=e^{ait}\cdot\varphi_\xi(\sigma t)=e^{ait}\cdot e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}}=e^{ait-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$.

Теорема доказана.

Замечание. Пусть случайная величина ξ_1 имеет нормальное распределение с параметрами (a_1,σ_1), а ξ_2 имеет нормальное распределение с параметрами (a_2,σ_2). Тогда плотности распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 равны $f_{\xi_1}(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}$, $f_{\xi_2}(x)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$.

По формуле свертки получаем

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi_1}(x-y)f_{\xi_2}(y)dy=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(x-y-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}dy.$$

ТЕОРЕМА 12.5. Пусть случайная величина ξ_1 имеет нормальное распределение с параметрами (a_1,σ_1), а ξ_2 имеет нормальное распределение с параметрами (a_2,σ_2) и случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, тогда $\xi_1+\xi_2$ имеет нормальное распределение с параметрами $(a_1+a_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$.

Доказательство. Выпишем характеристические функции данных случайных величин

$$\varphi_{\xi_1}(t)=e^{a_1it-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}},\ \varphi_{\xi_2}(t)=e^{a_2it-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}}.$$

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t)=e^{a_1it-\frac{\sigma_1^2t^2}{2}}\cdot e^{a_2it-\frac{\sigma_2^2t^2}{2}}=e^{(a_1+a_2)it-\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}},$$

то есть получили характеристическую функцию для суммы $\xi_1+\xi_2$ с параметрами $(a_1+a_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА (центральная предельная теорема). Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots$ – последовательность независимых случайных величин, у каждой из которых существует $M\xi_i=a_i$, $D\xi_i=\sigma_i^2$. Обозначим $S_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i$,

$A_n = MS_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, $B_n = DS_n = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$. Тогда при выполнении условия $\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n} M|\xi_i - a_i|^3 \to 0$ при $n \to \infty$ справедливо соотношение $\forall x$ $P\left\{\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ при $n \to \infty$ и равномерно по x.

Замечание. Поскольку $A_n = MS_n$, $B_n = DS_n$, то $M\left(\frac{S_n - A_n}{B_n}\right) = 0$, а $D\left(\frac{S_n - A_n}{B_n}\right) = 1$ и тогда $P\left\{\frac{S_n - A_n}{B_n} < x\right\} = F_{\frac{S_n - A_n}{B_n}}(x)$. Таким образом, слева в утверждении теоремы находится функция распределения нормированных сумм независимых случайных величин.

Если ξ имеет нормальное распределение с параметрами (a,σ), то $f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$.

Если ξ имеет нормальное распределение с параметрами (0,1), то $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, а $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Итак, справа в утверждении теоремы находится функция распределения случайной величины, имеющей нормальное распределение с параметрами (0,1). Таким образом, в центральной предельной теореме (ЦПТ) утверждается, что распределение последовательности нормированных сумм независимых случайных величин сходится к стандартному нормальному распределению.

Приведем пример использования ЦПТ.

Пусть дана последовательность случайных величин $\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots$, удовлетворяющая условиям теоремы, и пусть требуется вычислить вероятность того, что $S_n \in [c,d)$. Имеем

$$P\{c \le S_n < d\} = P\left\{\frac{c - A_n}{B_n} \le \frac{S_n - A_n}{B_n} < \frac{d - A_n}{B_n}\right\} =$$

$$= F_{\frac{S_n - A_n}{B_n}}\left(\frac{d - A_n}{B_n}\right) - F_{\frac{S_n - A_n}{B_n}}\left(\frac{c - A_n}{B_n}\right) \approx$$

$$\approx F_\xi\left(\frac{d - A_n}{B_n}\right) - F_\xi\left(\frac{c - A_n}{B_n}\right) = \Phi\left(\frac{d - A_n}{B_n}\right) - \Phi\left(\frac{c - A_n}{B_n}\right),$$

где $F_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа. (Функция Лапласа обладает свойствами $\Phi(0) = 0$, $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, $\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = \frac{1}{2}$.)

<u>Следствие</u> (ТЕОРЕМА Муавра – Лапласа). Пусть дана последовательность n испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p в каждом испытании. Пусть μ_n – количество «успехов» в последовательности n испытаний Бернулли. Тогда справедливо:

$$\forall x \quad P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} l^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ при } n\to\infty \text{ равномерно по } x.$$

Доказательство. Определяем случайную величину $\mu^{(i)}$ равенством

$$\mu^{(i)} = \begin{cases} 1, \text{ если в } i\text{-м испытании "успех"}, \\ 0, \text{ если в } i\text{-м испытании "неудача"}. \end{cases}$$

Тогда $\mu^{(i)}$ имеет распределение $\begin{array}{c|c|c} \mu^{(i)} & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array}$, и $M\mu^{(i)} = 0\cdot(1-p) + 1\cdot p = p$, $M\left(\mu^{(i)}\right)^2 = 0^2\cdot(1-p) + 1^2\cdot p = p$, $D\mu^{(i)} = p - p^2 = p(1-p)$.

Теперь воспользуемся ЦПТ при

$$\xi_i \sim \mu^{(i)};\ S_n \sim \mu_n;\ a_i \sim p;\ \sigma_i^2 \sim p(1-p);\ A_n \sim np;\ B_n^2 \sim np(1-p).$$

Проверим выполнение условия:

$$\frac{1}{B_n^\xi}\sum_{i=1}^{n} M|\xi_i - a_i|^3 \to 0,\ n \to \infty.$$

Заметим, что

$$B_n^3 = \left(B_n^2\right)^{\frac{3}{2}} = \left(np(1-p)\right)^{\frac{3}{2}} = n^{\frac{3}{2}}\cdot\left(p(1-p)\right)^{\frac{3}{2}};$$

$$M|\xi_i - a_i|^3 = M\left|\mu^{(i)} - p\right|^3 = c,\ \sum_{i=1}^{n} M\left|\mu^{(i)} - p\right|^3 = nc.$$

Тогда $\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n} M|\xi_i - a_i|^3 = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}\left(p(1-p)\right)^{\frac{3}{2}}}\cdot nc = \frac{c}{\sqrt{n}\left(p(1-p)\right)^{\frac{3}{2}}} \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, условие ЦПТ выполняется и, следовательно, справедливо утверждение ЦПТ. Тогда $\forall x$, $P\left\{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} l^{-\frac{t^2}{2}}dt$ при $n \to \infty$ равномерно по x.

Теорема доказана.

Рассмотрим применение теоремы Муавра – Лапласа.

Пусть проводятся n испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p в каждом испытании. Пусть μ_n – количество «успехов». Имеем

$$P\{m_1 \le \mu_n < m_2\} = P\left\{\frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} < \frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right\} =$$

$$= F_{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F_{\frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}}\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx$$

$$\approx F\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Контрольные вопросы

1. Что такое функция распределения?
2. Какими свойствами обладает функция распределения?
3. Может ли функция распределения принимать значения -2; -1; $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$; 1; 2?
4. Как связаны функция и плотность абсолютно непрерывного распределения?
5. Какой вид имеет функция равномерного распределения на отрезке $[a,b]$?
6. Какой вид имеет функция показательного распределения с параметром $\lambda > 0$?
7. Что такое случайный вектор?
8. Как определяется распределение случайного вектора?
9. Какими свойствами обладает плотность распределения случайного вектора?
10. Как, зная плотность распределения двумерного случайного вектора, вычислить плотности распределения его компонент?
11. Как формулируется критерий независимости случайных величин, имеющих абсолютно непрерывное распределение?
12. Как определяется характеристическая функция случайной величины ξ?
13. Какими свойствами обладает характеристическая функция случайной величины ξ?
14. Чему равна характеристическая функция суммы независимых случайных величин?
15. Как вычисляется характеристическая функция для дискретных распределений?

16. Как вычисляется характеристическая функция для абсолютно непрерывных распределений?
17. Какое распределение имеет сумма независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно?
18. Какое распределение имеет сумма независимых случайных величин, имеющих нормальное распределение с параметрами (a_1, σ_1) и (a_2, σ_2) соответственно?
19. Как определяется функция Лапласа?
20. Какими свойствами обладает функция Лапласа?
21. Как формулируется центральная предельная теорема?
22. Как формулируется теорема Муавра – Лапласа?

Тестовые задания

1. Функция распределения случайной величины ξ определяется равенством:

а) $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) > x\}$; б) $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}$

в) $F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) = x\}$; г) другое.

2. Если $F_\xi(x)$ – функция распределения случайной величины ξ и $x_1 < x_2$, то выполняется соотношение:

а) $F_\xi(x_1) \le F_\xi(x_2)$; б) $F_\xi(x_1) \ge F_\xi(x_2)$;

в) $F_\xi(x_1) = F_\xi(x_2)$; г) $F_\xi(x_1) + F_\xi(x_2) = 0$.

3. Если $F_\xi(x)$ – функция распределения, а f_ξ – плотность распределения абсолютно непрерывной случайной величины ξ и $x_1 < x_2$, то выполняется равенство:

а) $F'_\xi(x) = f_\xi(x)$; б) $f'_\xi(x) = F_\xi(x)$;

в) $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)dx$; г) $f_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_\xi(x)dx$.

4. Функция равномерного распределения на отрезке $[a,b]$ имеет вид:

а) $F_\xi(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$; б) $F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ если } a < x \le b, \\ 1, \text{ если } x > b; \end{cases}$

в) $F_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ если } x \in [a,b], \\ 0, \text{ в противном случае}; \end{cases}$ г) $F_\xi(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ если } a < x \le b, \\ 0, \text{ если } x > b. \end{cases}$

5. Если $f_{\xi\eta}(x,y)$ – плотность распределения случайного вектора (ξ,η), то справедливо равенство:

а) $f_\xi(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dy=1$;

в) $f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$; г) $f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dy$.

6. Характеристическая функция случайной величины ξ определяется равенством:

а) $\varphi_\xi(t)=M\xi^{it}$; б) $\varphi_\xi(t)=Me^{i\xi}$; в) $\varphi_\xi(t)=Me^{it}$; г) $\varphi_\xi(t)=Me^{it\xi}$.

7. Если случайная величина ξ имеет абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_\xi(x)$, то выполняется равенство:

а) $\varphi_\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx$; б) $\varphi_\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itf_\xi(x)}dx$;

в) $\varphi_\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{itx} f_\xi(x)dx$; г) $\varphi_\xi(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} xe^{it} f_\xi(x)dx$.

8. Независимость случайных величин ξ и η необходима для выполнения равенств:

а) $f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dy$; б) $f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dx$;

в) $f_{\xi\eta}(t)=f_\xi(x)f_\eta(y)$; г) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{\xi\eta}(x,y)dxdy=1$.

9. Функция Лапласа $\Phi(x)$ определяется равенством:

а) $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$; б) $\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$;

в) $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$; г) $\Phi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

10. Пусть ξ_1 и ξ_2 независимы, ξ_1 имеет распределение Пуассона с параметром λ_1, ξ_2 имеет распределение Пуассона с параметром λ_2. Тогда сумма $\xi_1+\xi_2$ имеет распределение Пуассона, параметр которого равен: а) $\lambda_1-\lambda_2$; б) $\lambda_1+\lambda_2$; в) $\lambda_1\cdot\lambda_2$; г) $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	а	а	б	г	г	а	в	в	б

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

Севастьянов В.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1982.

Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Наука, 1988.

Пугачев В.С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1979.

Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 2000.

Тутубалин В.Н. Теория вероятностей. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1972.