С.Ф.ЛУКОМСКИЙ

ГАРМОНИЧЕСКИЙ И ВЕЙВЛЕТ АНАЛИЗ

2016

УДК 517
ББК 22.19;
Л84 **Лукомский С.Ф.** Гармонический и вейвлет анализ. Саратов, 2016, 55с.

Излагаются основы гармонического и классического вейвлет анализа. Предназначено студентам, обучающимся в магистратуре и аспирантам.

Рецензент: профессор Терехин П.А.

Учебное издание
Лукомский Сергей Федорович
Гармонический и вейвлет анализ

УДК 517

Глава 1

Гармонический анализ

1 Замкнутые и полные системы

Определение 1.1 *Пусть $(X, ||\cdot||)$ – Банахово пространство, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечная система элементов. Обозначим символом $\overline{(x_n)}$ – замыкание линейной оболочки системы (x_n) по норме $||\cdot||$.*

Система $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется замкнутой в X, если ее замыкание $\overline{(x_n)}$ совпадает с X, т.е. $\forall\, x_0 \subset X$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n_\varepsilon} x_k \alpha_k^{(\varepsilon)} = P_{n_\varepsilon}$, что $||x - P_{n_\varepsilon}|| < \varepsilon$.

Определение 1.2 *Пусть X^* – пространство, сопряженное к X, т.е. состоит из линейно-независимых функционалов с нормой*

$$||f|| = \inf_{||x||\le 1} \frac{|f(x)|}{||x||}.$$

Система $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется полной относительно сопряженного пространства X^*, если из того, что для функционала $f:\ f(x_n) = 0\ \forall\, n \ \Rightarrow f(x) = 0\ \forall\, x$.

Теорема 1.1 *Система $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнута в X тогда и только тогда, когда она полна относительно X^*.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ замкнута и $f(x_n) = 0\ \forall\, n \ \Rightarrow\ \forall$ линейных комбинаций $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$, $f(P_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k) = 0$. Так как (x_n) замкнута в X, то $\forall\, x \in X\ \exists$ последовательность $P_n \to x \ \Rightarrow\ f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(P_n) = \lim 0 = 0$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть (x_n) полна относительно X^*. Покажем, что

(x_n) замкнута. Предположим, что $\overline{(x_n)} \neq X \;\Rightarrow\; \exists$ элемент $e \notin \overline{(x_n)} \;\Rightarrow$ $d(e, \overline{(x_n)}) = d > 0$. Тогда по теореме о разделяющем функционале существует линейный непрерывный функционал f такой, что $f(x_n) = 0\ \forall\, n$ и $f(e) = 1$. Таким образом, $f \not\equiv 0$, что противоречит условию полноты. □

Пример. Теорема Вейерштрасса утверждает, что $\forall\, f \in C[0, 2\pi]$ существует последовательность тригонометрических многочленов $T_n(x)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} ||T_n(x) - f(x)||_{C[0,2\pi]} = 0.$$

В качестве T_n можно взять средние Фейера

$$T_n(x) = K_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x),$$

где $D_k = \frac{1}{2}\cos x + \ldots + \cos kx$ – ядро Дирихле. Это означает, что тригонометрическая система замкнута в $C[0, 2\pi]$.

2 Ортогональные ряды в пространстве со скалярным произведением

Определение 2.1 *Пусть X – линейное пространство со скалярным произведением над полем комплексных чисел (т.е. задано умножение над полем комплексных чисел). В этом случае аксиомы скалярного произведения выглядят следующим образом:*
1) $(f, f) \geq 0$;
2) $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$;
3) $(f, g) = \overline{(g, f)}$;
4) $(f + g, h) = (f, h) + (g, h)$;
5) $(\lambda f, g) = \lambda(f, g)$.
Система элементов $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ортогональной в X, если

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \lambda_n \neq 0, & n = m \end{cases}.$$

Система элементов $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ортонормированной системой в X, если $(\varphi_n, \varphi_m) = \delta_{n,m}$.

Определение 2.2 *Пусть X – линейное пространство со скалярным произведением, $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ – ортонормированная система в X. Числа $c_n(f) =$*

(f, φ_n) *называются коэффициентами Фурье элемента* f *по системе* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$, *ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n(f)\varphi_n$$

называют рядом Фурье по системе $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 2.1 (Неравенство Коши–Буняковского)

$$|(f,g)| \le \sqrt{(f,f)} \cdot \sqrt{(g,g)}.$$

Доказательство. Это было доказано в курсе анализа. □
Следствие. *Равенство* $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ *определяет норму в* X.
Доказательство. Это было доказано в курсе анализа. □

Теорема 2.2 (О минимальном уклонении) . *Пусть* $f \in X$, (φ_n) *– ортонормированная система. Тогда выражение* $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|$ *(при фиксированном* n*) принимает наименьшее значение, если* a_k *есть коэффициенты Фурье по системе* φ_k, *т.е.* $a_k = (f, \varphi_k)$.

Доказательство.

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k, f - \sum_{l=1}^{n} a_l\varphi_l\right) =$$

$$= (f,f) - \sum_{l=1}^{n}(f, a_l\varphi_l) - \sum_{k=1}^{n}(a_k\varphi_k, f) + + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k\bar{a}_l(\varphi_k, \varphi_l) =$$

$$(f,f) - \sum_{l=1}^{n} \bar{a}_l(f, \varphi_l) - \sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 =$$

$$= (f,f) - \sum_{l=1}^{n} \overline{a_l(f,\varphi_l)} - \sum_{l=1}^{n} a_l(f,\varphi_l) + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 = \|f\|^2 - \sum_{l=1}^{n} a_l\bar{c}_l - \sum_{l=1}^{n} \bar{a}_l c_l + \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k\bar{a}_k - a_k\bar{c}_k - \bar{a}_k c_k + c_k\bar{c}_k) - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n}(a_k - c_k)(\bar{a}_k - \bar{c}_k) - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 =$$

$$= \|f\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \ge \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

min достигается, если $a_k = c_k$, где $c_k = (f, \varphi_k)$, т.е.
$\min \left\| f - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2$ при $c_k = c_k(f)$. □

Следствие 1. $\left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2.$

Следствие 2. *Так как* $\left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\varphi_k\right\|^2 \geq 0$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|$.

Следствие 3. *Если* $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ *– ортонормированная система в* X, $c_k(f) = (f, \varphi_k)$ *– коэффициенты Фурье, то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|$ *– неравенство Беселя.*

Определение 2.3 *Пусть* X *линейное нормированное пространство с нормой* $\|\cdot\|$. *Система элементов* $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется замкнутой в* X, *если для любого элемента* $f \in X$ *найдется последовательность полиномов* $P_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^{(n)}\varphi_k$, *которая сходится к элементу* f *по норме пространства* X, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - P_n\| = 0.$$

Теорема 2.3 *Пусть* X *линейное пространство со скалярным произведением. Ортонормированная система* (φ_k) *замкнута в* X *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, f \in X, \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2.$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть система (φ_k) замкнута в X. Тогда

$$\forall\, f \in X,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \left\|f - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\varphi_k\right\|^2 < \varepsilon^2.$$

По теореме 1.2 $\left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n_0} c_k\varphi_k\right\|^2 < \left\|f - \sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k\varphi_k\right\|^2 < \varepsilon^2$. Тогда при $n > n_0$ имеем

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 < \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n_0} |c_k|^2 = \left\|f - \sum_{k=1}^{n_0} c_k\varphi_k\right\|^2 < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2\right) = 0.$$

Поэтому

$$\Rightarrow \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \to 0$$

Это означает, что

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k. \ \square$$

Следствие. *Если ортонормированная система (φ_n) замкнута в линейном пространство X со скалярным произведением, то $\forall\, f \in X$ ряд Фурье по системе (φ_n) сходится к f по норме X.*

3 Тригонометрическая система, ее ортогональность

Определение 3.1 *Система функций $(1, \cos nx, \sin nx)_{n=1}^{\infty}$ называется тригонометрической системой.*

Теорема 3.1 *Тригонометрическая система ортогональна на любом отрезке длины 2π.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\int\limits_a^{a+2\pi} 1^2\,dx = 2\pi$,

$$\int\limits_a^{a+2\pi} 1 \cdot \cos nx\,dx = \int\limits_a^{a+2\pi} 1 \cdot \sin nx\,dx = \pi,$$

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \cos^2 nx\,dx = \int\limits_a^{a+2\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi,$$

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \cos nx \sin mx\,dx = 0, \quad \int\limits_a^{a+2\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases},$$

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \sin nx \sin mx\,dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}.$$

Докажем предпоследнее равенство. Пусть $m \neq n$, тогда

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \cos nx \cos mx\,dx = \frac{1}{2}\left(\int\limits_a^{a+2\pi} \cos(m+n)x\,dx + \int\limits_a^{a+2\pi} \cos(m-n)x\,dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x\Big|_a^{a+2\pi} + \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\Big|_a^{a+2\pi} = 0.$$

При $m = n$ утверждение очевидно, так как во втором интеграле $\cos(m-n) = 1$, $\square$. **Следствие.** *Система*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) \tag{3.1}$$

– ортонормирована на любом отрезке длины 2π.

4 Ряд Фурье по тригонометрической системе

Так как система (3.1) – ортонормированная система на $(-\pi, \pi)$, то для $f \in L(-\pi, \pi)$ можно определить ряд Фурье по тригонометрической системе. Он будет иметь вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \tilde{a}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + \tilde{b}_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \tag{4.1}$$

где $\tilde{a}_0 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx, \quad \tilde{b}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx.$$

Обозначая

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx,\ a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{4.2}$$

можем записать (4.1) в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx \tag{4.3}$$

Ряд (4.3), в котором a_n, b_n вычисляются по формуле (4.2), называется рядом Фурье, а числа a_n, b_n – коэффициентами Фурье. Тот факт, что функция $f(x)$ имеет ряд Фурье (4.3) записывают в виде

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n \sin nx. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1 (Римана–Лебега) *Если* $f \in L(-\pi, \pi)$, *то коэффициенты Фурье* $a_n(f), b_n(f) \to 0$.

5 Полнота тригонометрической системы

Теорема 5.1 *Тригонометрическая система замкнута в пространстве* $L_2(0, 2\pi)$, *т.е.* $\forall f \in L_2(0, 2\pi)$ $\forall \varepsilon > 0$ *существует полином*

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

такой, что

$$\int\limits_0^{2\pi} |T_n(x) - f(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

Лемма 5.1 *Тригонометрическая система полна относительно пространства* $C[-\pi, \pi]$.

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $a_k(f) = 0$, $b_k(f) = 0$ $\forall k$. Докажем, что $f(x) \equiv 0$ на $[-\pi, \pi]$. Для этого достаточно доказать, что если для любого тригонометрического полинома $T_n(x)$ интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx = 0$, то $f(x) \equiv 0$. Это равносильно тому, что если $f(x) \not\equiv 0$, то существует тригонометрический полином $T_n(x)$, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx \neq 0$. Т.е. надо доказать, что если $f(x)$ непрерывна, $f(x_0) \neq 0$ в некоторой точке x_0, то существует тригонометрический полином $T_n(x)$ для которого $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx \neq 0$. Можно считать, что $f(x_0) > 0$, т.к. можно $f(x)$ заменить на $-f(x)$. Можно считать, что $x_0 = 0$, т.к. вместо $f(x)$ можно рассматривать функцию $F(x) = f(x + x_0)$. Таким образом, надо показать, что если $f(x)$ непрерывна, $f(0) = c > 0$, то существует тригонометрический многочлен $T_n(x)$, для которого $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx \neq 0$.

Т.к. $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 = 0$ и $f(0) = c > 0$, то $\exists\, \delta > 0$, что $\forall\, x \in (-\delta, \delta)$ $f(x) \geq \frac{c}{2}$. Рассмотрим многочлен $T_n(x) = (1 + \cos x - \cos \delta)^n$ и покажем, что

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx = +\infty.$$

Запишем

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx = \int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x)T_n(x)\,dx + \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x)T_n(x)\,dx + \int\limits_{\delta}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx.$$

Т.к. f непрерывна на $[-\pi,\pi]$, то $\exists\, M>0$, что $|f(x)|\le M$, значит,

$$|\int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x)T_n(x)\,dx| \le M\int\limits_{-\pi}^{-\delta} |1+\cos x-\cos\delta|\,dx. \tag{5.1}$$

Очевидно, что $1+\cos x-\cos\delta\le 1+\cos\delta-\cos\delta=1$ и $1+\cos x-\cos\delta\ge 1-1-\cos\delta=-\cos\delta\ge -1$. Поэтому $|1+\cos x-\cos\delta|\le 1$ и значит,

$$M\int\limits_{-\pi}^{-\delta} |1+\cos x-\cos\delta|\,dx \le M\cdot 1\cdot\pi = M\pi.$$

Подставляя в неравенство (5.1) получаем

$$|\int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x)T_n(x)\,dx| \le M\pi. \tag{5.2}$$

Аналогично

$$|\int\limits_{\delta}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx| \le M\pi. \tag{5.3}$$

Оценим интеграл $\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x)T_n(x)\,dx$ снизу. Так как при $x\in[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}]$ имеем $1+\cos x-\cos\delta\ge 1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta=q>1$ то

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta}(1+\cos x-\cos\delta)^n f(x)\,dx \ge \frac{c}{2}\int\limits_{-\delta/2}^{\delta/2}(1+\cos x-\cos\delta)^n\,dx \ge \frac{c}{2}q^n\delta,\ q>1.$$

Тогда при $n\to\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x)T_n(x)\,dx=+\infty$, значит, $\exists\, n$, что

$$\left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx\right| \ge \int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x)T_n(x)\,dx - \int\limits_{-\pi}^{-\delta} f(x)T_n(x)\,dx - \int\limits_{\delta}^{\pi} f(x)T_n(x)\,dx \ge$$

$$\ge \frac{c}{2}q^n\delta - 2M\pi > 0.\ \square$$

Теорема 5.2 *Тригонометрическая система полна относительно* $L_1(-\pi,\pi)$.

Доказательство. Пусть $f \in L_1(-\pi, \pi)$ и $a_k(f) = b_k(f) = 0 \; \forall \, k$. Докажем, что $f(x) = 0$ п.в. Строим $F(x) = \int\limits_{-\pi}^{x} f(t)\, dt \Rightarrow a_k(F) = 0,\; b_k(F) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Рассмотрим $\Phi = F(x) - \frac{a_0(F)}{2}$, для нее $a_k(\Phi) = 0,\; b_k(\Phi) = 0$ и Φ – непрерывна. Тогда $\Phi \equiv 0 \Rightarrow F(x) \equiv \mathrm{const} \Rightarrow f(x) = 0$ п.в. $\square$

Теорема 5.3 *Тригонометрическая система полна относительно всех пространств $L_p(0, 2\pi)$ $(p \geq 1)$.*

Доказательство. Пусть $f \in L_p(0, 2\pi)$ и $a_k(f) = b_k(f) = 0$. Так как $f \in L_p$, то $f \in L_1$, значит, $a_k(f) = b_k(f) = 0$. $\square$

Теорема 5.4 *Тригонометрическая система замкнута в $L_2(0, 2\pi)$.*

Доказательство. По теореме 5.3 тригонометрическая система полна относительно всех пространств $L_p(0, 2\pi)$, $(p > 1)$ и значит по теореме 1.1 замкнута во всех пространствах $L_q(0, 2\pi)$ $(q > 1)$. $\square$

6 Свертка Функций

Определение 6.1 *Пусть $f, g \in L(-\pi, \pi)$. Тогда функция*

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x - t) g(t)\, dt$$

называется сверткой.

Теорема 6.1 *1) Свертка $(f * g)(x)$ определена для почти всех $x \in [-\pi, \pi]$,*
2) $(f * g)(x) \in L(-\pi, \pi)$,
3) $\|f * g\| \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$,
4) $f * g$ – 2π периодическая функция.

Доказательство. Нам понадобятся две теоремы:

Теорема 6.2 (Теорема Фубини) *Пусть $f(x, y)$ определена и п.в. конечна на $[a, b] \times [c, d]$ и пусть $f \in [a, b] \times [c, d]$. Тогда*

1) для почти всех $x \in [a, b]$ интеграл $\int\limits_{c}^{d} f(x, y)\, dy$ существует;

2) функция $h(x) = \int\limits_{c}^{d} f(x, y)\, dy$ интегрируема на $[a, b]$;

3) справедливо равенство

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,d\mu(x,y) = \int\limits_a^b d\mu(x)\int\limits_c^d f(x,y)\,d\mu(y).$$

Теорема 6.3 (малая теорема Фубини) *Пусть существует повторный интеграл*

$$\int\limits_a^b d\mu(x)\int\limits_c^d |f(x,y)|\,d\mu(y).$$

Тогда существует интеграл

$$\int\limits_a^b\int\limits_c^d |f(x,y)|\,dxdy = \int\limits_a^b d\mu(x)\int\limits_c^d f(x,y)\,d\mu(y).$$

Доказательство теоремы 6.1. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)g(t)|\,dx$, который существует для п.в. t и равен $|g(t)|\cdot\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|\,dx$. Поэтому по малой теореме Фубини существует интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)g(t)|\,dxdt$, значит, существует интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)\,dxdt \Rightarrow$ для п.в. x существует интеграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)\,dt$ и справедливо равенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)\,dxdt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}dx\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x-t)g(t)\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)\,dx,$$

т.е. $(f*g)(x)\in L(-\pi,\pi)$.

4) Очевидно, что свертка есть 2π периодическая функция, т.к. $\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+2\pi-t)g(t)\,dt = (f*g)(x+2\pi)$ с одной стороны. С другой стороны

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+2\pi-t)g(t)\,dt\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x-\underbrace{(2\pi-t)}_{=\tau})g(\underbrace{t-2\pi}_{=\tau})\,dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x-\tau)g(\tau)\,d\tau = (f*g)(x).$$

3) $|f*g(x)| = \left|\int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)\,dt\right| \leq \int\limits_{-\pi}^{\pi} dx \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)g(t)|\,dt =$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t)|dt \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|\,dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t)|dt \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx = \|g\|_{L_1} \cdot \|f\|_{L_1}. \ \square$$

Следствие. $(f*g)(x) = (g*f)(x)$.
Доказательство.

$$(f*g)(x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x-t)|g(t)\,dt =$$

обозначим $x - t = \tau$

$$= -\int\limits_{x+\pi}^{x-\pi} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau = \int\limits_{x-\pi}^{x+\pi} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\tau)g(x-\tau)\,d\tau = (g*f)(x). \ \square$$

7 Ядро Дирихле. Выражение частичной суммы ряда Фурье через ядро Дирихле

Определение 7.1 *Выражение*

$$D_n(x) = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$$

называется ядром Дирихле.

Теорема 7.1 *Справедливо равенство*

$$D_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Доказательство. Умножим и поделим $D_n(x)$ на $2\sin\frac{x}{2}$, получим

$$D_n(x) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2} + 2\cos x\sin\frac{x}{2} + \ldots + 2\cos nx\sin\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2} + \sin\left(x+\frac{x}{2}\right) - \sin\frac{x}{2} + \sin\left(2x+\frac{x}{2}\right) - \sin\left(x+\frac{x}{2}\right) + \ldots +\right.$$

$$\left. + \sin\left(nx+\frac{x}{2}\right) - \sin\left((n-1)x+\frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}. \ \square$$

Теорема 7.2 *Для частичной суммы*

$$S_n(f,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

ряда Фурье функции f справедливо равенство

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt.$$

Доказательство.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \cos(x-t) + \cos 2(x-t) + \ldots + \cos n(x-t)\right)\,dt$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)}_{=a_0}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}(\cos kx \cdot \cos kt + \sin kx \cdot \sin kt)\right)\,dt =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt$$

доказывается заменой переменной $x - t = \tau$. $\square$

8 Признак Дини

Теорема 8.1 *Пусть $f(x) \in (-\pi, \pi)$ и пусть число $S \in \mathbb{R}$. Образуем $\forall\, x \in [-\pi,\pi]$ функции $\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t) - 2S$. Если $\exists\, \delta > 0$, что $\int\limits_0^\delta \frac{\psi_x(t)}{t}\,dt$ существует, то $S_n(f,x) \to S$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Преобразуем

$$S_n(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x-t)D_n(t)\,dt + \int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt\right) =$$

обозначим $-t=\tau$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{\pi}^{0} f(x+\tau)D_n(\tau)\,d\tau+\int\limits_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)\,dt\right)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt.$$

Вычислим

$$\int\limits_{0}^{\pi} SD_n(t)\,dt=S\int\limits_{0}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)\,dt=S\cdot\frac{\pi}{2}+\sum 0=S\cdot\frac{\pi}{2}\Rightarrow S=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} S\cdot D_n(t)\,dt\Rightarrow$$

$$S_n(f,x)-S=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}(f(x+t)+f(x-t))D_n(t)\,dt-\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} S\cdot D_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\underbrace{(f(x+t)+f(x-t)-2S)}_{\psi_x(t)}D_n(t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi}\frac{\psi_x(t)}{t}\cdot\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\delta}\underbrace{\frac{\psi_x(t)}{t}}_{\in L(0,\delta)}\cdot\underbrace{\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\substack{\text{непрерывная}\\ \text{функция}}}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt+\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\pi}\underbrace{\frac{\psi_x(t)}{2\sin\frac{t}{2}}}_{\in L(\delta,\pi)}\cdot\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=I_1+I_2.$$

По теореме Римана–Лебега $\lim I_2=0$ и $\lim I_1=0$. $\Box$

Следствие 1. *Если $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha>0$, то*

$$S_n(f,x)=f(x).$$

Доказательство.

$$|f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\le 2Mt^{\alpha}\ (\alpha>0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\limits_{0}^{\delta}\frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt\le 2M\int\limits_{0}^{\delta}t^{\alpha-1}\,dt=2M\frac{t^{\alpha}}{\alpha}\Bigg|_{0}^{\delta}=\frac{2M}{\alpha}\delta^{\alpha}<+\infty,$$

т.к. $\alpha>0$. $\Box$

Следствие 2. *Если $f(x)$ дифференцируема в точке x, то $S_n(f,x)\to f(x)$ в точке x.*

Доказательство. По теореме Лагранжа

$$f(x+t)-f(x)=f'(x)\cdot t+\alpha(t)t,\ \alpha(t)\to 0,\ \text{при}\ t\to 0.$$

$$f(x-t)-f(x)=f'(x)\cdot t+\beta(t)t,\ \beta(t)\to 0,\ \text{при } t\to 0.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\delta \frac{|\psi_x(t)|}{t}\,dt \le |f'(x)|\int\limits_0^\delta (2+(|\alpha(t)|+|\beta(t)|))\,dt < +\infty \ \square$$

9 Интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$

Теорема 9.1 *Интеграл* $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ *сходится.*

Доказательство.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt=$$

обозначим $\tau+k\pi=t$, $dt=d\tau$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(\tau+k\pi)}{\tau+k\pi}\,d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t\cos k\pi+\cos t\sin k\pi}{t+k\pi}\,dt=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\underbrace{\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt}_{u_k}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k.$$

Очевидно $u_k\ge 0\Rightarrow$ ряд знакочередующийся. Кроме этого

$$\frac{1}{k}\ge u_k=\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+k\pi}\,dt\ge\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+(k+1)\pi}\,dt=u_{k+1}\Rightarrow$$

это ряд Лейбница, значит, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin(t+k\pi)}{t+k\pi}\,dt$ сходится. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$, значит, $\exists\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_0^{k\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt=M$.

2) Покажем, что $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^{b}\frac{\sin t}{t}\,dt=M$.

В самом деле, пусть $k\pi \le b < (k+1)\pi$. Тогда

$$\int\limits_0^b \frac{\sin t}{t}\,dt = \int\limits_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \int\limits_{k\pi}^b \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

Но

$$\left|\int\limits_{k\pi}^b \frac{\sin t}{t}\,dt\right| \le \int\limits_{k\pi}^b \frac{1}{t}\,dt \le \frac{1}{k\pi}\cdot\pi = \frac{1}{k} \to 0 \Rightarrow \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b \frac{\sin t}{t}\,dt = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b \frac{\sin t}{t}\,dt = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt + \lim_{b\to\infty}\int\limits_{k\pi}^b \frac{\sin t}{t}\,dt = M. \square$$

Замечание. Можно посчитать, что $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$.

10 Явление Гиббса

Рассмотрим функцию

$$G(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0) \\ +1, & x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Вычисляя коэффициенты Фурье находим ее ряд Фурье

$$G(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x.$$

Рассмотрим частичные суммы

$$S_n(G,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x.$$

Нарисуем график частичной суммы на отрезке $[0,\pi]$. Для этого найдем ее явный вид. Продифференцируем $S_n(G,x)$, получим

$$S_n'(G,x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x.$$

Умножим и поделим правую часть на $2\sin x$. Проводя те же рассуждения, что и при вычислении ядра Дирихле находим

$$S_n'(G,x) = \frac{2}{\pi}\frac{\sin 2nx}{\sin x}.$$

Интегрируя последнее равенство, получаем

$$S_n(G,x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt.$$

Для построения графика частичной суммы найдем ее экстремумы.

Экстремумы $S_n(G,x)$ находим из условия $\sin 2nx = 0$, получаем $x = \frac{k}{2n}\pi,\ k = 1,2,...,2n-1.$

Если k – нечетное, то $2nx = \pi, 3\pi, \ldots, (2n-1)\pi$ и $\sin 2nx$ меняет знак с $+$ на $-$, следовательно, в точке $x = \frac{k}{2n}\pi$ – max.

Если k – четное, то $2nx = 2\pi, 4\pi, \ldots, (2n-2)\pi$ и $\sin 2nx$ меняет знак с $-$ на $+$, следовательно, в точке $x = \frac{k}{2n}\pi$ – min.

Найдем значения $S_n(G,x)$ в точках $x = \frac{k}{2n}\pi$. Имеем

$$S_n\left(G,\frac{k}{2n}\pi\right) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{k}{2n}\pi}\frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} + \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{2n}} + \int\limits_{\frac{2\pi}{2n}}^{\frac{3\pi}{2n}} + \ldots + \int\limits_{\frac{(2n-2)\pi}{2n}}^{\frac{(2n-1)\pi}{2n}} + \int\limits_{\frac{(2n-1)\pi}{2n}}^{\frac{2n\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\,dt\right). \tag{10.1}$$

Так как на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ функция $\frac{1}{\sin t}$ убывает, а на интервале $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ – возрастает, то

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} > 0,\ \int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{2n}} < 0 \text{ и } \left|\int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}}\right| > \left|\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{2n}}\right|;$$

$$\int\limits_{\frac{2\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{2n}} > 0,\ \text{ и } \left|\int\limits_{\frac{2\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{2n}}\right| < \left|\int\limits_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{2\pi}{2n}}\right|;$$

. . . .

$$\int\limits_{\frac{2k\pi}{2n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}} > 0,\ \int\limits_{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{2n}} < 0 \text{ и } \left|\int\limits_{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{2n}}\right| < \left|\int\limits_{\frac{2k\pi}{2n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\right|$$

пока $\frac{2k+1}{2n} < \frac{\pi}{2}$.

Если $\frac{2k+1}{2n} > \frac{\pi}{2}$, то знаки интегралов сохраняются

$$\int\limits_{\frac{2k\pi}{2n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}} > 0, \int\limits_{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{2n}} < 0, \text{ но } \left|\int\limits_{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{2n}}\right| > \left|\int\limits_{\frac{2k\pi}{2n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2n}}\right|,$$

т.е. модули интегралов начинают возрастать. Таким образом, в сумме (13.1) слагаемые попеременно меняют знак, а их модули вначале убывают (при $\frac{2k+1}{2n} < \frac{\pi}{2}$), а затем возрастают (при $\frac{2k+1}{2n} > \frac{\pi}{2}$), и, значит, график функции $S_n(G, x)$ колеблется около некоторого значения $y = M$.

График $S_n(G, x)$: рисунок.

Найдем

$$\lim_{n\to\infty} S_n\left(G, \frac{\pi}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{\sin t}\, dt.$$

При $t \in \left(0, \frac{\pi}{2n}\right)$;

$$\sin t \sim t \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n\left(G, \frac{\pi}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin 2nt}{t}\, dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin 2nt}{2nt}\, d(2nt) \subset \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin 2nt}{t}\, dt \approx 1.18,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n\left(G, \frac{\pi}{2n}\right) \neq G(x)$.

Замечание. Существует непрерывная функция, ряд Фурье которой не сходится поточечно.

11 Ряд Фурье в комплексной форме

Мы знаем, что если $f \in L(-\pi, \pi)$, 2π-периодична, то

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{11.1}$$

где $a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx$.

Теорема 11.1 *Ряд (11.1) можно записать в виде*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \text{ где } c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

Доказательство. Подставим выражение $\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}$, $\sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$ в (11.1), получим

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2}\left(a_n + \frac{b_n}{2^0}\right) + \frac{e^{-inx}}{2}\left(a_n - \frac{b_n}{i}\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}\underbrace{\frac{a_n - ib_n}{2}}_{=c_n} + e^{-inx}\underbrace{\frac{a_n + ib_n}{2}}_{=c_{-n}} =$$

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{=c_0} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{inx}c_n + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-inx}c_{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}.$$

Найдем

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx - i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos nx + i\sin nx)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}\,dx \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \square$$

12 Ряд Фурье функции с произвольным периодом

Теорема 12.1 *Пусть $f(x) \in L(-T,T)$ и $f(x)$ – $2T$-периодична. Тогда*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{T}x}\,dx, \text{ где } c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)e^{in\frac{\pi}{T}x}\,dx.$$

Доказательство. $f(x)$ имеет период $2T$, значит, $F(x) = f(x \cdot \frac{T}{\pi})$ имеет период 2π: $f\left((x+2\pi)\frac{T}{\pi}\right) = f(x \cdot \frac{T}{\pi}) = F(x)$, следовательно,

$$F(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \; c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)e^{-inx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x \cdot \frac{T}{\pi}\right)e^{-inx}\,dx =$$

положим $x\frac{T}{\pi} = t$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} f(t) e^{-in\frac{\pi}{T}} \frac{\pi}{T}\, dt = \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t) e^{-in\frac{\pi}{T}t}\, dt \Rightarrow f\left(x\frac{T}{\pi}\right) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} \Rightarrow$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{T}t}. \ \square$$

13 Интеграл Фурье в комплексной форме

Пусть $f(x) \in L(-\infty, +\infty)$ и непериодична! Как записать ее ряд Фурье?

Рассмотрим $f(x)$ на отрезке $[-T, T]$ и продолжим периодически. Запишем ряд Фурье в комплексной форме. Предположим, что $f(x)$ удовлетворяет условиям Липшица порядка $\alpha > 0$. Тогда

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t) e^{-int}\, dt \right) e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} f(t) e^{in(x-t)\frac{\pi}{t}}\, dt.$$

Обозначим $\omega_n = n\frac{\pi}{T}$. Тогда $\Delta\omega_n = \frac{\pi}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega_n}{\pi} \Rightarrow$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\Delta\omega_n}{2\pi} \int\limits_{-T}^{T} e^{i\omega_n(x-t)}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\omega_n(x-t)}\, dt \Delta\omega_n.$$

Это есть интегральная сумма функции $\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\omega(x-t)}\, dt$, $\omega \in (-\infty, +\infty)$.

Переходя к пределу при $T \to \infty \Rightarrow \Delta\omega_n \to 0$ и интегральная сумма в пределе дает интеграл, т.е.

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{i\omega(x-t)}\, dt. \tag{13.1}$$

Равенство (13.1) можно записать в виде двух равенств

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega, \tag{13.2}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega t}\, dt. \tag{13.3}$$

Равенство (13.3) называют преобразованием Фурье, функцию $\hat{f}(\omega)$ тоже называют преобразованием Фурье.

Теорема 13.1 *Если $f \in L(-\infty, +\infty)$, то преобразование Фурье*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\, dx$$

существует для всех $\omega \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Так как $|e^{-i\omega x}| = 1$, то $|f(x)e^{-i\omega x}| = |f(x)| \in L(\mathbb{R})$ и по принципу сравнения для интеграла Лебега $f(x)e^{-i\omega x} \in L(-\infty, +\infty)$. $\square$

Теорема 13.2 *Если $\hat{f}(\omega) \in L(-\infty, +\infty)$, то интеграл*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega$$

существует для всех $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. (Аналогично теореме 13.1.)

14 Интеграл Фурье функции $f \in L(-\infty, +\infty)$

Определение 14.1 *Пусть $f \in L(-\infty, +\infty)$. Функцию*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\, dx \tag{14.1}$$

называют преобразованием Фурье.

Теорема 14.1 *Если $f \in L(-\infty, +\infty)$, то $\hat{f}(\omega)$ существует $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Очевидно, т.к. $|f(x)e^{-i\omega x}| \le |f(x)| \in L(\mathbb{R})$. $\square$

Теорема 14.2 *Если $\hat{f}(\omega) \in L(-\infty, +\infty)$, то существует интеграл*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\, d\omega$$

Доказательство. Очевидно. $\square$

Теорема 14.3 *Пусть 1)* $f(\omega) \in L(-\infty, +\infty)$,
2) $f(x)$ *имеет ограниченную вариацию в* $O_\delta(x) = (x-\delta, x+\delta)$.
Тогда в точке x *справедливо равенство*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\lim\int_{-\lambda}^{\lambda}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dte^{i\omega x}.$$

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int\limits_{-\lambda}^{\lambda}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt\cdot e^{i\omega x}$. Так как $f(\omega) \in L(-\infty, +\infty)$, то функция $\hat{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ ограничена, следовательно, по теореме Фубини

$$\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\omega x}d\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{i\omega(x-t)}d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\left.\frac{e^{i\omega(x-t)}}{i(x-t)}\right|_{-\lambda}^{\lambda}dt =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{e^{i\lambda(x-t)}-e^{-i\lambda(x-t)}}{2i(x-t)} = 2\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt =$$

$$= 2\left(\int_{-\infty}^{0}f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt + \int_{0}^{+\infty}f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt\right) =$$

положим $x - t = y$

$$= 2\left(-\int_{-\infty}^{0}f(x-y)\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy + \int_{0}^{+\infty}f(x+y)\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy\right) =$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty}(f(x+y)+f(x-y))\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy.$$

Т.е. надо доказать, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{+\infty}(f(x+y)+f(x-y))\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

Но

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}\cdot\pi=\int\limits_0^{+\infty}(f(x+0)+f(x-0))\frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Надо доказать, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\underbrace{[(f(x+y)+f(x-y))-(f(x+0)+f(x-0))]}_{\psi(y)}\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy=0.$$

Зафиксируем x и рассмотрим функцию $\psi(y)$ на $(0,\delta)$. Тогда $\psi(y)$ на $(0,\delta)$ имеет ограниченную вариацию и $\lim\psi(y)=0$. Так как $\psi(y)$ имеет ограниченную вариацию, то $\psi(y)$ есть разность возрастающих функций $\psi(y)=\psi_1(y)-\psi_2(y)$, $\psi_1(y)\geq 0$, $\psi_2(y)\geq 0$ и $\lim\psi_1(y)=\lim\psi_2(y)=0$. Таким образом, надо доказать, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\psi_1(y)\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy=0\wedge\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\psi_2(y)\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy=0.$$

Рассмотрим первый интеграл. Запишем его в виде

$$\int\limits_0^{\delta}\psi_1(y)\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy+\int\limits_\delta^{+\infty}\psi_1(y)\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy$$

Так как $\psi_1(y)\to 0$, то $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\eta>0$, $0<\eta<\delta$, что $\forall\,y$, $y\leq\eta\Rightarrow|\psi_1(y)|<\varepsilon$.

Поэтому перепишем его в виде

$$\int\limits_0^{\eta}\psi_1(y)\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy+\int\limits_\eta^{+\infty}\psi_1(y)\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy=I_1+I_2.$$

По теореме Римана–Лебега $\lim\limits_{\lambda\to\infty}I_2=0$.

Для 1-го интеграла по 2-й теореме о среднем $I_1=\psi_1(\eta)\int\limits_0^{\xi}\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy$. Интеграл $\int\limits_0^{\xi}\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy$ ограничен, т.е. $\exists\,c>0$, что $\left|\int\limits_0^{\xi}\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy\right|\leq c$, значит, $|I_1|<|\psi_1(\zeta)|c<\varepsilon\cdot c$.

Это означает, что $\lim I_1 = 0$ при $\lambda \to +\infty \Rightarrow \lim \int\limits_0^{+\infty} \psi_1(y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy = 0$. Аналогично доказываем, что $\lim \int\limits_0^{+\infty} \psi_2(y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy = 0$. $\square$

Следствие 1. *В условиях теоремы 14.3:*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Следствие 2. *Если дополнительно $f(x)$ непрерывна в точке x, то*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega = f(x).$$

Доказательство. Очевидно, т.к. для непрерывной функции $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = f(x)$. $\square$

Следствие 3. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 14.3 и непрерывна, то в любой точке справедливы равенства*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx.$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega.$$

15 Преобразование Фурье для функций из $L_2(-\infty, +\infty)$

Теорема 15.1 *Пусть $f(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$. При $b > 0$ определим функцию*

$$F(\omega, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-b}^{b} f(x) e^{-i\omega x}\, dx.$$

Тогда существует функция $F(\omega) \in L_2(-\infty, +\infty)$ такая, что $\lim\limits_{b\to+\infty} \|F(\omega) - F(\omega, b)\|_2 = 0$, т.е.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x}\, dx.$$

Доказательство. Пусть $\lambda > 0$ произвольно. Для $j \in \mathbb{Z}$ определим числа

$$a_j = \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{(j+1)/\lambda} f(x)\,dx$$

и определим функции

$$\Phi_n(\omega) = \sum_{j=-n}^{n-1} a_j e^{-i\omega\frac{j}{\lambda}} = \sum_{j=-n}^{n-1} \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{(j+1)/\lambda} f(x) e^{-i\omega x\frac{j}{\lambda}}\,dx,$$

т.е. отрезок $[-b, b]$ разбили на $2n$ равных частей длины $\frac{1}{\lambda}$, при этом $b = \frac{n}{\lambda}$. Покажем, что $\Phi_n(\omega) \to \int\limits_{-b}^{b} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$ равномерно на любом отрезке $[-\Omega, \Omega]$ при $n \to \infty$. В самом деле,

$$\left|\Phi_n(\omega) - \int\limits_{-b}^{b} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right| = \left|\sum_{j=-n}^{n-1} \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{(j+1)/\lambda} f(x)e^{-i\omega\frac{j}{\lambda}}\,dx - \sum_{j=-n}^{n-1} \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{(j+1)/\lambda} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right| \le$$

$$\le \sum_{j=-n}^{n-1} \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{(j+1)/\lambda} |f(x)| \cdot \left|e^{-i\omega\frac{j}{\lambda}} - e^{-i\omega x}\right|\,dx = \sum_{j=-n}^{n-1} \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{(j+1)/\lambda} |f(x)|\left|e^{-i\omega x}\right| \cdot \left|e^{-i\omega\frac{j}{\lambda} + i\omega x} - 1\right|\,dx, \tag{15.1}$$

т.к. $|e^{i\varphi} - 1| \le \varphi$, то $\left|e^{i\omega\left(x - \frac{j}{\lambda}\right)} - 1\right| \le |\omega|\left|x - \frac{j}{\lambda}\right|$. Но в каждом интеграле в (15.1):

$$\frac{j}{\lambda} \le x \le \frac{jH}{\lambda} \Rightarrow 0 \le x - \frac{j}{\lambda} \le \frac{1}{\lambda} \Rightarrow |x - \frac{j}{\lambda}| \le \frac{1}{\lambda}.$$

Поэтому, подставляя в (15.1, получаем неравенство

$$\left|\Phi_H - \int\limits_{-b}^{b} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right| \le |\omega| \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{j=-n}^{n-1} \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{\frac{j+1}{\lambda}} |f(x)|\,dx = \frac{|\omega|}{\lambda} \int\limits_{-b}^{b} |f(x)|\,dx.$$

Поэтому, при фиксированном $b > 0$ равномерно по $|\omega| \le \Omega$

$$\Phi_n(\omega) \to \int\limits_{-b}^{b} f(x)e^{-i\omega x}\,dx. \tag{15.2}$$

Теперь выбираем $\Omega < \lambda \cdot \pi$ и оценим интеграл

$$\int\limits_{-\Omega}^{\Omega} |\Phi_n(\omega)|^2 \, d\omega = \int\limits_{-\lambda\pi}^{+\lambda\pi} \left(\sum_{j=-n}^{n-1} \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{\frac{j+1}{\lambda}} f(x) e^{-i\omega\frac{j}{\lambda}} \, dx \right) \cdot \left(\sum_{k=-n}^{n-1} \int\limits_{\frac{k}{\lambda}}^{\frac{k+1}{\lambda}} \overline{f(x)} e^{+i\omega\frac{k}{\lambda}} \, dx \right) =$$

$$= \int\limits_{-\lambda\pi}^{+\lambda\pi} \left(\sum_{j=-n}^{n-1} a_j e^{-i\omega\frac{j}{\lambda}} \right) \left(\sum_{k=-n}^{n-1} \bar{a}_k e^{i\omega\frac{k}{\lambda}} \right) d\omega. \tag{15.3}$$

При $k \neq j$:

$$\int\limits_{-\lambda\pi}^{+\lambda\pi} e^{-i\omega\frac{j}{\lambda}} e^{i\omega\frac{k}{\lambda}} \, d\omega = \int\limits_{-\lambda\pi}^{+\lambda\pi} e^{i\frac{\omega}{\lambda}(k-j)} \, d\omega = \frac{\lambda}{i(k-j)} e^{i\frac{\omega}{\lambda}(k-j)} \Big|_{-\lambda\pi}^{\lambda\pi} =$$

$$= \frac{2\lambda}{k-j} \cdot \frac{e^{\frac{i\lambda\pi}{\lambda}(n-j)} - e^{\frac{-i\lambda\pi}{\lambda}(k-j)}}{i} = \frac{2\lambda}{k-j} \cdot \sin \pi(n-j) = 0.$$

Если $n = j$, то $\int\limits_{-\lambda\pi}^{+\lambda\pi} 1 \, d\omega = 2\lambda\pi$. Поэтому

$$\int\limits_{-\Omega}^{\Omega} |\Phi_n(\omega)|^2 \, d\omega = \sum_{j=-n}^{n-1} |a_j|^2 \cdot 2\lambda\pi = \sum_{j=-n}^{n-1} 2\lambda\pi \cdot \left| \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{\frac{j+1}{\lambda}} f(x) \, dx \right|^2 \leq$$

по теореме Коши–Буняковского

$$\leq \sum_{j=-n}^{n-1} 2\lambda\pi \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{\frac{j+1}{\lambda}} |f(x)|^2 \, dx \cdot \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{\frac{j+1}{\lambda}} 1^2 \, dx = \frac{2\pi\lambda}{\lambda} \sum_{j=-n}^{n} 2\lambda\pi \int\limits_{\frac{j}{\lambda}}^{\frac{j+1}{\lambda}} |f(x)|^2 \, dx = 2\pi \int\limits_{-b}^{b} |f(x)|^2 \, dx.$$

Перейдем к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\int\limits_{-\Omega}^{\Omega} |\sqrt{2\pi} F(\omega, b)|^2 \, d\omega \leq 2\pi \int\limits_{-b}^{b} |f(x)|^2 \, dx \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega, b)|^2 \, d\omega \leq \int\limits_{-b}^{b} |f(x)|^2 \, dx. \tag{15.4}$$

Заменим $f(x)$ на функции, которые равны $f(x)$ на $[-b, -a] \bigsqcup [a, b]$ и $= 0$ на $[-a, a]$, получим

$$\int\limits_{-b}^{b} |f(x)| \, dx = \int\limits_{-b}^{-a} |f(x)| \, dx + \int\limits_{a}^{b} |f(x)| \, dx \to 0$$

при $a, b \to +\infty$, т.к. $f \in L_2(-\infty, +\infty)$.
Аналогично,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega, b)|^2 \, d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega, b) - F(\omega, a)|^2 \, d\omega \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega, b) - F(\omega, a)|^2 \, d\omega \leq$$

$$\leq \int_{-b}^{-a} |f|^2 + \int_{a}^{b} |f|^2,$$

т.е. последовательность функций $F(\omega, b)$ удовлетворяет критерию Коши. Ввиду полноты пространства $L_2(-\infty, +\infty)$ существует функция $F(\omega) \in L_2(-\infty, +\infty)$, такая, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega) - F(\omega, b)|^2 \, d\omega \to 0$ при $b \to +\infty$ $\square$

Следствие 1. Переходя к пределу в неравенстве (15.4) при $b \to +\infty$, имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx$$

или

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 \, d\omega \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 \, dx.$$

Теорема 15.2 *По функции $F(\omega) \in L_2(\omega)$ построим функцию*

$$\varphi(x, b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} F(\omega) e^{i\omega x} \, d\omega.$$

Тогда существует функция $\varphi(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ такая, что $\|\varphi(x, b) - \varphi(x)\|_2 \to 0$ при $b \to +\infty$ и справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 \, dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 \, d\omega.$$

Доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 15.1 и следствия из нее. $\square$

Теорема 15.3 $\varphi(x) = f(x)$ *п.в. в* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\int\limits_0^\xi \varphi(x)\,dx = \int\limits_0^\xi f(x)\,dx.$$

Вычисляем левую часть

$$\int\limits_0^\xi \varphi(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^\xi \varphi(x,b)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^\xi dx\int\limits_{-b}^{b} F(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega =$$

по теореме Фубини

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{-b}^{b} F(\omega)\,d\omega\int\limits_0^\xi e^{i\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\frac{e^{i\omega\xi}-1}{i\omega}\,d\omega.$$

Покажем, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\frac{e^{i\omega\xi}-1}{i\omega}\,d\omega = \int\limits_0^\xi f(x)\,dx.$$

Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx\right)\frac{e^{i\omega\xi}-1}{i\omega}\,d\omega =$$

по теореме Фубини

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\omega x}(e^{i\omega\xi}-1)}{i\omega}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{e^{-i\omega x}(e^{i\omega\xi}-1)}{i\omega}\,d\omega + \int\limits_0^{+\infty}\frac{e^{-i\omega x}(e^{i\omega\xi}-1)}{i\omega}\,d\omega\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\left(\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega x}{\omega}\,dx + \int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\omega(\xi-x)}{\omega}\,d\omega\right) = \int\limits_0^\xi f(x)\,dx. \quad \square$$

Следствие 2.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|^2\,dx \le \int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\hat f(\omega)|^2\,d\omega.$$

Следствие 3.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega.$$

16 Свойства преобразования Фурье

1) Если $f \in L_2(\mathbb{R})$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|^2\,d\omega.$

Доказательство. Обозначим

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

– это преобразование Фурье. В теореме 15.1 было доказано, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx.$$

В этом неравенстве $F(\omega)$ и $f(x)$ равноправны. Поэтому поменяем местами $F(\omega)$ и $f(x)$. Получим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2\,dx \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2\,d\omega.$$

Соединяя эти неравенства, получаем утверждение теоремы. $\square$
2) Если $f, g \in L_2(\mathbb{R})$, то

$$(f+g)\hat{}(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega),$$

$$(\lambda f)\hat{}(\omega) = \lambda \hat{f}(\omega).$$

Т.е. $\hat{f}$ – это линейный оператор. Это очевидно.
3) $\forall\, f, g \in L_2(\mathbb{R})$

$$(f * g)\hat{}(\omega) = \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega).$$

Доказательство. Вычислим

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} F(\omega) G(\omega)\,d\omega = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} F(\omega)\,d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt\, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-t)} F(\omega)\,d\omega}_{f(x-t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(x-t)\,dt = (g*f)(x).$$

Вычислим преобразование Фурье от свертки

$$(g{*}f)\hat{}\,(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (g{*}f)\hat{}\,(x) e^{-i\omega x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} F(\alpha) G(\alpha)\,d\alpha =$$

$$= \sqrt{2\pi}\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega).$$

4) (Равенство Планшереля) $\forall\, f, g \in L_2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\bar{g}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,d\omega.$$

Доказательство. Вычислим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x){+}g(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega){+}G(\omega)|^2\,d\omega \Rightarrow 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re} f\bar{g}\,dx = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re} F\bar{G}\,dx.$$

Заменим g на ig, получим $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im} f\bar{g}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Im}(FG)\,dx$. $\square$

Глава 2

Ортогональные вейвлеты

1 Ортонормированные системы в $L_2(\mathbb{R})$

Определение 1.1 *Систему функций* $(\varphi_k(x))_{k=1}^{\infty}$ *называют ортогональной в* $L_2(\mathbb{R})$*, если*

$$(\varphi_k, \varphi_j) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_k(x)\overline{\varphi_j(x)}\, dx = 0 \text{ при } k \neq j.$$

Система называется ортонормированной (ОНС), если $(\varphi_k, \varphi_j) = \delta_{k,j}$.

Теорема 1.1 (Теорема о минимуме уклонения.) *Пусть* $(\varphi_k(x))_{k=1}^{\infty}$ *– ОНС в* $L_2(\mathbb{R})$*,* $f \in L_2(\mathbb{R})$*. Величина*

$$\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|_2^2 = C$$

достигает наименьшего значения, когда $a_k = c_k(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi_k(x)}\, dx$*.*
$c_k(f)$ *называются коэффициентами Фурье функции* f*.*

При этом

$$\min_{a_1,\ldots,a_n} \|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|_2^2 = \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k\|_2^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|.$$

Доказано еще на II курсе.

Следствие 1. *Если* $f \in L_2(\mathbb{R})$*, то* $\forall\, n \sum\limits_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2$*.*

Следствие 2. *Если* $f \in L_2(\mathbb{R})$*, то* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2$ *– неравенство Бесселя.*

Теорема 1.2 *ОНС $(\varphi_k(x))_{k=1}^{\infty}$ будет замкнутой в $L_2(\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда $\forall\, f \in L_2(\mathbb{R})$, $\|f\|_2^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть система $(\varphi_k(x))$ – замкнута в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x)$ такая, что

$$\|P_n - f(x)\|_2^2 < \varepsilon^2.$$

По теореме о минимуме уклонения

$$\min_{(a_k)_{k=1}^n} \|P_n - f(x)\|_2^2 = \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k(f) - f(x)\right\|_2^2 = \|f\|_2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \Rightarrow 0 \le$$

$$\le \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 \Rightarrow 0 \le \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2 < \varepsilon^2,$$

и это верно $\forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f\|_2^2 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 \le \varepsilon \;\forall\, \varepsilon > 0 \Rightarrow \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(f)|^2 = 0$. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнено равенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} c_k(f) - f(x)\right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2.$$

Перейдем к пределу, получим $\lim\limits_{n\to\infty} \left\|f - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\varphi_k\right\|_2^2 = 0$, значит, система $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ замкнута. $\square$

Определение 1.2 *Система функций $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ называется базисом в банаховом пространстве X, если $\forall\, x \in X$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k(x)$ сходится к числу x по норме X.*

Теорема 1.3 *Пусть $(\varphi_k(x))_{k=1}^{\infty}$ – ОНС в $L_2(\mathbb{R})$ и X – замыкание линейная оболочки системы $(\varphi_k(x))_{k=1}^{\infty}$ в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда $(\varphi_k(x))_{k=1}^{\infty}$ – базис в пространстве X.*

Доказательство. 1) Покажем, что X – линейное пространство. Выберем $f(x), g(x) \in X$ и покажем, что $f + g \in X$, $\lambda \cdot f \in X$. Так как $f, g \in X$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x),\; \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k(x) - f(x)\right\|_2^2 < \varepsilon^2.$$

$$\exists Q_m(x) = \sum_{k=1}^{m} b_k\varphi_k(x), \quad \left\|\sum_{k=1}^{m} b_k\varphi_k(x) - g(x)\right\|_2^2 < \varepsilon^2.$$

Можно считать, что $m = n$. Тогда

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)\varphi_k(x) - (f(x) + g(x))\right\|_2^2 < 2\varepsilon \Rightarrow (f + g) \in X.$$

Аналогично доказывается $\lambda f \in X$. Аксиомы линейного пространства очевидны.
2)Покажем, что X – полное пространство, т.е. если последовательность (f_n) фундаментальна, то $\exists\, f \in X$, $\|f_n - f\|_2 \to 0$.

Пусть (f_n) фундаментальна, $f_n \in X$, значит, f_n фундаментальна в L_2. Т.к. L_2 – полное, то $\exists\, f \in L_2$, $\|f_n - f\|_2 \to 0$. Это означает, что f – предельная точка множества X, а т.к. X замкнуто, то $f \in X$. $\square$

Теорема 1.4 *Пусть* $(\varphi_k)_{k=0}^{\infty}$ *– ОНС в* $L_2(\mathbb{R})$, $V_0 = \{f \in L_2 : \ f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\}$, $a_k \in l_2$. *Тогда* V_0 *– замыкание линейной оболочки системы* (φ_k).

Доказательство. $f \in V_0 \Leftrightarrow \|f - \sum_{k=1}^{n} a_k\varphi_k\|_2 \to 0$ при $n \to \infty \Leftrightarrow f \in$ замыканию линейной оболочки. $\square$

Теорема 1.5 *Система* (φ_k) *есть ОНБ в* V_0.

Доказательство. Пусть V_0 – полное линейное нормированное пространство и $\forall\, f \in V_0$ $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$. Т.к. $(\varphi_k(x))$ – ОНС, то такое разложение единственно. Проверим это. Пусть $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$, $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k\varphi_k(x)$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k - b_k)\varphi_k(x) = 0$ по норме L_2. Для частичной суммы ввиду ортогональности имеем

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)\varphi_k(x)\right\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n}|a_k - b_k|^2.$$

Переходя к к пределу при $n \to \infty$, получаем $0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k - b_k|^2 \Rightarrow a_k = b_k$ $\forall\, k$. $\square$

Определение 1.3 *Система функций* $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ *называется базисной, если она есть базис замыкания линейной оболочки.*

2 Ортогональность системы сдвигов

Лемма 2.1 *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. *Тогда* $\hat{\varphi}_{\cdot+k}(\omega) = e^{2\pi i k\omega}\hat{\varphi}(\omega)$.

Доказательство.

$$\hat{\varphi}_{\cdot+k}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+k)e^{-2\pi i x\omega}\,dx = \left|\begin{array}{l} x+k=y \\ x=y-k \end{array}\right| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)e^{-2\pi i y\omega}\,dy e^{2\pi i k\omega}. \ \square$$

Определение 2.1 *Система функций* $(\varphi(x+k))_{k\in\mathbb{Z}}$ *называется системой сдвигов.*

Лемма 2.2 *Если* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, *то ряд* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi+k)|^2$ *сходится п.в. в* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Т.к. $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$, то $|\hat{\varphi}(\xi)|^2 \in L_2(\mathbb{R})\ \forall\, k$. Тогда по теореме Леви

$$\int\limits_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi+k)|^2\,d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^1 |\hat{\varphi}(\xi+k)|^2\,d\xi.$$

По равенству Планшереля

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_k^{k+1} |\hat{\varphi}(\xi)|^2\,d\xi = |\xi = \omega + k| =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_0^1 |\hat{\varphi}(\omega+k)|^2\,d\omega =$$

по теореме Леви

$$= \int\limits_0^1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+k)|^2\,d\omega.$$

Следовательно, $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+k)|^2$ сходится п.в. на $[0,1]$. $\square$

Лемма 2.3 *Пусть* $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$. *Система сдвигов* $(\varphi(x+k))$ *– ОНС тогда и только тогда, когда* $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+k)|^2 = 1$ *п.в.*

Доказательство. $(\varphi(x+k))$ – ОНС $\Leftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x+k)\overline{\varphi(x+l)}\,dx = \delta_{k,l}$ – символ Кронекера. Вычисляем интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x+k)\overline{\varphi(x+l)}\,dx = \left| \begin{array}{l} x+k=y \Rightarrow \\ x+l=y+l-k \end{array} \right| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\overline{\varphi(y+l-k)}\,dy =$$

$$= |l-k=j| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\overline{\varphi(x+j)}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} 0, \;\; j \neq 0 \\ 1, \;\; j=0 \end{array} \right. .$$

По теореме Планшереля

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\xi)\overline{e^{2\pi i\xi j}\hat{\varphi}(\xi)}\,d\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \cdot e^{-2\pi i\xi j}\,d\xi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{k}^{k+1} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 \cdot e^{-2\pi i\xi j}\,d\xi =$$

$$|\xi=\eta+k| = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{0}^{1} |\hat{\varphi}(\eta+k)|^2 \cdot e^{-2\pi i(\eta+k)j}\,d\eta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{0}^{1} |\hat{\varphi}(\eta+k)|^2 \cdot e^{-2\pi i\eta j}\,d\eta =$$

по теореме Лебега о предельном переходе

$$= \int\limits_{0}^{1} e^{-2\pi i\eta j} \underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\eta+k)|^2}_{=\Phi(\eta)}\,d\eta =$$

по лемме 2: $\Phi(\eta) \in L(0,1)$

$= \int\limits_{0}^{1} e^{-2\pi i\eta j}\Phi(\eta)\,d\eta$ – это коэффициенты Фурье функции $\Phi(\eta)$ по тригонометрической системе.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\Phi(\eta) = 1$ п.в. Тогда если $j=0$, то $\int\limits_{0}^{1} e^{-2\pi i\eta\cdot 0}\cdot 1 = 1$. Если $j\neq 0$, то $\int\limits_{0}^{1} e^{-2\pi i\eta j}\Phi(\eta)\,d\eta = \int\limits_{0}^{1} e^{-2\pi i\eta j}\,d\eta = 0$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть

$$\int\limits_{0}^{1} e^{-2\pi i\eta j}\Phi(\eta)\,d\eta = \left\{ \begin{array}{l} 0, \;\; j \neq 0 \\ 1, \;\; j=0 \end{array} \right. ,$$

т.е. все коэффициенты функции $\Phi(\eta)$, кроме нулевого, равны нулю, а нулевой – равен 1. По теореме единственности $\Phi(\eta) = 0$ п.в. Точнее, это из полноты тригонометрической системы относительно пространства L_2. $\square$

Теорема 2.1 *Пусть* $V_0 = \{f : \ f(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi(x+k)\}$ *и* $(\varphi(x+k))$ *– ОНС.* $f \in V_0 \Leftrightarrow \hat{f}(\xi) = m(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$*, где* $m(\xi) \in L_2(0,1)$*, при этом коэффициенты разложения* $m(\xi)$ *по тригонометрической системе совпадают с* c_k*.*

Доказательство. $f \in V_0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi(x+k)$. Применим к обеим частям преобразование Фурье, получим

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\hat{\varphi}_{\cdot+k}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i\xi k}\hat{\varphi}(\xi) = \hat{\varphi}(\xi)\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{2\pi i\xi k}}_{=m(\xi)} = \hat{\varphi}(\xi)m(\xi). \ \square$$

3 Кратномасштабный анализ. Основные понятия. Масштабирующая функция

Определение 3.1 *Совокупность замкнутых подпространств* V_n $(n \in \mathbb{Z})$ *называется кратномасштабным анализом (обозначается КМА), если выполняются следующие аксиомы:*
А.1 $V_n \subset V_{n+1}$.
А.2 $\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}\right) = L_2(\mathbb{R})$.
А.3 $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$.
А.4 $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(2x) \in V_{n+1}$.
А.5 $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x+k) \in V_0$.
А.6 $\exists\,\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$*, что* $(\varphi(x+k))_{k\in\mathbb{Z}}$ *– ОНБ* V_0*.*

Предложение 3.1 $\varphi(x+k)$ *– ОНБ* V_0 *тогда и только тогда, когда* $2^{\frac{n}{2}}\varphi(2^n x+k)$ *– ОНБ* V_n*.*

Доказательство. По А.4. $\varphi(x+k) \in V_0 \Leftrightarrow \varphi(2^n x + k) \in V_n$. Проверим ортогональность.

$$2^{\frac{n}{2}}2^{\frac{n}{2}}\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(2^n x+k)\overline{\varphi(2^n x + l)}\,dx = |2^n x = y| = 2^n\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(y+k)\overline{\varphi(y+l)}\frac{1}{2^k}\,dy = \delta_{k,l},$$

т.е. система $(2^{\frac{n}{2}}\varphi(2^n x+k))$ – ОНС. Покажем, что она замкнута в V_n. Пусть $f(x) \in V_n \Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) \in V_0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi(x+k)$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$, т.е.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left| f\left(\frac{x}{2^n}\right) - \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ |k|\le N}} c_k\varphi(x+k)\right|^2 dx = \left|\frac{x}{2^n} = y, dx = 2^n\,dy\right| =$$

$$= 2^n \int\limits_{\mathbb{R}} \left| f(y) - \sum_{\substack{k\in\mathbb{Z} \\ |k|\le N}} c_k \varphi(2^n y + k) \right|^2 dy \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

Значит, $\varphi(2^n y + k)$ – базис в V_n. $\square$

Предложение 3.2 *Если $\varphi(x)$ – масштабирующая функция, то она удовлетворяет равенству*

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k \varphi(2x+k) \cdot \sqrt{2}, \ \beta_k \in L_2(\mathbb{R}). \tag{3.1}$$

Равенство (3.1) называют масштабирующим уравнением.

Доказательство. $(\varphi(x+k))$ – ОНБ в $V_0 \Rightarrow \varphi(x) \in V_0$, но $V_0 \in V_1 \Rightarrow \varphi(x) \in V_1 \Rightarrow$ выполняется равенство (3.1). $\square$

Предложение 3.3 *Равенство (3.1) можно записать в виде*

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \tag{3.2}$$

Где

$$m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k e^{2\pi i\xi k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Доказательство. Выпишем преобразование Фурье обеих частей в (3.1), получим

$$\hat{\varphi}(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k \hat{\varphi}_{2\cdot+k}(\xi) \cdot \sqrt{2}. \tag{3.3}$$

Положим

$$\hat{\varphi}_{2\cdot+k}(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(2x+k)e^{-2\pi i\xi x}\,dx = \left| \begin{array}{l} 2x+k=y \\ x = \frac{y-k}{2} \end{array} \right| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-2\pi i\xi\frac{y-k}{2}}\,\frac{dy}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-2\pi i\frac{\xi}{2}y} \cdot e^{2\pi i\frac{\xi}{2}k}\,dy = \frac{1}{2} e^{2\pi i\frac{\xi}{2}k}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Подставим в (3.3), получим

$$\hat{\varphi}(\xi) = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k e^{2\pi i\frac{\xi}{2}k}}_{m_0(\frac{\xi}{2})} \cdot\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Обозначая $m_0(\xi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k e^{2\pi i\xi k} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, получим

$$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right). \ \Box$$

Функцию $m_0(\xi)$ называют маской.
Равенство (3.2) называют масштабирующим уравнением в частотном виде.
Пример. Пусть V_n – совокупность ортогональных функций $h_n(x)$, постоянных на $\left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$, $f \in \mathbb{Z}$ и таких, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2\,dx < +\infty$, т.е. если обозначить $\lambda_j^{(n)}$ – значение функции $h(x)$ на $\Delta_j^{(n)} = \left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$, то $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |\lambda_j^{(n)}|^2 \frac{1}{2^n} < +\infty \Leftrightarrow \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} |\lambda_j^{(n)}|^2 < +\infty$. Проверим, что V_n удовлетворяет всем аксиомам А.1 – А.6.
А.0. Проверим, что V_n – линейные пространства, замкнутые в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $f, g \in V_n \Rightarrow f + g \in V_n$, т.к. $(f+g)_j^{(n)} = f_j^{(n)} + g_j^{(n)} \in L_2$. Очевидно, что $\lambda f \in V_n$. Покажем, что V_n замкнуты в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть f – предельная точка V_n. Тогда существует последовательность функций $f^{(N)} \in V_n$, $\|f^{(N)} - f\|_2 \to 0$. Отсюда

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f^{(N)} - f|^2 = 0 \Leftrightarrow \lim_{N\to\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\frac{j}{2^N}}^{\frac{j+1}{2^N}} |f^{(N)}(x) - f(x)|^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\forall\, j \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\frac{j}{2^N}}^{\frac{j+1}{2^N}} |f^{(N)}(x) - f(x)|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int\limits_{\frac{j}{2^N}}^{\frac{j+1}{2^N}} |f(x) - (\lambda_j^{(n)})^N|^2\,dx = 0 \Rightarrow f(x) = \tilde{\lambda}_j^{(n)}$$

п.в. в $\left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right)$, т.е. $f(x) \in V_0$.
А.1. – это очевидно.
А.2. Надо доказать, что $\forall\, f \in L_2(\mathbb{R})\ \exists\, g_n \in V_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = f$ по норме $L_2(\mathbb{R})$.
Доказательство. $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, f_N|_{[-N,N]}$, $\|f - f_n\|_2 < \varepsilon$. Для функции f_n, определенной на $[-N, N]$, существует $h(x)$, определенная на $[-N, N]$, ступенчатая и $\|f_N - h(x)\| < \varepsilon$.

Для функции $h(x)$ существуют $h_n \in V_n$, что $\|h(x) - h_n(x)\|_2 < \varepsilon \Rightarrow ||f - h_n|| < 3\varepsilon$. $\Box$
А.3. $\bigcap V_n = \{0\}$.
Доказательство. Если $f \in \bigcap V_n$, то $f \in V_n$ для $\forall\, n$, значит, $f(x)$ постоянна на любых отрезках $\left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]$ при $n \to \infty$. Получаем, что $f(x) = const$

на $\mathbb{R}$. Отсюда т.к. $f(x) \in L_2$, то $f(x) \equiv 0$ п.в.
А.4. $f(x) \in V_n \Rightarrow f(x) = \lambda_n^{(j)}$ при $x \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right] \Rightarrow f(2x) = \lambda_j^{(n)}$, если $2x \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right] \Rightarrow x \in \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right] \Rightarrow f(2x) \in V_{n+1}$.
А.5. $f(x) \in V_0 \Rightarrow f(x+k) \in V_0$ – очевидно.
А.6. Функция $\varphi(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ образует базис V_0. Таким образом, построенные (V_n) образуют КМА.

4 Вейвлет пространства (пространства вейвлетов)

Пусть $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – КМА с масштабирующей функцией $\varphi(x)$, эти пространства образуют возрастающую последовательность

$$\ldots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \ldots$$

Обозначим через W_0 – ортогональное дополнение V_0 до V_1, т.е.
$V_0 \oplus W_0 = V_1$, где:
$V_0 \perp W_0$ и любая функция $f_1 \in V_1$ представима в виде $f_1 = f_{0,0} + f_{0,1}$, где $f_{0,0} \in V_0$, $f_{0,1} \in W_0$.
Это основано на следующей теореме: Если H – гильбертово пространство, H_0 – линейное подпространство, то тогда $\forall\, f \in H\ \exists\, f_0 \in H_0$, $\exists\, g \perp H_0$, что $f = f_0 + g$.
Геометрически: рисунок.
Аналогично, каждое V_n представимо в виде

$$V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1} \Rightarrow V_n = W_{n-1} \oplus V_{n-1} = W_{n-1} \oplus W_{n-2} \oplus V_{n-2} = \ldots = \sum_{k=n-1}^{+\infty} W_k.$$

В этом случае говорят, что V_n есть прямая сумма подпространств W_k. Из этого следует, что $L_2(\mathbb{R}) = \oplus_{k=-\infty}^{+\infty} W_k$. Пространства W_k называют вейвлет пространствами. Если удастся в каждом W_k найти ОНБ $(\psi_{k,l})_{l\in\mathbb{Z}}$, то совокупность $(\psi_{k,l})_{k,l\in\mathbb{Z}}$ будет ОНБ в $L_2(\mathbb{R})$.
Вопрос: как по известной функции $\varphi(x)$ построить ОНС $(\psi_{n,k})$ – базис W_n? Опишем этот процесс.

Пусть $\varphi(x)$ – масштабирующая функция КМА $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$,
$\varphi(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k \varphi(2x+k) \cdot \sqrt{2}$ – масштабирующее уравнение, $\sum |\beta_k|^2 < +\infty$,
$\hat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$ – масштабирующее уравнение в частотной форме,
$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \beta_k e^{2\pi i \xi k}$ – маска, $\sum |\beta_k|^2 < +\infty \Rightarrow m_0(\xi) \in L_2(0,1)$, т.е. $m_0(\xi)$ задается рядом Фурье.

Лемма 4.1 *Для маски $m_0(\xi)$ справедливо равенство:*

$$|m_o(\xi)|^2 + |m_0\left(\xi + \frac{1}{2}\right)|^2 = 1$$

п.в.

Доказательство. Т.к. $(\varphi(x+k))_{k\in\mathbb{Z}}$ – ОНС, то п.в.

$$1 \overset{\text{п.в.}}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi+k)|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|m_0\left(\frac{\xi+k}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+k}{2}\right)\right|^2 =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|m_0\left(\frac{\xi+2k}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+2k}{2}\right)\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|m_0\left(\frac{\xi+2k+1}{2}\right)\right|^2 \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+2k+1}{2}\right)\right|^2 =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left|m_0\left(\frac{\xi}{2}+k\right)\right|^2}_{=m_0(\frac{\xi}{2})} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+k\right)\right|^2 + \sum_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left|m_0\left(\frac{\xi+1}{2}+k\right)\right|^2}_{=m_0(\frac{\xi+1}{2})} \left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+k\right)\right|^2 =$$

$$= \left|m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2 + \left|m_0\left(\frac{\xi}{2}+\frac{1}{2}\right)\right|^2 \quad \square$$

Лемма 4.2 $f \bot V_0 \Leftrightarrow \sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\xi+l)\hat{\varphi}(\xi+l) = 0.$

Доказательство.

$$f \bot V_0 \Leftrightarrow \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\overline{\varphi(x+n)}\,dx = 0 \;\forall\, n \Leftrightarrow |\text{по теореме Планшереля}$$

$$|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{\varphi}_{\cdot+n}(\xi)}\,d\xi = 0 \Leftrightarrow$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)\overline{e^{2\pi in\xi}\hat{\varphi}(\xi)}\,d\xi = 0 \Leftrightarrow \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int\limits_{l}^{l+1} \hat{f}(\xi)e^{-2\pi in\xi}\overline{\hat{\varphi}(\xi)}\,d\xi = |\xi = \eta + l| =$$

$$= \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int\limits_{0}^{1} \hat{f}(\eta+l)\overline{\hat{\varphi}(\eta+l)} \cdot e^{-2\pi in(\eta+l)}\,d\eta = \int\limits_{0}^{1} e^{-2\pi in\eta} \underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}} \hat{f}(\eta+l)\overline{\hat{\varphi}(\eta+l)}}_{=\Phi(\eta)}.$$

$\Phi(\eta)$ – 1 периодичная функция, принадлежащая $L^2(0,1)$, и все ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе равны 0, что эквивалентно, что подинтегральная функция равна 0 п.в., т.е $\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{f}(\eta+l)\overline{\hat{\varphi}(\eta+l)}=0$ п.в. $\square$

Лемма 4.3 *$f\in V_n \Rightarrow \exists m_f(\xi)\in L_2(0,1)$, 1 периодичная, что*

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}m_f\left(\frac{\xi}{2^n}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right).$$

Доказательство.

$$f\in V_n\Rightarrow f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\varphi(2^nx+k)\cdot 2^{\frac{k}{2}}\Rightarrow \hat{f}(\xi)=2^{\frac{n}{2}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\hat{\varphi}_{\cdot 2^n+k}(\xi).$$

Но

$$\hat{\varphi}_{\cdot 2^n+k}(\xi)=\frac{1}{2^n}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right)e^{2\pi i\xi\frac{k}{2^n}}\Rightarrow$$

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_k\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right)e^{2\pi i\frac{\xi}{2^n}k}=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2^n}\right)\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_ke^{2\pi i\frac{\xi}{2^n}k}}_{=m_f\left(\frac{\xi}{2^n}\right)\in\mathcal{D}}.$$

Очевидно, что $m_f(\xi)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\beta_ke^{2\pi i\xi k}\in L_2(0,1)$. $\square$

Определение 4.1 *Пусть $\varphi(x)$ – масштабирующая функция и пусть*

$$\hat{\varphi}(\xi)=m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right),\ m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_ne^{2\pi i\xi n}$$

маска масштабирующего уравнения в частотной форме.
Положим по определению

$$\psi(x)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-n}\beta_{1-n}\varphi(2x+n)\cdot\sqrt{2}.$$

Лемма 4.4 $\hat{\psi}(\xi)=e^{\pi i\xi}\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$.

Доказательство.

$$\hat{\psi}(\xi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{(1-n)}\beta_{1-n}\cdot\sqrt{2}\hat{\varphi}_{\cdot 2+n}(\xi)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{(1-n)}\beta_{1-n}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)e^{2\pi i\xi\frac{n}{2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2)}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^{1-n}\beta_{1-n}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)e^{2\pi i\frac{\xi}{2}(n-1)}\cdot e^{\pi i\xi}=$$

$$e^{\pi i\xi}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\beta_n e^{-2\pi i\frac{\xi}{2}n}}_{=\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}}\cdot\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)== e^{\pi i\xi}\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\cdot\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

В самом деле:

$$m_0(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n e^{2\pi i\xi n}\Rightarrow$$

$$m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n e^{2\pi in\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\beta_n e^{\pi in\xi}\cdot(-1)^n.\ \square$$

Лемма 4.5 *Система сдвигов $\psi(x+n)$ – ортонормированная система.*

Доказательство. Надо доказать, что $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(\xi+n)|^2=1$ п.в. Имеем

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{\psi}(\xi+n)|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|e^{\pi i(\xi+n)}\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+n+1}{2}\right)}\cdot\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+n}{2}\right)\right|=$$

$$=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\left|m_0\left(\frac{\xi+n+1}{2}\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+n}{2}\right)\right|^2=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|m_0\left(\frac{\xi+2k+1}{2}\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+2k}{2}\right)\right|^2+$$

$$+\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|m_0\left(\frac{\xi+2k+2}{2}\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+2k+1}{2}\right)\right|^2=$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|m_0\left(\frac{\xi+1}{2}+k\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+k\right)\right|^2+\left|m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2\underbrace{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+k\right)\right|^2}_{=1}=$$

$$=\left|m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2+\left|m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2=1$$

по лемме 4.1. $\square$

Лемма 4.6 *Функции $\psi(x+n)\perp V_0$, т.е. $\psi(x+n)\in W_0$.*

Доказательство. По лемме 4.2 $\psi(x+n)\perp V_0\Leftrightarrow\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\psi}_{\cdot+n}(\xi+l)\overline{\hat{\varphi}(\xi+l)}=0$. Проверим это равенство. Но

$$\hat{\psi}_{\cdot+n}(\xi)=e^{2\pi in\xi}\hat{\psi}(\xi)\Rightarrow\hat{\psi}_{\cdot+n}(\xi+l)=e^{2\pi in(\xi+l)}\hat{\psi}(\xi+l).$$

Но

$$\hat{\psi}(\xi)=e^{\pi i\xi}\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)\Rightarrow\hat{\psi}_{\cdot+n}(\xi+l)=$$

$$e^{2\pi in(\xi+l)}e^{\pi i(\xi+l)}\overline{m_0\left(\frac{\xi+l+1}{2}\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+l}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\hat{\psi}_{\cdot+n}(\xi+l)\hat{\varphi}(\xi+l)=e^{2\pi i(\xi+l)n}e^{\pi i(\xi+l)}\overline{m_0\left(\frac{\xi+l+1}{2}\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+l}{2}\right)\overline{\hat{\varphi}(\xi+l)}=$$

$$=e^{2\pi i\xi n}(-1)^l e^{\pi i\xi}\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+l+1}{2}\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+l}{2}\right)\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+l}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+l}{2}\right)}=$$

$$=e^{\pi i\xi(1+2n)}\cdot(-1)^l\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+l}{2}\right)\right|^2\overline{m_0\left(\frac{\xi+l+1}{2}\right)}\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+l}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$\sum_{l\in\mathbb{Z}}\hat{\psi}_{\cdot+n}(\xi+l)\hat{\varphi}(\xi+l)=e^{\pi i\xi(1+2n)}\sum_{l\in\mathbb{Z}}(-1)^l\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+l}{2}\right)\right|^2\overline{m_0\left(\frac{\xi+l+1}{2}\right)}\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+l}{2}\right)}=$$

$$=e^{\pi i\xi(1+2n)}\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+l\right)\right|^2\overline{m_0\left(\frac{\xi+2l+1}{2}\right)}\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+2l}{2}\right)}-$$

$$-\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+l\right)\right|^2\overline{m_0\left(\frac{\xi+2l+2}{2}\right)}\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+2l+1}{2}\right)}=$$

$$=\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)}\left(\underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}+l\right)\right|^2}_{=1}-\underbrace{\sum_{l\in\mathbb{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\xi+1}{2}+l\right)\right|^2}_{=1}\right)=0.\ \square$$

Лемма 4.7 *Если* $f\in V_1$, *то* $\exists\, f_0\in V_0$, $\exists\, f_1\in V_1$, $f_1\perp V_0$ *такие, что* $f=f_0+f_1$.

Доказательство. Пусть $f\in V_1$. Тогда по лемме 4.3 $\exists\, m_f(\xi)\in L_2(0)$, $m_f(\xi)$ –1 периодична, что

$$\hat{f}(\xi)=m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Определим функции

$$\alpha(\xi)=m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)}+m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)},$$

$$\beta(\xi)=\left(m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)-m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\cdot m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)e^{-\pi i\xi}.$$

1) Проверим, что

$$\alpha(\xi)m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)+\beta(\xi)\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}e^{\pi i\xi}=m_f\left(\frac{\xi}{2}\right).$$

Имеем

$$\alpha(\xi)m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)+\beta(\xi)\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}e^{\pi i\xi}=$$

$$=\left(m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)}+m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}\right)\cdot$$

$$\cdot m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)+\left(m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)-m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\cdot m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right)e^{-\pi i\xi}\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)}e^{\pi i\xi}=$$

$$=m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot\left|m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2+m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot\left|m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2=m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot 1.$$

2) $\alpha(\xi)\in L_2(0,1)$.
Так как

$$\left|m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2+\left|m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2=1$$

$\Rightarrow \left|m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2\le 1$ и $\left|m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2\le 1$. Тогда по неравенству Минковского имеем

$$\left(\int_0^1|\alpha(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}\le\left(\int_0^1\left|m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2d\xi\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int_0^1\left|m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2d\xi\right)^{1/2}\le\left(\int_0^1\left|m_f\left(\frac{\xi}{2}\right)\right|^2d\xi\right)^{1/2}+$$

$$+\left(\int_0^1\left|m_f\left(\frac{\xi+1}{2}\right)\right|^2d\xi\right)^{1/2}=|\frac{\xi}{2}=\eta|=$$

$$\sqrt{2}\left(\int_0^{1/2}1\,|m_f\left(\eta\right)|^2\,d\eta\right)^{1/2}+\left(\int_{1/2}^1|m_f(\eta)|^2\,d\eta\right)^{1/2}\le 2\sqrt{2}\|m_f\|_{L_2}.$$

3) Так как $\alpha(\xi), \beta(\xi) \in L_2(0,1)$, то

$$\alpha(\xi) = \sum a_n e^{2\pi i n\xi},\ \beta(\xi) = \sum b_n e^{2\pi i n\xi},\ \sum |a_n|^2 < \infty,\ \sum |b_n|^2 < +\infty.$$

Определим функции $f_0(x)$ и $f_1(x)$ равенствами
$f_0(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(x+n) \in V_0$ – очевидно.
$f_1(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} b_n \psi(x+n) \in V_1$ и $\perp V_0$ – это следует из того, что $\psi(x+n) \perp V_0$, и $\psi(x+n)$ – ортонормированная система и $\psi(x+n) \in V_1$. Проверим, что $f(x) = f_0(x) + f_1(x)$. Для этого надо проверить, что $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_0(\xi) + \hat{f}_1(\xi)$. В самом деле,

$$\hat{f}_0(\xi)+\hat{f}_1(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \hat{\varphi}_{\cdot+n}(\xi) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \hat{\psi}_{\cdot+n}(\xi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \hat{\varphi}(\xi) e^{2\pi i n\xi} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \hat{\psi}(\xi) e^{2\pi i n\xi} =$$

$$= \alpha(\xi)\hat{\varphi}(\xi) + \beta(\xi)\hat{\psi}(\xi) = \alpha(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) + \beta(\xi)\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} e^{\pi i\xi}\hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) =$$

$$= \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot \underbrace{\left(\alpha(\xi) m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)) + \beta(\xi)\cdot\overline{m_0\left(\frac{\xi+1}{2}\right)} e^{\pi i\xi}\right)}_{=m_f(\xi/2)} = \hat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)\cdot m_f\left(\frac{\xi}{2}\right). \square$$

Лемма 4.8 *Система сдвигов $(\psi(x+n))_{n\in\mathbb{Z}}$ образует ОНБ пространства W_0.*

Доказательство очевидно следует из леммы 4.7 и единственности представления функции $f \in V_1$ в виде прямой суммы $f = f_0 + f_1$, $f_0 \in V_0$, $f_1 \perp V_0$.$\square$

5 Ортонормированные вейвлет базисы

Пусть $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ – ортогональный КМА с масштабирующей функцией $\varphi(x)$ и пусть

$$\psi(x) = \sqrt{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (-1)^{1-k}\beta_{1-k}\varphi(2x+k)$$

вейвлет, обозначим $\varphi_{n,j}(x) = 2^{\frac{n}{2}}\varphi(2^n x + j)$, $\psi_{n,j}(x) = 2^{\frac{n}{2}}\psi(2^n x + j)$.

Теорема 5.1 *Для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ справедливо равенство*

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{0,j}\varphi_{0,j}(x) + \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_{n,j}\psi(2^n x + j) = \tag{5.1}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_{n,j}\psi_{n,j}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_{n,j}\psi_{n,j}(x), \tag{5.2}$$

т.е. (5.1) и (5.2) есть представление $f(x)$ в виде ряда по системе сжатий и сдвигов функции $\psi(2^n x + j)$.

Доказательство. Мы знаем, что функции $\varphi_{n,j}(x)$ и $\psi_{n,j}(x)$ – ортонормированные системы в $L_2(\mathbb{R})$. Более того,
1) $(\varphi_{n,j}(x))_{j\in\mathbb{Z}}$ – ортонормированный базис в V_n.
2) $(\psi_{n,j}(x))_{j\in\mathbb{Z}}$ – ортонормированный базис в W_n.
Проверим это.

$$1) f \in V_n \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) \in V_0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\varphi(x+j)$$

– сходится по норме $L_2(\mathbb{R})$. Сделаем замену $\frac{x}{2^n} = y$. Тогда $f(y) = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j\varphi(2^n y + j)$.
2) Пусть $f(x) \in W_n$, $f(x) \in V_{n+1}$ и $f \perp V_n$. Тогда $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \in V_1$ и $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \perp V_0$. Проверим это.
$f\left(\frac{x}{2^n}\right) \in V_1$ – это очевидно. Покажем, что $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \perp V_0$. В самом деле

$$f \perp V_n \Leftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{h(x)}\,dx = 0 \;\forall\, h \in V_n \Leftrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(\frac{x}{2^n}\right)\overline{h\left(\frac{x}{2^n}\right)}\,dx = 0,$$

но $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \in V_1$, $h\left(\frac{x}{2^n}\right) \in V_0$ т.е. $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \perp V_0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j\psi(x+j)$. Полагая $\frac{x}{2^n} = y$, получим

$$f(y) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j\psi(2^n x + j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{b_j}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot \psi_{n,j}(x).$$

Определим оператор P_n равенством

$$P_n(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (f, \varphi_{n,j}) \cdot \varphi_{n,j}(x) \in V_n.$$

Это оператор проектирования на подпространство V_n, т.к. $P_n(P_n(f)) = P_n(f)$. В самом деле,

$$P_n(P_n(f)) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} \underbrace{(P_n(f), \varphi_{n,l})}_{=(f,\varphi_{n,l})}\varphi_{n,l} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} (f, \varphi_{n,l})\varphi_{n,l} = P_n(f).$$

По неравенству Бесселя

$$\|P_n(f)\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(\varphi_{n,k}, f)|^2 \le \|f\|^2.$$

Т.е. операторы $P_n(f)$ имеют нормы $\|P_n\| \le 1$. Так как

$$P_{n+1}(f) \in V_{n+1} \Rightarrow P_{n+1}(f) = f_n + f_n^{\perp},$$

где $f_n \in V_{n+1}$ и $f_n^{\perp} \perp V_n \Rightarrow f_n^{\perp} \in W_n \Rightarrow$

$$P_{n+1}(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \varphi_{n,j}(x) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j \psi_{n,j}(x).$$

Умножая обе части скалярно на $\varphi_{n,j}$ и $\psi_{n,j}$, находим, что $a_j = (P_{n+1}(f), \varphi_{n,j})$, $b_j = (P_{n+1}(f), \psi_{n,j})$. Т.к. $(P_{n+1}(f), \varphi_{n,j}) = (f, \varphi_{n,j})$, $(P_{n+1}(f), \psi_{n,j}) = (f, \psi_{n,j})$, то

$$P_{n+1}(f) = P_n(f) + Q_n(f). \tag{5.3}$$

Оператор $Q_n(f)$ определяется аналогично оператору P_n равенством

$$Q_n(f) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (f, \psi_{n,j}) \psi_{n,j} \in W_n,$$

является оператором проектирования на W_n и $\|Q_n\| \le 1$.

Применим (5.3) n раз, получим

$$P_{n+1}(f) = P_0(f) + Q_0(f) + \ldots + Q_n(f). \tag{5.4}$$

Аналогично получаем выражение для $P_0(f)$.

$$P_0(f) = P_{-1}(f) + Q_{-1}(f) = P_{-2}(f) + Q_{-2}(f) + Q_{-1}(f) = \ldots = P_{-n}(f) + \sum_{k=1}^{n} Q_{-k}(f). \tag{5.5}$$

Покажем, что $\lim P_{n+1}(f) = f$ по норме L_2, т.е. $\lim \|P_{n+1}(f) - f\|_2 = 0$. В самом деле, т.к. $\bigcup V_n = L_2(\mathbb{R})$, то для функции $f \in L_2(\mathbb{R})$ $\exists\, n_0$, $\forall\, n \ge n_0$, $\|f - f_n\| < \varepsilon$ и $f_n \in V_n \Rightarrow$

$$\|f - P_n(f)\| \le \|f - f_n\| + \|f_n - P_n(f)\| = \|f - f_n\| + \|P_n(f_n) - P_n(f)\| \le$$

$$\le \|f - f_n\| + \|f_n - f\| < 2\varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(f) = f$. Поэтому переходя в равенстве (5.4) к пределу при $n \to \infty$ получаем

$$f(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\varphi_{0,j}, f) \varphi_{0,j} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\psi_{n,j}, f) \psi_{n,j}(x),$$

и равенство (5.1) доказано.

Докажем равенство (5.2). Для этого в равенстве (5.4) перейдем к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\varphi_{0,j}, f)\varphi_{0,j} = \lim P_{-n}(f) + \sum_{n=-\infty}^{-1}\sum_{j\in\mathbb{Z}}(\psi_{n,j}, f)\psi_{n,j}(x).$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_{-n}(f) = 0$. Это выполняется по лемме 5.1. Переходя к пределу в равенстве (5.5), получаем (5.2). $\square$

6 Построение масштабирующих функций и КМА

Вопрос 1. Как построить КМА?
Для построения КМА используют следующую схему.
1) Выбираем произвольную функцию $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ такую, что $(\varphi(x+k))_{k\in\mathbb{Z}}$ – ортонормированная система.
2) Строим подпространства

$$V_n = \overline{\mathrm{span}(\varphi(2^n x + k))_{k\in\mathbb{Z}}},$$

где замыкание берется по норме $L_2(\mathbb{R})$.

Определение 6.1 *Если $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ образуют КМА, то говорят, что функция $\varphi(x)$ порождает КМА.*

Вопрос 2. Как искать такую функцию $\varphi(x)$, для которой выполнены аксиомы А1)-А6)?

Лемма 6.1 *Пусть $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ и $\sum|\hat{\varphi}(\xi+k)|^2 = 1$, т.е. система сдвигов – ортонормированная система. Тогда $\forall\, f \in L_2(\mathbb{R})$*

$$\lim_{n\to-\infty}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi_{n,j}(x)}\,dx\right|^2 = 0, \tag{6.1}$$

т.е. сумма квадратов коэффициентов по системе $(\varphi_{n,j}(x))_{j\in\mathbb{Z}}$ стремится к нулю при $n \to -\infty$.

Доказательство. Пусть вначале $f(x) \neq 0$ на $(-R, R)$ и $f(x) = 0$ вне отрезка. Тогда при $2^n R < 1/2$ имеем

$$\sum_{\cdot j}\left|\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)2^{\frac{n}{2}}\overline{\varphi(2^n x + j)}\,dx\right|^2 = \sum_{\cdot j}\left|\int\limits_{-R}^{R} f(x)2^{\frac{n}{2}}\varphi(2^n x + j)\,dx\right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_j \left(\int_{-R}^{R} |f(x)|^2 \, dx \right) \cdot \left(\int_{-R}^{R} |\varphi(2^n x + j) dx|^2 \right) =\leq \|f\|_2^2 \sum_j \left(\int_{-R}^{R} |\varphi(2^n x + j)|^2 \right) =$$

обозначим $|2^n x + j = y|$

$$= \|f\|_2^2 \sum_j \int_{-R}^{R} |\varphi(y)|^2 \, dy = \|f\|_2^2 \sum_j \int_{E_j} |\varphi(y)|^2 \, dy =$$

где $E_j = (j - 2^n R, j + 2^n R),\ E = \bigcup E_j$

$$= \|f\|_2 \int_{\bigcup E_j} |\varphi(y)|^2 \, dy = \|f\| \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_E(y) |\varphi(y)|^2 \, dy.$$

Если $y \notin \mathbb{Z}$, то $\lim_{n \to -\infty} |\varphi(y)|^2 \mathbf{1}_E(y) = 0$. Переходя к пределу под знаком интеграла, получаем $\lim\limits_{n \to -\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_E(y) |\varphi(y)|^2 \, dy = 0$. Следовательно, (6.1) доказано для функции с компактным носителем.

Пусть теперь $f \in L_2(\mathbb{R})$ произвольная функция. Выберем функцию $\tilde{f}$ с компактным так, чтобы $\|f - \tilde{f}\|^2 < \varepsilon$. Так как система сдвигов $\varphi(x + j)$ –ОНС, то система $\varphi_{n,j}$ тоже ОНС при каждом $n \in \mathbb{Z}$. Поэтому при каждом $n \in \mathbb{Z}$ по неравенству Бесселя

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} (f(x) - \tilde{f}(x)) \overline{\varphi_{n,j}(x)} \, dx \right|^2 \leq \|f - \tilde{f}\|^2 < \varepsilon,$$

Осталось выбрать n так, чтобы

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) \overline{\varphi_{n,j}(x)} \, dx \right|^2 < \varepsilon$$

и воспользоваться неравенством треугольника. $\square$

Лемма 6.2 *Пусть система сдвигов $(\varphi(x+j))_{j \in \mathbb{Z}}$ ОНС, функция $\hat{\varphi}$ непрерывна в нуле. Тогда $\forall\, f \in L_2(\mathbb{R})$*

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi_{n,j}(x)} \, dx \right|^2 = |\hat{\varphi}(0)| \|f\|^2.$$

Проверку начнем с аксиомы A4): $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(x) \in V_{n+1}$.

Лемма 6.3 *Аксиома A4) выполняется .*

Доказательство.

$$f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi_{n,k}(x) \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2^n x + k) \cdot 2^{\frac{n}{2}}, (c_k \in l_2) \Leftrightarrow$$

$$f(2x) = \sum \underbrace{\frac{c_k}{2^{\frac{1}{2}}}}_{=\tilde{c}_k} \varphi(2^{n+1}x + k) 2^{\frac{n+1}{2}} = \sum \tilde{c}_k \varphi_{n+1,k}(x) \in V_{n+1}. \square$$

Обсуждаем аксиому A1).

Лемма 6.4 $V_n \subset V_{n+1} \Leftrightarrow V_0 \subset V_1$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь очевидна.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $V_0 \subset V_1$. Покажем, что $V_n \subset V_{n+1}$. Пусть

$$f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(2^n x + k) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) \in V_0 \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{2^n}\right) \in V_1 \Leftrightarrow$$

$$f(2x) \in V_{n+1}. \square$$

Лемма 6.5 $V_0 \subset V_1 \Leftrightarrow \varphi(x)$ *удовлетворяет масштабирующему уравнению* $\varphi(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \varphi(2x + k) \cdot \sqrt{2}$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $V_0 \subset V_1$. Т.к.

$$\varphi(x) \in V_0 \Rightarrow \varphi(x) \in V_1 \Leftrightarrow \varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \varphi(2x + k) \cdot \sqrt{2}.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\varphi(x)$ – решение масштабирующего уравнения. Надо доказать, что $V_0 \subset V_1$. Отметим, что $\varphi(x) \in V_1$. В самом деле, $\varphi(x) \in V_1 \Leftrightarrow \varphi(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \beta_k \varphi(2x + k) \cdot \sqrt{2}$. Выбираем $f(x) \in V_0$. Тогда $f(x) = \sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x + k)$. Отсюда

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, N_0, \ \left\| f(x) - \sum_{|k| \le N} \alpha_k \varphi(x + k) \right\| < \varepsilon,$$

и это верно $\forall\, N \ge N_0$. Но

$$\varphi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j \varphi(2x+j) \Rightarrow \varphi(x+k) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \beta_j \varphi(2x+2k+j) \Rightarrow \exists\, M_0,\ \forall\, M \ge M_0,$$

$$\left\|\varphi(x+k) - \sum_{|j|\le M} \beta_j \varphi(2x+2k+j)\right\| < \frac{\varepsilon}{2N_0}. \Rightarrow$$

$$\varepsilon > \left\| f - \sum_{|k|\le N_0} \alpha_k \varphi(x+k)\right\| = \left\| f - \sum_{|k|\le N_0} \alpha_k (\varphi(x+k) - \sum_{|j|\le M} \beta_j \varphi(2x+2k+j)) -\right.$$

$$\left. - \sum_{|k|\le N_0} \alpha_k \sum_{|j|\le M} \beta_j \varphi(2x+2k+j)\right\| \ge \left\| f - \sum_{|k|\le N_0} \alpha_k \sum_{|j|\le M} \beta_j \varphi(2x+2k+j)\right\| -$$

$$- \left\| \sum_{|k|\le N_0} \alpha_k \left(\varphi(x+k) - \sum_{|j|\le M} \beta_j \varphi(2x+2k+j)\right)\right\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\| f - \sum_{|k|\le N_0} \alpha_k \sum_{|j|\le M} \beta_j \varphi(2x+2k+j)\right\|$$

$$\le \varepsilon + \sum_{|k|\le N_0} |\alpha_k| \underbrace{\left\| \varphi(x+k) - \sum_{|j|\le M} \beta_j \varphi(2x+2k+j)\right\|}_{\le \frac{\varepsilon}{2N_0}} \le$$

$$\le \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2N_0} \sum_{|k|\le N_0} |\alpha_k| \le \varepsilon + \varepsilon \cdot \max|\alpha_k| \Rightarrow f \in V_1. \ \square$$

Теорема 6.1 $V_n \subset V_{n+1} \Leftrightarrow \varphi(x)$ *удовлетворяет масштабирующему уравнению.*

Доказательство. Очевидно следует из лемм 6.4 и 6.5.$\square$

Лемма 6.6 *Если* $f(x) \in V_0$, *то* $f(x+k) \in V_0$.

Доказательство.

$$f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \varphi(x+j) \Leftrightarrow f(x+k) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} c_j \varphi(x + \underbrace{k+j}_{=l})$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_{l-k} \varphi(x+l),$$

$\sum |c_{l-k}|^2 < +\infty$. $\square$

Следствие. Аксиома 5 выполнена.

Лемма 6.7 $\bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} V_n = \{0\}$.

Доказательство. Пусть $f \in \bigcap\limits_{n=-\infty}^{+\infty} V_n$. Тогда при любом $n \in \mathbb{Z}$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{(n)} \varphi_{n,k}(x) \Rightarrow \|f\|_2^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f, \varphi_{n,k})|^2.$$

По лемме 6.1.

$$\lim_{n\to-\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f, \varphi_{n,k})|^2 = 0 \Rightarrow \|f\|_2^2 = 0.$$

Следовательно $f(x) = 0$ п.в. $\square$
Следствие. Аксиома А3 выполнена.

Теорема 6.2 *Пусть $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ – решение маситабирующего уравнения, преобразование Фурье $\hat{\varphi}(\xi)$ непрерывно в точке $\xi = 0$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi+k)|^2 = 1$, (V_n) – пространства, порожденные функцией $\varphi(x)$. Тогда $(V_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ образуют КМА.*

Доказательство. В предыдущих леммах было доказано (без условия непрерывности функции $\hat{\varphi}(x)$ в точке $x = 0$), что выполнены аксиомы А1, А3-А6. Докажем, что выполнена аксиома А2, т.е. $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(\mathbb{R})$. Доказываем от противного. Пусть $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} \neq L_2(\mathbb{R})$. Так как $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n}$ – подпространство в $L_2(\mathbb{R})$, то существует функция $f \in L_2(\mathbb{R})$, $f \neq 0$ и $f \perp \overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} \Rightarrow f \perp V_n$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Отсюда

$$\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f, \varphi_{n,k})|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |(f, \varphi_{n,k})|^2 = 0 \Rightarrow |\hat{\varphi}(0)| \cdot \|f\|_2^2 = 0.$$

Покажем, что $\hat{\varphi}(0) \neq 0$. Выберем функцию $h \in V_0$ такую, что $\|h\|_2 \neq 0$. Так как $h \in V_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$ то при всех $n \geq 1$ $\|h\|_2^2 = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |(h, \varphi_{n,k})|^2$.
Следовательно, по лемме 6.2 $\|h\|_2^2 = |\hat{\varphi}(0)| \|h\|_2^2 \Rightarrow |\hat{\varphi}(0)| = 1$.

Тогда из равенства $|\hat{\varphi}(0)| \|f\|_2^2 = 0$ следует, что $\|f\|_2^2 = 0$ и значит $f = 0$ п.в. Получили противоречие с выбором f. $\square$

7 Всплески Мейера

Определение 7.1 *Положим по определению при* $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{6}\right]$

$$\hat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{если } |\xi| < \frac{1}{2} - \varepsilon \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{1}{2\varepsilon}|\xi| + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\varepsilon}\right)\right), & \text{если } \frac{1}{2} - \varepsilon \le |\xi| \le \frac{1}{2} + \varepsilon \\ 0, & \text{если } |\xi| > \frac{1}{2} + \varepsilon \end{cases},$$

где $\nu(t)$ *– функция, заданная на* $\mathbb{R}$*, и такая, что* $\nu(\xi) \ge 0$*,* $\nu(\xi) = 0$ *при* $\xi \le 0$*,* $\nu(\xi) = 1$ *при* $\xi \ge 1$ *и* $\nu(\xi) + \nu(1-\xi) = 1$*.*

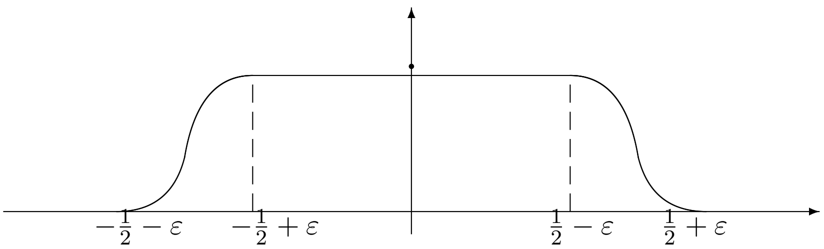

Рисунок 1. График $\hat{\varphi}(\xi)$.

Теорема 7.1 *Пусть* $\varphi(x)$ *определена своим преобразованием Фурье* $\hat{\varphi}$ *в определении 7.1. Тогда* $\varphi(x)$ *порождает КМА.*

Доказательство. Определим маску $m_0(\xi) = \sum\limits_{l \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(2(\xi + l))$. Для функции $\hat{\varphi}$ и маски m_0 выполняются равенства:

$$\hat{\varphi}(2\xi) = \hat{\varphi}(\xi) \cdot \hat{\varphi}(2\xi), \quad \hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi) \cdot \hat{\varphi}(\xi)$$

т.е. $\varphi(x)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению. Покажем, что $(\varphi(x+k))_{k \in \mathbb{Z}}$ – ортонормированная система в $L_2(\mathbb{R})$. Для этого проверим равенство $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(\xi + k)|^2 = 1$ п.в.

В силу симметрии достаточно проверить, что $|\hat{\varphi}(\xi)|^2 + |\hat{\varphi}(\xi - 1)|^2 = 1$ при $\xi \in \left(\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon\right)$. При таких ξ имеем

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{1}{2\varepsilon}\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\varepsilon}\right)\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{1}{2\varepsilon}(-\xi + 1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\varepsilon}\right)\right) =$$

$$= \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\underbrace{\nu\left(\frac{1}{2\varepsilon}\xi + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\varepsilon}\right)}_{\eta}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\nu\underbrace{\left(-\frac{1}{2\varepsilon}\xi + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\varepsilon}\right)}_{1-\eta}\right) =$$

$$\cos^2\frac{\pi}{2}\eta+\sin^2\frac{\pi}{2}\eta=1.\ \square$$

Пример 1.: $\varepsilon=\frac{1}{6}$, $\nu(x)=-20x^7+70x^6-84x^5+35x^4$, φ называют масштабирующей функцией Мейера, соответствующий КМА называют КМА Мейера.

Задача 1. Обозначим через I оператор интегрирования $I(f)(x)=\int_0^x f(t)dt$ Доказать, что функцию $\hat{\varphi}$ на отрезках $[-\frac{1}{2}-\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon]$ и $[\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]$ можно задать равенствами

$$\hat{\varphi}(\xi)=16I^2(\frac{\xi}{4\varepsilon}),\quad \xi\in[-\frac{1}{2}-\varepsilon,-\frac{1}{2}+\varepsilon];$$

$$\hat{\varphi}(\xi)=16I^2(\frac{\xi-\frac{1}{2}+\varepsilon}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}),\quad \xi\in[\frac{1}{2}-\varepsilon,\frac{1}{2}+\varepsilon]$$

Задача 2. Написать программу, которая рисует график функции $\hat{\varphi}$.

Пример 2.: $\varepsilon=0$. В пределе получаем

$$\hat{\varphi}(\xi)=\mathbf{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(\xi),\quad \varphi(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}.$$

$\varphi(x)$ порождает КМА, который называется КМА Котельникова–Шеннона. $\varphi(x)$ удовлетворяет масштабирующему уравнению:

$$\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\varphi\left(-\frac{k}{2}\right)\varphi(2t+k).$$

Всплеск Котельникова–Шеннона задается равенством

$$\psi(t)=2\varphi(2t+1)-\varphi(t+\frac{1}{2}).$$