

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Кафедра нелинейной физики

**ПРАКТИКУМ
ПО МОЛЕКУЛЯРНОЙ ФИЗИКЕ
И ТЕРМОДИНАМИКЕ**

**Изучение внутреннего трения
в жидкостях (метод Стокса)**

Учебно-методическое пособие к лабораторной работе
в интегрированном учебно-научном практикуме
"Методика, технология и информационное обеспечение
физического эксперимента"

Подготовил: доц. А.А. Князев

Саратов 2008

"Когда будете в театре, заберитесь в антракте на балкон и уроните оттуда программу. Вы увидите, как она станет падать, медленно и плавно кружась в воздухе. А теперь уроните бинголь..."

/ Из старинного руководства по физике /

ВВЕДЕНИЕ.

В школьном курсе механики Вы уже привыкли к замечаниям типа "силой сопротивления воздуха пренебречь". Иногда при решении задач результаты получаются близкими к реальным, но порой они серьезно отличаются от действительных. Например, используя известные кинематические формулы при решении задачи о полете пули, начальная скорость которой для современного оружия около 600 м/с, вы получите не только существенно искаженные представления о форме траектории, но и значение дальности полета, завышенное по сравнению с реальным примерно в десять раз. Значительная ошибка возникает и при расчетах скоростей падения капли дождя из облака или тела, соскальзывающего по наклонной плоскости, если на эту плоскость нанесен тонкий слой смазки. Совершенно неверными окажутся и результаты оценки объема жидкости, протекающей по трубе, если не учесть возникающее в течении сопротивление. А ведь все эти примеры имеют важное практическое значение!

В реальных жидкостях и газах силы сопротивления играют важную роль. Мир погрузился бы в безмолвие, если бы равномерно текущие воздух и вода свободно огибали все препятствия, не оказывая действия на предметы и не вызывая их колебаний. Не гудели бы провода на ветру, не было бы слышно шума ветра и волн, а капельки тумана и пылинки не клубились бы над землей облаками: ускоряясь, они падали бы на землю со скоростью пули. И это далеко не полный перечень явлений, причиной которых являются силы сопротивления, проявляющиеся при деформациях объемов жидкости и газа.

Раздел физики, занимающийся изучением движения тел в реальных средах и изучением свойств этих сред, называется **реологией**.

Данная лабораторная работа обращает Ваше внимание на особенности движения тел в реальных средах. При выполнении основного задания Вы только познакомитесь с основными положениями теории вязкого трения и самостоятельно определите одну из главных реологических характеристик - коэффициент динамической вязкости жидкости широко известным в технике методом Стокса.

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЯЗКОСТИ.

Анализируя явления механического движения физических тел в жидкостях и газах, мы часто считаем тела абсолютно твердыми - не изменяющими своей формы, а жидкости и газы - идеальными, то есть изменяющими свою форму, не проявляя при этом никаких внутренних свойств, кроме инертности. Если же снять хотя бы одно из этих идеализированных ограничений, то возникает необходимость учета того, что изменение энергии тела связано с работой уже не только внешних сил, деформирующих тело, но и с работой сил, возникающих внутри вещества тел и противодействующих взаимному перемещению. Такие силы называются силами **внутреннего трения (вязкости)** - их работа необратимо превращается в теплоту, то есть в работу микроскопических перемещений молекул тела или среды. Для примера можно вспомнить явление неупругого удара.

Свойство тел осуществлять превращение части работы, произведенной при их деформации, в теплоту называется вязкостью или внутренним трением.

Наиболее заметно свойство внутреннего трения проявляется в двух группах явлений - неупругости и текучести (пластической деформации). Что же это за явления?

Как известно, деформация считается упругой, если эффектом перехода механической энергии в тепловую можно пренебречь в наблюдаемом процессе. Множество задач физики использует именно такое приближение. Так, используя закон Гука, мы определяем

величину возникающей внутри тела силы упругости при его деформации. Этого бывает достаточно для решения многих задач. Однако уже при попытках объяснения явления затухания свободных колебаний в пружинах модель упругой деформации оказывается несостоятельной. Необходимо учитывать, что при деформации тела происходит перераспределение части атомов в объеме вещества, сопровождающееся изменением внутренней энергии и нарушением теплового равновесия всего тела. При последующем выравнивании температур часть внутренней энергии необратимо переходит в теплоту. Явление отклонения от свойств упругости при деформировании тел с конечной скоростью называют **неупругостью**. Оно связано с действием сил внутреннего трения.

С силами внутреннего трения мы встречаемся и при объяснении природы явлений **пластической деформации**, когда первоначальная форма тела не восстанавливается при снятии внешней нагрузки. Такое явление наступает, как известно, если механические напряжения, возникающие внутри тела в ответ на внешнее воздействие, превосходят некоторое значение - предел текучести. Этот предел, выражаемый в единицах механического напряжения (Н/м^2), для каждого вещества различен, и особенно мало его значение для газов и большинства жидкостей. В них пластическая деформация возникает при ничтожных значениях величины внешней силы. По этой причине, когда речь идет о жидкостях или газах, термин "пластическая деформация" даже не используется. Вместо него используют термин "**текучесть**" или "**подвижность**". В школьном курсе об этом факте упоминалось как о способности жидкостей неупруго изменять форму или как о способности газов занимать весь предоставленный объем.

Сила внутреннего (или вязкого) трения отличается от хорошо знакомой по школьному курсу **силы трения скольжения**, которую теперь уместно назвать силой **внешнего (сухого) трения**. Главное отличие состоит в том, что если при действии сил сухого трения теплота выделяется на **поверхностях** контактирующих твердых тел, то силы вязкого трения действуют **во всем объеме** вещества (вода в реке, например, становится теплее после шторма - это эффект действия объемных сил вязкости).

К числу других существенных различий между этими двумя силами можно отнести следующие:

а) величина силы вязкого трения увеличивается с увеличением относительной скорости перемещения тела и среды. Для сухого трения, напротив, после достаточно резкого перехода от режима трения покоя (сцепления) к режиму скольжения зависимость силы трения от скорости проявляется весьма слабо и часто не принимается во внимание;

б) величина силы вязкого трения линейно нарастает с увеличением площади контакта движущегося тела и среды. Величина силы сухого трения практически не зависит от площади контакта трущихся тел (закон Кулона-Амонтона, по которому величина силы трения скольжения пропорциональна лишь величине силы нормальной реакции).

Приведенные выше энергетические рассуждения не затрагивали деталей самого процесса возникновения силы вязкого трения. К теоретическому описанию текучести и вязкого трения в жидкостях и газах можно подходить, по крайней мере, с двух известных позиций классической физики:

а) с позиции молекулярно-кинетических представлений, когда твердое тело, жидкость и газ рассматриваются как ансамбль молекул, находящихся в непрерывном тепловом движении. При таком описании возникает возможность раскрыть внутренние, не видимые наблюдателю, подробности явления;

б) с позиции гидродинамики, рассматривающей и твердые тела за пределом текучести, и жидкость, и газ как сплошные среды. Именно в этом смысле далее будет употребляться термин "жидкость". При гидродинамическом подходе явление рассматривается таким, каким оно представляется наблюдателю - феноменологически (в буквальном переводе "как явление"). Внутренняя микроскопическая структура происходящего остается не-

выясненной, а определение вводимых в записываемые соотношения коэффициентов пропорциональностей предоставляется эксперименту. Введенные таким образом коэффициенты называют **феноменологическими**.

Для определения коэффициента вязкости жидкости при выполнении лабораторной работы достаточны гидродинамические представления. Молекулярно-кинетические представления лишь упоминаются в этом описании для ознакомления с подробностями явления в самом минимальном объеме. Начнем именно с них.

Молекулярно-кинетические представления при описании явления текучести и вязкости.

Текучесть и вязкость в газах.

Если средой является идеальный газ, то энергией взаимодействия молекул можно пренебречь по сравнению с их кинетической энергией. В этом случае анализ явления может быть выполнен достаточно просто - с позиций закона изменения импульса тела при столкновениях с молекулами среды. Действительно, при движении тела относительно газовой среды молекулы, движущиеся навстречу, в среднем получают при случайных соударениях с телом больший импульс, чем теряют его молекулы, догоняющие это тело. Поэтому в среднем тело тормозится, а окружающие тело молекулы газа - ускоряются.

Молекулы из близлежащих областей, находящихся на удалении большем средней длины свободного пробега λ между соударениями, не испытывают столкновения непосредственно с телом, но могут сталкиваться с уже ускоренными молекулами и по той же схеме обмениваться с ними импульсами.

Напомним, что при нормальных условиях величина λ для воздуха составляет примерно 60 нм.

В процессе таких столкновений ускоренные телом молекулы будут терять часть избыточного импульса, а соседние, еще неускоренные - приобретут эту часть. Постепенно процесс рассеивания импульса тела охватывает все новые молекулы, и через некоторое время в среде вокруг тела можно условно выделить целые слои молекул, ускоренных в различной степени. При этом каждому последующему слою достается все меньшая доля импульса движущегося тела. В результате рассеивания импульса тела хаотически движущимися молекулами среда через некоторое время вновь придет к стационарному состоянию - термодинамическому равновесию, но в ней установится новая, более высокая температура. Приведенная модель позволяет ввести и понятие силы внутреннего трения. Действительно, уменьшение среднего за время Δt импульса более быстрых молекул газа может быть описано по закону динамики как действие на границе каждого из слоев некоторой эквивалентной силы f : $\Delta(mV) = -f \Delta t$, - это и есть сила внутреннего трения. Она направлена противоположно вектору скорости молекул быстрого слоя и может быть определена при аккуратном детальном расчете описанного выше процесса. Подробности такого расчета приведены, например, в [1,2].

Подводя итог, можно сказать, что **механизм возникновения внутреннего трения в газовых средах связан с процессом выравнивания импульсов атомов по объему при нарушении стационарного состояния.**

Текучесть и вязкость в жидкостях.

Механизм текучести и возникновения вязкости в жидкостях также связан с рассеиванием импульса движущегося тела среди атомов окружающей его среды, однако представить этот механизм столь же просто, как в разреженных газах, не удастся. Это связано прежде всего с тем, что силы взаимодействия между молекулами уже сравнимы с кинетической энергией молекул и оказывают постоянное влияние на их движение. В результате

этого в жидкостях и твердых телах представление о длине свободного пробега между столкновениями теряет смысл.

С различием механизмов текучести в жидкостях и газах связаны как реологические свойства этих сред, так и модели описания. Например, одна из моделей воды рассматривает ее как кристаллическую структуру типа льда, в которой каждая молекула воды связана тремя ближайшими соседями в тетраэдрическую структуру диаметром около 5 \AA . (Рис.1). При температуре выше 0°C около 15% водородных связей нарушается и возникает "слегка потрескавшаяся", непрерывно изменяющаяся (мерцающая) структура: каждая молекула получает возможность более или менее редких (в зависимости от температуры) скачкообразных переходов из одного фиксированного состояния (состояния оседлости) в другое. Таким образом, процесс передачи импульса от одной молекулы к другой в жидкости происходит значительно реже, чем соударения атомов или молекул в газовой среде. Поскольку смена состояний оседлости связана с преодолением сил межмолекулярного взаимодействия, то на них затрачивается значительная доля энергии молекулы. Поэтому процесс выравнивания импульсов молекул происходит медленнее, чем в газах. Из-за этого вязкие свойства жидкостей выражены ярче, чем в газах и сравниваются лишь в критическом состоянии, когда различие между жидкостью и реальным газом исчезает. Строгой теории вязкости для жидкостей пока не существует, но на практике применяют ряд полуэмпирических формул, достаточно хорошо отражающих зависимость вязкости отдельных типов жидкостей и растворов от температуры и химического состава.

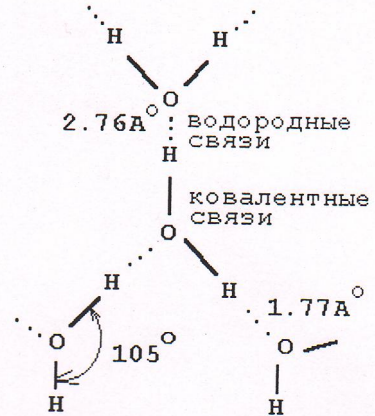


Рис.1. Модель связи молекул воды.

Гидродинамическое описание явления вязкости.

Начальные представления.

Основные понятия гидродинамического описания вязкости заложены еще И. Ньютоном (1700г) и являются предельно простыми. Ньютон высказал гипотезу о том, что вблизи поверхности движущегося в жидкости тела возникает переходная область (пограничный слой), в которой устанавливается плавное изменение величины скорости. Эту область, в свою очередь, можно условно разделить на систему элементарных слоев, внутри которых скорость можно считать постоянной. Например, при движении жидкости в трубе можно считать, что элементарный слой, непосредственно смачивающий трубу, имеет нулевую скорость. Если рассматривать тело, движущееся в жидкости, то и здесь можно считать, что смачивающий слой имеет скорость этого тела. Удаленные от тела слои жидкости уже не связаны непосредственно с поверхностью и не движутся с ее скоростью, а лишь частично вовлекаются в движение предыдущими слоями. Таким образом, можно представить, что вокруг поверхности возникает система бесконечно тонких элементарных слоев, скорости которых непрерывно и плавно изменяются по мере удаления от тела, формируя структуру пограничного слоя.

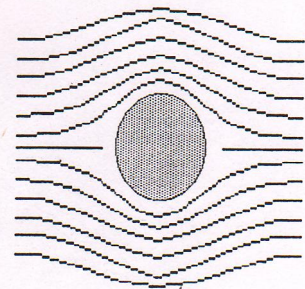


Рис. 2. Линии тока при обтекании тела.

В том, что рассуждения о существовании слоистой структуры потоков правдоподобны, мы убеждаемся, посмотрев, например, на покрытые слоем пыли лопасти вентилятора или запыленные стекла мчащегося автобуса. Мелкие пылинки не сдуваются ветром, а значит, тонкий слой около тела действительно остается практически неподвижным, но уже крупные частицы, верхушки которых "вылезают" в слои, движущиеся с большой ско-

ростью, "сдуваются" с поверхности. Некоторое расслоение можно наблюдать и в течении мутной воды, подсвеченной сверху, и в клубах дыма или пыли.

Однако реально существует не система четко различающихся слоев, а плавное распределение скорости жидкости. Это распределение можно описать функцией координат $V(r)$, которую называют **полем скоростей**. Графически поле изображается так называемыми **линиями тока**, касательные к которым указывают направление вектора скорости в данной точке, а их густота пропорциональна величине скорости в окрестности этой точки (Рис.2,3). При обтекании движущегося тела на вовлечение в движение этих, связанных между собой внутренними силами, слоев расходуется часть импульса тела, и, следовательно, реакцию жидкости на движение тела можно описывать эквивалентной тормозящей силой, уменьшающей импульс движущегося тела. Эту силу назовем силой вязкого трения. Она равна нулю, если тело покоится (или если среда движется вместе с телом), и нарастает по мере увеличения скорости тела относительно среды, а также с увеличением его размеров, поскольку в движение вместе с телом вовлекается все большая инертная масса неразрывной среды.

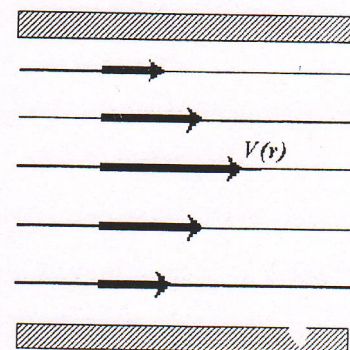


Рис.3. Поле скоростей в плоском потоке жидкости между неподвижными пластинами.

Образно говоря, по мере увеличения своей скорости тело как бы приобретает все большую массу, одновременно увеличиваясь в размерах за счет обволакивающей его и увлекаемой им "шубы" из вещества среды. Так, движущийся электропоезд "везет" не только состав, но и немалую массу воздуха пограничного слоя, движение которой мы ощущаем, находясь на перроне вблизи проходящего поезда.

Как видно, понятия молекулярно-кинетической теории перекликаются с понятиями гидродинамики. В первой теории критерием толщины элементарных слоев является физический параметр - средняя длина свободного пробега молекулы или среднее расстояние между двумя состояниями оседлости. При гидродинамическом описании единственным критерием толщины элементарного слоя считается просто малость его по сравнению с характерным размером обтекаемого тела или с характерным размером рассматриваемого потока (например, в случае протекания жидкости по трубе).

Линейная теория вязкости. Формула Ньютона

Явление внутреннего трения достаточно сложно для строгого теоретического анализа. Однако на начальном этапе изучения можно создать **простейшую** модель, выделив общие черты явления с помощью соотношений пропорциональности.

Ньютон предположил существование для умеренных скоростей простейшей - **линейной** связи между модулем силы вязкого трения F , площадью обтекаемой поверхности тела S и величиной $\Delta V/\Delta r$, так называемого **градиента скорости**, характеризующего быстроту уменьшения величины скорости ΔV от слоя к слою - с увеличением расстояния от поверхности Δr [1,2]:

$$F \approx -\frac{\Delta V}{\Delta r} \cdot S \quad \text{или, переходя к равенству} \quad F = -\eta \cdot \frac{\Delta V}{\Delta r} \cdot S \quad (1)$$

Феноменологический коэффициент пропорциональности η ("эта"- греч.) в этом отношении получил название **коэффициента динамической вязкости** или просто "**вязкости**". Его значение зависит от свойств среды и является мерой свойства вязкости среды - степени связи между слоями. Чем меньше вязкость, тем легче скользят слои друг относительно друга. Так, помещая между трущимися поверхностями слои смазки, можно существенно облегчить скольжение.

Упомянутая уже молекулярно-кинетическая теория дает следующее выражение для коэффициента вязкости в газах $\eta = r \langle V \rangle \lambda / 3$, связывая его значение со значением плотности газа ρ , средней (тепловой) скорости $\langle V \rangle$ и длиной свободного пробега молекул λ .

Как следует из (1), размерность вязкости в единицах СИ $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}$ (Паскаль-секунда). Величина коэффициента вязкости численно равна силе трения, действующей на каждый квадратный метр вдоль поверхности касания слоев, при перепаде скоростей между ними 1 м/с на каждый 1 м расстояния между слоями. В технике часто используется еще одна единица измерения - 1 Пуаз, $\text{Па} \cdot \text{с}$. Иногда говорят о **кинематической вязкости** $\nu = \eta / \rho$ с единицей измерения 1 Стокс (Ст).

В таблице 1, приведены взятые из таблиц характерные значения коэффициента вязкости различных сред. Обратите внимание на то, что вязкость веществ довольно сильно зависит от температуры (действительно, застывшее масло трудно намазать на бутерброд).

Вещество	t (°C)	η (Па·с)	Примечания
Воздух	0	0.0000017	С увеличением температуры газы становятся более вязкими.
	100	0.0000021	
Вода	100	0.00028	Горячая вода из чайника льется быстрее, чем ледяная вода из под крана.
	20	0.001	
	0	0.0017	
Гелий жидкий	-271	0.0000025	При уменьшении температуры ниже -271 °C вязкость жидкого гелия обращается в ноль и он приобретает свойство сверхтекучести. Вертушка, помещенная в поток этой жидкости не вращается в нем.
Азот жидкий	-196	0.000023	Чрезвычайно подвижная жидкость!
Кровь	20	0.0015	
Ртуть	20	0.00168	
Масло растит.	20	0.0051	
Глицерин	20	1.5	
Патока, мед	20	27	
Лед	20	$1.0 \cdot 10^{10}$	Сосульки и льдины изгибаются от собственной тяжести
Алюминий	9	$7.5 \cdot 10^{12}$	Твердые тела обладают очень большой вязкостью, но медленно все же способны "течь" - их можно штамповать даже без нагревания.

Формула Стокса.

Использование формулы (1) для расчета силы трения сложно даже при знании функции для распределения скоростей. Дело в том, что для тел сложной формы эту формулу можно применить непосредственно лишь для элемента площади dS и определить таким образом вклад dF для главного вектора результирующей силы вязкого трения от каждого элемента поверхности данного тела. А затем необходимо провести векторное суммирование всех элементарных сил. Эта операция представляет серьезные математические трудности и здесь рассматриваться не будет.

Однако если тело имеет **простую симметричную форму**, то можно получить оценку величины полной силы вязкого трения, руководствуясь соображениями подобия.

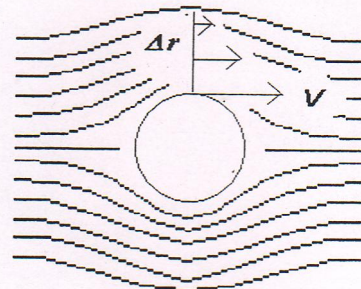


Рис. 4. К выводу формулы Стокса.

Рассмотрим, например, движение шара радиусом r в жидкости (Рис. 4). Обозначим V скорость шара относительно жидкости. Из рисунка видно, что в непосредственной близости от шара скорость жидкости равна V , а по мере удаления уменьшается практически до нуля на некотором расстоянии Δr , тем большем, чем больше размер шара. Поскольку теория Ньютона линейна, то предположим, что $\Delta V \sim V$, и $\Delta r \sim r$.

Учтем далее, что площадь тела $S \sim r^2$. Значения всех коэффициентов пропорциональности могут быть получены лишь при строгом анализе всей задачи.

Очевидно, для тела с симметричной относительно оси движения формой вектор результирующей силы сопротивления будет направлен строго против вектора скорости движения.

Таблица 1. Динамическая вязкость веществ

В этом случае для модуля силы получаем из формулы (1):

$$F \approx \eta \cdot \frac{\Delta V}{\Delta r} \cdot S \approx \eta \cdot \frac{V}{r} \cdot r^2 \approx \eta V r \quad (2)$$

В полученной формуле опущены все числовые коэффициенты - это правило, которому следуют при оценке результатов по порядку величины.

Известна и точная формула для шара, полученная, впрочем, только через полтора века (!) после результатов Ньютона (Дж. Стокс, 1851г.) :

$$F = 6 \pi \eta r V \quad (3)$$

Для диска, движущегося в направлении своей плоскости (Рис.5) точный расчет дает:

$$F = (32/3) \eta r V \quad (4)$$

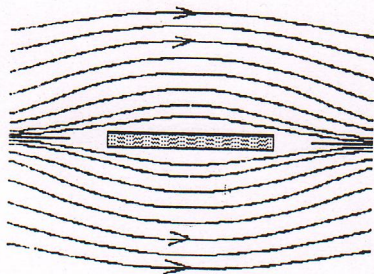


Рис.5. Обтекание диска, движущегося в своей плоскости.

Для того же диска, но движущегося в направлении перпендикулярном своей плоскости (Рис.6), сила, как это и представляется из интуитивных соображений, становится не-много больше:

$$F = 16 \eta r V \quad (5)$$

но это значение все-таки меньше, чем величина силы сопротивления для шара того же радиуса!

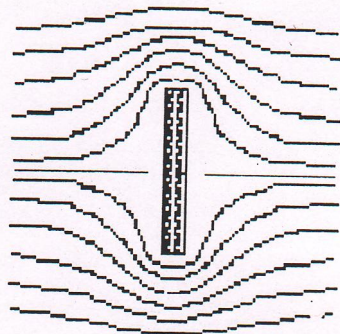


Рис.6. Обтекание диска, движущегося поперек своей плоскости.

В данной работе мы будем использовать первую из трех приведенных выше формул (формулу Стокса). Запомните эту формулу и обратите внимание, на то, что сила Стокса прямо пропорциональна скорости и характерному размеру тела, причем величины η , r и V входят во все точные формулы в одной и той же комбинации $F \sim \eta \cdot r \cdot V$ - это подтверждает правомерность физических оценок, основанных на соображениях размерности.

ИДЕЯ ЛАБОРАТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА. РАБОЧАЯ ФОРМУЛА.

Метод Стокса, предлагаемый в данной работе для определения коэффициента динамической вязкости, основан на использовании режима так называемого **стационарного** движения. Искомая величина коэффициента вязкости исследуемой жидкости определяется при этом косвенным образом - по измерению скорости равномерного падения в ней маленького шарика.

Проанализируем ситуацию падения маленького тяжелого шарика в безграничной (помещенной в широкий сосуд) легкой жидкости. Для простоты будем считать, что на протяжении всего движения шарика обтекание остается ламинарным и можно пользоваться формулой Стокса для силы торможения. Поскольку стенки сосуда предполагаются бесконечно далекими от шарика, то можно пренебречь описанием движения снизу вверх объема жидкости, вытесненного телом.

Запишем уравнение движения шарика под действием силы притяжения mg , силы Архимеда F_A и силы вязкого трения $6\pi\eta rV$. В системе координат, показанной на рис.8, это уравнение имеет вид

$$m \frac{dV}{dt} = mg - F_A - 6\pi\eta rV \quad (7)$$

здесь F_A - сила Архимеда, r - радиус шара.

Еще не решая данного уравнения, можно в общих чертах предсказать характер движения шара. Действительно, на этапе начального движения с нулевой начальной скоростью сила вязкого трения будет пренебрежимо мала по сравнению с действующей на тело разностью сил: $6\pi\eta rV \ll (mg - F_A)$. В этом случае падение будет равноускоренным и ускорение будет тем большим, чем больше масса тела: $a = (g - F_A/m)$.

Видно, что массивное тело быстрее набирает скорость, чем легкое тех же размеров (камешек - быстрее комочка бумаги).

По мере нарастания скорости возрастающая сила сопротивления $6\pi\eta rV$ приводит к уменьшению ускорения. Скорость продолжает нарастать, но движение становится более плавным, приближаясь к установившемуся равномерному (Рис.9). Это равномерное движение реализуется при таком максимальном значении скорости, когда сила Стокса уравнивает сумму силы притяжения и Архимедовой силы, то есть когда выполнится условие:

$$(mg - F_A) = 6\pi\eta rV.$$

Таковы самые общие соображения, полученные при анализе уравнения движения. Теперь решим уравнение движения.

Учитывая в выражении для сил размеры тела и плотности сред, предыдущее соотношение можно переписать уже так:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_b \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3 g (\rho_b - \rho_s) - 6\pi\eta rV \quad (8)$$

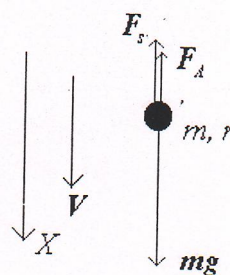


Рис. 8. К решению задачи о падении шара в среде

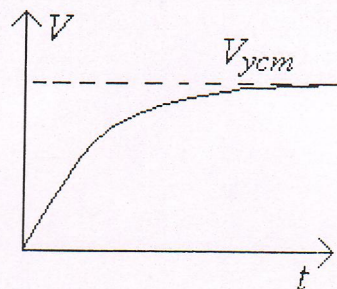


Рис.9. Качественная зависимость скорости падения шара от времени.

ρ_b и ρ_s - плотности материала шара и среды соответственно. Это линейное дифференциальное уравнение первой степени с разделяющимися переменными относительно V и t . Его решение методом разделения переменных приводится ниже.

Для меньшей громоздкости последующих записей введем на время решения уравнения обозначения: $a = 1 - \frac{\rho_s}{\rho_b}$; $b = \frac{9\eta}{2gr^2\rho_b}$.

Тогда уравнение примет вид: $\frac{dV}{a - bV} = gdt$

Произведя в нем замену переменных $z = a - bV$, $dz = -b \cdot dV$,

получаем уравнение, более удобное для интегрирования: $\frac{dz}{z} = -bgdt$

Вычислим интегралы в обеих частях равенства:

$$\ln z = -bgt + C, \quad \text{где } C - \text{постоянная интегрирования.}$$

Получившееся выражение определяет семейство возможных решений уравнения движения. Конкретное решение можно получить, определив величину C по начальным условиям. Пусть эти условия будут самыми простыми: при $t=0$, $V(0)=0$.

Воспользовавшись этими условиями, получим $C = \ln a$.

Тогда $\ln \frac{z}{a} = -bgt$ или $z = a e^{-bgt}$.

Переходя от временно введенных обозначений к исходным, получаем зависимость скорости падения тела от времени:

$$V = \frac{2(\rho_b - \rho_s)gr^2}{9\eta} \left[1 - \exp\left(-\frac{9\eta}{2\rho_b r^2} t\right) \right], \quad (\oplus)$$

уже изображенную ранее на рис. 9.

Для экспериментального определения коэффициента динамической вязкости можно не решать уравнение (8), а сразу учесть, что при установившемся режиме движения ускорение отсутствует ($\frac{dV}{dt} = 0$). Тогда вместо дифференциального получаем алгебраическое уравнение

$$\frac{4}{3}\pi r^3 g (\rho_b - \rho_s) - 6\pi\eta r V = 0 \quad (9)$$

Если шарик падает равномерно, то $V = L/t$, где L и t - расстояние и время, за которое проходит это расстояние.

В эксперименте можно определить все шесть параметров g , r_b , r_s , r , t и L , определяющих коэффициент вязкости. Тогда легко получить искомую связь коэффициента вязкости η с измеряемыми физическими величинами:

$$\eta = \frac{2}{9}(\rho_b - \rho_s) \frac{g r^2}{L} t$$

Эту формулу можно принять
в качестве рабочей.

Для проведения эксперимента исследуемая жидкость налита в закрепленный на штативе высокий стеклянный цилиндр. На стенки цилиндра наносятся две метки. **Первая** (верхняя) метка отмечает примерную границу начала практически равномерного падения. Для используемой в данной работе жидкости это 6...8 см от верхнего уровня (численное значение для такой оценки можно получить при анализе выражений для $V(t)$ и $X(t)$). **Вторая** (нижняя) метка наносится произвольно, но удобнее, если метки разнесены как можно дальше. Расстояние между метками L - базовое для измерения установившейся скорости по формуле равномерного движения $V = L/t$. Время пролета шарика между метками t измеряется **секундомером или электросекундомером**.

МЕТОДИКА ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Перед проведением работы возьмите у лаборанта несколько свинцовых шариков, микрометр или штангенциркуль (для измерения размеров шариков) и линейку (для измерения расстояния между метками).

1. Проведите измерения диаметров каждого из полученных шариков. Учитывая их возможную эллиптичность, проводите измерения по нескольким диаметрам. Запишите результаты всех измерений и вычислите среднее значение. Запишите в протокол и данные о погрешности измерительного прибора. Образец протокола см. в конце данного описания.
2. Нанесите метки или выберите две из уже имеющихся на сосуде. Измерьте расстояние между этими метками. Погрешностью такого измерения можно считать погрешность используемой линейки, примерно равную половине цены малого деления.
3. Перед непосредственным проведением измерений времени падения шарика возьмите один из шариков для предварительного наблюдения его падения в жидкости. Отпустите шарик в цилиндр и просто внимательно наблюдайте явление. Однако, с учетом предстоящих измерений, постарайтесь запомнить характерный темп падения.
4. Пронаблюдав явление, потренируйтесь включать и выключать секундомер. Для этого одной рукой проведите вдоль сосуда сверху вниз примерно с той же скоростью, с какой падал шарик, и с помощью секундомера измерьте время прохождения руки от одной метки до другой. Такая тренировка позволит Вам успешнее провести опыт с малым количеством шариков.
5. Начинайте опыты с шариками, записывая результаты для каждого из шаров, и после проведения измерений приступайте к окончательной обработке результатов эксперимента.

ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ЭКСПЕРИМЕНТА

Проводимая методика измерения вязкости относится к классу **косвенных измерений**, поскольку искомая величина определяется не непосредственно, а посредством расчета по рабочей формуле [3].

Вклад в результирующую погрешность получаемого значения коэффициента вязкости в различной степени вносят погрешности измерения каждой из физических величин, входящих в рабочую формулу.

Так, значение ускорения свободного падения g здесь можно считать физической постоянной ($9,81 \text{ м/с}^2$), а измерения плотностей вещества шариков и жидкости произведены заранее с известными погрешностями:

$$\rho_{\text{св}} = (11,35 \pm 0,005) 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_{\text{жл}} = (1,26 \pm 0,005) 10^3 \text{ кг/м}^3$$

(при возможных заменах новые значения этих величин указаны в табличке на лабораторном столе рядом с установкой).

Приведенные погрешности измерения значений плотностей являются для данной работы **систематическими**.

Остается учесть **случайные** погрешности измерения интервала времени, расстояния и диаметра шариков, используя стандартные приемы (см., например, [3]). Однако, используемая в лабораторном практикуме методика не позволяет провести набор измерений с одним и тем же шариком - здесь каждый следующий опыт проводится с новым шариком. Для этого случая погрешности результата эксперимента можно оценить следующим образом, выделяя главные источники ошибок (см. в конце данного пособия):

1. Измерение расстояния между метками проводится лишь однажды и точность его около $1 \text{ мм}/25 \text{ см} \approx 10^{-4}$. Этой ошибкой можно пренебречь
2. Главный источник ошибки - погрешность измерения интервала времени. Оно определяется не столько точностью секундомера, сколько временем реакции. Измерьте его, включив и сразу же выключив секундомер.

3. Учтите возможность разброса размеров и несферичность используемых шариков по стандартной схеме (см. образец протокола)

Проведите измерения с каждым шариком и отдельно вычислите получаемое значение вязкости, подставляя в рабочую формулу средние значения входящих в нее параметров.

Вычислите среднее квадратичное отклонение полученных значений, а затем оцените среднюю погрешность всего эксперимента по приводимым в образце протокола формулам. В этих формулах величина χ - коэффициент Стьюдента, учитывающий, что число проведенных опытов невелико [4]. Если число опытов три - четыре, значение коэффициента можно принять равным 3. Напомним, что при оценке погрешностей из представленных в формуле слагаемых достаточно учесть лишь те, значения которых отличаются от наибольшего не менее, чем в два раза [3].

УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ РАБОТА

Дополнительные сведения.

Режимы гидродинамических течений.

И формула Ньютона, и следующая из нее формула Стокса имеют ограниченную область применения, поскольку предлагают простейшую - линейную, связь физических величин в сложной картине обтекания.

Как показывает опыт и более развитая теория, предположение о линейно нарастающих размерах пограничного слоя верно только при достаточно малых скоростях. На относительно больших скоростях движения возникают новые явления, не описываемые теорией Ньютона.

Каждому приходилось видеть, как полощется на ветру флаг, как возникают за быстро движущейся рукой в ванне дорожки вихрей или "усы" на воде за движущимся катером.

Обычно формула Стокса применима при оценке скорости движения в воде воздушных пузырей размером до нескольких миллиметров, для описания движения эритроцитов в кровеносных сосудах, медленного падения мелких шарообразных капель тумана в облаке или падения мороси. Использование формулы Стокса допустимо и для анализа взаимного движения поверхностей деталей, разделенных слоем смазки.

А вот движение ружейной пули или снаряда проходит уже через несколько стадий обтекания и практически ни в одной из них линейная теория неприменима. По той же причине неприменима она и при описании быстрого движения рыб, подводных лодок, кораблей и т.п.

Выше сказанное заставляет нас внимательнее рассмотреть расплывчатое понятие больших или малых скоростей и обратиться к получению критерия применимости формулы Стокса.

Критерий смены режимов.

Существует несколько причин ограниченной применимости формулы Стокса. Так, по достижении некоторого значения относительной скорости силы вязкости настолько затормаживают жидкость вокруг тела, что она перестает успевать перетекать на обратную набегающему потоку сторону предмета. Тело начинает толкать эту жидкость перед собой, и в потоке возникнет новый тип сопротивления - его называют **лобовым или поршневым**. Кроме того, в искривленных слоях возникают центростремительные ускорения: слои по инерции срываются с плавно искривленных траекторий и начинают "налезать" друг на друга и далее перемешиваются, образуя вихри. В результате этого качественно изменяется структура потока - жидкость вокруг обтекаемого тела от слоистой (**ламинарной** - от лат. *laminarus*, "слоистый") структуры переходит в **турбулентный** - вихревой

режим (от лат. turbus, "вращающийся"). В приграничном слое жидкости возникают течения, направленные как по движению тела, так и против его движения. Эти течения нарушают картину плавного обтекания, а иногда могут изменить даже форму обтекаемого тела - меняется, например, форма паруса, прически, падающей капли.

Очевидно, что в этих явлениях наличие вязкости жидкости конкурирует с процессом динамического перемешивания слоев. Можно утверждать, что если работа сил трения между слоями на длине границы вдоль тела превышает кинетическую энергию ускоряющихся слоев, то инерционные явления будут гаситься и поток сможет оставаться ламинарным. В противном случае может возбуждаться турбулентное течение. Приняв эти соображения, запишем условие ламинарности потока в самом общем виде:

$$A_f > W_{kin} \rightarrow F \cdot l > \frac{1}{2} \rho V^2 l^3$$

Здесь l - характерный размер тела в поперечном направлении.

Используя формулу для силы Стокса, получим:

$$\eta V l^2 > \frac{\rho V^2}{2} l^3 \quad \text{или, опуская численные коэффициенты,} \quad \frac{\rho V l}{\eta} < 1.$$

$$\text{Безразмерная величина } Re = \frac{W_{kin}}{A_f} = \frac{\rho V l}{\eta} \quad (6)$$

называется **числом Рейнольдса** (Осборн Рейнольдс, англ., 1883г.).

Учитывая оценочный характер записанных соотношений (точное значение коэффициентов требует, строгого расчета), скажем, что общий сценарий перехода от ламинарного режима к турбулентному таков:

- при $Re \ll 1$, когда роль силы трения велика, течение с большой степенью надежности будет устойчивым, ламинарным;
- при $Re \gg 1$, когда роль трения мала, - турбулентным, неустойчивым;
- при значениях $Re \sim 1$ характер течения требует более детального анализа.

Известно, например, что для шара переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при значениях $Re \approx 2,5$.

При больших значениях $Re \sim 1,5 \cdot 10^5$ наступает резкое падение силы сопротивления - малоизученное до сих пор явление, называемое **кризисом сопротивления**, а затем, при скоростях, сравнимых со средними скоро-

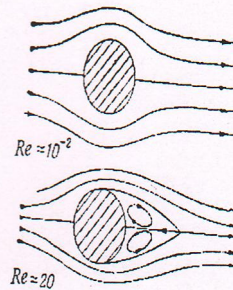


Рис. 7а. Обтекание шара при достаточно малых значениях числа Рейнольдса. Показано возникновение вихрей внутри пограничного слоя

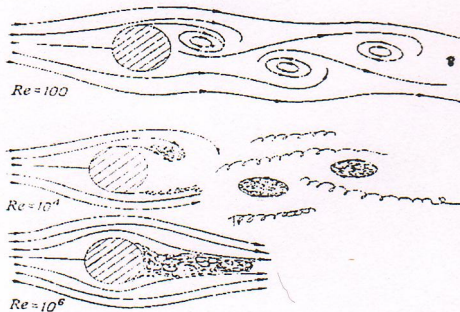


Рис. 7б. Обтекание шара при больших значениях числа Рейнольдса. Показано усложнение структуры пограничного слоя за счет отрыва вихрей.

стями теплового движения молекул среды ($Re \sim 1,5 \cdot 10^7$), начинается режим так называемого **волнового торможения**, называемый иначе режимом **сверхзвукового обтекания**. В этом режиме совершенно необходимым оказывается учет сжимаемости жидкости, а значительная доля энергии тела расходуется на создание волн в среде перед телом - тело догоняет и даже обгоняет созданные им волны. Так движется катер в воде, пуля, реактивный самолет.

Приведенные здесь и на следующей странице рис. 7а и 7б иллюстрируют различные моменты процесса возникновения турбулентности. А точные

зависимости силы сопротивления от значения скорости и от значения числа Рейнольдса, изображены на графиках в конце описания

Для получения общего представления обо всех затронутых в данной работе режимах может оказаться полезной качественная картина полной зависимости силы сопротивления от скорости, приведенная в конце этой брошюры. Для дальнейшего ознакомления с удивительными реологическими явлениями обратитесь к дополнительной литературе, например [6,7,8].

Задание к учебно-исследовательской работе

1. С использованием уже полученных данных о вязкости жидкости в цилиндре, уточните координату положения верхней метки на нем, доведя интегрирование уравнения движения до получения зависимости $X(t)$ или $V(X)$.

2. Оцените число Рейнольдса для условий проводимого в работе эксперимента и проверьте, насколько точно выполняется в эксперименте условие ламинарности обтекания падающего шара.

3. Можно получить и более точную рабочую формулу, учитывая инерционность жидкости и влияние стенок круглого сосуда радиусом R на движение жидкости при обтекании падающего шара радиусом r [5]:

$$\eta = \frac{2}{9}(\rho_b - \rho_s) \frac{g r^2}{L \left[1 + 2.4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]} t$$

Разберитесь в выводе этой формулы.

4. На основании данных Ваших оценок и измерения параметров установки оцените критические размеры шаров, допустимых к использованию в данной установке. Проведите качественный эксперимент, подтверждающий Ваши выводы, подобрав соответствующие размеры шаров из имеющихся в лаборатории, но использующихся в других работах.

Вопросы для самопроверки

1. Что такое коэффициент динамической вязкости и каковы его размерность и характерные значения?
2. С какими явлениями связана и как возникает сила вязкого трения с позиции молекулярно-кинетических представлений? Почему вязкости газов ниже вязкости жидкости?
3. Получите формулу Стокса методом оценки: При каких условиях значение силы вязкого трения можно оценивать по формуле Стокса?
4. В чем заключается метод Стокса, какова цель и сущность эксперимента в данной лабораторной работе? Воспроизведите основные моменты получения зависимости скорости от времени (\oplus) для случая падения шарика в вязкой среде. Получите рабочую формулу для определения коэффициента динамической вязкости.
- 5*. Каков смысл числа Рейнольдса и какие явления возникают в условиях, когда формула Стокса неприменима? Приведите примеры наблюдения Вами различных режимов движения тела в среде.

Рекомендуемая литература:

К основной части работы

1. Савельев И.В., Курс общей физики, т.1, -М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат.лит. (любой год издания).
2. Кикоин И.К и Кикоин А.К., Молекулярная физика, М.:Физматгиз, (любой год издания).
3. Руководство к лабораторным занятиям по физике. Под ред. Л.Д.Гольдина, М.:Наука, (любой год издания).

К учебно-исследовательской работе

5. Коткин Г. Всплывающий воздушный пузырек и закон Архимеда. // журнал "Квант", 1, 1976. (При отсутствии в библиотеке, обращайтесь к лаборантам физического практикума).
6. Хилькевич С.С., Физика вокруг нас. Почему засасывает болото.// Библиотечка "Квант". -М.: Наука, 1985.
7. Фейнмановские лекции по физике, т.7 - Любой год издания.
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.. Теоретическая физика, т.VI. Гидродинамика. -М.: Наука, Гл.ред. физ.-мат.лит. 1986., с.48 - 70.

Образец протокола измерений

$L = \dots \text{ см} \pm 1 \text{ мм}$

$t_{\text{реакции}} = \dots \text{ сек}$

$\sigma_L = 1 \text{ мм}$

$\sigma_t = t_{\text{данные}}$

Шарик 1

d_i	\bar{d}	$\bar{d} - d_i$	$(\bar{d} - d_i)^2$	$\sigma_{d \text{ измер}}$

$t_{\text{измер}} = \dots$			$\eta_1 = \dots$	

Шарик 2

d_i	\bar{d}	$\bar{d} - d_i$	$(\bar{d} - d_i)^2$	$\sigma_{d \text{ измер}}$

$t_{\text{измер}} = \dots$			$\eta_2 = \dots$	

Шарик 3

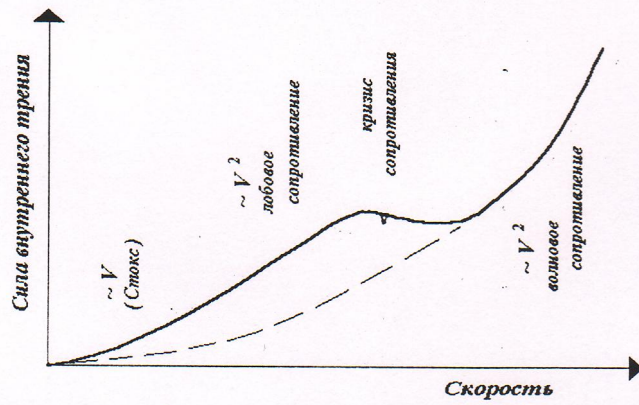
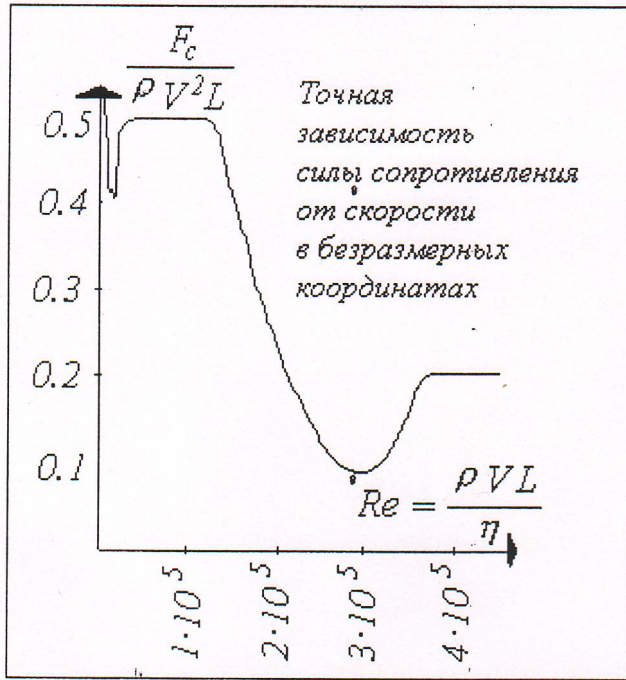
d_i	\bar{d}	$\bar{d} - d_i$	$(\bar{d} - d_i)^2$	$\sigma_{d \text{ измер}}$

$t_{\text{измер}} = \dots$			$\eta_3 = \dots$	

Итак, $\bar{\eta} = \dots$ $\sigma^2_{\eta \text{ измер}} = \frac{\sum (\bar{\eta} - \eta_{\text{ш}})^2}{N \cdot (N - 1)} = \dots$

$$\sigma_{\eta} = \chi \cdot \bar{\eta} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\eta \text{ измер}}}{\bar{\eta}}\right)^2 + \sum \left(\frac{\sigma_t}{t_i}\right)^2 + \sum \left(\frac{\sigma_d}{\bar{d}_i}\right)^2} = \dots$$

Окончательно $\eta = \dots \pm \dots \text{ Па} \cdot \text{с}$



Качественная зависимость силы внутреннего трения от скорости движения тела в среде