

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

И.А. Кузнецова, О.А. Мыльцина, И.Я. Чернявский

Учебное издание

Кузнецова Ирина Александровна,
Мыльцина Ольга Анатольевна,
Чернявский Иосиф Яковлевич

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие для студентов заочного отделения
механико-математического факультета

В двух частях

Часть 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Ответственный за выпуск О.Л. Багаева
Технический редактор Л.В. Агальцова
Корректор Е.Б. Крылова

Оригинал-макет подготовлен О.А. Мыльциной, О.Л. Багаевой

Подписано в печать 13.05.2009.

Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,49(3,75). Уч.-изд. л. 3,3. Тираж 100 экз. Знаки 50.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Издательства Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие для студентов заочного отделения
механико-математического факультета

В двух частях

Часть 1. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2009

УДК 519.2(0.75.4)
ББК 22.17я73
К89

Кузнецова И.А., Мыльшина О.А., Чернявский И.Я.
К89 Теория вероятностей и математическая статистика: В 2 ч. Ч. 1.
Теория вероятностей: Учеб. пособие для студентов заоч. отделения
мех.-мат. фак. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2009. – 60 с.: ил.
ISBN 978-5-292-03912-9

В пособии излагаются основные идеи и методы теории вероятностей, рассматриваются фундаментальное понятие случайной величины, изучаются важнейшие классы случайных величин и их характеристики, исследуется прёзельное поведение случайных величин. Приведены контрольные вопросы и тестовые задания.

Для студентов заочного отделения механико-математического факультета. Оно может быть полезно также студентам дневного отделения факультетов, на которых преподаётся «Теория вероятностей и математическая статистика».

Рекомендуют к печати:

Кафедра теории вероятностей, математической статистики
и управления стохастическими процессами
механико-математического факультета
Саратовского государственного университета
Доктор физико-математических наук *В.В. Розен*
Доктор технических наук *Ю.И. Митрофанов*

УДК 519.2(0.75.4)
ББК 22.17я73

Работа издана в авторской редакции

ISBN 978-5-292-03912-9

© Кузнецова И.А., Мыльшина О.А.,
Чернявский И.Я., 2009
© Саратовский государственный
университет, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Модуль 1. Конечное вероятностное пространство	7
Тема 1. Конечное вероятностное пространство	7
Тема 2. Условная вероятность. Независимость событий	10
Тема 3. Случайные величины и их характеристики	13
Контрольные вопросы	16
Тестовые задания	18
Ответы	19
Модуль 2. Случайные величины и их распределения в конечном вероятностном пространстве	19
Тема 4. Независимость случайных величин	19
Тема 5. Распределения Бернулли и Пуассона	22
Тема 6. Закон больших чисел	25
Контрольные вопросы	27
Тестовые задания	28
Ответы	29
Модуль 3. Случайные величины и их распределения в вероятностном пространстве общего вида	30
Тема 7. Вероятностные пространства общего вида	30
Тема 8. Случайные величины. Математическое ожидание	32
Тема 9. Распределения случайных величин. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения	35
Контрольные вопросы	39
Тестовые задания	40
Ответы	42
Модуль 4. Функции распределения и характеристические функции случайных величин	42
Тема 10. Функции распределения случайной величины, ее свойства	42
Тема 11. Случайные векторы	46
Тема 12. Характеристические функции. Центральная предельная теорема и теорема Муавра – Лапласа, их применение	49
Контрольные вопросы	56
Тестовые задания	57
Ответы	58
<i>Список рекомендуемой литературы</i>	59

Введение

Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» является одним из основных для студентов, обучающихся по специальности «Прикладная информатика». Цель курса – усвоение сущности и условий применения теории вероятностей, изучение вероятностных и статистических закономерностей, законов распределения, наиболее употребляемых в социально-экономических приложениях, методов статистической обработки экспериментальных данных.

«Теория вероятностей и математическая статистика» относится к числу прикладных математических дисциплин, поскольку она направлена на решение задач и возникла из практических потребностей, но в ней широко используются математические методы. Для усвоения курса необходимо знание теории множеств, математического анализа, линейной алгебры. Главное внимание в курсе лекций уделяется изложению разделов теории вероятностей и математической статистики, используемых в приложениях. Знание курса «Теория вероятностей и математическая статистика» нужно для усвоения таких дисциплин, как «Теория игр», «Математические методы в экономике», «Эконометрика», «Имитационное моделирование социально-экономических процессов» и др.

Содержание курса разбито на 8 модулей, каждый из которых содержит теоретический материал, контрольные вопросы, позволяющие проверить усвоение теории, и тестовые задания для подготовки к итоговому тестированию. Первая часть курса (модули 1 – 4) посвящена «Теории вероятностей», вторая (модули 5 – 8) – «Математической статистике».

В первом модуле излагаются три темы: «Конечное вероятностное пространство», «Условная вероятность. Независимость событий» и «Случайные величины и их характеристики».

В первой теме модуля рассматривается построение теоретико-вероятностной модели случайного эксперимента с конечным числом исходов, вводится понятие вероятности и исследуются ее свойства. Вторая тема посвящена условной вероятности и независимости событий. Наиболее важной в данном модуле является тема «Случайные величины и их характеристики», где рассмотрены основополагающие понятия случайной величины и ее распределения, рассматриваются математическое ожидание и дисперсия случайной величины, их свойства и методы вычисления.

Контрольные вопросы призваны обратить внимание студентов на основные свойства вероятности и характеристик случайных величин. Тестовые задания ориентированы на применение изученных свойств при исследовании событий и случайных величин.

Второй модуль содержит темы «Независимость случайных величин», «Распределения Бернулли и Пуассона», «Закон больших чисел».

В первой теме модуля приводится определение независимости случайных величин, формулируется и доказывается критерий независимости. Обращается внимание на свойства, присущие только независимым случайным величинам. Также вводится и исследуется коэффициент корреляции, характеризующий меру зависимости случайных величин. В теме «Распределения Бернулли и Пуассона» вводятся и исследуются вышеупомянутые распределения, их характеристики и области применения. В третьей теме модуля рассматриваются закономерности поведения последовательности случайных величин, проявляющиеся при большом числе опытов. Контрольные вопросы позволяют обратить внимание студентов на более важные моменты данной темы. В тестовых заданиях проверяется усвоение смысла и следствий независимости случайных величин, свойств коэффициента корреляции, формул Бернулли и Пуассона.

В четвертом модуле рассматриваются темы «Вероятностные пространства общего вида», «Случайные величины. Математическое ожидание» и «Распределения случайных величин. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения». Данный модуль является одним из самых сложных в курсе. Здесь мы отказываемся от требования конечности или счетности множества элементарных исходов и исследуем общий случай.

Первая тема модуля посвящена математически строгому построению вероятностных пространств общего вида. Во второй теме приводится определение случайной величины как измеримой функции случайного аргумента и строится теория математического ожидания как интеграл Лебега. Первые две темы предназначены в основном для студентов, желающих получить более глубокие знания по данному предмету. В третьей теме модуля рассматриваются два важнейших класса распределений: дискретные и абсолютно непрерывные. Приведены примеры случайных величин каждого из классов, выведены формулы для подсчета их характеристик. Следует обратить внимание на абсолютно непрерывные распределения, в частности, на нормальное распределение, играющее главную роль в теории вероятностей. В контрольных вопросах особое внимание обращается на методы вычисления характеристик дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин. В тестах проверяется усвоение данных методов и понимание применяемых формул.

Четвертый модуль содержит темы «Функция распределения случайных величин», «Случайные векторы» и «Характеристические функции. Центральная предельная теорема и теорема Муавра – Лапласа, их применение».

В первой теме модуля изучаются функции распределения, позволяющие задавать явным образом как дискретные, так и абсолютно непрерывные распределения. Вторая тема посвящена случайным векторам, их распределениям и способам определения. Наиболее важной является третья тема модуля. В ней определяются и исследуются характеристические функции, позволяющие находить распределения сумм независимых случайных величин, вычислять их характеристики и т.п. Также в этой теме приведена центральная предельная теорема, играющая особую роль в теории вероятностей, и ее следствие — теорема Муавра — Лапласа. В контрольных вопросах особое внимание обращается на понимание свойств функций распределения и характеристических функций. Тестовые задания направлены на проверку знания функций распределения в конкретных случаях, а также методов их вычисления для дискретных и абсолютно непрерывных распределений.

Модуль 1. Конечное вероятностное пространство

Тема 1. Конечное вероятностное пространство

Теория вероятностей изучает математические модели случайных экспериментов, то есть таких экспериментов, исход которых не определяется однозначно условиями опыта. Типичным примером случайного эксперимента является бросание монеты: монета может упасть либо кверху гербом, либо кверху цифрой. Теория вероятностей имеет дело не с любыми случайными экспериментами, а лишь с экспериментами, обладающими свойствами статистической устойчивости или устойчивости частот. Так, при большом числе независимых подбрасываний правильной монеты частота выпадения герба будет близка к $\frac{1}{2}$. Однако в современной математической теории вероятностей оставляют в стороне проблему статистической устойчивости и рассматривают математическую модель, в которой отражены все возможные исходы эксперимента и считаются известными связанные с данным экспериментом вероятности. Наиболее простой вид эта модель имеет в случае, когда множество возможных исходов эксперимента конечно.

Определение 1.1. Множеством элементарных исходов некоторого случайного эксперимента называется множество $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n\}$.

Пример. Пусть эксперимент состоит в однократном подбрасывании шестигранного кубика, на гранях которого написаны числа от 1 до 6. Множество элементарных исходов в данном случае имеет вид $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Определение 1.2. Событием называется любое подмножество множества элементарных исходов. События будем обозначать буквами A, B, C, \dots с индексом или без индекса.

Если имеется некоторое «событие» в интуитивном смысле этого слова \tilde{A} , связанное со случайным экспериментом, то в теории вероятностей модели ему будет соответствовать подмножество A тех элементарных исходов, при которых данное «событие» (в интуитивном смысле) осуществляется. Так, с нашим примером (с бросанием кубика) связаны следующие

«события»: \bar{A} – «количество выпавших очков чётно», \bar{B} – «количество выпавших очков не превосходит 4».

В теоретико-вероятностной модели им соответствуют события $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

С помощью теоретико-множественных операций из одних событий можно получать другие.

Определение 1.3. Событие, противоположное событию A , обозначается \bar{A} и определяется равенством $\bar{A} = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}$. Читается «не A ».

Определение 1.4. Пересечение событий A и B обозначается $A \cap B$ и определяется равенством

$$A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, \omega \in B\}.$$

Читается « A и B ».

Определение 1.5. Объединение событий A и B обозначается $A \cup B$ и определяется равенством $A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$. Читается « A или B ».

В нашем примере с бросанием кубика $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$ («количество выпавших очков нечётно»); $A \cap B = \{2, 4\}$ («количество выпавших очков четно и не превосходит 4»); $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ («количество выпавших очков четно или не превосходит 4»).

Напомним известные свойства теоретико-множественных операций, которые мы в дальнейшем будем использовать без специальных оговорок.

$$\bar{\bar{A}} = \emptyset, \quad \bar{\emptyset} = \Omega, \quad A \cup \bar{A} = \Omega, \quad A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A \cap \Omega = A, \quad A \cup \Omega = \Omega,$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cup B = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \bar{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Определение 1.6. События A и B называются несовместными, если выполняется равенство $A \cap B = \emptyset$.

Определение 1.7. Пусть Ω – множество элементарных исходов. Вероятностью элементарных исходов называется отображение p множества элементарных исходов Ω в множество действительных чисел R ($p : \Omega \rightarrow R$), обладающее свойствами $\forall \omega \in \Omega \quad p(\omega) \geq 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

Таким образом, каждому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ сопоставляется число $p(\omega)$, называемое вероятностью данного элементарного исхода.

Замечание. Если все элементарные исходы равновозможны и их количество равно n , то вероятность каждого элементарного исхода определяется равенством $\forall \omega \in \Omega \quad p(\omega) = \frac{1}{n}$.

В примере подбрасывания кубика, если кубик симметричный, выполняется равенство $p(1) = p(2) = \dots = p(6) = \frac{1}{6}$.

Определение 1.8. Конечным вероятностным пространством называется пара (Ω, p) , где Ω – конечное множество элементарных исходов, p – вероятность элементарных исходов.

Определение 1.9. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, p) . Тогда вероятность любого события A обозначается $P(A)$ и определяется равенством $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$.

В нашем примере

$$P(A) = p(2) + p(4) + p(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$P(B) = p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

ТЕОРЕМА. Вероятность события обладает следующими свойствами:

1) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$;

2) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;

3) $\forall A \quad 0 \leq P(A) \leq 1$;

4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

5) $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

6) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Доказательство

1) $P(\emptyset) = \sum_{\omega \in \emptyset} p(\omega) = 0; P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$;

2) пусть $A \subset B$, тогда верны соотношения

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \leq \sum_{\omega \in B} p(\omega) = P(B);$$

3) поскольку $\forall A \quad \emptyset \subset A \subset \Omega$, то из 2) следует неравенство $P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$,

а из 1) – $0 \leq P(A) \leq 1$;

4) справедлива цепочка равенств

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in B} p(\omega) - \sum_{\omega \in A \cap B} p(\omega) = \\ = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5) если $A \cap B = \emptyset$, то $P(A \cap B) = 0$ и $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

6) Так как $A \cup \bar{A} = \Omega$ и $A \cap \bar{A} = \emptyset$, то верны соотношения $1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$, откуда вытекает равенство

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Замечание. Если все элементарные исходы равновозможны, то вероятность любого события A можно вычислять по формуле $P(A) = \frac{m_A}{n}$, где

m_A – количество элементов множества A , а n – общее количество элементарных исходов. Данное равенство называется *классическим определением вероятности*. Словесно оно формулируется следующим образом: «Вероятность любого события равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих появлению данного события, к общему числу элементарных исходов». В нашем примере

$$n = 6, m_A = 3, m_B = 4, P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Тема 2. Условная вероятность. Независимость событий

Определение 2.1. Пусть даны события A и B , причем $P(B) > 0$. Условная вероятность события A относительно события B обозначается $P(A|B)$ и определяется равенством $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Замечание. Введение именно такого определения условной вероятности объясняется следующими соображениями. В условиях классического определения вероятности имеем

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{m_A \cap B}{n}}{\frac{m_B}{n}} = \frac{m_{A \cap B}}{m_B},$$

то есть в роли общего числа исходов выступает количество элементов B , а в роли числа благоприятствующих исходов – количество общих элементов A и B .

Определение 2.2. События A и B называются независимыми, если выполняется равенство $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Замечание. Если событие A не зависит от события B , то справедливо соотношение $P(A|B) = P(A)$, равносильное условиям $\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$; $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Аналогичное равенство получается, если предположить что B не зависит от A . Данное нами определение предпочтительнее, во-первых, из соображений симметрии A и B , а во-вторых, потому что оно не требует выполнения условий $P(A) > 0$ или $P(B) > 0$.

Определение 2.3. События A_1, \dots, A_n называются независимыми в совокупности, если для любой системы индексов

$$\{j_1, \dots, j_k, \dots, j_e\} \subset \{1, \dots, i, \dots, n\}$$

выполняется равенство

$$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k} \cap \dots \cap A_{j_e}) = P(A_{j_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{j_k}) \cdot \dots \cdot P(A_{j_e}).$$

Замечание. Пусть $n = 3$. Тогда независимость в совокупности событий A_1, A_2, A_3 означает выполнение равенств

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2), P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3),$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3), P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Пример 2.1. Пусть в примере с подбрасыванием кубика $A = \{2, 4, 6\}$ («количество выпавших очков четное»), $C = \{3, 6\}$ («количество выпавших очков делится на 3»), $D = \{6\}$ («количество выпавших очков делится на 6»). Найдем $P(A|C), P(C|A)$ и проверим независимость событий A и C .

$$\begin{aligned} A \cap C &= \{6\}, n = 6, m_A = 3, m_C = 2, m_{A \cap C} = 1, \\ P(A) &= \frac{m_A}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(A \cap C) = \frac{m_{A \cap C}}{n} = \frac{1}{6}. \\ P(A|C) &= \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = P(A), P(C|A) = \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} = P(C), \\ P(A \cap C) &= \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(C). \end{aligned}$$

Следовательно, события A и C являются независимыми. Этого следовало ожидать, поскольку делимость на 2 никак не связана с делимостью на 3.

Теперь найдем $P(C|D), P(D|C)$ и проверим независимость событий C и D .

$$\begin{aligned} C \cap D &= \{6\}, m_D = 1, m_{C \cap D} = 1, P(D) = \frac{m_D}{n} = \frac{1}{6}, P(C \cap D) = \frac{m_{C \cap D}}{n} = \frac{1}{6}, \\ P(C|D) &= \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1 \neq P(C), P(D|C) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \neq P(D), \\ P(C \cap D) &= \frac{1}{6} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(C) \cdot P(D). \end{aligned}$$

Следовательно, события C и D являются зависимыми. Этого также следовало ожидать, поскольку делимость на 6 влечет за собой делимость на 3.

В следующей теореме приводится способ вычисления вероятности события A при выполнении определенных условий.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть даны события $H_1, \dots, H_i, \dots, H_n$, называемые гипотезами и обладающие свойствами:

$$1) \forall i = 1, \dots, n \quad P(H_i) > 0;$$

$$2) \forall i \neq j \quad H_i \cap H_j = \emptyset;$$

$$3) H_1 \cup \dots \cup H_i \cup \dots \cup H_n = \Omega.$$

Тогда вероятность любого события A можно вычислять по формуле

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i),$$

называемой *формулой полной вероятности*.

Доказательство. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap \Omega) = P(A \cap (\bigcup_{i=1}^n H_i)) = P(\bigcup_{i=1}^n (A \cap H_i)) = \sum_{i=1}^n P(A \cap H_i) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Гипотезы H_1, \dots, H_n можно трактовать как взаимоисключающие условия некоторого случайного эксперимента.

Следующая теорема позволяет пересчитывать вероятности гипотез после наступления некоторого события.

ТЕОРЕМА 2.2. В условиях предыдущей теоремы справедливо равенство

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k)}, \quad i = 1, \dots, n, \text{ называемое формулой Байеса.}$$

Доказательство. При всех $i = 1, \dots, n$ имеем

$$P(A \cap H_i) = P(A) \cdot P(H_i|A) = P(H_i) \cdot P(A|H_i),$$

откуда получаем

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k)},$$

что и требовалось доказать.

Пример 2.2. На некотором заводе первый цех выпускает 50% всей продукции, второй цех – 30% и третий цех – 20%. Известно, что первый цех допускает 1% брака, второй цех – 2% брака и третий цех – 5% брака.

1. Найти вероятность того, что случайным образом проверенное изделие завода окажется бракованным.

2. Случайным образом проверенное изделие завода оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно выпущено третьим цехом.

Решение. Пусть гипотеза H_1 состоит в том, что изделие выпущено первым цехом, H_2 – вторым цехом, H_3 – третьим цехом. Событие A означает, что изделие бракованное. Из условия задачи имеем

$$\begin{aligned} P(H_1) &= 0,5, \quad P(H_2) = 0,3, \quad P(H_3) = 0,2, \quad P(A|H_1) = 0,01, \quad P(A|H_2) = 0,02, \\ P(A|H_3) &= 0,05. \end{aligned}$$

Для ответа на первый вопрос применяем формулу полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + P(H_3) \cdot P(A|H_3) = \\ &= 0,5 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,02 + 0,2 \cdot 0,05 = 0,021. \end{aligned}$$

Таким образом, средний процент брака по заводу равен 2,1%.

Для ответа на второй вопрос применяем формулу Байеса:

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3) \cdot P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 0,05}{0,021} = \frac{10}{21}.$$

Таким образом, третий цех выпускает пятую часть всей продукции и почти половину бракованной.

Тема 3. Случайные величины и их характеристики

Определение 3.1. Пусть задано вероятностное пространство (Ω, p) . Случайной величиной называется отображение ξ множества элементарных исходов Ω во множество действительных чисел R .

Замечание. Таким образом, каждому элементарному исходу ω сопоставляется число $\xi(\omega)$.

Пример 3.1. Пусть случайный эксперимент состоит в подбрасывании двух монет, а случайная величина ξ – это количество выпавших гербов. Данную случайную величину можно задать следующей таблицей.

ω	(шифра, шифра)	(шифра, герб)	(герб, шифра)	(герб, герб)
$\xi(\omega)$	0	1	1	2

Определение 3.2. Пусть задана случайная величина ξ . Распределением данной случайной величины называется таблица

ξ	x_1	...	x_i	...	x_n
p	p_1	...	p_i	...	p_n

где $x_1, \dots, x_i, \dots, x_n$ – значения, которые может принимать случайная величина ξ , а $p_1, \dots, p_i, \dots, p_n$ – вероятности этих значений. Таким образом, при всех $i = 1, \dots, n$ выполняются равенства $p_i = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$. Числа $p_1, \dots, p_i, \dots, p_n$ удовлетворяют условиям $p_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Пример 3.2. Распределение случайной величины из предыдущего примера выглядит так:

ξ	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Действительно, $P\{\omega : \xi(\omega) = 0\} = p((\text{шифра}, \text{цифра})) = \frac{1}{4}$.

$$P\{\omega : \xi(\omega) = 1\} = p((\text{шифра}, \text{герб}) + p((\text{герб}, \text{цифра})) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

$$P\{\omega : \xi(\omega) = 2\} = p((\text{герб}, \text{герб})) = \frac{1}{4}.$$

Определение 3.3. Пусть задана случайная величина ξ . Математическое ожидание данной случайной величины обозначается $M\xi$ и определяется равенством $M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot p(\omega)$.

Замечание. Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Пример 3.3. Математическое ожидание случайной величины из нашего примера равно

$$M\xi = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1.$$

ТЕОРЕМА 3.1. Математическое ожидание случайной величины обладает следующими свойствами:

- 1) $MC = C$, где C – некоторая константа;
- 2) $M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$, где ξ и η – случайные величины, a и b – действительные числа;
- 3) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$;
- 4) $M(\xi - \eta) = M\xi - M\eta$;
- 5) $M(C\xi) = C \cdot M\xi$.

Доказательство

$$1) MC = \sum_{\omega \in \Omega} C \cdot p(\omega) = C \cdot \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = C \cdot 1 = C;$$

$$2) M(a\xi + b\eta) = \sum_{\omega \in \Omega} (a\xi(\omega) + b\eta(\omega)) \cdot p(\omega) =$$

$$= a \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot p(\omega) + b \sum_{\omega \in \Omega} \eta(\omega) \cdot p(\omega) = aM\xi + bM\eta;$$

3) вытекает из 2) при $a = b = 1$;

4) вытекает из 2) при $a = 1, b = -1$;

5) вытекает из 2) при $a = C, b = 0$.

Следующая теорема позволяет вычислять математическое ожидание случайной величины, зная только её распределение.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть распределение случайной величины ξ задается таблицей

ξ	x_1	...	x_i	...	x_n
p	p_1	...	p_i	...	p_n

Тогда математическое ожидание данной случайной величины можно вычислять по формуле $M\xi = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i$.

Доказательство. Справедлива цепочка равенств

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{\omega : \xi(\omega) = x_i} \xi(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{\omega : \xi(\omega) = x_i} x_i \cdot p(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{\omega : \xi(\omega) = x_i} p(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть распределение случайной величины ξ задано таблицей

ξ	x_1	...	x_i	...	x_n
p	p_1	...	p_i	...	p_n

g – некоторая функция. Тогда справедливо равенство $Mg(\xi) = \sum_{i=1}^n g(x_i) \cdot p_i$.

В частности, верна формула $Mg^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot p_i$.

Пример 3.4. Если распределение случайной величины ξ задано таблицей

ξ	0	1	2
p	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

то выполняются равенства

$$M\xi = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1, \quad M\xi^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} + 2^2 \cdot \frac{1}{4} = 1,5.$$

Часто бывает важно знать не только среднее значение случайной величины, но и разброс её значений вокруг среднего. Для характеристики разброса служит дисперсия случайной величины.

Определение 3.4. Дисперсия случайной величины ξ обозначается $D\xi$ и определяется равенством $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$.

ТЕОРЕМА 3.4. Дисперсия случайной величины обладает следующими свойствами:

- 1) $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$;
- 2) $DC = 0$;
- 3) $D(C\xi) = C^2 \cdot D\xi$;
- 4) $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)$.

Доказательство

$$\begin{aligned}
 1) D\xi &= M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2) = \\
 &= M\xi^2 - M(2\xi \cdot M\xi) + M(M\xi)^2 = M\xi^2 - 2(M\xi) \cdot (M\xi) + (M\xi)^2 = \\
 &= M\xi^2 - (M\xi)^2; \\
 2) DC &= M(C - MC)^2 = M(C - C)^2 = M0 = 0; \\
 3) D(C\xi) &= M((C\xi) - M(C\xi))^2 = M(C\xi - CM\xi)^2 = M(C(\xi - M\xi))^2 = \\
 &= M(C^2(\xi - M\xi)^2) = C^2 M(\xi - M\xi)^2 = C^2 \cdot D\xi; \\
 4) D(\xi + \eta) &= M((\xi + \eta) - M(\xi + \eta))^2 = M((\xi - M\xi) + (\eta - M\eta))^2 = \\
 &= M((\xi - M\xi)^2 + (\eta - M\eta)^2 + 2(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)) = \\
 &= M(\xi - M\xi)^2 + M(\eta - M\eta)^2 + M2(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = \\
 &= D\xi + D\eta + 2M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta).
 \end{aligned}$$

Определение 3.5. Ковариация случайных величин ξ и η обозначается $\text{cov}(\xi, \eta)$ и определяется равенством

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta).$$

Замечание. С учетом данного определения четвертое свойство дисперсии можно записать в виде $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta + 2\text{cov}(\xi, \eta)$.

Контрольные вопросы

- Являются ли равновозможными при бросании двух монет исходы "выпадение двух «гербов»" и "выпадение одного «герба» и одной «цифры»"?
- Как определяется вероятность события A ?
- Какими свойствами обладает вероятность события A ?
- Может ли вероятность некоторого события принимать следующие значения:
 - $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) 0; г) 5; д) $\frac{1}{5}$; е) 1?
- В каком случае пересечение двух событий является достоверным событием?
- В каком случае объединение двух событий является невозможным событием?
- Какому условию должны удовлетворять события A и B , чтобы выполнялось равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$?
- Какому условию должны удовлетворять события A и B , чтобы выполнялось равенство $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$?

9. Как определяется условная вероятность события A относительно события B ?

10. Как называется равенство $P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A | H_i)$? Что позволяет вычислить данная формула, при каких условиях?

11. Как называется равенство $P(H_i | A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A | H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A | H_k)}$? Что позволяет вычислить данная формула, при каких условиях?

12. Как определяется математическое ожидание случайной величины ξ ? Какими свойствами оно обладает?

13. Как определяется дисперсия случайной величины ξ ? Какими свойствами она обладает?

14. Может ли математическое ожидание случайной величины быть: а) равным нулю; б) отрицательным?

15. Может ли математическое ожидание квадрата случайной величины быть: а) равным нулю; б) отрицательным?

16. Может ли дисперсия случайной величины быть: а) равной нулю; б) отрицательной?

17. Какому условию должны удовлетворять случайные величины ξ и η , чтобы выполнялось равенство $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$?

18. Какому условию должны удовлетворять случайные величины ξ и η , чтобы выполнялось равенство $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$?

19. В каком случае выполняется равенство $M(\xi + \eta) = M\xi$?

20. Чему равно MC ?

21. Чему равно DC ?

22. Чему равно $M(C\xi)$?

23. Чему равно $D(C\xi)$?

24. Чему равно $M(\xi - \eta)$?

25. Чему равно $D(\xi - \eta)$?

26. Как задается распределение случайной величины ξ ?

27. По какой формуле, зная распределение случайной величины ξ , можно вычислить $M\xi^2$?

28. По какой формуле, зная распределение случайной величины ξ , можно вычислить $M\xi^2$?

29. По какой формуле, зная распределение случайной величины ξ , можно вычислить $D\xi$?

30. Как определяется ковариация случайных величин ξ и η ?

Тестовые задания

1. Если $P(A) = \frac{1}{3}$, то $P(\bar{A})$ равна:
 а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{2}$.
2. Если $A \cap B = \emptyset$, $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,4$, то $P(A \cup B)$ равна:
 а) 0,08; б) 0,5; в) 0,6; г) 0,8.
3. Если A и B независимы, $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, то $P(A \cap B)$ равна:
 а) $\frac{1}{9}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{5}{6}$.
4. При доказательстве какого свойства вероятности используется равенство $\sum_{w \in \Omega} P(w) = 1$?
 а) $P(\emptyset) = 0$; б) $P(\Omega) = 1$; в) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; г) $\forall A \quad 0 \leq P(A) \leq 1$.
5. Условная вероятность события A относительно события B определяется равенством:
 а) $P(A|B) = P(A \cap B)$; б) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$;
 в) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; г) $P(A|B) = \frac{P(A \cup B)}{P(B)}$.
6. По формуле $\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P(A|H_i)$ вычисляется:
 а) $P(A)$; б) $P(H_i)$; в) $P(A \cap H_i)$; г) $P(A|H_i)$.
7. Пусть распределение случайной величины ξ задано таблицей
- | | | | | | |
|-------|-------|-----|-------|-----|-------|
| ξ | x_1 | ... | x_l | ... | x_n |
| p | p_1 | ... | p_l | ... | p_n |
- Тогда $M(\xi^3)$ можно вычислять по формуле:
- а) $(\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i)^3$; б) $\sum_{i=1}^n x_i^3 \cdot p_i$; в) $\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i^3$; г) $\sum_{i=1}^n (x_i \cdot p_i)^3$.
8. Пусть $M\xi = 2$, $M\eta = 3$. Тогда $M(\xi - 2\eta)$ равно:
 а) 4; б) 6; в) 10; г) 16.
9. Пусть $D\xi = 2$, $D\eta = 3$, $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$. Тогда $D(\xi - 2\eta)$ равна:
 а) 4; б) 16; в) 38; г) 62.

18

10. Если $M\xi = 10$, $M\xi^2 = 125$, то $D\xi$ равно:
 а) 125; б) 115; в) 100; г) 25.
11. Фрагментом доказательства какого утверждения является равенство $\sum_{\omega \in \Omega} c\xi(\omega)p(\omega) = c \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega)p(\omega)$?
 а) $Mc = c$; б) $M(c\xi) = cM\xi$; в) $Dc = 0$; г) $D(c\xi) = c^2 D\xi$.
12. Если распределение случайной величины ξ задано таблицей
- | | | |
|-------|---------------|---------------|
| ξ | -5 | 5 |
| p | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
- , то $M\xi$ равно: а) -5; б) -2,5; в) 0; г) 2,5.
13. Если распределение случайной величины ξ задано таблицей
- | | | |
|-------|---------------|---------------|
| ξ | -5 | 5 |
| p | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
- , то $D\xi$ равно: а) -2,5; б) 0; в) 5; г) 25.
14. В каком из вариантов верны оба утверждения?
 а) $MC = 0$, $DC = 0$; б) $MC = C$, $DC = 0$;
 в) $MC = 0$, $DC = C$; г) $MC = C$, $DC = C$.
15. Если $D\xi = 5$, то $D(-\xi)$ равна: а) -5; б) 0; в) 5; г) 25.

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
б	в	б	б	в	а	б	а	г	г	б	в	г	б	в

Модуль 2. Случайные величины и их распределения в конечном вероятностном пространстве

Тема 4. Независимость случайных величин

Определение 4.1. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если для любых числовых множеств S и T события $\{\omega : \xi(\omega) \in S\}$ и $\{\omega : \eta(\omega) \in T\}$ являются независимыми, то есть выполняется равенство

$$P\{\omega : \xi(\omega) \in S, \eta(\omega) \in T\} = P\{\omega : \xi(\omega) \in S\} \cdot P\{\omega : \eta(\omega) \in T\}. \quad (*)$$

Определение 4.2. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n называются независимыми в совокупности, если для любых числовых множеств S_1, \dots, S_n события

$$\{\omega : \xi_1(\omega) \in S_1\}, \dots, \{\omega : \xi_n(\omega) \in S_n\}$$

являются независимыми в совокупности.

19

ТЕОРЕМА (критерий независимости случайных величин). Пусть распределение случайной величины ξ задается таблицей $\frac{\xi | x_1 | \dots | x_i | \dots | x_n}{p | p_1 | \dots | p_i | \dots | p_n}$, а случайной величины η — таблицей $\frac{\eta | y_1 | \dots | y_j | \dots | y_m}{p | q_1 | \dots | q_j | \dots | q_m}$, где при всех $i=1\dots n$ $p_i = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\}$, при всех $j=1\dots m$ $q_j = P\{\omega : \eta(\omega) = y_j\}$. Тогда для того чтобы случайные величины ξ и η были независимы, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\forall i=1\dots n \quad \forall j=1\dots m$$

$$P\{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} = P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} \cdot P\{\omega : \eta(\omega) = y_j\}. \quad (**)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ξ и η независимы, то есть выполняется условие (*). Тогда, взяв в качестве S одноточечное подмножество $\{x_i\}$, а в качестве T одноточечное подмножество $\{y_j\}$, получим требуемое равенство (**).

Достаточность. Предположим, что выполняется условие (**), и докажем независимость, то есть выполнение условия (*). Имеем

$$\begin{aligned} P\{\omega : \xi(\omega) \in S, \eta(\omega) \in T\} &= \sum_{\omega : \xi(\omega) \in S} P\{\omega\} = \sum_{i: x_i \in S} \sum_{j: y_j \in T} \sum_{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j} P\{\omega\} = \\ &= \sum_{i: x_i \in S} \sum_{j: y_j \in T} P\{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} = \\ &= \sum_{i: x_i \in S} \sum_{j: y_j \in T} P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} \cdot P\{\omega : \eta(\omega) = y_j\} = \\ &= \left(\sum_{i: x_i \in S} p_i \right) \cdot \left(\sum_{j: y_j \in T} q_j \right) = P\{\omega : \xi(\omega) = S\} \cdot P\{\omega : \eta(\omega) = T\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, f и g — некоторые функции. Тогда случайные величины $f(\xi)$ и $g(\eta)$ также являются независимыми.

Доказательство. Нужно доказать выполнение условия

$$\forall S, T \quad P\{f(\xi) \in S, g(\eta) \in T\} = P\{f(\xi) \in S\} \cdot P\{g(\eta) \in T\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} P\{f(\xi) \in S, g(\eta) \in T\} &= P\{\xi \in f^{-1}(S), \eta \in g^{-1}(T)\} = \\ &= P\{\xi \in f^{-1}(S)\} \cdot P\{\eta \in g^{-1}(T)\} = P\{f(\xi) \in S\} \cdot P\{g(\eta) \in T\}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Тогда справедливы равенства

$$M(\xi + \eta) = (M\xi) + (M\eta), \quad D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta.$$

Доказательство. Пусть ξ и η — независимые случайные величины. Докажем равенство $M(\xi + \eta) = (M\xi) + (M\eta)$. Имеем

$$\begin{aligned} M(\xi + \eta) &= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) \cdot \eta(\omega) \cdot p(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{\xi(\omega)=x_i \\ \eta(\omega)=y_j}} \xi(\omega) \cdot \eta(\omega) \cdot p(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{\xi(\omega)=x_i \\ \eta(\omega)=y_j}} x_i \cdot y_j \cdot p(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \sum_{\substack{\xi(\omega)=x_i \\ \eta(\omega)=y_j}} p(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \cdot P\{\omega : \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j \cdot P\{\omega : \xi(\omega) = x_i\} \cdot P\{\omega : \eta(\omega) = y_j\} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m y_j \cdot q_j \right) = (M\xi) + (M\eta). \end{aligned}$$

Докажем равенство $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$. Для этого достаточно доказать, что если ξ и η независимы, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$. Но если ξ и η независимы, то $\xi - M\xi$ и $\eta - M\eta$ также независимы. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}(\xi, \eta) &= M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = (M(\xi - M\xi))(M(\eta - M\eta)) = \\ &= (M\xi - M\xi)(M\eta - M\eta) = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает наше утверждение.

Доказательство теоремы завершено.

Определение 4.3. Коэффициент корреляции случайных величин ξ и η обозначается $K(\xi, \eta)$ и определяется равенством

$$K(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}} = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{M(\xi - M\xi)^2} \cdot \sqrt{M(\eta - M\eta)^2}}.$$

ТЕОРЕМА 4.3. Коэффициент корреляции обладает следующими свойствами:

$$1) |K(\xi, \eta)| \leq 1;$$

$$2) \text{если } \xi \text{ и } \eta \text{ независимы, то } K(\xi, \eta) = 0;$$

$$3) |K(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow P\{\omega : \eta(\omega) = a\xi(\omega) + b\} = 1.$$

Доказательство

$$1) \text{введем случайные величины } \xi_0 = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}} \text{ и } \eta_0 = \frac{\eta - M\eta}{\sqrt{D\eta}}. \text{ Имеем}$$

$$M\xi_0 = M\left(\frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{D\xi}} M(\xi - M\xi) = \frac{1}{\sqrt{D\xi}} (M\xi - M\xi) = 0.$$

Аналогично $M\eta_0 = 0$.

$$D\xi_0 = M\xi_0^2 - M\left(\frac{\xi_0 - M\xi_0}{D\xi_0}\right)^2 = \frac{M(\xi_0 - M\xi_0)^2}{D\xi_0} = 1.$$

Аналогично $D\eta_0 = 0$.

$$K(\xi, \eta) = M \frac{(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi} \cdot \sqrt{D\eta}} = M(\xi_0 \cdot \eta_0) = \text{cov}(\xi_0, \eta_0) = K(\xi_0, \eta_0).$$

Получаем

$$\begin{aligned} D(\xi_0 + \eta_0) &= D\xi_0 + D\eta_0 + 2\text{cov}(\xi_0, \eta_0) = 2 + 2K(\xi, \eta) \geq 0 \Rightarrow K(\xi, \eta) \geq -1; \\ D(\xi_0 - \eta_0) &= D\xi_0 + D\eta_0 - 2\text{cov}(\xi_0, \eta_0) = 2 - 2K(\xi, \eta) \geq 0 \Rightarrow K(\xi, \eta) \leq 1. \end{aligned}$$

Следовательно, $|K(\xi, \eta)| \leq 1$, и первое утверждение теоремы доказано;

2) если ξ и η независимы, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$, и, следовательно, выполняется равенство $K(\xi, \eta) = 0$;

3) пусть $\eta = a\xi + b$ с вероятностью 1, $M\xi = \alpha$, $D\xi = \sigma^2$.

Тогда имеем

$$M\eta = M(a\xi + b) = aM\xi + b = a \cdot \alpha + b,$$

$$D\eta = M(\eta - M\eta)^2 = M(a\xi + b - a\alpha - b)^2 = M(a(\xi - \alpha))^2 = a^2 M(\xi - \alpha)^2 = a^2 D\xi = a^2 \sigma^2,$$

$$\begin{aligned} |K(\xi, \eta)| &= \left| \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}} \right| = \left| \frac{M(\xi - M\xi)(a\xi + b - a\alpha - b)}{\sqrt{\sigma^2} \sqrt{a^2 \sigma^2}} \right| = \\ &= \left| \frac{Ma(\xi - \alpha)^2}{a\sigma^2} \right| = \left| \frac{D\xi}{D\xi} \right| = 1. \end{aligned}$$

Обратное утверждение примем без доказательства.

Доказательство теоремы завершено.

Тема 5. Распределения Бернулли и Пуассона

Определение 5.1. Последовательность испытаний Бернулли называется последовательность независимых испытаний, каждое из которых имеет два исхода («успех» и «неудача»), причем вероятность «успеха» не изменяется от испытания к испытанию.

Замечание. Построим вероятностное пространство, соответствующее испытаниям Бернулли. Пусть n – количество испытаний, p – вероятность «успеха» в одном испытании. При всех $i = 1, \dots, n$ положим $\Omega_i = \{0, 1\}$, $p_i(0) = 1 - p$, $p_i(1) = p$. Определим вероятностное пространство (Ω, P) соотношениями

$$\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n = \{(\omega_1, \dots, \omega_i, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\},$$

$$P(\omega) = \prod_{i=1}^n p_i(\omega_i) = p^{\mu(\omega)} (1-p)^{n-\mu(\omega)},$$

где $\mu(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$ – количество «успехов» в последовательности n испытаний Бернулли.

При всех $m = 0, \dots, n$ вычислим $P\{\omega : \mu(\omega) = m\}$. Имеем

$$P\{\omega : \mu(\omega) = m\} = \sum_{\omega: \mu(\omega)=m} P(\omega) = \sum_{\omega: \mu(\omega)=m} p^{\mu(\omega)} (1-p)^{n-\mu(\omega)} = \sum_{\omega: \mu(\omega)=m} p^m (1-p)^{n-m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

$$\text{где } C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad m! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! = 1.$$

Таким образом, получили равенство

$$P\{\omega : \mu(\omega) = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

называемое формулой Бернулли.

Пример 5.1. Производится пять выстрелов по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна $\frac{2}{3}$. Найти вероятность того, что при пяти выстрела будет ровно три попадания.

Решение. Здесь испытанием является выстрел по мишени, «успехом» – попадание. Таким образом, $n = 5$, $m = 3$, $p = \frac{2}{3}$. Имеем

$$P\{\omega : \mu(\omega) = 3\} = C_5^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-3} = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} \cdot \frac{8}{243} = \frac{80}{243}.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Если μ – количество «успехов» в последовательности n испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p в одном испытании, то выполняются равенства $M\mu = np$, $D\mu = np(1-p)$.

Доказательство. При всех $i = 1, \dots, n$ определим случайную величину μ_i , равенство

$$\mu_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если в } i\text{-м испытании "успех",} \\ 0, & \text{если в } i\text{-м испытании "неудача".} \end{cases}$$

Тогда $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$. Случайные величины μ_1, \dots, μ_n независимы, и рас-

пределение каждой из них задается таблицей $\begin{array}{c|cc} \mu_i & 0 & 1 \\ \hline p & 1-p & p \end{array}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда имеем

$$M\mu_i = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p, \quad M\mu_i^2 = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p,$$

$$D\mu_i = M\mu_i^2 - (M\mu_i)^2 = p - p^2 = p(1-p), \quad i = 1, \dots, n.$$

11.02.2016

$$M\mu = M \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) = \sum_{i=1}^n M\mu_i = \sum_{i=1}^n p = np,$$

$$D\mu = D \left(\sum_{i=1}^n \mu_i \right) = \sum_{i=1}^n D\mu_i = \sum_{i=1}^n p(1-p) = np(1-p),$$

что и требовалось доказать.

Определение 5.2. Будем говорить, что случайная величина ξ имеет распределение Бернулли с параметрами n, p , где n – натуральное, $p \in (0,1)$, если ее распределение задается следующей таблицей:

ξ	0	1	...	m	...	n
$P(\xi)$	p_0	p_1	...	p_m	...	p_n

где при всех $m = 0, \dots, n$

$$P\{\omega : \xi(\omega) = m\} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Замечания. 1. Если случайная величина ξ имеет распределение Бернулли с параметрами n, p , то выполняются равенства $M\mu = np$, $D\mu = np(1-p)$.

2. При больших n вычисления по формуле Бернулли достаточно трудоемки, поэтому используют различные приближенные формулы. Одну из них дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА Пуассона. Пусть имеется последовательность серий испытаний Бернулли. В первой серии одно испытание, вероятность «успеха» p_1 , количество «успехов» μ_1 ; во второй серии два испытания, вероятность «успеха» p_2 , количество «успехов» μ_2 ; в n -й серии n испытаний, вероятность «успеха» p_n , количество «успехов» μ_n и т. д. Тогда, если выполняются условия $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$, $\lambda > 0$, то справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \mu_n(\omega) = m\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}.$$

Доказательство. С использованием формулы Бернулли имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \mu_n(\omega) = m\} = C_n^m (p_n)^m (1-p_n)^{n-m} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{\lambda}{n}\right) \right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n} - o\left(\frac{\lambda}{n}\right) \right)^{n-m} =$$

$$= \frac{1}{m!} \frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots n}{n^m} \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{\lambda}{n}\right) \right)^m \left(1 - \frac{\lambda}{n} - o\left(\frac{\lambda}{n}\right) \right)^{n-m}.$$

Здесь использовался тот факт, что равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda$ влечет за собой

$$\text{соотношение } p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{\lambda}{n}\right), \text{ где } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o\left(\frac{\lambda}{n}\right)}{n} = 0.$$

Выполняются условия

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-m+1)(n-m+2)\dots n}{n^m} = \\ & = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-m+1)}{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-m+2)}{n} \right) \dots \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \right) = 1, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lambda + o(\lambda) \right)^m = \lambda^m, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n} - o\left(\frac{\lambda}{n}\right) \right)^{n-m} = e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в полученное равенство, находим $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \mu_n(\omega) = m\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пусть μ – количество «успехов» в последовательности n испытаний Бернулли с вероятностью «успеха» p в каждом испытании. Тогда при больших n и малых p справедливо приближенное равенство $P\{\omega : \mu(\omega) = m\} \approx e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}$, где $\lambda = np$, называемое **формулой Пуассона**.

Пример 5.2. Пусть $n=1000$, $p=0,003$, $m=4$. Тогда

$$\lambda = np = 1000 \cdot 0,003 = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\omega : \mu(\omega) = 4\} \approx e^{-3} \cdot \frac{3^4}{4!} = 0,05 \cdot \frac{81}{24} = \frac{135}{800}.$$

Определение 5.3. Будем говорить, что случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, если ее распределение задается следующей таблицей:

ξ	0	1	...	m	...
$P(\xi)$	p_0	p_1	...	p_m	...

где при всех $m = 0, 1, \dots$

$$P\{\omega : \mu(\omega) = m\} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^m}{m!}.$$

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Тогда справедливы равенства $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$.

Доказательство. Имеем

$$M\xi = \sum_{m=0}^{\infty} mp_m = \sum_{m=0}^{\infty} me^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^{m-1}}{(m-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda.$$

Итак, равенство $M\xi = \lambda$ доказано. Равенство $D\xi = \lambda$ примем без доказательства.

Тема 6. Закон больших чисел

Содержательные теоремы теории вероятностей могут быть получены, если рассматривать не одно событие или случайную величину, а много. Для этого необходим аппарат, позволяющий с тем или иным прибли-

жением получать выводы о вероятностях разных событий, связанных с большим числом случайных величин. Одним из звеньев этого аппарата является неравенство Чебышева.

ТЕОРЕМА (неравенство Чебышева). Для любой случайной величины ξ и любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $P\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$, называемое *неравенством Чебышева*.

Доказательство. Справедлива цепочка равенств и неравенств

$$\begin{aligned} D\xi = M(\xi - M\xi)^2 &= \sum_{\omega \in \Omega} (\xi(\omega) - M\xi)^2 p(\omega) = \sum_{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon} (\xi(\omega) - M\xi)^2 p(\omega) + \\ &+ \sum_{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| < \varepsilon} (\xi(\omega) - M\xi)^2 p(\omega) \geq \sum_{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon} (\xi(\omega) - M\xi)^2 p(\omega) \geq \\ &\geq \sum_{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon} \varepsilon^2 p(\omega) = \varepsilon^2 P\{\omega : |\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

откуда вытекает требуемое неравенство.

Определение. Говорят, что последовательность случайных величин $\{\xi_n\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ , если выполняется условие $\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon\} = 0$. Обозначается $\xi_n \xrightarrow{P} \xi, n \rightarrow \infty$.

ЛЕММА. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность случайных величин. Для того чтобы последовательность $\{\xi_n - M\xi_n\}$ сходилась по вероятности к 0 при $n \rightarrow \infty$, достаточно выполнения условия $\lim_{n \rightarrow \infty} D\xi_n = 0$.

Доказательство. Применяя неравенство Чебышева, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \quad P\{\omega : |\xi_n(\omega) - M\xi_n| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi_n}{\varepsilon^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть $(\xi_n - M\xi_n) \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА (закон больших чисел). Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность попарно независимых случайных величин, удовлетворяющих условию $\exists c \forall n D\xi_n < c$ (равномерная ограниченность дисперсий). Тогда справедливо соотношение

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{M\xi_1 + \dots + M\xi_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

называемое *законом больших чисел*.

Доказательство. Введем случайные величины

$$\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}.$$

$$\text{Тогда верны равенства } M\eta_n = \frac{M\xi_1 + \dots + M\xi_n}{n}.$$

Покажем, что выполняется условие $\lim_{n \rightarrow \infty} D\eta_n = 0$. В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} D\eta_n &= D\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}(D\xi_1 + \dots + D\xi_n) < \\ &< \frac{1}{n^2}(c + \dots + c) = \frac{cn}{n^2} = \frac{c}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\eta_n - M\eta_n \xrightarrow{P} 0, n \rightarrow \infty$, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\{|\eta_n - M\eta_n| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

что и доказывает утверждение теоремы.

Следствие. Пусть $\{\xi_n\}$ – последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин, причем при всех $n M\xi_n = a$. Тогда выполняется условие $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} a, n \rightarrow \infty$.

Доказательство. В данном случае имеем

$$M\xi_1 + \dots + M\xi_n \xrightarrow{n} a + \dots + a = na = a.$$

Тогда по закону больших чисел получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - a\right| \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

то есть $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} a, n \rightarrow \infty$, что и требовалось доказать.

Контрольные вопросы

- Как определяется независимость случайных величин?
- Как формулируется критерий независимости случайных величин?
- Какими свойствами обладают независимые случайные величины?
- Как определяется коэффициент корреляции?
- В каких пределах может находиться коэффициент корреляции?
- Как формулируется формула Бернуlli?
- Как вычисляется математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей распределение Бернуlli с параметрами n, p ?
- Как формулируется теорема Пуассона?
- Как вычисляются математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей распределение Пуассона с параметром λ ?
- Как определяется C_q^m ?
- Чему равно $C_{10}^1, C_{10}^{10}, C_{10}^0$?
- Какие значения могут принимать параметры n и p в формуле Бернуlli?

13. Какие условия накладываются на вероятности p_n в теореме Пуассона?
14. Как формулируется неравенство Чебышева?
15. Как определяется сходимость последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$ к случайной величине ξ по вероятности?
16. Какое условие является достаточным для справедливости соотношения $(\xi_n - M\xi_n) \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$?
17. Как формулируется закон больших чисел?
18. Как формулируется следствие из закона больших чисел?

Тестовые задания

1. Независимость случайных величин необходима для выполнения равенства:
 а) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$; б) $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$;
 в) $M(\xi - \eta) = M\xi - M\eta$; г) $M(a\xi + b\eta) = aM\xi + bM\eta$.
2. Если случайные величины ξ и η независимы, то независимы являются:
 а) ξ^2 и ξ^3 ; б) ξ^2 и η^3 ; в) $\xi + \eta$ и $\xi - \eta$; г) η^2 и η^3 .
3. Если случайные величины ξ и η независимы, то выполняются равенства:
 а) $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$; б) $M(\xi \cdot \eta) = 0$; в) $D(\xi\eta) = 0$; г) $\xi \cdot \eta = 0$.
4. Какое из следующих равенств не верно?
 а) $K(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$;
 б) $K(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{D\xi \cdot D\eta}$;
 в) $K(\xi, \eta) = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}}$;
 г) $K(\xi, \eta) = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{M(\xi - M\xi)^2}\sqrt{M(\eta - M\eta)^2}}$.
5. Какое из данных чисел не может быть значением коэффициента корреляции?
 а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) 2; г) 0.
6. Если $D\xi = 4$, $D\eta = 25$, $\text{cov}(\xi, \eta) = 9$, то $K(\xi, \eta)$ равен:
 а) 0,9; б) 0,09; в) 0,3; г) 0,03.
7. Правой частью формулы Бернулли является выражение (n – число опытов, p – число «успехов»):

28

- а) $C_n^m p^m (1-p)^n$; б) $C_n^m p^n (1-p)^m$;
 в) $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$; г) $C_n^m p^m (1-p)^{m-n}$.
8. Если ξ имеет распределение Бернулли с параметрами $n=100$, $p=0,3$, то верны оба равенства:
 а) $M\xi = 30$, $D\xi = 21$; б) $M\xi = 30$, $D\xi = \sqrt{21}$;
 в) $M\xi = 3$, $D\xi = 21$; г) $M\xi = 3$, $D\xi = \sqrt{21}$.
9. Если ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda=9$, то верны оба равенства:
 а) $M\xi = 9$, $D\xi = 81$; б) $M\xi = 3$, $D\xi = 9$;
 в) $M\xi = 3$, $D\xi = 81$; г) $M\xi = 9$, $D\xi = 9$.
10. Если ξ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda=10$, то $M\xi^2$ равно:
 а) 100; б) 110; в) 90; г) 10.
11. C_S^2 равно:
 а) 5; б) не определено; в) 0; г) 1.
12. Выполнение какой пары условий требуется в теореме Пуассона?
 а) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lambda > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lambda > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = 0$;
 в) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = 0$.
13. Фрагментом доказательства какого утверждения является соотношение $D\xi = \sum_{|\xi(\omega) - M\xi| \geq \varepsilon} (\xi(\omega) - M\xi)^2 p(\omega) + \sum_{|\xi(\omega) - M\xi| < \varepsilon} (\xi(\omega) - M\xi)^2 p(\omega)$?
 а) формула Бернулли; б) теорема Пуассона;
 в) неравенство Чебышева; г) закон больших чисел.
14. Неравенство Чебышева имеет следующий вид:
 а) $P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$; б) $P\{|\xi - M\xi| \geq \varepsilon\} \geq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$;
 в) $P\{|\xi - M\xi| \leq \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$; г) $P\{|\xi - M\xi| \leq \varepsilon\} \geq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$.
15. Условие $\lim_{n \rightarrow \infty} D\xi_n = 0$ является достаточным для выполнения соотношения:
 а) $\xi_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; б) $M\xi_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$;
 в) $(\xi_n - M\xi_n) \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$; г) $\xi_n \cdot M\xi_n \xrightarrow{P} 0$, $n \rightarrow \infty$.

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	а	б	в	а	в	а	г	б	г	в	в	а	в

29