Глава 1

Интеграл Римана в $\mathbb{R}^m$

1. Прямоугольники в $\mathbb{R}^m$, измеримые множества в $\mathbb{R}^m$

Определение 1.1. *Множество*

$$\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)} = \left[\frac{j_1}{2^n}, \frac{j_1+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{j_2}{2^n}, \frac{j_2+1}{2^n}\right] \times \ldots \times \left[\frac{j_m}{2^n}, \frac{j_m+1}{2^n}\right], \ \ \mathbf{J} = (j_1, j_2, \ldots, j_m) \in \mathbb{Z}^m$$

называется двоичным кубом ранга n. Два двоичных куба будем называть неналегающими, если их пересечение не содержит внутренних точек.

Пример. При $m = 2$, $\Delta_{i,j}^{(n)} = \left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right] \times \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}\right]$.
Замечание. Очевидно, что куб $\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}$ – замкнутое множество.

Определение 1.2. *Пусть $\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}$ – двоичный куб ранга n. Число*

$$\mu\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)} = |\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}| \stackrel{df}{=} \left(\frac{1}{2^n}\right)^m$$

называется объемом куба или мерой.

Определение 1.3. *Пусть $E_n \subset \mathbb{R}^m$ – конечное объединение неналегающих двоичных кубов ранга n, т.е. $E_n = \bigsqcup\limits_{\alpha=1}^{s} \Delta_{\mathbf{J}_\alpha}^{(n)}$. Множество E_n будем называть двоично кубическим множеством ранга n. Число*

$$\mu E_n = \sum_{\alpha=1}^{s} |\Delta_{\mathbf{J}_\alpha}^{(n)}|$$

называется объемом или мерой множества E_n.

Предложение 1.1. *Пусть $\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}$ – двоичный куб ранга n. Представим куб $\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}$ как объединение неналегающих кубов ранга $n+p$, т.е. $\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)} = \bigsqcup\limits_{\mathbf{K}} \Delta_{\mathbf{K}}^{(n+p)}$. Тогда $|\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}| = \sum\limits_{\mathbf{K}} |\Delta_{\mathbf{K}}^{(n+p)}|$.*

Доказательство. Ясно, что $\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}$ есть объединение 2^{mp} двоичных неналегающих кубов ранга $n+p$ и $\mu\Delta_{\mathbf{K}}^{(n+p)} = \left(\frac{1}{2^{n+p}}\right)^m$. Поэтому

$$\sum_{\mathbf{K}} |\Delta_{\mathbf{K}}^{(n+p)}| = 2^{mp} \cdot \frac{1}{2^{(n+p)m}} = \frac{1}{2^{nm}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)^m = |\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}|. \ \square$$

Замечание. Доказанное предложение означает корректность определения 1.3.

Предложение 1.2. *Пусть A_n и B_n – двоично-кубические множества ранга n и $A_n \subset B_n$. Тогда $\mu A_n \leq \mu B_n$.*

Доказательство.Очевидно, так как B_n содержит все двоичные кубы, входящие в A_n и, возможно, еще какие-то.

Предложение 1.3. *Пусть A_k и B_n – двоично-кубические множества произвольных рангов и $A_k \subset B_n$. Тогда $\mu A_k \leq \mu B_n$.*

Доказательство.Очевидно следует из предложений 1.1 и 1.2.

2. Внешняя и внутренняя мера множества

Определение 2.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ – произвольное множество, $n \in \mathbb{Z}$. Через $(E_n)^*$ будем обозначать объединение всех кубов ранга n, пересекающихся с E. Через $(E_n)_*$ – объединение всех кубов, лежащих внутри E.*

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 2.1. *1)$(E_n)_* \subset E \subset (E_n)^*$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.*
2)$(E_{n+1})^* \subset (E_n)^*$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
3)$(E_{n+1})_* \supset (E_n)_*$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 2.2. *1) $\mu(E_n)^* \geq \mu(E_{n+1})^*$.*
2) $\mu(E_n)_* \leq \mu(E_{n+1})_*$.

Доказательство. 1) По лемме 2.1 $(E_{n+1})^* \subset (E_n)^*$. Осталось воспользоваться предложением 1.3. Случай 2 рассматривается аналогично. $\square$

Определение 2.2. *1) Так как последовательность $\mu(E_n)_*$ – возрастающая, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)_* = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mu(E_n)_*$. Это число называют внутренней или нижней мерой Жордана множества E и обозначают $\mu_* E$. Таким образом, $\mu_* E = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mu(E_n)_* = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)_*$.*
2) Аналогично, так как последовательность $\mu(E_n)^*$ – убывающая, то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)^* = \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mu(E_n)^*$. Это число называют внешней или верхней мерой Жордана множества E и обозначают $\mu^* E$. Таким образом, $\mu^* E = \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} \mu(E_n)^* = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)^*$.

Свойства внешней и внутренней меры.
1) $\mu^*E \geq 0$, $\mu_*E \geq 0$ – очевидно.
2) Если E – неограниченное множество, то $\mu^*E = +\infty$, т.к. $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mu(E_n)^* = +\infty$.
3) Если E – ограниченное множество, то $\mu^*E < +\infty$, т.к. E содержится в некотором двоичном кубе $\Delta_J^{(n)}$ и $\mu^*E \leq |\Delta_J^{(n)}|$.
4) $\mu_*E \leq \mu^*E$.
Доказательство. Очевидно, что $(E_k)_* \subset (E_n)^*$. Поэтому $\mu(E_k)_* \leq \mu(E_n)^*$, а значит, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(E_k)_* \leq \lim\limits_{n\to\infty} \mu(E_n)^*$. $\Box$
5) Внешняя мера монотонна, т.е. если $E \subset F$, то $\mu^*E \leq \mu^*F$.
Доказательство. Так как $E \subset F$, то $\forall\, n \in \mathbb{Z}$ справедливо включение $(E_n)^* \subset (F_n)^*$, и, значит, $\mu(E_n)^* \leq \mu(F_n)^*$. Переходя к пределу, получаем свойство 5. $\Box$
6) Если $E \subset F$ и $\mu^*F = 0$, то $\mu^*E = 0$ – очевидно следует из свойства 5.
7) Внешняя мера полуаддитивна, т.е. если $E = \bigcup\limits_{j=1}^{N} E^{(j)}$ то $\mu^*E \leq \sum_{j=1}^{N} \mu^*E^{(j)}$.

Доказательство. Очевидно, что $E_n^* = \bigcup\limits_{j=1}^{N} E_n^{(j)*}$, поэтому каждый двоичный куб $\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}$ составляющий E_n^*, является двоичным кубом, составляющим $\bigcup\limits_{j=1}^{N} E_n^{(j)*}$. Но один и тот же двоичный куб $\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)}$ может попадать в несколько множеств $E_n^{(j)*}$. Поэтому $\mu E_n^* \leq \sum_{j=1}^{N} \mu E_n^{(j)*}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\mu^*E \leq \sum_{j=1}^{N} \mu^*E^{(j)}$. $\Box$

Определение 2.3. *Мы знаем, что всегда $\mu_*E \leq \mu^*E$. Если $\mu_*E = \mu^*E$, то множество E называется измеримым по Жордану, общее значение $\mu^*E = \mu_*E$ называется мерой Жордана и обозначается μE.*

Замечание 1. Для измеримого множества $\mu E = \mu_*E = \mu^*E$.
Замечание 2. Если $\mu^*E = 0$, то E измеримо и $\mu E = 0$.

3. Граница множества. Критерий измеримости множества

Определение 3.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$. Множество*

$$\partial E = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \forall\, \delta > 0,\ O_\delta(\mathbf{x}) \bigcap E \neq \emptyset \wedge O_\delta(\mathbf{x}) \bigcap E' \neq \emptyset\}$$

называется границей множества E.

Лемма 3.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$. Обозначим*

$$\overset{\circ}{E}_n = \{\bigcup_{\mathbf{J}} \Delta_{\mathbf{J}}^{(n)} : \ \Delta_{\mathbf{J}}^{(n)} \bigcap E \neq \emptyset \wedge \Delta_{\mathbf{J}}^{(n)} \bigcap E' \neq \emptyset\}.$$

Справедливо включение

$$\partial E \subset \overset{\circ}{E}_n \subset (\partial E)_n^*. \tag{3.1}$$

Доказательство. Проведем его для $m = 2$. Сначала докажем, что $\partial E \subset \overset{\circ}{E}_n$. Выберем точку $\mathbf{x} \in \partial E$, целое n и покажем, что $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{E}_n$, т.е. существует квадрат $\Delta_{\mathbf{J}}^{(n)} \subset \overset{\circ}{E}_n$ который

содержит точку $\mathbf{x}$. Так как $\mathbf{x} \in \partial E$, то $\forall\, \delta > 0, O_\delta(\mathbf{x}) \bigcap E \neq \emptyset$ и $O_\delta(\mathbf{x}) \bigcap E' \neq \emptyset$. Выберем квадрат $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$, содержащий точку $\mathbf{x}$ и рассмотрим несколько возможностей.
Пусть вначале $\mathbf{x}$ не лежит на стороне квадрат $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$. В этом случае выберем $\delta > 0$ так, чтобы окрестность $O_\delta(\mathbf{x})$ не пересекалась со сторонами квадрата $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$. Тогда в окрестности $O_\delta(\mathbf{x})$ существуют точки $\mathbf{a} \in E$ и $\mathbf{b} \in E'$ Так как $O_\delta(\mathbf{x}) \subset \Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$, то $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$. Это означает, что $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}} \subset \overset{\circ}{E}_n$ и, значит, $\mathbf{x} \in \overset{\circ}{E}_n$.

Пусть теперь $\mathbf{x}$ лежит на стороне квадрат $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$, но не совпадает с вершиной. В этом случае выбираем $\delta > 0$ так, чтобы $O_\delta(\mathbf{x})$ не содержала ни одной вершины. В этой окрестности существуют точки $\mathbf{a} \in E, \mathbf{b} \in E'$. Если $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$, то $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}} \subset \overset{\circ}{E}_n$. Пусть $\mathbf{a} \in \Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}, \mathbf{b} \notin \Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$. Если $\mathbf{x} \in E'$, то $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}} \subset \overset{\circ}{E}_n$. Если $\mathbf{x} \in E$, то выберем двоичный квадрат $\Delta^{(n)}_{\mathbf{I}}$, содержащий точку $\mathbf{b}$. В этом квадрате есть точка $\mathbf{x} \in E$ и точка $\in E'$, т.е. $\Delta^{(n)}_{\mathbf{I}} \subset \overset{\circ}{E}_n$.
Осталось рассмотреть случай, когда $\mathbf{x}$ лежит в вершине квадрата $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$. Обозначим через

$$\Delta^{(n)}_{\mathbf{J_1}} = \Delta^{(n)}_{\mathbf{J}},\ \Delta^{(n)}_{\mathbf{J_2}},\ \Delta^{(n)}_{\mathbf{J_3}},\ \Delta^{(n)}_{\mathbf{J_4}}$$

двоичные квадраты ранга n, которые имеют общей вершиной точку $\mathbf{x}$. Выбираем $\delta > 0$ так, чтобы $O_\delta(\mathbf{x})$ не содержала ни других вершины. В этой окрестности существуют точки $\mathbf{a} \in E, \mathbf{b} \in E'$. Если точки $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ принадлежат одному квадрату $\in \Delta^{(n)}_{\mathbf{J_s}}$, то этот квадрат $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J_s}} \subset \overset{\circ}{E}_n$. Пусть $\mathbf{a} \in \Delta^{(n)}_{\mathbf{J_k}}, \mathbf{b} \in \Delta^{(n)}_{\mathbf{J_l}}$. Если $\mathbf{x} \in E'$, то $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J_k}} \subset \overset{\circ}{E}_n$. Если $\mathbf{x} \in E$, то $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J_l}} \subset \overset{\circ}{E}_n$ и левое включение доказано.

2) Проверим включение $\overset{\circ}{E}_n \subset (\partial E)^*_n$. Выберем куб $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}}$ ранга n такой, что $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}} \subset \overset{\circ}{E}_n$. Тогда этот куб содержит точки $\mathbf{a} \in E$ и $\mathbf{b} \in E'$. Рассмотрим отрезок, соединяющий точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Его уравнение: $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. При $t = 0$ получаем $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, при $t = 1$ получаем $\mathbf{x} = \mathbf{b} \notin E$. Пусть $t_0 = \inf\{t \in [0,1] :\ \ \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \notin E\}$. Тогда точка $\mathbf{x_0} = \mathbf{a} + t_0(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ – граничная точка E, и она лежит внутри $\Delta^{(n)}_{\mathbf{J}} \Rightarrow \Delta^{(n)}_{\mathbf{J}} \subset (\partial E)^*_n$. $\Box$

Теорема 3.2. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ ограниченное множество. E измеримо по Жордану тогда и только тогда, когда $\mu(\partial E) = 0$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть E измеримо по Жордану. Справедливо равенство

$$(E_n)_* \bigcup \overset{\circ}{E}_n = E^*_n \Rightarrow |(E_n)_*| + |\ \overset{\circ}{E}_n\ | = |E^*_n|. \tag{3.2}$$

Т.к. E измеримо, то $\lim |(E_n)_*| = \lim |E^*_n| \Rightarrow \lim |\ \overset{\circ}{E}_n\ | = 0$. Т.к. внешняя мера монотонна, то $\mu^* \partial E \leq \mu\ \overset{\circ}{E}_n\ \forall n$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\mu^* \partial E = 0$, следовательно, $\mu \partial E = 0$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Так как $\mu \partial E = 0$, то из включения $\overset{\circ}{E}_n \subset (\partial E)^*_n$ следует, что $\lim |\ \overset{\circ}{E}_n\ | = 0$. Тогда переходя в равенстве (3.2) к пределу, имеем

$$\lim \mu (E_n)_* = \lim \mu E^*_n \Leftrightarrow \mu_* E = \mu^* E,$$

значит, E измеримо. $\Box$

4. Свойства меры Жордана.

Свойство 1. Если E – измеримо, то $\mu E \geq 0$.
Доказательство. Очевидно, т.к. $\mu E = \mu^* E \geq 0$. $\square$
Свойство 2. *Если A, B измеримы и $A \subset B$, то $\mu A \leq \mu B$.*
Доказательство. $\mu A = \mu^* A \leq \mu_* A = \mu A$.$\square$
Лемма 4.1. *Если $A, B \subset \mathbb{R}^m$, то*
$\partial(A \bigcup B) \subset \partial A \bigcup \partial B$,
$\partial(A \bigcap B) \subset \partial A \bigcup \partial B$,
$\partial(A \setminus B) \subset \partial A \bigcup \partial B$
Доказательство.

$$\mathbf{x} \in \partial(A \cup B) \Rightarrow \forall\, \delta > 0, O_\delta(\mathbf{x}) \cap (A \cup B) \neq \emptyset \wedge O_\delta(\mathbf{x}) \cap (A \cup B)' \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (O_\delta(\mathbf{x}) \cap A) \cup (O_\delta(\mathbf{x}) \cap B) \neq \emptyset \wedge O_\delta(\mathbf{x}) \cap A' \cap B' \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (O_\delta(\mathbf{x}) \cap A \neq \emptyset \vee O_\delta(\mathbf{x}) \cap B \neq \emptyset) \wedge O_\delta(\mathbf{x}) \cap A' \neq \emptyset \wedge O_\delta(\mathbf{x}) \cap B' \neq \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(O_\delta(\mathbf{x}) \cap A \neq \emptyset \wedge O_\delta(\mathbf{x}) \cap A' \neq \emptyset)}_{\mathbf{x} \in \partial A} \vee \underbrace{(O_\delta(\mathbf{x}) \cap B \neq \emptyset \wedge O_\delta(\mathbf{x}) \cap B' \neq \emptyset)}_{\mathbf{x} \in \partial B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{x} \in \partial A \vee \mathbf{x} \in \partial B \Rightarrow \mathbf{x} \in \partial A \cup \partial B.$$

Аналогично получаем остальные включения. $\square$
Свойство 3. Пусть A, B измеримы, тогда $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$ измеримы.
Доказательство. $\partial(A \bigcup B) \subset \partial A \bigcup \partial B \Rightarrow$

$$\mu^* \partial(A \cup B) \leq \underbrace{\mu^* \partial A}_{=0} + \underbrace{\mu^* \partial B}_{=0} = 0 \Rightarrow \mu^* \partial(A \cup B) = 0 \Rightarrow$$

$A \cup B$ – измеримо. Остальное доказывается аналогично. $\square$
Свойство 4. Мера μ полуаддитивна, т.е. если A, B измеримы, ограничены , то $\mu(A \bigcup B) \leq \mu A + \mu B$.
Доказательство. По свойству полуаддитивности внешней меры $\mu^*(A \bigcup B) \leq \mu^* A + \mu^* B$. Так как множества A и B измеримы, то множество $A \bigcup B$ измеримо. Поэтому внешняя мера равна мере. $\square$
Свойство 5. Мера μ аддитивна, т.е. если A, B измеримы, ограничены и $A \bigcap B = \emptyset$, то $\mu(A \bigcup B) = \mu A + \mu B$.
Доказательство. Неравенство $\mu(A \bigcup B) \leq \mu A + \mu B$ следует из свойства полуаддитивности меры. Проверим противоположное неравенство. Т.к. $A \bigcap B = \emptyset$, то $(A_n)_* \bigsqcup (B_n)_* \subset (A \bigsqcup B)_n^*$. Поэтому $\mu(A_n)_* + \mu(B_n)_* \leq \mu(A \bigsqcup B)_n^*$. Переходя к пределу, получаем

$$\mu_* A + \mu_* B \leq \mu_*(A \bigsqcup B) \Rightarrow \mu A + \mu B \leq \mu(A \bigsqcup B). \square$$

Следствие. Если A_j ограничены измеримы и дизъюнктны, то

$$\mu\left(\bigsqcup_{j=1}^{n} A^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu A^{(j)}.$$

Доказательство по индукции.

5. Примеры измеримых множеств

Предложение 5.1. *Пусть* $L: \ y = f(x)$ $a < x \le b$ *непрерывная кривая, заданная в явном виде. Тогда ее двумерная мера равна нулю.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$. Выбираем $\varepsilon = \frac{1}{2^N}$ и рассмотрим квадраты ранга N, пересекающиеся с кривой L. По условию равномерной непрерывности

$$\exists\, \delta > 0, \forall\, x', x'', |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \le \frac{1}{2^N}.$$

Можно считать, что $\delta = \frac{1}{2^{N+p}}$ при некотором p. Тогда $\Gamma(f)$ лежит внутри прямоугольников со сторонами $\left[\frac{i}{2^{N+p}}, \frac{i+1}{2^{N+p}}\right] \times \left[\frac{j}{2^N}, \frac{j+1}{2^N}\right]$. Каждый такой прямоугольник имеет меру $\frac{1}{2^{N+p}} \cdot \frac{1}{2^N} = \frac{1}{2^{2N+p}}$. Найдем количество таких прямоугольников. Для чисел i и S выполняется неравенство

$$\begin{cases} \frac{i}{2^{N+p}} \ge a - 1 \\ \frac{i+S}{2^{N+p}} \le b + 1 \end{cases},$$

Вычтем эти неравенства

$$\frac{i}{2^{N+p}} - \frac{i+S}{2^{N+p}} \ge a - 1 - (b+1) = a - b - 2.$$

$$-\frac{S}{2^{N+p}} \ge a - b - 2 \Rightarrow \frac{S}{2^{N+p}} \le \underbrace{b - a + 2}_{>0} \Rightarrow S \le 2^{N+p}(b - a + 2).$$

Поэтому количество прямоугольников меньше $2^{N+p}(b-a+2)$, значит, их общая площадь не превосходит числа $\frac{1}{2^{2N+p}} \cdot 2^{N+p}(b-a+2) = \frac{1}{2^N}(b-a+2) \to 0$ при $N \to \infty \Rightarrow \mu^* L = 0 \Rightarrow \mu L = 0$. $\square$

Предложение 5.2. *Пусть* $f(x) \ge 0$ *непрерывна на* $[a, b]$. $B(f, [a, b])$ *– подграфик функции* $f(x)$ *на* $[a, b]$. *Тогда этот подграфик – измеримое множество.*

Доказательство. Граница $B(f, [a, b])$ состоит из 3-х отрезков и одной кривой. Каждый отрезок имеет меру ноль, график $\Gamma(f)$ тоже имеет меру ноль. Отсюда $\mu\partial(B) = 0 \Rightarrow B(f, [a, b])$ – измеримое множество на плоскости.

6. Интегральные суммы, определение интеграла Римана

Определение 6.1. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *определена на измеримом ограниченном множестве* $E \subset \mathbb{R}^m$. *Совокупность множеств* $(E_j)_{j=1}^N$ *называется разбиением множества* E, *если*
1) E_j *– измеримы,*
2) $\mu(E_i \bigcap E_j) = 0$ *при* $i \ne j$,
3) $\bigcup\limits_{j=1}^N E_j = E$.
Разбиение множества будем обозначать $\mathfrak{X}_E$ *или* $\mathfrak{X}$, *если это не вызывает недоразумений. Выберем в каждом множестве* E_j *метку* $\mathbf{x}_j \in E_j$. *Совокупность пар* $(E_j, \mathbf{x}_j)$ *будем называть отмеченным разбиением и обозначать* $\mathring{\mathfrak{X}}$.

Определение 6.2. *Пусть* $\mathfrak{X} = (E_j)_{j=1}^N$ *– разбиение* E, . *Число* $d = \max\limits_{j=\overline{1,N}}(d(E_j))$ *будем называть диаметром разбиения,* $d(E_j) = \max\limits_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in E_j} ||\mathbf{x}-\mathbf{y}||_2$ *– диаметр* E_j. *Если диаметр разбиения* $\mathfrak{X}$ *меньше* δ, *будем писать* $\mathfrak{X} \ll \delta$.

Определение 6.3. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *определена на* E, $\mathfrak{X} = (E_j)_{j=1}^N$ *– разбиение* E, $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$ *– отмеченное разбиение. Сумму*

$$S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) = \sum_{j=1}^{N} f(\mathbf{x}_j)\mu E_j$$

будем называть интегральной суммой.

Определение 6.4. *Если существует предел интегральных сумм* $S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}})$ *при* $d \to 0$, *не зависящий от выбора точек* $\mathbf{x}_j \in E^{(j)}$, *то* $f(\mathbf{x})$ *называется интегрируемой по Риману на множестве* E, *а сам предел называется интегралом Римана. Обозначение:*

$$\int\limits_E f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_E f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})\,dx^{(1)}dx^{(2)}\ldots dx^{(m)}.$$

Это определение можно записать на языке $\varepsilon - \delta$ *следующим образом:*
Число $I \in \mathbb{R}$ *называется интегралом на множестве* E, *если*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \exists\,\delta > 0, \forall\,\mathfrak{X}_E \ll \delta\;\forall\,\mathbf{x}_j \in E_j, |S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_E) - I| < \varepsilon.$$

Теорема 6.1 (Критерий Коши). *Функция* $f(\mathbf{x})$ *интегрируема на ограниченном измеримом множестве* $E \subset \mathbb{R}^m$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\,\varepsilon > 0 \exists\,\delta > 0, \forall\;\overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(1)}, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(2)} \ll \delta, |S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(1)}) - S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(2)})| < \varepsilon.$$

Доказательство.Н е о б х о д и м о с т ь. По определению

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0 \forall\;\overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(1)} \ll \delta, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(2)} \ll \delta:\;|S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(1)}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}, |S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(2)}) - I| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(1)}) - S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}_E^{(2)})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Без доказательства.
Пример 1. $\int\limits_E 1\,d\mathbf{x} = \mu E.$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}_E = (E_j)_{j=1}^N$ – разбиение множества E. Тогда $\sum\limits_{j=1}^{N} \mu E_j = \mu E$ и значит $\forall\,\mathbf{x}_j \in E_j$ имеем

$$S(1, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_E) = \sum_{j=1}^{N} 1 \cdot \mu E_j = \mu E.$$

Следовательно, существует предел $\lim\limits_{d(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_E)\to 0} S(1, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_E) = \mu E$. $\square$

Пример 2. Если $\mu E = 0$ и функция f принимает на E конечные значения, то $\int\limits_E f(x)\,d\mathbf{x} = 0$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}_E = (E_j)_{j=1}^N$ – разбиение множества E. Так как $\mu E = 0$, то $\mu E_j = 0$ для любого j. Поэтому

$$S(f, \mathring{\mathfrak{X}}_E) = \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j)\cdot \mu E_j = 0.$$

Следовательно, существует предел $\lim\limits_{d(\mathring{\mathfrak{X}}_E)\to 0} S(f, \mathring{\mathfrak{X}}_E) = 0$. □

7. Верхний и нижний интегралы Дарбу

Определение 7.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^m$ – измеримое множество, $f(\mathbf{x})$ ограничена на D. $\mathfrak{X} = (D_j)_{j=1}^N$ – разбиение множества D. Обозначим $M_j = \sup\limits_{\mathbf{x}\in D_j} f(\mathbf{x})$, $m_j = \inf\limits_{\mathbf{x}\in D_j} f(\mathbf{x})$.*

Тогда сумма $\overline{S}(f, \mathfrak{X}) = \sum\limits_{j=1}^N M_j \mu D_j$ называется верхней суммой Дарбу.

Сумма $\underline{S}(f, \mathfrak{X}) = \sum\limits_{j=1}^N m_j \mu D_j$ называется нижней суммой Дарбу.

Лемма 7.1. *Для любого отмеченного разбиения $\mathring{\mathfrak{X}} = (D_j, \mathbf{x}_j)_{j=1}^N$ справедливо неравенство*

$$\underline{S}(f, \mathring{\mathfrak{X}}) \le S(f, \mathring{\mathfrak{X}}) \le \overline{S}(f, \mathring{\mathfrak{X}}).$$

Доказательство.

$$\inf_{\mathbf{x}\in D_j} f(\mathbf{x}) = m_j \le f(\mathbf{x}_j) \le M_j = \sup_{\mathbf{x}\in D_j} f(\mathbf{x}).$$

Умножим на μD_j и сложим

$$\sum_{j=1}^N m_j \mu D_j \le \sum_{j=1}^N f(\mathbf{x}_j)\mu D_j \le \sum_{j=1}^N M_j \mu D_j. \ \square$$

Определение 7.2. *Пусть $\mathfrak{X} = (D_j)_{j=1}^N$ и $\mathfrak{X}' = (D'_j)_{j=1}^N$ – два разбиения множества D. Будем говорить, что разбиение $\mathfrak{X}$ мельче чем $\mathfrak{X}'$, если любое множество $D'_k \in \mathfrak{X}'$ есть объединение конечного числа измеримых множеств $(D_{k,j})_{j=1}^{N_k}$, которые образуют разбиение множества D'_k.*

Лемма 7.2. *Если $\mathfrak{X}' < \mathfrak{X}''$, то*
1) $\underline{S}(f, \mathfrak{X}') \ge \underline{S}(f, \mathfrak{X}'')$,
2) $\overline{S}(f, \mathfrak{X}') \le \overline{S}(f, \mathfrak{X}'')$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}' = (D'_j)_{j=1}^{N'}$, $\mathfrak{X}'' = (D''_j)_{j=1}^{N''}$. Докажем, что

1) Тогда $D''_k = \bigcup\limits_{j=l_k}^{n_k} D'_j$

2) $\mu D''_k = \sum\limits_{j=l_k}^{n_k} \mu D'_j$. Для

$$\underline{S}(f,\mathfrak{X}') = \sum_{j=1}^{N'} \inf_{\mathbf{x}\in D'_j} f(\mathbf{x})\mu D'_j = \sum_{k=1}^{N'}\sum_{j=l_k}^{n_k} \underbrace{\inf_{\mathbf{x}\in D'_j} f(\mathbf{x})}_{\geq \inf\limits_{\mathbf{x}\in D''_k} f(\mathbf{x})} \mu D'_j \geq \sum_{k=1}^{N'} \inf_{\mathbf{x}\in D''_k} f(\mathbf{x}) \cdot \underbrace{\sum_{j=l_k}^{n_k} \mu D'_j}_{=\mu D''_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N'} \inf_{\mathbf{x}\in D''_k} f(\mathbf{x})\mu D''_k = \underline{S}(f,\mathfrak{X}'').$$

Аналогично доказывается неравенство 2). □

Лемма 7.3. *Для любых двух разбиений $\mathfrak{X}'$ и $\mathfrak{X}''$*

$$\underline{S}(f,\mathfrak{X}') \leq \overline{S}(f,\mathfrak{X}'').$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение $\mathfrak{X}$, состоящее из всевозможных пересечений

$$D'_j \bigcap D''_k \ \ (\mathfrak{X}' = (D'_j);\ \mathfrak{X}'' = (D''_k)).$$

Тогда $\mathfrak{X} < \mathfrak{X}'$ и $\mathfrak{X} < \mathfrak{X}''$. Поэтому

$$\underline{S}(f,\mathfrak{X}') \leq \underline{S}(f,\mathfrak{X}) \leq \overline{S}(f,\mathfrak{X}) \leq \overline{S}(f,\mathfrak{X}''). \ \square$$

Лемма 7.4. *Пусть $f(\mathbf{x})$ ограничена на ограниченном измеримом множестве D. Тогда: 1) существует $\inf \overline{S}(f,\mathfrak{X}'')$, 2) существует $\sup \underline{S}(f,\mathfrak{X}')$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}'$ и $\mathfrak{X}''$ – произвольные разбиения. Тогда

$$\underline{S}(f,\mathfrak{X}') \leq \overline{S}(f,\mathfrak{X}'),$$

причем обе суммы Дарбу конечны. Зафиксируем разбиение $\mathfrak{X}'$, тогда $\underline{S}(f,\mathfrak{X}') \leq \inf \overline{S}(f,\mathfrak{X}')$. Переходя к sup в левой части, получим

$$\sup \underline{S}(f,\mathfrak{X}') \leq \inf \overline{S}(f,\mathfrak{X}'), \ \square$$

Определение 7.3. *Число $\inf \overline{S}(f,\mathfrak{X}')$ называют верхним интегралом Дарбу и обозначают $I^*(f,D)$. Число $\sup \underline{S}(f,\mathfrak{X}')$ называют нижним интегралом Дарбу и обозначают $I_*(f,D)$.*

Следствие. Всегда $I_*(f,D) \leq I^*(f,D)$.

8. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу

Теорема 8.1. *Пусть $f(\mathbf{x})$ ограничена на измеримом ограниченном множестве D. Функция $f(\mathbf{x})$ интегрируема по Риману тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{d(\mathfrak{X})\to 0} (\overline{S}(f,\mathfrak{X}) - \underline{S}(f,\mathfrak{X})) = 0$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f(\mathbf{x})$ интегрируема по Риману, тогда

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\;\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta, |S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) - \int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x}| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} + \int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} \leq S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) \leq \int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\overline{S}(f, \mathfrak{X}) \leq \int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \frac{\varepsilon}{2};\; \int\limits_D f(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \frac{\varepsilon}{2} \leq \underline{S}(f, \mathfrak{X}).$$

Вычитая из 1-го неравенства 2-е, получаем

$$\overline{S}(f, \mathfrak{X}) - \underline{S}(f, \mathfrak{X}) \leq= \varepsilon,$$

и это верно $\forall\,\mathfrak{X}$, с $d(\mathfrak{X}) < \delta$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть

$$\lim_{d(\mathfrak{X})\to 0}(\overline{S}(f, \mathfrak{X}) - \underline{S}(f, \mathfrak{X})) = 0.$$

Очевидно, что верно неравенство

$$\underline{S}(f, \mathfrak{X}) \leq I_*(f, D) \leq I^*(f, D) \leq \overline{S}(f, \mathfrak{X}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq I^*(f, D) - I_*(f, D) \leq \overline{S}(f, \mathfrak{X}) - \underline{S}(f, \mathfrak{X}) \to 0.$$

Переходя к пределу при $d(\mathfrak{X}) \to 0$, получим $I^*(f, D) - I_*(f, D) = 0$. Обозначим через $I(f, D)$ – общее значение I^* и I_*. Покажем, что $I(f, D)$ есть интеграл для $f(\mathbf{x})$ на D. Рассмотрим разность $S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) - I(f, D)$, в которой $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta$. Тогда

$$S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) - I(f, D) \leq \overline{S}(f, \mathfrak{X}) - I(f, D) \leq \overline{S}(f, \mathfrak{X}) - \underline{S}(f, \mathfrak{X}).$$

Аналогично,

$$S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) - I(f, D) \geq \underline{S}(f, \mathfrak{X}) - \overline{S}(f, \mathfrak{X}) \Rightarrow |\overline{S}(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) - I(f, D)| \leq$$

$$\leq \overline{S}(f, \mathfrak{X}) - \underline{S}(f, \mathfrak{X}) \to 0 \text{ при } d(\mathfrak{X}) \to 0 \Rightarrow \lim_{d(\mathfrak{X})\to 0} S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) = I(f, 0). \;\Box$$

9. Интегрируемость непрерывной функции на измеримом компактном множестве

Теорема 9.1. *Пусть $f(\mathbf{x})$ непрерывна на компактном измеримом множестве $K \subset \mathbb{R}^m$. Тогда $f(\mathbf{x})$ интегрируема по Риману на K.*

Доказательство. Т.к. $f(\mathbf{x})$ непрерывна на компактном множестве, то $f(\mathbf{x})$ равномерно непрерывна на K, т.е.

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0\;\forall\,\mathbf{x}', \mathbf{x}'',\; \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}''\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \frac{\varepsilon}{1 + \mu K}.$$

Выберем разбиение $\mathfrak{X} = (D_j)_{j=1}^n$ так, что $d(\mathfrak{X}) \le \delta$. Тогда

$$\forall\, \mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in D_j \Rightarrow |f(\mathbf{x}') - f(\mathbf{x}'')| < \frac{\varepsilon}{1+\mu K} \Rightarrow |\sup_{\mathbf{x}\in D_j} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x}\in D_j} f(\mathbf{x})| \le \frac{\varepsilon}{1+\mu K} \Rightarrow$$

$$\overline{S}(f,\mathfrak{X}) - \underline{S}(f,\mathfrak{X}) = \sum M_j \mu D_j - \sum m_j \mu D_j =$$

$$= \sum (M_j - m_j)\mu D_j \le \frac{\varepsilon}{1+\mu K} \cdot \sum \mu D_j = \varepsilon \cdot \frac{\mu K}{1+\mu K} < \varepsilon. \ \Box$$

Пример. Пусть $f(\mathbf{x}) = \lambda$ на K. Тогда

$$\int\limits_K f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_K \lambda\, d\mathbf{x} = \lim S(f,\mathfrak{X}) = \lim \sum \lambda \cdot \mu D_j = \lambda \sum \mu D_j = \lambda \cdot \mu D.$$

10. Интеграл как аддитивная функция множества

Теорема 10.1. *Пусть $f(\mathbf{x})$ интегрируема на D и пусть $D = A \bigcup B$ разбиение множества D на два измеримых дизъюнектных множества, т.е. $A \bigcap B = \emptyset$. Тогда $f(\mathbf{x})$ интегрируема на A и на B.*

Доказательство. Так как $f(\mathbf{x})$ интегрируема на D, то $\lim\limits_{d(\mathfrak{X})\to 0} (\overline{S}(f,\mathfrak{X}) - \underline{S}(f,\mathfrak{X})) = 0$. Выбираем произвольное разбиение $\mathfrak{X}_A$ множества A, $\mathfrak{X}_B$ множества B. Тогда $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_A \bigcup \mathfrak{X}_B$ есть разбиение множества $A \bigcup B$. Очевидно,

$$\overline{S}(f,\mathfrak{X}) = \overline{S}(f,\mathfrak{X}_A) + \overline{S}(f,\mathfrak{X}_B).$$
$$\underline{S}(f,\mathfrak{X}) = \underline{S}(f,\mathfrak{X}_A) + \underline{S}(f,\mathfrak{X}_B).$$

Тогда

$$\overline{S}(f,\mathfrak{X}) - \underline{S}(f,\mathfrak{X}) = \underbrace{(\overline{S}(f,\mathfrak{X}_A) - \underline{S}(f,\mathfrak{X}_A))}_{\ge 0} + \underbrace{(\overline{S}(f,\mathfrak{X}_B) - \underline{S}(f,\mathfrak{X}_B))}_{\ge 0} \Rightarrow$$

$$\overline{S}(f,\mathfrak{X}_A) - \underline{S}(f,\mathfrak{X}_A) \le \overline{S}(f,\mathfrak{X}) - \underline{S}(f,\mathfrak{X}) \to 0,$$
$$\overline{S}(f,\mathfrak{X}_B) - \underline{S}(f,\mathfrak{X}_B) \le \overline{S}(f,\mathfrak{X}) - \underline{S}(f,\mathfrak{X}) \to 0,$$

Следовательно, f интегрируема на A и f интегрируема на B. $\Box$

Теорема 10.2. *В условиях теоремы 10.1*

$$\int\limits_{A\bigcup B} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int\limits_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{10.1}$$

Доказательство. По теореме 10.1 все интегралы в (10.1) существуют, и поэтому надо доказывать только равенство. Выбираем снова разбиение $\mathring{\mathfrak{X}}_A$ множества A, $\mathring{\mathfrak{X}}_B$ множества B, тогда $\mathring{\mathfrak{X}}_A \bigcup \mathring{\mathfrak{X}}_B = \mathring{\mathfrak{X}}$ – разбиение множества $A \bigcup B$. Следовательно

$$S(f,\mathring{\mathfrak{X}}) = S(f,\mathring{\mathfrak{X}}_A) + S(f,\mathring{\mathfrak{X}}_B).$$

Перейдем к пределу при $d(\mathfrak{X}) \to 0$, получим

$$\int\limits_{A\bigcup B} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_A f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \int\limits_B f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \ \Box$$

Теорема 10.3. *Пусть* $D = \bigcup\limits_{j=1}^{n} D_j$ *разбиение множества* D *на измеримые подмножества и* $f(\mathbf{x})$ *интегрируема на* D*. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{D_j} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Доказательство. Очевидно получается из (10.1) индукцией по n. $\square$

Теорема 10.4. *Если* $D = A\bigcup B$ *разбиение множества* D *на два измеримых неналегающих множества, т.е.* $\mu A\bigcap B = 0$ *и* $f(\mathbf{x})$ *интегрируема на* A *и на* B*, то* $f(\mathbf{x})$ *интегрируема на* $D = A\bigcup B$*, и справедливо равенство*

$$\int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int\limits_B f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Доказательство. Так как $\mu A\bigcap B = 0$, то $\int\limits_{A\bigcap B} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$. Поэтому

$$\int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{A\setminus(A\bigcap B)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int\limits_{A\bigcap B} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int\limits_{B\setminus(A\bigcap B)} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} =$$

$$= \int\limits_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \int\limits_{A\bigcap B} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int\limits_B f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} - \int\limits_{A\bigcap B} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} =$$

$$= \int\limits_A f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \int\limits_B f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \quad \square$$

11. Арифметические операции с интегрируемыми функциями

Теорема 11.1. *Пусть* $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$ *– ограниченные интегрируемые функции на измеримом множестве* D*. Тогда*
1) $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ *– интегрируема и*

$$\int\limits_D (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} = \int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \int\limits_D g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

2) $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$

$$\int\limits_D \lambda f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \lambda \int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Доказательство. 1) Пусть $\mathring{\mathfrak{X}} = (D_j, \mathbf{x}_j)_{j=1}^{n}$ – отмеченное разбиение. Тогда

$$S(f+g, \mathring{\mathfrak{X}}) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j)\mu D_j + \sum_{j=1}^{n} g(\mathbf{x}_j)\mu D_j = S(f, \mathring{\mathfrak{X}}) + S(g, \mathring{\mathfrak{X}}).$$

Переходя к пределу при $d(\mathring{\mathfrak{X}}) \to 0$, получим утверждение теоремы.
2) Доказывается аналогично. $\square$

12. Свойства, связанные с неравенствами

Теорема 12.1. *Пусть $f(\mathbf{x}) \geq 0$, ограничена и интегрируема на ограниченном измеримом множестве D. Тогда $\int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geq 0$.*

Доказательство.

$$S(f, \mathring{\mathfrak{X}}) = \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j)\mu D_j \geq 0.$$

Переходя к пределу, получаем утверждение теоремы. □

Теорема 12.2. *Если $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$ – ограничены на ограниченном измеримом множестве D, то $\int\limits_D f \leq \int\limits_D g$.*

Доказательство. Так как $g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \geq 0$ на D, то по теореме 12.1

$$\int\limits_D (g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} \geq 0 \Rightarrow \int\limits_D g(\mathbf{x}) \int\limits_D f(\mathbf{x}) \geq 0 \Rightarrow \int\limits_D g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \geq \int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \ \square$$

Теорема 12.3. *Если $m \leq f(\mathbf{x}) \leq M$, $f(\mathbf{x})$ ограничена и интегрируема на измеримом D, $\mu D < +\infty$, то*

$$m\mu D \leq \int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leq M\mu D.$$

Доказательство. По теореме 12.2

$$\int\limits_D m\,d\mathbf{x} \leq \int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leq \int\limits_D M\,d\mathbf{x} \Rightarrow m \cdot \mu D \leq \int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \leq M\mu D. \ \square$$

13. Интегрируемость модуля

Лемма 13.1. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Доказательство. Доказано в 1-м семестре.

Лемма 13.2. $\sup\limits_{x \in A} |x| - \inf\limits_{x \in A} |x| \leq \sup\limits_{x \in A} x - \inf\limits_{x \in A} x$, $A \subset \mathbb{R}$.

Доказательство. Выберем $x, y \in A$, тогда по лемме 13.1

$$|x| - |y| \leq |x - y| \leq \sup_{x \in A} x - \inf_{y \in A} y \Rightarrow \sup_{x \in A} |x| - \inf_{y \in A} |y| \leq \sup_{x \in A} x - \inf_{y \in A} y \ \square$$

Теорема 13.3. *Если $f(\mathbf{x})$ ограничена и интегрируема на $D \subset \mathbb{R}^m$, то функция $|f(\mathbf{x})|$ тоже интегрируема.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольное разбиение, тогда

$$\overline{S}(|f|, \mathfrak{X}) - \underline{S}(|f|, \mathfrak{X}) = \sum_{j=1}^{n} M_j(|f|) \cdot \mu D_j - \sum_{j=1}^{n} m_j(|f| \cdot \mu D_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mu D_j \cdot (\sup_{\mathbf{x} \in D_j} |f(\mathbf{x})| - \inf_{\mathbf{x} \in D_j} |f(\mathbf{x})|) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu D_j \cdot (\sup_{\mathbf{x} \in D_j} f(\mathbf{x}) - \inf_{\mathbf{x} \in D_j} f(\mathbf{x})) = \overline{S}(f, \mathfrak{X}) - \underline{S}(f, \mathfrak{X}) \to 0$$

при $d(\mathfrak{X}) \to 0$. □

Теорема 13.4. *Если f определена и интегрируема на D, то*

$$\left|\int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\right| \le \int\limits_D |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}.$$

Доказательство.

$$-|f(\mathbf{x})| \le f(\mathbf{x}) \le |f(\mathbf{x})| \Rightarrow -\int\limits_D |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \le \int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \le \int\limits_D |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}. \ \square$$

14. Сведение двойного интеграла к повторному

Лемма 14.1. *Пусть $f(\mathbf{x})$ определена и интегрируема на ограниченном измеримом множестве D. Тогда*

$$\lim_{d(\mathfrak{X})\to 0} \underline{S}(f,\mathfrak{X}) = \int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \lim_{d(\mathfrak{X})\to 0} \overline{S}(f,\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Обозначим $\int\limits_D f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = I(f)$. По определению интеграла

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\ \mathring{\mathfrak{X}} \ll \delta\ |S(f,\mathring{\mathfrak{X}}) - I(f)| < \varepsilon \Rightarrow I(f) - \varepsilon < S(f,\mathring{\mathfrak{X}}) < I(f) + \varepsilon \Rightarrow$$

$$I(f) - \varepsilon < \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j)\mu D_j < I(f) + \epsilon \Rightarrow$$

$$I(f) - \varepsilon \le \sum_{j=1}^{n} \inf_{x\in D_j} f(\mathbf{x})\mu D_j \le \sum_{j=1}^{n} f(\mathbf{x}_j)\mu D_j \le \sum_{j=1}^{n} \sup_{x\in D_j} f(\mathbf{x})\mu D_j \le I(f) + \varepsilon \Rightarrow$$

$$I(f) - \varepsilon \le \underline{S}(f,\mathfrak{X}) \le S(f,\mathring{\mathfrak{X}}) \le \overline{S}(f,\mathfrak{X}) \le I(f) + \varepsilon. \tag{14.1}$$

Правая часть в (14.1) дает нам, что $\overline{S}(f,\mathfrak{X}) - I(f) \le \varepsilon$. Левая часть $\overline{S}(f,\mathfrak{X}) - I(f) \ge -\varepsilon$, тогда $|\overline{S}(f,\mathfrak{X}) - I(f)| < \varepsilon$ и это для любого разбиения $\mathfrak{X} \ll \delta \Rightarrow \lim\limits_{d(\mathfrak{X})\to 0} \overline{S}(f,\mathfrak{X}) = I(f)$. И аналогично, $\forall\,\mathfrak{X} \ll \delta \Rightarrow \lim\limits_{d(\mathfrak{X})\to 0} \overline{S}(f,\mathfrak{X}) = I(f)$.

Теорема 14.2. *Пусть множество $D \subset \mathbb{R}^2$ задано неравенствами: $a \le x \le b$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$, причем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на $[a,b]$. Пусть далее $f(x,y)$ непрерывна в множестве D. Тогда справедливо равенство*

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\Big)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy. \tag{14.2}$$

Доказательство. Проведем для случая, когда $\varphi(x) = c$. $\psi(x) = d$ для всех $x \in [a,b]$.
1) Покажем, что $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ существует. В самом деле, D – ограниченное замкнутое множество, следовательно, компактно. ∂D состоит из 4-х отрезков, мера каждого из них равна 0. $\Rightarrow \mu\partial D = 0$, значит, D – измеримо, т.е. $f(x,y)$ – непрерывна на компактном

измеримом множестве, следовательно, интеграл существует.
2) Покажем, что $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ существует. Для этого покажем, что функция $\Phi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ непрерывна.

Т.к. $f(x,y)$ непрерывна в D и D – компактно, то $f(x,y)$ равномерно непрерывна, значит,

$$\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0,\ \forall\,(x',y'),(x'',y''),\ \|(x',y') - (x'',y'')\| < \delta \Rightarrow \|f(x',y') - f(x'',y'')\| < \varepsilon.$$

Тогда, если $|x' - x''| < \delta \Rightarrow$

$$|\Phi(x') - \Phi(x'')| = \left|\int\limits_c^d \Big(f(x',y) - f(x'',y)\Big)\,dy\right| \le \int\limits_c^d |f(x',y) - f(x'',y)|\,dy \le \varepsilon \cdot (d-c),$$

т.е. $\Phi(x)$ – равномерно непрерывна, значит, $\int\limits_a^b \Phi(x)\,dx$ существует. Таким образом, оба интеграла в равенстве (14.2) существуют.
3) Проверим равенство. Выберем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и выберем разбиения отрезков $[a,b]$ и $[c,d]$ на n равных отрезков

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,\ \ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = d,\ x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n},\ y_{i+1} - y_i = \frac{c-d}{n}.$$

И пусть

$$D_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{i-1}, y_i],\ D = \bigcup_{i,j=1}^{n} D_{i,j}.$$

Тогда $\mathfrak{X} = (D_{i,j})$ – разбиение D, $d(\mathfrak{X}) = \sqrt{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sqrt{(b-a)^2 + (c-d)^2} \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sup_{x,y \in D_{i,j}} f(x,y) = \mu D_{i,j} = \overline{S}(f,\mathfrak{X}) \to$$

$$\to \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

И, аналогично,

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} dx \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \ge \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \Delta x_i \Delta y_j \inf_{x,y \in D_{i,j}} f(x,y) = \underline{S}(f,\mathfrak{X}) \to$$

$$\to \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy.$$

Таким образом,

$$\underline{S}(f,\mathfrak{X}) \le \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy \le \underline{S}(f,\mathfrak{X}).$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ и используя лемму 14.1, получаем утверждение.
Замечание. Если множество D задано неравенствами

$$D: \quad c \le y \le d, \varphi(y) \le x \le \psi(y),$$

то справедливо равенство

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx.$$

Пример. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy$$

на множестве $D:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x$.

По теореме 14.2:

$$\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x \sin(x+y)\,dy = \int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^x \sin(x+y)\,d(y+x)\right) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx(-\cos(x+y))|_0^x = |\text{подстановка по } y| = \int\limits_0^1 dx(-\cos(2x)+\cos x) =$$

$$= \int\limits_0^1 \cos x\,dx - \int\limits_0^1 \cos 2x\,dx = \sin x|_0^1 - \frac{1}{2}\sin 2x|_0^1 = \sin 1 - \frac{1}{2}\sin 2.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy$ на $D:\ 0\le y\le 1,\ y\le x\le 2-y$.

Возможны 2 пути:
1-й способ. Разбиваем $D = D_1 \bigsqcup D_2$, где

$$D_1:\ 0\le x\le 1, y\le x,\ \ D_2:\ 1\le x\le 2, y\le x-2,$$

. Тогда

$$\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} \sin(x+y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} \sin(x+y)\,dxdy.$$

2-й способ. Записываем интеграл в виде повторного:

$$\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{2-y} \sin(x+y)\,dx.$$

Вычисляем $\int\limits_{y}^{2-y} \sin(x+y)\,dx = -\cos(x+y)|_{y}^{1-y}$ =|подстановка вместо x =| $-(\cos 2y - \cos 2) = \cos 2 - \cos 2y$. Тогда

$$\iint\limits_{D} \sin(x+y)\,dxdy = \int\limits_{0}^{1} (\cos 2 - \cos 2y)\,dy = \cos 2 - \frac{1}{2}\sin 2y|_0^1 = \cos 2 - \frac{1}{2}\sin 2. \square$$

15. Сведение тройного интеграла к повторному

Определение 15.1. *Пусть $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ измеримое ограниченное множество, с границей $\partial\mathcal{D} = \Gamma$ и пусть функции $z = \varphi(x,y)$, $z = \psi(x,y)$ непрерывны в $\mathcal{D}$. Множество*

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ (x,y) \in \mathcal{D}, \varphi_1(x,y) \le z \le \psi_1(x,y)\}$$

будем называть цилиндрическим брусом.

Теорема 15.1. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ криволинейный параллелограмм. $D:\ a \le x \le b$, $\varphi(x) \le y \le \psi(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – непрерывны. Пусть B – циллиндровый брус с основанием $\mathcal{D}$, ограниченный сверху и снизу поверхностями $z = \psi_1(x,y)$, $z = \varphi_1(x,y)$, $\varphi_1(x,y) \le \psi_1(x,y)$. Тогда справедливо равенство*

$$\iiint\limits_{B} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x,y,z)\,dz.$$

Интеграл в правой части называется повторным.

Без доказательства.
Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{B}(x+y+z)^2\,dxdydz$, где $B:\ 0 \le x \le 1$, $2x \le y \le x$, $0 \le z \le x+y$.

1) $\iiint\limits_{B}(x+y+z)^2\,dxdydz = \iint\limits_{\mathcal{D}} dxdy \int\limits_{0}^{x+y}(x+y+z)^2\,dz$

2) $\int\limits_{0}^{x+y}(x+y+z)^2\,dz = \frac{(x+y+z)^3}{3}\Big|_0^{x+y} = \frac{1}{3}((2x+2y)^3 - (x+y)^3) = \frac{1}{3}(8(x+y)^3 - (x+y)^3) = \frac{7}{3}(x+y)^3$.

3) $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{7}{3}(x+y)^3\,dxdy = \frac{7}{3}\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{2x}(x+y)^3 dy = \frac{7}{3}\int\limits_{0}^{1} dx \left(\frac{(x+y)^4}{4}\Big|_x^{2x} \right) = \frac{7}{12}\int\limits_{0}^{1}((3x)^4 - (2x)^4)dx = $
$= \frac{7}{12}(81-16)\int\limits_{0}^{1} x^4\,dx = \frac{7}{12}(81-16)\ \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{7}{12}(81-16)\cdot\frac{1}{5}$.

16. Вектор-функции в $\mathbb{R}^m$, вариация вектор-функции

Определение 16.1. *Отображение $\mathbf{x}:\ [a,b] \to \mathbb{R}^m$ называют вектор-функцией. Задание вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ равносильно заданию m скалярных функций $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(m)}(t)$, т.е. $\mathbf{x}(t) = (x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \ldots, x^{(m)}(t))$. Или иначе: вектор-функция это такая функция, значениями которой являются векторы.*

Определение 16.2. *Пусть дана вектор-функция* $\mathbf{x}: [a,b] \to \mathbb{R}^m$. *Выберем разбиение* $\mathcal{T} = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ *и построим суммы* $\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2$. *Число*

$$\bigvee_a^b \mathbf{x} = \sup_{\mathcal{T}=(t_j)} \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2$$

называют вариацией вектор-функции $\mathbf{x}(t)$ *на отрезке* $[a,b]$

Лемма 16.1. $\bigvee_a^b \mathbf{x} \geq 0$ – *очевидно.*

Теорема 16.2. *Для любого c удовлетворяющего неравенству* $a < c < b$

$$\bigvee_a^b \mathbf{x} = \bigvee_a^c \mathbf{x} + \bigvee_c^b \mathbf{x} \quad .$$

Доказательство. 1) Выберем произвольное разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Тогда точка $c \in [t_{k-1}, t_k]$ при некотором k:
рисунок
По неравенству Коши–Буняковского

$$\|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2 \leq \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(c)\|_2 + \|\mathbf{x}(c) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2 \Rightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2 = \sum_{j=1}^{k-1} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2 + \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2 + \sum_{j=k+1}^{n} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2 \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{k-1} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2 + \|\mathbf{x}(c) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2 + \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(c)\|_2 + \sum_{j=k+1}^{n} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2 \leq$$

$$\leq \bigvee_a^c \mathbf{x} + \bigvee_c^b \mathbf{x}.$$

Переходя к sup в левой части, получаем

$$\bigvee_a^b \mathbf{x} \leq \bigvee_a^c \mathbf{x} + \bigvee_c^b \mathbf{x}. \tag{16.1}$$

2) Получим неравенство противоположное к (16.1). Выберем разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = c$ отрезка $[a,c]$ и $c = t_n < t_{n+1} < \ldots < t_{n+s} = b$ отрезка $[c,b]$. Тогда

$$\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) \geq \sum_{j=1}^{n+s} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2 = \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2 + \sum_{j=n+1}^{n+s} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2.$$

Переходя к sup по $t_1, \ldots, t_{n-1}$ при фиксированных $t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+s}$, получим

$$\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) \geq \bigvee_a^c \mathbf{x}(t) + \sum_{j=n+1}^{n+s} \|\mathbf{x}(t_j) - \mathbf{x}(t_{j-1})\|_2,$$

и это неравенство верно при всех $t_n, t_{n+1}, \ldots, t_{n+s}$. Переходя к sup по $t_{n+1}, \ldots, t_{n+s}$, получаем

$$\bigvee_a^b \mathbf{x} \geq \bigvee_a^c \mathbf{x} + \bigvee_c^b \mathbf{x}. \tag{16.2}$$

Соединяя (16.1) и (16.2), получаем утверждение теоремы. □

Следствие 1. Если $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, то $\bigvee\limits_a^b \mathbf{x}(t) \geq \sum\limits_{j=1}^{n} \bigvee\limits_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{x}(t)$ – очевидно по следствию из теоремы 16.2.

Следствие 2. Если $[a,b] \subset [c,d]$, то $\bigvee\limits_c^d \mathbf{x}(t) \leq \bigvee\limits_a^b \mathbf{x}(t)$ – очевидно следствию из теоремы 16.2.

Теорема 16.3. *Пусть* $\mathbf{x}(t)$ *имеет ограниченную вариацию на* $[a,b]$, $\mathbf{x}(t)$ *непрерывна на* $[a,b]$. *Тогда*

$$\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) = \lim_{d(\mathcal{T}) \to 0} \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2.$$

Доказательство. 1) Выбираем произвольное $\varepsilon > 0$. Т.к $\bigvee\limits_a^b \mathbf{x}(t) = \sup \sum\limits_{k=1}^{n} \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2$, то существует разбиение $\mathcal{T}' = (a = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_{n'} = b)$ такое, что

$$\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) - \sum_{k=1}^{n'} \|\mathbf{x}(t'_k) - \mathbf{x}(t'_{k-1})\|_2 < \varepsilon. \tag{16.3}$$

Если к разбиению $\mathcal{T}'$ добавить одну точку, то неравенство (16.3) сохранится. В самом деле, добавим точку τ_j, лежащую между t'_{j-1} и t'_j. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n'} \|\mathbf{x}(t'_k) - \mathbf{x}(t'_{k-1})\|_2 = \sum_{k=1}^{j-1} \|\mathbf{x}(t'_k) - \mathbf{x}(t'_{k-1})\|_2 + \|\mathbf{x}(t'_j) - \mathbf{x}(t'_{j-1})\|_2 + \sum_{k=j+1}^{n'} \|\mathbf{x}(t'_j) - \mathbf{x}(t'_{j-1})\|_2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{j-1} \|\mathbf{x}(t'_k) - \mathbf{x}(t'_{k-1})\|_2 + \|\mathbf{x}(\tau_j) - \mathbf{x}(t'_{j-1})\|_2 + \|\mathbf{x}(t'_j) - \mathbf{x}(\tau_j)\|_2 + \sum_{k=j+1}^{n'} \|\mathbf{x}(t'_k) - \mathbf{x}(t'_{k-1})\|_2.$$

Т.е. при добавлении точки τ_j суммы в (16.3) увеличиваются, значит, из $\bigvee\limits_a^b \mathbf{x}(t)$ вычитается большее число, следовательно, (16.3) – справедливо. Обозначим $\delta' = \min\limits_k |t'_k - t'_{k-1}|$.
2) По условию функция $\mathbf{x}(t)$ непрерывна, значит, $x^{(j)}(t)$ непрерывны на $[a,b]$, следовательно, равномерно непрерывны, отсюда

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta'' > 0,\ \forall t', t'' \in [a,b],\ |t' - t''| < \delta'',\ |x^{(j)}(t') - x^{(j)}(t'')| \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}n'} \Rightarrow \|\mathbf{x}(t') - \mathbf{x}(t'')\|_2 =$$

$$\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x^{(j)}(t') - x^{(j)}(t'')|^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{m}(n')^2}} = \frac{\varepsilon}{n'} \cdot \sqrt{m \cdot \frac{1}{m}} = \frac{\varepsilon}{n'}. \tag{16.4}$$

3) Положим теперь $\delta = \min(\delta', \delta'')$ и покажем, что для всех разбиений $\mathcal{P} = (t_k)_{k=0}^n$ если $d(\mathcal{T}) < \delta$, то

$$\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) - \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2 < 3\varepsilon.$$

Пусть $d(\mathcal{T}) < \delta$. Построим новое разбиение $\mathcal{T}'' = \mathcal{T}' \bigcup \mathcal{T}$. Оно получается из $\mathcal{T}'$ добавлением новых точек из $\mathcal{T}$. Тогда для точек (t''_j), составляющих разбиение $\mathcal{T}''$, ввыполнено неравенство (16.3), т.е.

$$\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) - \sum_{k=1}^{n''} \|\mathbf{x}(t''_k) - \mathbf{x}(t''_{k-1})\|_2 < \varepsilon. \tag{16.5}$$

Т.к. $d(\mathcal{T}) < \delta$, то в каждом отрезке (t_{k-1}, t_k) содержится не более одной точек $t'_{j_k} \in \mathcal{T}'$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{n''} \|\mathbf{x}(t''_j) - \mathbf{x}(t''_{j-1})\|_2 = \sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2 - \sum_{j=1}^{n'} \|\mathbf{x}(t_{k_j+1}) - \mathbf{x}(t_{k_j})\|_2 + \sum_{j=1}^{n'} \|\mathbf{x}(t'_j) - \mathbf{x}(t_{k_j})\|_2 +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n'} \|\mathbf{x}(t_{k_j+1}) - \mathbf{x}(t'_{k_j})\|_2.$$

Подставляя в (16.5), получим

$$\bigvee_a^b \mathbf{x}(t) - \sum_{k=1}^n \|\mathbf{x}(t_k) - \mathbf{x}(t_{k-1})\|_2 <$$

$$< \varepsilon + \sum_{j=1}^{n'} \underbrace{\|\mathbf{x}(t'_j) - \mathbf{x}(t_{k_j})\|_2}_{\frac{\varepsilon}{n'}} + \sum_{j=1}^{n'} \underbrace{\|\mathbf{x}(t'_{k_j}) - \mathbf{x}(t_{k_j})\|_2}_{\frac{\varepsilon}{n'}} < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \ \square$$

17. Кривая в пространстве, длина кривой и ее вычисление

Определение 17.1. *Множество $L \subset \mathbb{R}^m$ называется непрерывной кривой в $\mathbb{R}^m$, если существует непрерывная вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \le t \le b$ такая, что $\mathbf{r}([a,b]) = L$. В этом случае пишут $L:\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), a \le t \le b$ и говорят, что кривая L задана параметрически, t – это параметр.*

Замечание 1. Пусть $\varphi:\ [a,b] \overset{\text{на}}{\to} [a,b]$ взаимно однозначно и $\varphi(t)$ непрерывна и строго возрастает или строго убывает. В этом случае вектор-функция $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi(t))$, $t \in [a,b]$ определяет ту же самую кривую. Таким образом, $\mathbf{r}(\varphi([a,b])) = L$ и $\mathbf{r}(\varphi(t))$ – непрерывна, т.е. $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(\varphi(t))$ – это две различных параметризации кривой L. Если $\varphi(t)$ возрастает, то параметризации называют эквивалентными. Совокупность всех эквивалентных параметризаций называют *направлением.* Если $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}(\varphi(t))$ эквивалентные параметризации, то $\mathbf{r}(a) = \mathbf{A} = \mathbf{r}(\varphi(a))$, $\mathbf{r}(b) = \mathbf{r}(\varphi(b)) = \mathbf{B}$. $\mathbf{A}$ называется начальной точкой кривой L, $\mathbf{B}$ – конечной точкой. При изменении t от a к b точки $\mathbf{r}(t)$ двигаются по

кривой L от $\mathbf{A}$ к $\mathbf{B}$.
Замечание 2. Если функция $\varphi(t)$ строго убывает, то $\mathbf{r}(\varphi(a)) = \mathbf{B}$, $\mathbf{r}(\varphi(b)) = \mathbf{A}$ и при изменении t от a до b точка движется вдоль кривой L от точки $\mathbf{B}$ к точке $\mathbf{A}$. В этом случае говорят, что параметризация $\mathbf{r}(\varphi(t))$ задает на кривой L противоположное направление обхода.

Определение 17.2. *Пусть* $\{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), a \le t \le b\}$ *– параметрическая кривая. Если* $\bigvee\limits_a^b \mathbf{r}(t) < +\infty$*, то кривая L называется спрямляемой, а число* $\bigvee\limits_a^b \mathbf{r}(t)$ *называется длиной кривой L. Обозначается $|L|$.*

Замечание. Длина кривой L не зависит от параметризации.
Доказательство. Пусть $\tau = \varphi(t)$ – строго возрастающая непрерывная функция. $\varphi : [a,b] \overset{\text{на}}{\to} [a,b]$. Тогда каждому разбиению $a = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = b$ соответствует разбиение $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, где $\tau_j = \varphi(t_j)$. Тогда множество сумм вида $\sum\limits_{j=1}^n \|\mathbf{r}(\tau_j) - \mathbf{r}(\tau_{j-1})\|_2$ и вида $\sum\limits_{j=1}^n \|\mathbf{r}(\varphi(t_j) - \mathbf{r}(\varphi(t_{j-1})\|_2$ – совпадают, значит,

$$\sup \sum_{j=1}^n \|\mathbf{r}(\tau_j) - \mathbf{r}(\tau_{j-1})\|_2 = \sup \sum_{j=1}^n \|\mathbf{r}(\varphi(t_j) - \mathbf{r}(\varphi(t_{j-1})\|_2 \Rightarrow \bigvee_a^b \mathbf{r}(\tau) = \bigvee_a^b \mathbf{r}(\varphi(t)) \ \square$$

Определение 17.3. *Пусть* $L: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), a \le t \le b$ *– непрерывная кривая. Кривая L называется гладкой, если производные* $\frac{dr^{(j)}(t)}{dt}$ $(j = \overline{1,m})$ *непрерывны на* $[a,b]$*. Вектор* $\left(\frac{dr^{(j)}(t)}{dt}\right)_{j=1}^m$ *будем обозначать* $\mathbf{r}'(t)$.

Замечание. Если вектор-функция $\mathbf{r}'(t)$ непрерывна на отрезке, то она ограничена на отрезке $[a,b]$, т.е. существует постоянная $M > 0$, такая что $|\mathbf{r}'(t)| \le M$ для всех $t \in [a,b]$.

Теорема 17.1. *Пусть* $\mathbf{r}(t) : \ a \le t \le b$ *– непрерывная гладкая кривая. Тогда L – спрямляемая кривая и*

$$|L| = \int_a^b \|\mathbf{r}(t)\|_2 \, dt.$$

Доказательство. Покажем, что L – спрямляемая. Т.к. $\mathbf{r}(t)$ гладкая, то $\frac{dr^{(j)}(t)}{dt}$ непрерывна на $[a,b]$, следовательно, равномерно непрерывна на $[a,b]$, значит, $\frac{dr^{(j)}(t)}{dt}$ ограничена на $[a,b]$ и пусть $\left|\frac{dr^{(j)}(t)}{dt}\right| \le M$ на $[a,b]$. Тогда

$$\sum_{j=1}^n \|\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j-1})\|_2 = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |\mathbf{r}^{(j)}(t_k) - \mathbf{r}^{(j)}(t_{k-1})|^2\right)^{1/2} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \left|\frac{dr^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt}\right|^2 |\Delta t_k|^2\right)^{1/2} \le M \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m |\Delta t_k|^2\right) \le M \sum_{k=1}^n |\Delta t_k| \cdot \sqrt{m} = M(b-a)\sqrt{m} \Rightarrow$$

$$\sup \sum_{k=1}^n \|\mathbf{r}(t_j) - \mathbf{r}(t_{j-1})\|_2 < +\infty.$$

Таким образом, $\bigvee\limits_a^b \mathbf{r}(t) < +\infty$, значит, кривая спрямляема.
2) Покажем равенство

$$|L| = \int\limits_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt. \tag{17.1}$$

Во-первых, интеграл в (17.1) существует, т.к. $\mathbf{r}'(t)$ непрерывна на $[a,b]$. Отсюда $\|\mathbf{r}'(t)\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^m \left|\frac{dr^{(j)}(t)}{dt}\right|^2}$ – непрерывна, значит, интеграл от непрерывной функции существует. Следовательно, интеграл равен пределу интегральных сумм, т.е.

$$\int\limits_a^b \|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt = \lim_{d(\mathcal{T})\to 0} \sum_{k=1}^n \|\mathbf{r}'(\xi_k)\|_2 \cdot \Delta t_k,$$

где $\mathcal{T} = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$.

С другой стороны,

$$\bigvee_a^b \mathbf{r}(t) = \lim_{d(\mathcal{T})\to 0} \left(\sum_{k=1}^n \|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\|_2\right).$$

Поэтому надо доказать, что

$$\lim_{d(\mathcal{T})\to 0} \sum_{k=1}^n \left(\|\mathbf{r}'(\xi_k)\|_2 \Delta t_k - \|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\|_2\right) = 0. \tag{17.2}$$

Преобразуем выражение

$$\|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\|_2 = \left(\sum_{j=1}^m |r^{(j)}(t_k) - r^{(j)}(t_{k-1})|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^m \left|\frac{dr^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt}\right|^2 |\Delta t_k|^2\right)^{1/2} =$$

$$= |\Delta t_k| \left(\sum_{j=1}^m \left|\frac{dr^{(j)}(\xi_{k,j})}{dt}\right|^2\right)^{1/2} = |\Delta t_k| \|\mathbf{r}'(\xi_{k,j})\|_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\|\mathbf{r}'(\xi_k)\|_2 \Delta t_k - \|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\|_2\right| = |\Delta t_k| \cdot \left|\|\mathbf{r}'(\xi_k)\|_2 - \|\mathbf{r}'(\xi_{k,j})\|_2\right| \leq$$

по неравенству треугольника

$$\leq |\Delta t_k| \cdot \|\mathbf{r}'(\xi_k) - \mathbf{r}'(\xi_{k,j})\|_2. \tag{17.3}$$

По условию $\mathbf{r}'(t)$ непрерывна, значит, равномерно непрерывна, следовательно,

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\,\delta > 0,\;\forall\,t', t'',\;|t' - t''| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{r}'(t') - \mathbf{r}'(t'')\|_2 < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

И если разбиение $(t_k) = \mathcal{T}$ выбрать так, что $d(\mathcal{T}) < \delta$, то

$$|\xi_k - \xi_{k,j}| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{r}'(\xi_k) - \mathbf{r}'(\xi_{k,j})\|_2 < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{17.4}$$

Соединяя (17.3) и (17.4), получим

$$\|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|\Delta t_k|.$$

Отсюда имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(\|\mathbf{r}'(\xi_k)\|_2\Delta t_k - \|\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})\|_2)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}|\Delta t_k| \cdot |\|\mathbf{r}'(\xi_k)\|_2 - \|\mathbf{r}'(\xi_{k,j})\|_2| \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum|\Delta t_k| = \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon. \ \square$$

Следствие 1. *Если* $m = 2$, *то*

$$|L| = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

Следствие 2. *Если* $m = 2$ *и кривая* L *задана в явном виде* $L:\ y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, *то*

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + |y'(x)|^2}\,dx.$$

Доказательство. L запишем в параметрической форме: $L: \begin{array}{l} x = t \\ y = y(t) \end{array} \quad a \leq t \leq b.$

$$|L| = \int_a^b \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + |y'(t)|^2}\,dt. \ \square$$

18. Криволинейный интеграл I рода

Определение 18.1. *Пусть* $L:\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$ *непрерывная, спрямляемая кривая в* $\mathbb{R}^m$, *и пусть функция* $f(\mathbf{x})$ *определена на* L. *Выберем разбиение* $\mathcal{T} = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$ *отрезка* $[a, b]$, *и пусть* $M_k = \mathbf{r}(t_k) \in L$ *– точки на* L. *Пусть* L_k *часть кривой* L *между* M_{k-1} *и* M_k, *т.е.* $L_k:\ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t_{k-1} < t < t_k$. (M_k) *называется разбиением кривой* L, *совокупность* L_k *– тоже разбиение кривой* L. $d(L_k) = \max\limits_{k=\overline{1,n}}|L_k|$ *называется диаметром разбиения кривой* L.

Выбираем точку $\bar{\xi}_k \in L_k$ *и образуем суммы*

$$S(f, (L_k)) = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)|L_k|.$$

Они называются интегральными суммами. Если существует предел $\lim\limits_{d(L_k)\to 0} S(f, (L_k))$, *то этот предел называется криволинейным интегралом I рода и обозначается* $\int\limits_L f(\mathbf{x})\,dS$, *т.е.*

$$\int_L f(\mathbf{x})\,dS = \lim_{d(L_k)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)|L_k|.$$

Теорема 18.1. *1) Пусть* $L:\ \mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$, $a\le t\le b$ *непрерывная гладкая кривая.*
2) $\|\mathbf{r}'(t)\|_2\ne 0\ \forall\, t\in[a,b]$.
3) $f(\mathbf{x})$ *непрерывна на кривой* L.
Тогда 1) $\int\limits_L f(\mathbf{x})\,dS$ *существует.*

2) $\int\limits_L f(\mathbf{x})\,dS=\int\limits_a^b f(\mathbf{r}(t)\|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt$.

Доказательство. $\int\limits_a^b f(\mathbf{r}(t)\|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt$ существует, поэтому достаточно доказать равенство

$$\lim_{d(L_k)\to 0} S(f,(L_k))=\int\limits_a^b f(\mathbf{r}(t)\|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt.$$

Для этого рассмотрим разность

$$\left|S(f,(L_k))-\int\limits_a^b f(\mathbf{r}(t)\|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt\right|=\left|\sum_{k=1}^n f(\bar\xi_k)\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\mathbf{r}'(t)\|_2-\sum_{k=1}^n f(\mathbf{r}(t))\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} f(\mathbf{r}(t)\|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^n\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}|f(\bar\xi_k)-f(\mathbf{r}(t_k)|\|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt. \tag{18.1}$$

Т.к. $f(\mathbf{x}(t))$ непрерывна, то $f(\mathbf{x}(t))$ равномерно непрерывна, значит,

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\forall\, t',t'',\ |t'-t''|<\delta\Rightarrow|f(\mathbf{r}(t'))-f(\mathbf{r}(t''))|<\frac{\varepsilon}{|L|+1} \tag{18.2}$$

Так как по условию $\|\mathbf{r}'(t)\|_2>0\ \forall\, t$ то $\exists\,\alpha>0$, что $\|\mathbf{r}(t)\|_2\ge\alpha\Rightarrow$

$$|L|=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt\ge\alpha(t_k-t_{k-1})=\alpha\cdot\Delta t_k.\Rightarrow$$

$\Delta t_k\le\frac{|L_k|}{\alpha}$. Выберем разбиение (L_k) так, что $\frac{|L_k|}{\alpha}<\delta$. Тогда $\Delta t_k<\delta\Rightarrow$ в (18.1): $|f(\bar\xi_k)-f(\mathbf{r}(t_k))|<\frac{\varepsilon}{|L|+1}$. Подставляем в (18.1), имеем

$$\left|S(f,(L_k))-\int\limits_a^b f(\mathbf{r}(t))\|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt\right|\le\sum_{k=1}^n\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\varepsilon}{|L|+1}\cdot\|\mathbf{r}'(t)\|_2\,dt=|L|\cdot\frac{\varepsilon}{|L|+1}<\varepsilon.\ \square$$

Следствие. Если $L:\ \mathbf{r}(t)$, $a\le t\le b$, $L_1:\ \mathbf{r}(t)$, $a\le t\le c$, $L_2:\ \mathbf{r}(t)$, $c\le t\le b$, **то**

$$\int\limits_L f(\mathbf{x})\,dS=\int\limits_{L_1} f(\mathbf{x})\,dS+\int\limits_{L_2} f(\mathbf{x})\,dS.$$

Доказательство очевидно из теоремы 18.1.
Замечание 1. Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления кривой L.
Замечание 2. Если $m = 2$, то

$$\int\limits_L f(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, dS = \int\limits_a^b f(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \sqrt{|x'(t)|^2 + |y'(t)|^2}\, dt$$

Замечание 3. Если $m = 2$ и кривая задана в явном виде $L: \ y = y(x), a \le t \le b$, то

$$\Rightarrow \int\limits_L f(x, y)\, dS = \int\limits_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + |y'(x)|^2}\, dx$$

Замечание 4. О смысле дифференциала dS.
Обозначим $S(t)$ длину части кривой L от точки $\tau = 0$ до $\tau = t$, т.е.

$$S(t) = \int\limits_0^1 \|\mathbf{r}'(\tau)\|_2\, d\tau \Rightarrow S'(t) = \|\mathbf{r}'(t)\|_2 \Rightarrow dS = \|\mathbf{r}'(t)\|_2\, dt,$$

поэтому dS в обозначении $\int\limits_L f(\mathbf{x})\, dS$ надо рассматривать как дифференциал функции $S(t)$, т.е. $dS = S'(t)dt = \|\mathbf{r}'(t)\|_2\, dt$.

19. Механический смысл криволинейного интеграла I рода

Рассмотрим кривую $L: \ \mathbf{r}(t), \ a \le t \le b$ и пусть $\rho(t)$ – плотность кривой в точке $M = \mathbf{r}(t)$. Найдем массу кривой L. Выберем разбиение $\mathcal{T} = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b)$ отрезка $[a, b]$ и соответствующее разбиение $M_k = \mathbf{r}(t_k)$ кривой L. Пусть $L_k: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t_{k-1} \le t \le t_k$. Тогда масса

$$m(L_k) \simeq \rho(\bar{\xi_k}) \cdot |L_k| \Rightarrow m(L) = \sum_{k=1}^n m(L_k) \simeq \sum_{k=1}^n \rho(\bar{\xi_k}) \cdot |L_k|.$$

Перейдем к пределу при $d(L_k) \to 0$, получим

$$m(L) = \int\limits_L \rho(\mathbf{x})\, dS.$$

Таким образом, с механической точки зрения, криволинейный интеграл I рода есть масса кривой.

20. Криволинейный интеграл II рода. Определение и вычисление.

Определение 20.1. *Пусть $L: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ – непрерывная кривая, $f(\mathbf{x})$ определена на кривой L. Выберем разбиение $\mathcal{T} = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b)$ отрезка $[a, b]$. $M_k = \mathbf{x}(t_k)$,*

L_k : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t_{k-1} \le t \le t_k$, $\bar{\xi}_k \in L_k$. При каждом $j \in \overline{1,m}$ образуем интегральную сумму

$$S^{(j)}(f,(L_k)) = \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})).$$

Если $\exists \lim\limits_{d(L_k)\to 0} S^{(j)}(f,(L_k))$, то он называется криволинейным интегралом II рода и обозначается $\int\limits_L f(\mathbf{x})\,dx^{(j)}$. Таким образом,

$$\int\limits_L f(\mathbf{x})\,dx^{(j)} = \lim_{d(L_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})).$$

Замечание. Криволинейный интеграл II рода меняет знак на противоположный при изменении ориентации кривой, т.к. в этом случае нумерация точек M_k меняется на противоположную.

Теорема 20.1. *Пусть 1) L : $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ $a \le t \le b$ – гладкая кривая.*
2) $\|\mathbf{x}'(t)\|_2 > 0$ $\forall\, t \in [a,b]$.
3) $f(\mathbf{x})$ непрерывна на L.
Тогда 1) криволинейный интеграл $\int\limits_L f(\mathbf{x})\,dx^{(j)}$ существует.
2)

$$\int\limits_L f(\mathbf{x})\,dx^{(j)} = \int\limits_a^b f(\mathbf{x}(t))\frac{dx^{(j)}(t)}{dt}\,dt. \tag{20.1}$$

Доказательство. Интеграл в правой части (20.1) существует, значит, надо доказать, что

$$\lim_{d(L_k\to 0)} \sum_{k=1}^{n} f(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})) = \int\limits_a^b f(\mathbf{x}(t))\frac{dx^{(j)}(t)}{dt}\,dt. \tag{20.2}$$

Преобразуем интегральную сумму в левой части (20.2). Обозначим $\bar{\xi}_k = \mathbf{x}(\tau_k)$, $t_{k-1} \le \tau_k \le t_k$. По теореме Лагранжа:

$$x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1}) = \frac{dx^{(j)}(\tau_{k,j})}{dt}\cdot(t_k - t_{k-1})$$

и запишем левую часть в (20.2) в виде

$$\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(\tau_k))\left(\frac{dx^{(j)}(\tau_k)}{dt} - \frac{dx^{(j)}(\tau_k)}{dt} + \frac{dx^{(j)}(\tau_{k,j})}{dt}\right)\Delta t_k = \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(\tau_k))\frac{dx^{(j)}(\tau_k)}{dt}\cdot\Delta t_k +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(\tau_k))\cdot\left(\frac{dx^{(j)}(\tau_{k,j})}{dt} - \frac{dx^{(j)}(\tau_k)}{dt}\right)\Delta t_k. \tag{20.3}$$

Снова получаем как в теореме 19.1 $\Delta t_k \le \frac{|L_k|}{\alpha}$, $\alpha > 0$. Обозначим $M = \sup\limits_{t\in[a,b]} |f(\mathbf{x}(t))|$. Т.к. $\frac{dx^{(j)}(t)}{dt}$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, то

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\, t', t'',\ |t' - t''| \le \delta \Rightarrow \left|\frac{dx^{(j)}(t')}{dt} - \frac{dx^{(j)}(t'')}{dt}\right| < \varepsilon.$$

Выбираем разбиение (L_k) так, чтобы $|L_k| < \alpha \cdot \delta$. Тогда

$$|\Delta t_k| \le \delta \Rightarrow \left| \frac{dx^{(j)}(\tau_{k,j})}{dt} - \frac{dx^{(j)}(\tau_k)}{dt} \right| \le \varepsilon,$$

и, кроме того, $|f(\mathbf{x}(\tau_k))| \le M$. Подставляя в (20.3), получим

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(\tau_k)) \left(\frac{dx^{(j)}(\tau_{k,j})}{dt} - \frac{dx^{(j)}(\tau_k)}{dt} \right) \right| \Delta t_k \le M\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta t_k = M\varepsilon \cdot (b-a).$$

Отсюда имеем

$$\lim_{d(L_k)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\mathbf{x}(\tau_k)) \left(\frac{dx^{(j)}(\tau_{k,j})}{dt} - \frac{dx^{(j)}(\tau_k)}{dt} \right) \Delta t_k = 0.$$

Переходя в (20.3) к пределу при $d(L_k) \to 0$, получим требуемое равенство (20.2). $\square$

Теорема 20.2. *Пусть $L: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $a \le t \le b$ непрерывная кривая, $a < c < b$.
Пусть $L^{(1)}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $a \le t \le c$ непрерывная гладкая кривая, $||\mathbf{x}'(t)|| > 0$ при $t \in [a, c]$.
Пусть $L^{(2)}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $c \le t \le b$ непрерывная гладкая кривая, $||\mathbf{x}'(t)|| > 0$ при $t \in [c, b]$, и пусть $f^{(j)}(\mathbf{x})$ непрерывна на кривой L. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_{L} f^{(j)}(\mathbf{x})\, dx^{(j)} = \int\limits_{L^{(1)}} f^{(j)}(\mathbf{x})\, dx^{(j)} + \int\limits_{L^{(2)}} f^{(j)}(\mathbf{x})\, dx^{(j)}.$$

Доказательство. Выберем разбиение $(t_k)_{k=0}^{N}$ отрезка $[a, b]$ и пусть $t_{n-1} < c < t_n$. Тогда

$$S_j(f^{(j)}, (M_k)_{k=0}^{N}) = \sum_{k=1}^{n-1} f^{(j)}(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})) + f^{(j)}(\bar{\xi}_n)(x^{(j)}(t_n) - x^{(j)}(t_{n-1})) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} f^{(j)}(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} f^{(j)}(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})) + f^{(j)}(\bar{\xi}_n^{(1)})(x^{(j)}(c) - x^{(j)}(t_{n-1})) +$$

$$+ f^{(j)}(\bar{\xi}_n^{(2)})(x^{(j)}(t_n) - x^{(j)}(c)) + \sum_{k=n+1}^{N} f^{(j)}(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})) +$$

$$+ f^{(j)}(\bar{\xi}_n)(x^{(j)}(t_n) - x^{(j)}(c)) + f^{(j)}(\bar{\xi}_n)(x^{(j)}(c) - x^{(j)}(t_{n-1})) -$$
$$- f^{(j)}(\bar{\xi}_n^{(2)})(x^{(j)}(t_n) - x^{(j)}(c)) - f^{(j)}(\bar{\xi}_n^{(1)})(x^{(j)}(c) - x^{(j)}(t_{n-1})). \qquad (20.4)$$

Точка $\tilde{M}_n = \mathbf{x}(c) \in L_n$ делит кривую L_n на две кривые
$L_n^{(1)}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t_{n-1} \le t \le c$,
$L_n^{(2)}: \ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $c \le t \le t_n$,

при этом $|L_n| = |L_n^{(1)}| + |L_n^{(2)}|$ по определению длины как вариации. Поэтому, если $d(L_k)_{k=0}^N \to 0$, то $d((L_k)_{k=1}^{n-1}, L_n^{(1)}) \to 0$ и $d((L_k)_{k=n+1}^N, L_n^{(2)}) \to 0$. Таким образом,

$$\lim_{d(L_k)\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n-1} f^{(j)}(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})) + f^{(j)}(\bar{\xi}_n^{(1)})(x^{(j)}(c) - x^{(j)}(t_{k-1}))\right) = \int\limits_{L^{(1)}} f^{(j)}(\mathbf{x})\,dx^{(j)},$$

$$\lim_{d(L_k)\to 0}\left(\sum_{k=n+1}^{N} f^{(j)}(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(t_{k-1})) + f^{(j)}(\bar{\xi}_n^{(2)})(x^{(j)}(t_n) - x^{(j)}(c))\right) = \int\limits_{L^{(2)}} f^{(j)}(\mathbf{x})\,dx^{(j)},$$

$$\lim_{d(L_k)\to 0}(f^{(j)}(\bar{\xi}_k)(x^{(j)}(t_k) - x^{(j)}(c)) - f^{(j)}(\bar{\xi}_n^{(2)})(x^{(j)}(t_n) - x^{(j)}(c)) = 0$$

$$\lim_{d(L_k)\to 0}(f^{(j)}(\bar{\xi}_n)(x^{(j)}(c) - x^{(j)}(t_{n-1})) - f^{(j)}(\bar{\xi}_n^{(1)})(x^{(j)}(c) - x^{(j)}(t_{n-1})) = 0.$$

Переходя в равенстве (20.4) к пределу при $d(L_k) \to 0$, получим

$$\lim_{d(L_k)\to 0} S_j(f^{(j)}, (M_k)_{k=0}^N) = \int\limits_{L^{(1)}} f^{(j)}(\mathbf{x})\,dx^{(j)} + \int\limits_{L^{(2)}} f^{(j)}(\mathbf{x})\,dx^{(j)}. \ \square$$

Определение 20.2. *Непрерывная кривая $L : \mathbf{x} = \mathbf{x}(t), a \le t \le b$ называется кусочно гладкой, если существует разбиение $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = b$ отрезка $[a, b]$ такое, что кривые $L_k :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ c_{k-1} \le t \le c_k$ являются гладкими при всех $k = \overline{1, N}$.*

Теорема 20.3. *Если $L :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t),\ a \le t \le b$ непрерывная кусочно гладкая кривая с условием $\|\mathbf{x}'(t)\|_2 > 0\ \forall\, t \in [c_{k-1}, c_k]$ и $f^{(j)}(\mathbf{x})$ непрерывны на кривой L, то справедливо равенство*

$$\int\limits_{L} f^{(j)}(\mathbf{x})\,dx^{(j)} = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{L_k} f^{(j)}(\mathbf{x})\,dx^{(j)}.$$

Доказательство аналогично теореме 20.2. $\square$

Определение 20.3. *Сумму $\sum_{j=1}^n \int\limits_L f^{(j)}(\mathbf{x})\,dx^{(j)}$ называют криволинейным интегралом II рода общего вида, его записываем в виде*

$$\int\limits_{L} \sum_{j=1}^{n} f^{(j)}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_{L} f^{(1)}(\mathbf{x})\,dx^{(1)} + \int\limits_{L} f^{(2)}(\mathbf{x})\,dx^{(2)} + \ldots + \int\limits_{L} f^{(n)}(\mathbf{x})\,dx^{(n)}.$$

21. Физический смысл криволинейного интеграла II рода

Рассмотрим движение точки M на плоскости вдоль кривой $L :\ \begin{matrix} x = x(t) \\ y = y(t) \end{matrix}\ \ a \le t \le b$ под действием силы $\mathbf{F} = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$. где $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – единичные векторы на осях OX и OY соответственно. Вычислим работу $\mathcal{A}$ силы $\mathbf{F}$ по перемещению точки из A в B вдоль L. Разобьем $[a, b]$ на элементарные части $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Обозначим $M_k =$

$(x(t_k), y(t_k)) \in L$, L_k – часть кривой L между M_{k-1} и M_k, $\mathcal{A}_k$ – работу по перемещению точки из M_{k-1} в M_k. Если длина $|L_k|$ мала, то L_k примерно совпадает с вектором (M_{k-1}, M_k) и работа $\mathcal{A}_k$ приблизительно равна работе по перемещению вдоль вектора (M_{k-1}, M_k). Вектор (M_{k-1}, M_k) имеет координаты $(x_k - x_{k-1}, y_k - y_{k-1})$, значит,

$$\mathcal{A}_k \cong ((M_{k-1}, M_k), \mathbf{F}) = ((M_{k-1}, M_k), F_1(\xi_k, \eta_k)\mathbf{i} + F_2(\xi_k, \eta_k)\mathbf{j}) =$$

$$F_1(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) + F_2(\xi_k, \eta_k) \cdot (y_k - y_{k-1}).$$

$$\mathcal{A} \cong \sum \mathcal{A}_k = \sum_{k=1}^{n} F_1(\xi_k, \eta_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) + F_2(\xi_k, \eta_k) \cdot (y_k - y_{k-1}).$$

Переходя к пределу при $\max(|L_k|) \to 0$ получаем

$$\mathcal{A} = \lim \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_k = \int_L (\mathbf{F}(\mathbf{x}), d\mathbf{x}).$$

Таким образом, криволинейный интеграл II рода – это работа силы по перемещению точки вдоль кривой.

22. Формула Грина

Определение 22.1. *Множество $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^m$ называется связным,если две любые его точки можно соединить кривой, целиком лежащей в $\mathfrak{D}$. Ограниченное открытое связное множество называют областью. Замыкание области называют замкнутой областью.*

Теорема 22.1. *Пусть 1) замкнутая область $\mathfrak{D} \subset \mathbb{R}^2$ ограничена гладкой кривой L,*
2) пусть L удовлетворяет условию: любая кривая, параллельная осям координат, пересекает L не более, чем в 2-х точках;
3) пусть $P(x, y), Q(x, y)$ непрерывны в $\mathfrak{D}$ и имеют непрерывные частные производные. Тогда справедливо равенство

$$\int_{L^+} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

где L^+ – замкнутая кривая с обходом против часовой стрелки.

Доказательство. 1) Вычислим интеграл

$$\iint_{\mathfrak{D}} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dxdy. \tag{22.1}$$

Так как вертикальная прямая $x = x_0$ пересекает кривую L не более чем в двух точках, то L есть объединение двух кривых

$$L_1^+ : \ y = \varphi(x), L_2^+ : \ y = \psi(x), a \le x \le b$$

причем $\varphi(x) \le \psi(x)$. Тогда $L^+ = L_1^+ \bigsqcup L_2^-$. (См. Рис. 1)

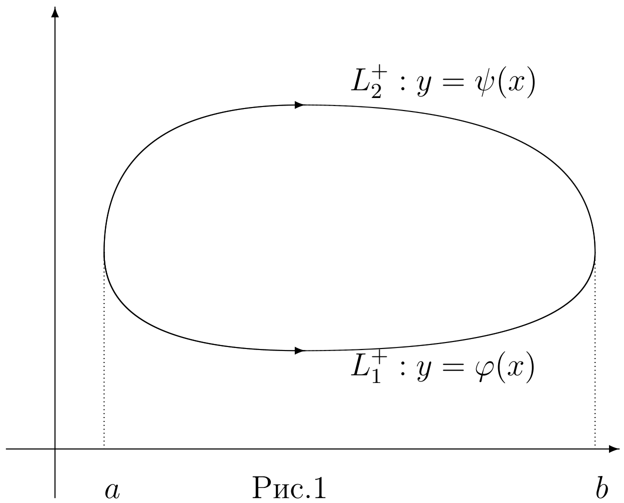

Рис.1

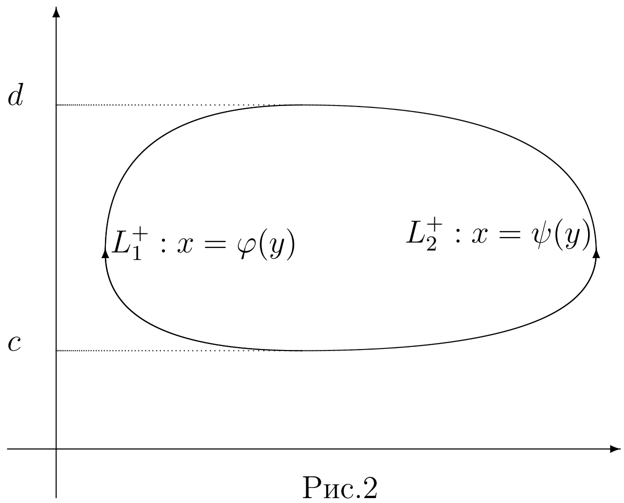

Рис.2

Сведем интеграл (22.1) к повторному:

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\, dy =$$

по теореме Ньютона-Лейбница

$$= \int\limits_a^b P(x,\psi(x))\, dx - \int\limits_a^b Q(x,\varphi(x))\, dx = \int\limits_{L_2^-} P(x,y)\, dx - \int\limits_{L_1^+} Q(x,y)\, dx = -\int\limits_{L^+} P(x,y)\, dx. \tag{22.2}$$

2) Вычислим интеграл

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\, dxdy \tag{22.3}$$

Так как горизонтальная прямая $y = y_0$ пересекает кривую L не более чем в двух точках, то L есть объединение двух кривых

$$L_1^+ :\ x = \varphi_1(y), L_2^+ :\ x = \psi_1(y), c \leq y \leq d$$

причем $\varphi_1(y) \leq \psi_1(y)$. Тогда $L^+ = L_1^- \bigsqcup L_2^+$. (См. Рис. 2) Сведем интеграл (22.3) к повторному:

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\, dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\psi_1(y)} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\, dx = \int\limits_c^d Q(\psi_1(y),y)\, dy - \int\limits_c^d Q(\varphi_1(y),y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{L_2^+} Q(x,y)\,dy + \int\limits_{L_1^-} Q(x,y)\,dy = \int\limits_{L^+} Q(x,y)\,dy. \qquad (22.4)$$

Вычитая из равенства 22.4 равенство 22.2 получим

$$\int\limits_{L^+} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy. \ \square$$

23. Замена переменной в двойном интеграле

Постановка задачи: В интеграле $\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)\,dxdy$ хотим перейти к новым переменным (u,v) по формулам $x = x(u,v), y = y(u,v)$. Как это сделать?

Теорема 23.1. *Пусть Ω – замкнутая область в плоскости переменных (u,v), $\Gamma = \partial\Omega$ – ее граница, $\mathfrak{D}$ – замкнутая область в плоскости переменных (x,y), $L = \partial\mathfrak{D}$ – ее граница. Пусть взаимно-однозначное отображение $\Phi: \ \Omega \overset{на}{\to} \mathfrak{D}$ задано формулами: $\Phi: \ x = x(u,v), \ y = y(u,v)$, т.е. $\mathfrak{D} = \Phi(\Omega)$ и пусть $L = \Phi(\Gamma)$ – граница области $\mathfrak{D}$. Пусть $f(x,y)$ непрерывна в $\mathfrak{D}$, функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ имеют непрерывные частные производные 2-го порядка в Ω и пусть определитель*

$$\frac{D(x.y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

всюду в Ω. Тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega} f(x(u,v),y(u,v)) \left|\frac{D(x.y)}{D(u,v)}\right| dudv.$$

Доказательство. Нарисуем области в плоскостях переменных u, v (Рис3.)и x, y (Рис.4). Доказательство проведем для случая, когда множества Ω и $\mathfrak{D}$. Пусть

$$\Gamma: \ u = u(t), v = v(t), \ \alpha \le t \le \beta$$

– параметрическое задание кривой Γ с направлением обхода против часовой стрелки. Тогда кривая L задается уравнением

$$L: \ x = x(u(t), v(t)), \ y = y(u(t), v(t)), \ \alpha \le t \le \beta. \qquad (23.1)$$

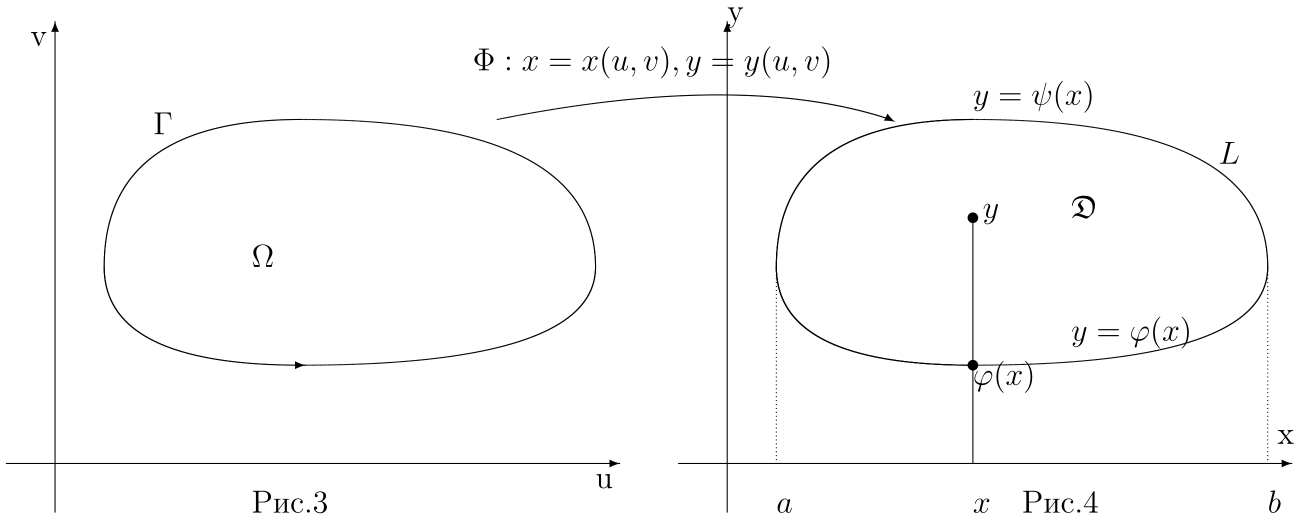

Рис.3 Рис.4

Пусть нижняя часть кривой L задана уравнением $y = \varphi(x)$, верхняя часть –уравнением $y = \psi(x)$, $a \leq x \leq b$. Выберем при фиксированном x число y так, чтобы $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$ и рассмотрим интеграл $\int\limits_{\varphi(x)}^{y} f(x,\tau)\,d\tau = P(x,y)$. Дифференцируя по верхнему пределу y получаем $f(x,y) = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}$. Будем вычислять интеграл

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\mathfrak{D}} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dxdy.$$

Воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_{L} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy$$

получим

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\mathfrak{D}} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dxdy = -\int\limits_{L} P\,dx.$$

Будем считать, что кривая Γ обходится в положительном направлении. Мы не знаем, в каком направлении обходим кривую L. Поэтому обозначаем через ε число

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если } L \text{ обходим в положительном направлении.} \\ -1, & \text{если } L \text{ обходим в отрицательном направлении.} \end{cases}$$

Так как кривая L задана уравнениями 23.1, то по правилу вычисления интеграла II-го рода

$$\varepsilon\int\limits_{L} P(x,y)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(x(u(t),v(t)), y(u(t),v(t))) \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}\right)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} P \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}\, dt}_{=du} + \int\limits_{\alpha}^{\beta} P \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}\, dt}_{=dv} = \int\limits_{\Gamma} P \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\, du + \int\limits_{\Gamma} P \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\, dv =$$

Воспользуемся формулой Грина $P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$.

$$= \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\right)\right) dudv = \left| \begin{array}{l} P = P(x,y), \\ x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{array} \right| =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}\right) dudv =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}\right) dudv = \iint\limits_{\Omega} f(x(u,v), y(u,v)) \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} dudv$$

$$= -\iint\limits_{\Omega} f(x(u,v), y(u,v)) \frac{\mathfrak{D}(x,y)}{\mathfrak{D}(u,v)}\, dudv \Rightarrow$$

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)\, dxdy = \varepsilon \iint\limits_{\Omega} f(x(u,v), y(u,v)) \frac{\mathfrak{D}(x,y)}{\mathfrak{D}(u,v)}\, dudv. \tag{23.2}$$

Полагая $f \equiv 1$, получаем

$$\mu\mathfrak{D} = \varepsilon \cdot \iint\limits_{\Omega} \frac{\mathfrak{D}(x,y)}{\mathfrak{D}(u,v)}\, dudv. \tag{23.3}$$

Но функция $\frac{\mathfrak{D}(x,y)}{\mathfrak{D}(u,v)}$ непрерывна в замкнутой ограниченной области Ω и не равна 0, следовательно, $\frac{\mathfrak{D}(x,y)}{\mathfrak{D}(u,v)}$ сохраняет знак во всей области Ω, значит, $\varepsilon = \operatorname{sign} \frac{\mathfrak{D}(x,y)}{\mathfrak{D}(u,v)} \Rightarrow \varepsilon \cdot \frac{\mathfrak{D}(x,y)}{\mathfrak{D}(u,v)} = \left|\frac{\mathfrak{D}(x,y)}{\mathfrak{D}(u,v)}\right|$. $\square$

24. Переход к полярным координатам

Определение 24.1. *Пусть $M(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – расстояние от точки M до 0 и пусть φ есть угол между осью OX^+ и вектором $\overrightarrow{OM}$. Тогда числа (r, φ) называются полярными координатами точки M, r – полярный радиус, φ – полярный угол.*

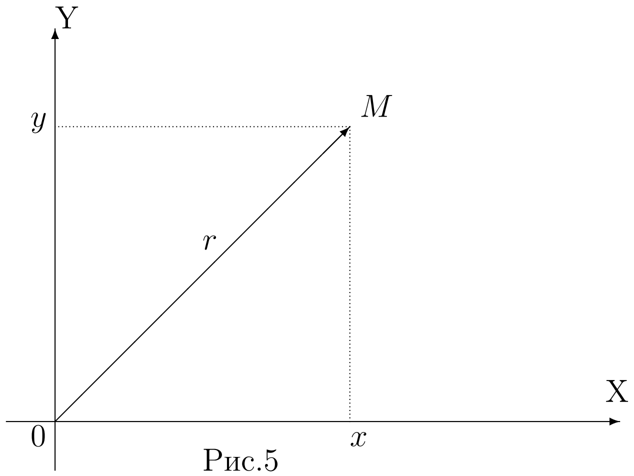

Рис.5

Предложение 24.1. $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$.

Доказательство. Очевидно из треугольника OMx. □

Пример.
Пусть на плоскости XOY дана область $\mathfrak{D}: \ \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 \le r = r(\varphi)$.

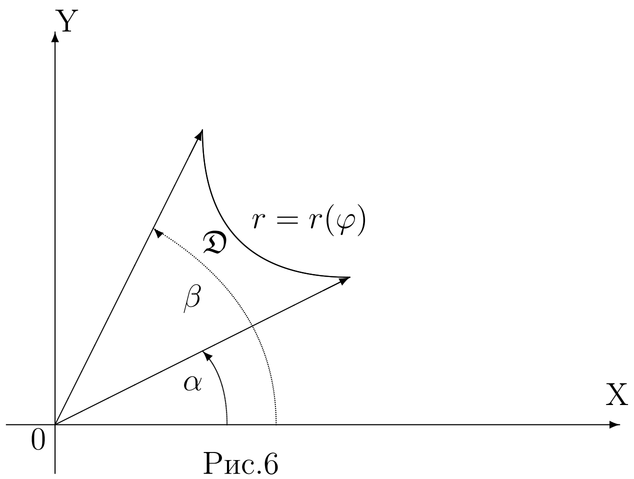

Рис.6

Требуется вычислить интеграл от функции $f(x, y)$ по этой области. Делаем полярную замену переменных. Получаем

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{\Omega} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \underbrace{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{vmatrix}}_{=r} drd\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{0}^{r(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$