

# Конвекция в слое жидкости: структуры и пространственный беспорядок

## Содержание

|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| Введение                             | 3  |
| Физические механизмы неустойчивости  | 6  |
| Линейная устойчивость слоя жидкости  | 9  |
| Правило отбора конвективных структур | 15 |
| Эксперимент                          | 19 |
| Приложение 1                         | 23 |
| Приложение 2                         | 26 |
| Литература                           | 27 |

# 1. Введение

Конвекция в горизонтальном слое жидкости, подогреваемом снизу, является одним из ключевых экспериментов, в котором наиболее ярко проявляется феномен самоорганизации структур в неравновесных средах [1]. Экспериментальное изучение термоконвекции началось в начале века с опытов Бенара, в которых он наблюдал возникновение регулярных пространственно периодических ячеек в однородно подогреваемом слое спермацета - жидкости, заполняющей головные полости кашалота. Правильные шестиугольные ячейки, заполняющие всю поверхность подогреваемого слоя жидкости, поражают воображение любого исследователя, задумывающегося над тем, как из случайных начальных возмущений формируется регулярная структура в протяженной системе.

Одной из первых теоретических работ по изучению пространственной периодичности, возникающей при конвекции в слое, подогреваемом снизу была статья Рэля, опубликованная в 1916 году. Он объяснил появление ячеек неустойчивостью, причина которой - действие архимедовой силы на нагретую, и значит более легкую жидкость, находящуюся снизу у подогреваемой поверхности. Рэля рассчитал пространственный период наиболее неустойчивых возмущении, который оказался близок к периоду структуры, наблюдавшейся в экспериментах Бенара. Как выяснилось в последствии [2], это совпадение оказалось в определенной мере случайным, а за неустойчивость в опытах Бенара были ответственны не силы плавучести, а силы поверхностного натяжения.

Для конвективных структур, наблюдающихся в природе (конвективные ячейки обнаружены на Солнце, в мантии Земли, в атмосфере и океане) и возникающих в различных

технологических процессах, соотношение между термокапиллярными и термогравитационными силами может изменяться в очень широких пределах. Например, в случае конвекции в океане, когда характерный масштаб движения составляет метры или десятки метров, капиллярными эффектами можно пренебречь. В некоторых случаях можно заведомо пренебречь влиянием силы тяжести. Так в последнее время выращивание кристаллов из расплава предполагалось проводить в условиях невесомости, на космических аппаратах, находящихся на околоземной орбите. В этих условиях сила тяжести отсутствует и конвекция определяется исключительно поверхностным натяжением.

Какая же структура наиболее предпочтительна для тех или иных условий? Отметим, что даже корректный расчет наиболее неустойчивого масштаба возмущения  $k_0$  не гарантирует еще возможность правильного предсказания структуры конвективных ячеек в протяженном горизонтальном слое. Под пространственно протяженным слоем понимается такая система, характерные горизонтальные размеры которой значительно больше, чем длина волны неустойчивых возмущений. Очевидно, что в кюветах, размеры которых сравнимы с длиной волны неустойчивых возмущений, конвективные движения могут быть представлены как суперпозиция резонаторных мод. В пространственно протяженных системах, если спектр волновых чисел достаточно плотный, может, в принципе, как результат нелинейного взаимодействия возникнуть любая суперпозиция мод с волновыми векторами  $\bar{k}$ ,  $|\bar{k}| = k_0$ . Из таких мод с одинаковыми по модулю волновыми векторами  $\bar{k}$  можно получить роликовую конвекцию (одна мода), квадратные ячейки (две моды с взаимно перпендикулярными волновыми векторами), шестигранные конвективные ячейки (три моды с волновыми векторами, развернутыми под углом  $120^\circ$ ). Эти моды

могут, вообще говоря, образовывать и непериодическую в пространстве структуру, обладающую, тем не менее, азимутальной симметрией. По аналогии с физикой твердого тела гидродинамические поля, не имеющие трансляционной симметрии, но обладающие поворотной симметрией названы квазикристаллами. Квазикристаллы получаются в результате суперпозиции  $n$  мод ( $n > 4$ ), если угол между волновыми векторами соседних мод составляет  $2\pi/n$  [3].

В предлагаемой лабораторной работе, динамика конвективных структур изучается на основе ряда качественных экспериментов. Варьируя параметры, можно исследовать как термогравитационную конвекцию, когда определяющей является сила тяжести (по современной терминологии это конвекция Рэля - Бенара), так и термокапиллярную конвекцию, которую называют конвекцией Бенара - Марангони. В ходе работы предусмотрена возможность введения контролируемых начальных возмущений. Это позволяет изучать, например, устойчивость конвективных структур с наперед заданными свойствами симметрии.

Порядок положения материала в описании к лабораторной работе следующий. Сначала, на качественном уровне, будут рассмотрены механизмы термогравитационной и термокапиллярной неустойчивостей и введены критические числа, описывающие эти виды конвекции (п.2). Затем, в п.3 используя уравнения гидродинамики, будет решена задача о линейной неустойчивости горизонтального слоя, подогреваемого снизу. В п.4 будет сформулировано правило, определяющее наиболее предпочтительные структуры в термоконвекции. В п.5 описывается установка и задание по экспериментальному изучению конвекции. В приложениях 1 и 2 приводятся физические параметры жидкостей, с которыми предполагается проводить эксперименты и обсуждается причина возникновения контраста изображения при визуализации

конвективных течений пассивными примесями.

## 2. Физические механизмы неустойчивости

Представим, что температура верхней и температура нижней границ слоя поддерживаются постоянными. Тогда в отсутствие конвекции в стационарном случае реализуется режим теплопроводности, и температура зависит линейно от вертикальной координаты  $z$ :

$$T = T_1 + (T_2 - T_1)z/d. \quad (1)$$

Рассмотрим элемент жидкости (см. рис.1а), находящийся у дна. Если в результате флуктуации он сместится вверх, то вокруг него будет менее теплая и, следовательно, более плотная жидкость. Появится пропорциональная разности плотностей выталкивающая сила, которая обуславливает движение элемента жидкости к верхней границе слоя. Аналогично, элемент жидкости вблизи верхней границы, смещенные вниз, окажется окруженным более теплым слоем жидкости и начнет тонуть. Когда же возникнет конвекция (очевидно, что чем больше вязкость, тем медленнее движется элемент жидкости, а чем больше теплопроводность, тем быстрее он остывает. Понятно поэтому, что конвекция возникает, когда эффекты плавучести доминируют над вязким трением и температуропроводностью. Оценим влияние всех этих факторов. Представим, что элемент жидкости имеет характерный размер  $L$ , тогда силу Архимеда действующую на этот элемент жидкости можно оценить как:  $F_A \sim \beta T' \rho L^3 g$ , где  $g$  - ускорение свободного падения,  $\beta$  - температурный коэффициент объемного расширения.  $T'$  - разность температур элемента и окружающей жидкости. Из условия равенства силы Архимеда силе Стокса  $F_s$  (силе вязкого трения, действующей на элемент со стороны окружающей жидкости) можно найти скорость

всплытия  $V$ :  $F_s \sim \rho \nu L V$ ,  $V \sim \beta T' \rho L^2 g$  ( $\nu$  - кинематическая вязкость жидкости). Имея скорость всплытия, можно оценить время всплытия  $\tau$ :  $\tau \sim d/V \sim \nu d / (\beta T' \rho L^2 g)$ . Очевидно, что для возникновения конвекции необходимо, чтобы время всплытия  $\tau$  было меньше или много меньше времени выравнивания температуры  $\tau_T$  между выделенным элементом и всей жидкостью. Время  $\tau_T$  может быть оценено из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -k \Delta T'$$

следующим образом:  $\tau_T \sim L^2/k$ , где  $k$  - это температуропроводность среды. Условие  $\tau_T \gg \tau$  может быть записано как  $\nu d / (\beta T' \rho L^2 g) \ll L^2/k$  или:

$$\frac{\beta T' \rho L^4 g}{\nu k d} \gg 1. \quad (2)$$

Чтобы оценить эту величину, используя параметры слоя подогреваемого снизу, примем, что пульсации температуры  $T' \sim T_1 - T_2$ , а характерный размер возмущений  $L$  порядка толщины слоя жидкости  $d$ . Тогда безразмерный параметр, который может быть получен из (2) для характеристики термогравитационной конвекции, называется числом Рэлея  $Ra$ :

$$Ra = \frac{g \beta (T_1 - T_2) d^3}{\nu k}. \quad (3)$$

Чем выше разность температур, изменение плотности с температурой и чем меньше вязкость и температуропроводность, тем интенсивнее конвекция.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в том случае, когда конвекция обусловлена поверхностным натяжением, а сила тяжести отсутствует. Для большинства жидкостей коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  уменьшается с ростом температуры:

$$\sigma = \sigma_0(T_0) - \alpha(T - T_0). \quad (4)$$

Если на поверхности слоя жидкости в результате флуктуации возникнет пятно с большей температурой и, следовательно, с меньшим поверхностным натяжением, то оно из-за действия капиллярных сил будет растекаться. Из-за действия вязкости растекающееся пятно на поверхности будет приводить в движение жидкость внутри слоя и, в частности, к подъему нагретой жидкости (см. рис.1б). Подчеркнем, что такой подъем возможен, если только есть взаимодействие между слоями жидкости. Поэтому для возникновения термокапиллярной конвекции наличие отличной от нуля вязкости жидкости принципиально.

Если более теплая жидкость, находящаяся у дна поднимается быстрее, чем успеет остыть из-за конечной теплопроводности, то флуктуации не затухнут и возникнет конвекция. Оценить время подъема элемента жидкости можно точно так же, как и в случае термогравитационной конвекции. Единственное отличие в том, что силу, обусловленную зависимостью поверхностного натяжения от температуры, необходимо оценить следующим образом:  $F_\sigma \sim \alpha T' L$ . Тогда безразмерное число, которое введено для характеристики термокапиллярной конвекции и названо числом Марангони может быть записано в виде:

$$Ma = \frac{\alpha(T_1 - T_2)d}{\rho k \nu}. \quad (5)$$

Оценим теперь, когда в конвекции доминируют эффекты, связанные с зависимостью поверхностного натяжения от температуры, а когда - от силы плавучести. Для этого подсчитаем отношение  $Ma/Ra$ :

$$\frac{Ma}{Ra} = \frac{d}{\rho \beta g d^2}. \quad (6)$$

Очевидно, что если  $g \rightarrow 0$  (это соответствует экспериментам, которые проводятся на космическом корабле в условиях невесомости), или  $d \rightarrow 0$  (это соответствует экспериментам с очень тонкими слоями жидкости),

то капиллярные эффекты преобладают. Важно отметить, что условие (6) не включает ни вязкость, ни теплопроводность жидкости и, изменяя лишь глубину слоя, можно перейти от одного типа конвекции к другому.

### 3. Линейная устойчивость слоя жидкости

При описании конвективной неустойчивости в горизонтальном слое будем исходить из уравнений Навье-Стокса, переноса тепла, непрерывности и граничных условий, учитывающих капиллярные эффекты. В приближении Буссинеска эти уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (\bar{V} \nabla) \bar{V} = -\frac{1}{\rho} p' + \nu \Delta \bar{V} + g \beta T' \bar{\gamma}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{V} \nabla T' = k \Delta T', \quad (8)$$

$$\operatorname{div} \bar{V} = 0. \quad (9)$$

Здесь  $\bar{V}$  - поле скорости.  $T'$  - пульсации на фоне линейного профиля температуры, описываемого формулой (1), а  $p'$  - отклонение давления от гидростатического  $p_0$ ,  $\nabla p_0 = \rho_0 \bar{\gamma} g$  ( $\bar{\gamma}$  - единичный вектор, направленный вертикально вверх).

Приближение Буссинеска означает здесь, что поле скорости, отвечающее уравнению (7) и поле температуры описываемое уравнением (8), связаны лишь из-за того, что принимается во внимание зависимость плотности от температуры, приводящие к возникновению силы Архимеда. Именно поэтому возникают силы плавучести, которые описываются последним членом в правой части уравнения (7). Известно, что вязкость  $\nu$  и температуропроводность  $k$  зависят от температуры  $T$ , к тому же плотность жидкости зависит не только от температуры, но и от давления, однако всеми этими зависимостями при написании

системы уравнений, описывающей движение в слое, подогреваемом снизу, в приближении, которое называется приближением Буссинеска, пренебрегают.

Сформулируем теперь граничные условия. Нижняя граница слоя предполагается твердой, поэтому при  $z = 0$  для скорости вязкой жидкости имеем:

$$\bar{V}(x, y, 0) = 0. \quad (10)$$

Для температуры на нижней границе условия могут быть записаны в следующем виде:

$$a_b T' = k \frac{\partial T'}{\partial z}, \quad (11)$$

где  $a_b$  - коэффициент теплоотдачи дна. Например, в случае, если нижняя плоскость это массивное тело большой теплоемкости и с большой теплопроводностью или термостат, поддерживающий постоянную температуру. то коэффициент теплоотдачи  $a_b$  формально равен бесконечности, а пульсации температуры отсутствуют:

$$T' = 0. \quad (12)$$

Если нижняя граница контактирует с нагревателем, имеющим постоянную электрическую мощность, то приближенно можно считать, что фиксирован тепловой поток и условие (11) имеет вид:

$$\frac{\partial T'}{\partial z} = 0. \quad (13)$$

На верхней, свободной границе, необходимо принять во внимание силы, связанные с поверхностным натяжением. Если коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  неоднороден, то возникает поверхностная сила  $\bar{f} = \nabla \sigma$ . Граничное условие на свободной поверхности с учетом этих сил записывается следующим образом:

$$\nu \rho_0 \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i} \right) n_k = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}. \quad (14)$$

Здесь  $\frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{\partial V_k}{\partial x_i}$  - тензор вязких напряжений, а  $\bar{n}$  - единичный вектор, направленный вдоль внешней нормали к свободной границе. Будем считать, что свободная граница не деформируемая. Тогда вертикальная компонента скорости на этой поверхности равна нулю:

$$V_z = 0. \quad (15)$$

С учетом этого условия (14) сводятся к виду:

$$\nu\rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \nu\rho_0 \frac{\partial V_y}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial y}$$

Дифференцируя первое условие по  $x$ , а второе по  $y$  и пользуясь уравнением непрерывности, получим:

$$\nu\rho_0 \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = - \left( \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right). \quad (16)$$

Если считать, что  $\sigma$  - линейно зависит от температуры (см. 4), то на свободной границе будут связаны пульсации температуры вертикальной скорости :

$$\nu\rho_0 \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right). \quad (17)$$

Еще одно условие для поля температуры вытекает из закона теплопередачи на свободной поверхности. Предполагается, что плотность теплового потока со свободной поверхности пропорциональна возмущениям температуры:

$$k \frac{\partial T'}{\partial z} = a_s T'. \quad (13)$$

Коэффициент теплоотдачи  $a_s$ , для свободной поверхности, контактирующей с воздухом (в воздухе тоже, вообще говоря, есть конвекция), не определен, поэтому обычно, задача об устойчивости решается для набора параметров  $b = a_s d/k$ . Случай  $b = 0$  соответствует постоянству теплового потока,  $b \rightarrow \infty$  - постоянной температуре

верхней границы. Отметим, что если граница  $z = d$  изотермическая, то термокапиллярная неустойчивость отсутствует.

Таким образом, задача о термоконвекции в слое жидкости описывается уравнениями (7)-(9) с граничными условиями (10), (11) и (17), (18). Линеаризуем теперь эти уравнения и опишем результаты решения задачи об устойчивости. Для решения линеаризованной задачи вводятся безразмерные переменные [2]: длина нормируется на толщину слоя  $d$ , время - на  $d^2/\nu$ , скорость - на  $k/d$ , давление - на  $\rho\nu k/d^2$ , а температура - на  $T_1 - T_2$ . В безразмерных переменных линеаризованные уравнения (7)-(9) имеют вид:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = -\nabla p' + \Delta \bar{V} + Ra T' \bar{\gamma}, \quad (19)$$

$$P \frac{\partial T'}{\partial t} - (\bar{V} \bar{\gamma}) = \Delta T', \quad (20)$$

$$div \bar{V} = 0. \quad (21)$$

Здесь под  $P$  понимается число Прандтля  $P = \nu/k$ . Граничные условия для случая фиксированной температуры нижней границы имеют вид:

$$z = 0 : \quad T' = 0, \bar{V} = 0, \quad (22)$$

$$z = 1 : \quad \frac{\partial T'}{\partial z} = 0, V_z = 0, \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = Ma \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right). \quad (23)$$

Из уравнений (19)-(21) можно исключить давление  $p'$  и горизонтальные компоненты скорости  $V_x$  и  $V_y$ . Для этого следует к уравнению (19) применить операцию  $(rot(rot...))$ , а после этого спроектировать получившееся векторное уравнение на ось  $z$ . Тогда приходим к системе уравнений для двух переменных - вертикальной компоненты скорости  $V_z$ : и возмущении температуры  $T'$ .

$$\frac{\partial \Delta V_z}{\partial t} = \Delta \Delta V_z + Ra \left( \frac{\partial^2 T'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T'}{\partial y^2} \right), \quad (24)$$

$$P \frac{\partial T'}{\partial t} = \Delta T' + V_z. \quad (25)$$

Исследуем неустойчивость этой задачи по отношению к возмущениям типа:

$$\{V_z, T'\} \sim \{v(z), \theta(z)\} e^{\gamma t + k_z x + k_y y}. \quad (26)$$

В связи с тем, что все направления плоскости  $(x, y)$  равноправны, можно положить  $k_y = 0$ , и тогда для определения инкрементов нарастания возмущений (собственных чисел  $\gamma$ ) и вертикальной структуры полей скорости и температуры (собственных функций  $v$  и  $\theta$ ) из (24) и (25) могут быть получены следующие уравнения:

$$\begin{aligned} -\gamma(v'' - k_x^2 v) &= (v^{IV} - 2k_x^2 v'' + k_x^4 v) - Rak_x^2 \theta, \\ -\gamma P \theta &= (\theta'' - k_x^2 \theta) \end{aligned}$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} z = 0 : \quad & \theta = 0, v = 0, v' = 0, \\ z = 1 : \quad & \theta' = 0, v = 0, v'' = -Ma\theta. \end{aligned}$$

Решение этой краевой задачи на отыскание собственных значений и собственных функции проводилось во многих работах (см., например, cite2). В данном описании приводятся нейтральные кривые - линии на плоскостях  $(Ra, k_x)$  при  $Ma = 0, b \rightarrow \infty$  (см. рис. 2а) и на плоскости  $(Ma, k_x)$  при  $Ra = 0$  (см. рис. 2б), отделяющие области существования устойчивых ( $\gamma < 0$ ) и неустойчивых ( $\gamma > 0$ ) режимов. На рис.3 качественно представлены функции тока для возмущений в слое жидкости. Функции тока, а следовательно, и поля скорости, как в случае преобладания капиллярных сил, так и в случае доминирования сил плавучести топологически одинаковы. Очевидно, что в том месте,

где жидкость всплывает, на поверхности будут более теплые области, чем там, где она тонет.

Как видно на рис.2а с увеличением числа  $Ra$  при  $Ma = 0$  сначала становятся неустойчивыми возмущения с волновыми числами  $k_x = 2.7$ , а при  $Ra = 0$  и увеличении числа - возмущения с  $k_x = 2$ . С малым отличием этих волновых чисел и связана первоначально неправильная интерпретация Рэлеем результатов Бенара, о которой упоминалось во введении, фактически, наиболее неустойчивый масштаб определяется толщиной слоя жидкости, а поэтому как в случае термогравитационной конвекции, так в случае термокапиллярной конвекции эти масштабы близки.

Подчеркнем, что при отыскании собственных чисел  $\gamma$  предполагалось что  $\gamma$  - естественное число. Это означает, что неустойчивость, которая возникает в системе при превышении критического параметра  $Ra_{kp}$  или  $Ma_{kp}$  является монотонной, и в системе отсутствуют волновые возмущения. Для случая термогравитационной конвекции монотонность неустойчивости может быть доказана строго в виде теоремы [4], в то время как для термокапиллярной конвекции такой теоремы в силу граничных условий (23) не существует.

В приближении монотонности неустойчивости могут быть учтены одновременно и капиллярные эффекты, и силы плавучести [2]. На рис.4 представлена граница устойчивости в координатах  $(Ra, Ma)$ . Область неустойчивости расположена над кривой, которую приближенно можно записать следующим образом:

$$\frac{Ra}{Ra_{kp}} + \frac{Ma}{Ma_{kp}} = 1.$$

а точки пересечения координат  $Ra = Ra_{kp} = 669$  и  $Ma = Ma_{kp} = 79$ . Критическое значение  $k_x$  вдоль кривой практически не меняется и остается равным  $k_x \sim 2$ . Первый квадрант плоскости ( $Ra > 0, Ma > 0$ )

соответствует "нормальной жидкости" ( $a > 0, b > 0$ ), подогреваемой снизу. Как и следовало ожидать, в этом случае термокапиллярный эффект приводит к уменьшению разности температур, при которой возникает неустойчивость.

## 4. Правило отбора конвективных структур

В этом разделе обсуждается вопрос о том, какая структура реализуется при превышении надкритичности, когда неустойчивостью обладают моды с различными  $\bar{k}$ . Очевидно, что задача достаточно просто решается, если конвекция реализуется в кювете, размеры которой сравнимы с длиной волны неустойчивых возмущений. В этом случае граничные условия на боковых стенках определяют спектр мод, которые могут возбуждаться. Если размеры кюветы значительно больше длины волны неустойчивых возмущений, то ситуация здесь сложнее: в силу азимутальной симметрии, неустойчивостью обладают моды с волновыми векторами  $\bar{k}$ , имеющими произвольную ориентацию в плоскости  $(x, y)$ . Какая же конвективная структура возникает, если в начальный момент существуют случайные возмущения? Эта проблема являлась предметом исследования во многих работах (см., например, [5] и цитируемую там литературу).

Для ответа на этот вопрос необходимо учитывать нелинейное взаимодействие мод с различной ориентацией  $\bar{k}$ . Такое взаимодействие может быть достаточно просто рассчитано в приближении малой нелинейности. Для этого вводятся медленно меняющиеся амплитуды полей:

$$\{V_z, T'\} = A_{\bar{k}}(t)\{v(z), \theta(z)\}e^{k_z x + k_y y} + k.c.$$

Для них, используя процедуру усреднения по пространственным

модам, можно получить систему уравнений, позволяющую приближенно описывать нелинейные эффекты. Эта система для малых надкритичностей имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{\bar{k}} &= \gamma_{\bar{k}} A_{\bar{k}} + \int U_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}} A_{\bar{k}_1 \bar{k}_2} \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 - \bar{k}) d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 \\ &\quad - \int R_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 \bar{k}} A_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3} \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 - \bar{k}) d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $\gamma_{\bar{k}}$  - инкремент нарастания моды с волновым вектором  $\bar{k} = (k_x, k_y)$ , а  $U, R$  - матричные коэффициенты взаимодействия мод. Следует подчеркнуть, что коэффициенты трехволновых взаимодействия  $U$  отличны от нуля только в случае, если не выполняется приближение Буссинеска, например конвекция происходит в жидкости, вязкость которой зависит от температуры. Если приближение Буссинеска выполняется, то  $U = 0$ . Конкретный вид коэффициентов  $U, R$  подсчитан в ряде работ [5], однако наиболее важно то обстоятельство, что для конвекции это действительные числа. В этом случае уравнения (27) могут быть получены варьированием функционала  $F$ :

$$\dot{A}_{\bar{k}} = - \frac{\delta F(A_{\bar{k}})}{\delta A_{\bar{k}}}, \quad (28)$$

где функционал,  $F$  называют диссипативной функцией и он имеет вид:

$$\begin{aligned} F\{A\} &= \int \frac{1}{2} \gamma_{\bar{k}} |A_{\bar{k}}|^2 d\bar{k} - \int \frac{1}{3} U_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3} A_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3} \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3) d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 \\ &\quad - \int \frac{1}{4} R_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 \bar{k}_4} A_{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3 \bar{k}_4} \delta(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3 + \bar{k}_4) d\bar{k}_1 d\bar{k}_2 d\bar{k}_3 d\bar{k}_4. \end{aligned}$$

Сам функционал  $F$  удовлетворяет условию

$$\dot{F} = - \int \frac{\delta F(A_{\bar{k}})}{\delta A_{\bar{k}}} \dot{A}_{\bar{k}} d\bar{k} = - \int A_{\dot{\bar{k}}} A_{\bar{k}} d\bar{k}.$$

Это говорит о том, что  $F$  монотонно убывает во времени. Представление уравнений движения в виде (28) позволяет, в принципе, исследовать вопрос о том, какая структура будет наиболее часто

наблюдаться в каждом конкретном эксперименте. Действительно, так как устойчивыми набором мод являются те, которые минимизируют  $F$ , то в зависимости от вида коэффициентов  $U$  и  $R$  минимумы функционала  $F$  могут реализоваться для различных структур. Это могут быть и ролики, и четырехугольники, и шестиугольники. По-видимому, возможны и такие случаи, когда для всех перечисленных структур и для некоторых других функционал  $F$  имеет локальные минимумы, к которым может релаксировать система из начального состояния. Какая же структура будет наиболее предпочтительной? Ответ на этот вопрос существенно зависит от того есть ли в системе шумы. Если шумы отсутствуют, то при наличии нескольких устойчивых структур чаще всего из случайных начальных условий будет реализовываться та, которая обладает максимальной областью притяжения в пространстве начальных условий. В эксперименте же всегда присутствуют внешние шумы, воздействие которых может привести к переходу от одной структуры к другой. Какая же структура будет наблюдаться чаще других? Для ответа на этот вопрос будем моделировать шумы следующим образом: добавим в правую часть уравнение (27)  $\delta$ -коррелированную силу  $\zeta_{\bar{k}}(t) : \langle \zeta_{\bar{k}}(t) \rangle = 0, \langle \zeta_{\bar{k}}(t) \zeta_{\bar{k}_1}(t') \rangle = 2Q\delta(\bar{k} - \bar{k}_1), (29)$

где  $\langle \rangle$  означает усреднение по ансамблю реализаций.

С учетом флуктуации по уравнению (27) с внешней силой (29), функция распределения вероятности  $P\{A_{\bar{k}}\}$  определяется уравнением, которое в литературе называют уравнением Фоккера-Планка [1]:

$$\frac{\delta P}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta A_{\bar{k}}} \left( \frac{\delta F}{\delta A_{\bar{k}}} P \right) + Q \frac{\delta^2 P}{\delta_{\bar{k}} \delta A_{\bar{k}}} + k.c. \quad (30)$$

Стационарное решение уравнения (30) дается следующим выражением:

$$P\{A_{\bar{k}}\} \sim e^{-F/Q}$$

Поэтому из всех структур наиболее часто встречающейся будет та, которая обладает наиболее глубоким минимумом функционала  $F$ . Конкретное распределение вероятности зависит, конечно, от коэффициентов  $U$  и  $R$ .

Линии уровня полей на поверхности для различных структур показаны на рис. 5а,б,в. Если даже среди них есть та, что минимизирует  $F$ , это не гарантирует как уже было сказано, что в эксперименте возникает именно такая структура. Реализоваться могут и ближайшие минимумы  $F$ , а структура будет слегка отличаться от совершенной. Как же характеризовать эти отличия (несовершенство структуры может проявляться, например, в том, что слегка искривлены оси роликов (см. рис. 5г,д) или у шестиугольников стороны несколько разной длины (см. рис. 5е). Однако топологически структуры на рис 5а,б,в и на рис. 5г,д,е эквивалентны - переход между ними может быть осуществлен лишь неравномерным сжатием или растяжением линий уровня. Другой тип близких, но уже топологически не эквивалентных структур показан на рис. 5ж,з,к. Хотя линии уровня на рис. 5а,б,в и рис. 5ж,з,к достаточно похожи почти всюду, переходы между соответствующими структурами не могут быть получены лишь растяжением или сжатием координат. Математическим образом таких топологических особенностей являются точечные дефекты [6, 7, 8, 9]. Так структура на рис. 5ж это ролики с одним точечным дефектом, расположенным в точке  $x = 0, y = 0$ . Волновое поле при фиксированном  $z$  можно аппроксимировать функциями:

$$V = A(x, y)e^{kx+\Phi}$$

$$A = th\left((x^2 + y^2)^{1/2}\right), \Phi = arctg(y/x)$$

Структура, изображенная на рис. 5к, соответствует двум точечным топологическим дефектам, принадлежащим двум модам с волновыми

числами  $\bar{k}_1$  и  $\bar{k}_2$ . В литературе такое нарушение порядка в правильной шестигранной решетке называется пенто-гепто дефектом (см., например, [9]). В физических экспериментах дефекты есть практически всегда (совершенная структура, по-видимому, может существовать лишь в исключительных случаях). "Количество Дефектов" вообще говоря, зависит от многих причин: начальных условий, интенсивности шумов, коэффициентов нелинейного взаимодействия мод и т.д. Дефекты можно классифицировать по топологическим свойствам. Это могут быть пенто-гепто дефекты, дефект типа розетки (рис.5л), коридора (рис.5м) и т.д. Как выяснено в численных и физических экспериментах [6, 7, 8, 9], дефекты могут взаимодействовать - аннигилировать, если у них противоположные топологические заряды [8], или образовывать устойчиво существующую пару, как это происходит при формировании пенто-гепто дефекта [9]. На языке функционала  $F$  взаимодействие отдельных дефектов соответствует релаксации диссипативной функции к одному из минимумов.

С ростом надкритичности количество дефектов в конвективных структурах увеличивается и пространственный беспорядок в ряде случаев для не очень больших значений надкритичности можно представлять как хаотическую динамику дефектов [9].

Как же можно наблюдать конвективные структуры и динамику отдельных дефектов в физическом эксперименте? Очевидно, что получить информацию о полях скорости и температуры, возникающих в слое жидкости при конвекции, с помощью датчиков достаточно сложно, однако, благодаря тому, что можно визуализировать течение, характеристики структур исследуются достаточно подробно. Как это технически сделать описано в следующем разделе.

## 5. Эксперимент

Схема эксперимента представлена на рис.6. Конвекция реализуется в круглой кювете 1, дно которой подогревается электроплиткой 2. Кювета заполняется силиконовым маслом. Свойства масел, которые могут быть использованы в этой работе, приведены в приложении 1. Питание электроплитки может осуществляться как переменным напряжением 220 V (режим быстрого нагрева), так и через понижающий трансформатор, дающий напряжение 36 V. При нагреве дна кюветы в слое жидкости возникает вертикальный градиент температуры, который можно оценить с помощью дифференциальной термопары 3 медь - константан. Напряжение, возникающее из-за разности температур двух спаев 4 и 5 измеряется с помощью вольтметра постоянного тока 6. В условиях, при которых проводится эксперимент, можно считать, что термо Э.Д.С. пропорциональна разности температур горячего и холодного спаев, а один градус соответствует приблизительно 40 mV. При критической разности температур верхней и нижней границ в слое возникает конвективная неустойчивость. Для визуализации конвективных структур в эксперименте применяется алюминиевая пудра. Возникновение контраста изображения обсуждается в Приложении 2.

В эксперименте предусмотрена возможность наблюдения конвекции при введении контролируемых пространственно периодических начальных возмущений. Для этого используется лампа накаливания 7 (см. рис. 6) и набор экранов с отверстиями. Экран помещается на небольшом расстоянии от поверхности силиконового масла. На небольшое время (1-1.5 мин) включается лампа накаливания. Через отверстия в экране происходит нагрев поверхности и создаются пространственно-периодические возмущения температуры и скорости.

После того, как лампа выключена, а экран убран, из этих возмущений развивается конвективная неустойчивость.

### Экспериментальное задание

1. Пронаблюдать возникновение конвекции при нагреве жидкости в кювете. Для этого в кювету налить предварительно измеренный объем силиконового масла, в которое добавлено небольшое количество алюминиевой пудры. Наиболее рационально проводить эксперимент со слоем жидкости 2-4 мм. Включить нагреватель и с помощью термопары фиксировать разность температур между поверхностью силиконового масла и дном кюветы, при которой режим теплопроводности сменяется конвекцией.
2. Используя набор колец пронаблюдать зависимость структуры конвекции от соотношения между размером подогреваемой области и длиной волны неустойчивых возмущений. Зарисовать структуры мод. По движению частиц пудры реконструировать поле скорости в конвективных ячейках.
3. В конвективной структуре, возникающей из случайных возмущений, выделить различные топологические дефекты и провести наблюдение за эволюцией одного из них.
4. Сравнить эволюцию конвективных структур, возникающих из случайных возмущений и из регулярных пространственно-периодических начальных возмущений, продуцируемых световым излучением. Для этого использовать экраны с отверстиями, расположенными периодически в пространстве. Необходимо иметь в виду, что для эффективного влияния искусственно вводимых возмущений, их пространственный период должен быть близок

к периоду неустойчивых мод. Такого резонанса можно достичь изменяя глубину слоя жидкости. Необходимо так лее подобрать диапазон температур нагревателя, в котором теплового излучения лампы накаливания достаточно для введения возмущений, существенно превышающих фоновые флуктуации. Сравните время жизни структур в виде паркета из правильных четырехугольников и гексагонов.

### Вопросы

1. Какой тип конвекции реализовался в проведенных вами экспериментах - термогравитационный или термокапиллярный?
2. Для условий вашего эксперимента рассчитайте капиллярную длину  $L_k$ . Под капиллярной длиной понимают характерную глубину слоя жидкости, при которой число Рэлея равно числу Марангони.
3. Сравните отношение критических чисел  $Ma$  и  $Ra$ , при которых возникала конвекция в вашем эксперименте с теоретически рассчитанными. Чем может быть обусловлено различие?

## Приложение 1

В данной лабораторной работе эксперименты проводятся с силиконовыми маслами (олигодиметилсилоксанами) ПМС-5, ПМС-100 и ПМС-200. В принципе, возможно использовать любые жидкости с известными физическими параметрами, однако для экспериментов по термоконвекции именно силиконовые масла являются наиболее подходящими и традиционно используемыми в лабораторных исследованиях. Достоинством этих веществ является то, что они не токсичны и неканцерогенны (а в силу этого широко используются в фармацевтической и косметической промышленности) и практически не испаряются. К тому же, поверхность силиконовых масел не столь сильно подвержена загрязнению, как, например, поверхность воды. Попадающая на поверхность масла пыль смачивается и тонет. Существенным недостатком силиконовых масел является то, что на эти жидкости нет ГОСТа, а поэтому даже одинаковые по химическому составу вещества могут иметь различные физические характеристики. В связи с этим в данном приложении приведены специально измеренные в лаборатории термохимии Нижегородского университета все необходимые характеристики веществ, с которыми проводятся эксперименты. По этим результатам могут быть подсчитаны параметры, необходимые для определения критических чисел  $Ra$  и  $Ma$ .

Зависимость плотности  $\rho_0$  [г/см<sup>3</sup>].

| $T, K$ | ПМС - 5 | ПМС - 100 | ПМС - 200 |
|--------|---------|-----------|-----------|
| 288    | 0.917   | 0.972     | 0.974     |
| 293    | 0.913   | 0.968     | 0.970     |
| 298    | 0.908   | 0.963     | 0.966     |
| 303    | 0.903   | 0.958     | 0.961     |
| 308    | 0.899   | 0.954     | 0.957     |
| 313    | 0.895   | 0.950     | 0.953     |
| 318    | 0.889   | 0.946     | 0.948     |
| 328    | 0.881   | 0.938     | 0.941     |

Зависимость динамической вязкости  $\eta$  [г/(см × сек)]-10<sup>2</sup>.

| $T, K$ | ПМС - 5 | ПМС - 100 | ПМС - 200 |
|--------|---------|-----------|-----------|
| 288    | 4.95    | 111       | 217.7     |
| 293    | 4.63    | 98.5      | 195.4     |
| 298    | 4.16    | 88.6      | 175.8     |
| 303    | 3.78    | 80.0      | 159.6     |
| 308    | 3.49    | 73.1      | 144.4     |
| 313    | 3.26    | 66.2      | 131.9     |
| 318    | 3.04    | 60.2      | 120.1     |
| 328    | 2.65    | 50.8      | 101.1     |

Зависимость поверхностного натяжения  $\sigma$  [дин/см]  
олигодиметилсилоксанов от температуры.

| $T, K$ | ПМС - 5 | ПМС - 100 | ПМС - 200 |
|--------|---------|-----------|-----------|
| 288    | 18.0    | 20.5      | 20.7      |
| 293    | 17.5    | 20.1      | 20.3      |
| 298    | 17.2    | 19.7      | 19.9      |
| 303    | 16.4    | 19.3      | 19.5      |
| 308    | 16.2    | 18.9      | 19.1      |
| 313    | 15.9    | 18.5      | 18.7      |
| 318    | 15.4    | 18.1      | 18.4      |
| 328    | 14.7    | 17.5      | 17.7      |

Зависимость температуропроводности  $k$  [см<sup>2</sup>/сек].

| $T, K$ | ПМС - 5  | ПМС - 100 | ПМС - 200 |
|--------|----------|-----------|-----------|
| 288    | 0.001101 | 0.001106  | 0.001131  |
| 293    | 0.001094 | 0.001102  | 0.001125  |
| 298    | 0.001088 | 0.001098  | 0,001120  |
| 303    | 0.001082 | 0.001094  | 0.001115  |
| 308    | 0.001076 | 0.001090  | 0.001108  |
| 313    | 0.001069 | 0.001085  | 0.001102  |
| 318    | 0.001063 | 0.001079  | 0.001096  |
| 328    | 0.001051 | 0.001068  | 0.001083  |

## Приложение 2

В этом приложении обсуждается механизм возникновения контраста изображения при визуализации конвективных структур мелкодисперсными частицами.

Предположим, что первоначально частицы были равномерно размешаны по всему объему. Каждая отдельная частица участвует в двух движениях: во-первых, она увлекается конвективными вихрями, изображенными на рис. 3и, во-вторых, она тонет или всплывает, если ее плотность не совпадает с плотностью жидкости. Скорость, обусловленную силами плавучести, можно оценить исходя из того, что сила Стокга  $F_s$  равна  $F_s = 6\pi\rho\nu rV$  ( $r$  - радиус частицы, а  $V$  - ее скорость) уравновешивается архимедовой силой  $F_A = 4/3\pi r^3 g(\rho_p - \rho)$  ( $\rho_p$  - плотность частицы). За время  $\tau$ :

$$\tau = \frac{9d\rho\nu}{2g(\rho_p - \rho)r^2}.$$

частица либо всплывет на поверхность, либо опустится на дно. Плавающие на поверхности частицы могут находиться либо в точках  $S'$  либо в точках  $S''$ , где горизонтальная скорость равна нулю. Причем в точках  $S'$  их положение неустойчиво - при небольшом смещении расположенные в окрестности точки  $S'$  частицы придут в движение. Аналогично ведут себя частицы, которые тонут в жидкости. Их концентрация будет максимальна в окрестности точек  $B'$  и  $B''$ . Это застойные зоны, откуда вихревое течение не выносит попадающие туда частицы.

Контраст изображения возникает из-за неоднородности концентрации частиц. Большей концентрации соответствуют застойные зоны, которые видны как темные области на поверхности жидкости и на дне кюветы.

## Список литературы

- [1] Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
- [2] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392с.
- [3] Маломед Б.А., Непомнящий А.А., Трибельский М.П. Двумерные квази-периодические структуры в неравновесных системах.// ЖЭТФ, 1989, т. 96, вып. 2(8). с.684-700.
- [4] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика, том.5 Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
- [5] Сазонтов А.Г. К проблеме отбора конвективных структур в жидкости с зависимостью вязкости от температуры.// Изв. АН СССР, сер. ФАО, 1980, т.166, № 5. с. 463-472.
- [6] Bodenshatz E., Pesch W., Kramer L. Structure and dynamics of dislocations in anisotropic pattern forming system.// Physica D 1988, v.32. p. 135-145.
- [7] Ribbota R., Joets A. Defects and interaction with the structure in the end convection in nematic liquid crystals. Lecture notes in physics, v. 210. Cellular structures in instabilities. Ed. by Wesfreid J.E. and Zaleski S. Springer-Verlag. Berlin. Heidelberg. New-York. Tokio, 1984. 390 p.
- [8] Goren G., Procaccia I., Rasenat S., Steinberg V. Interaction and dynamics of topological defects: theory and experiments near the onset of weak turbulence.// Physical Rev. Lett., 1989, v.63, №12. p.1237-1240.
- [9] Occelli R., Guazzelli E., Pantaloni J. Qualitative study of the hexagonal convective structures. Lecture notes in physics, v. 210. Cellular structures

in instabilities. Ed. dy Wesfreid J.E. and Zaleski S. Springer-Verlag.  
Berlin. Heidelberg. New-York. Tokio, 1984. 390 p.

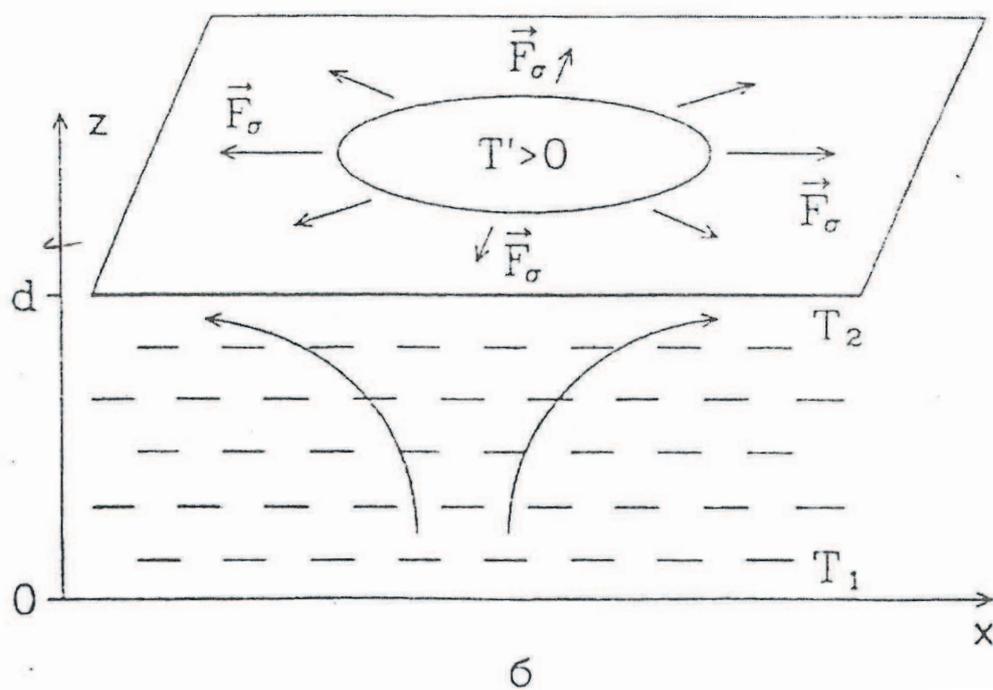
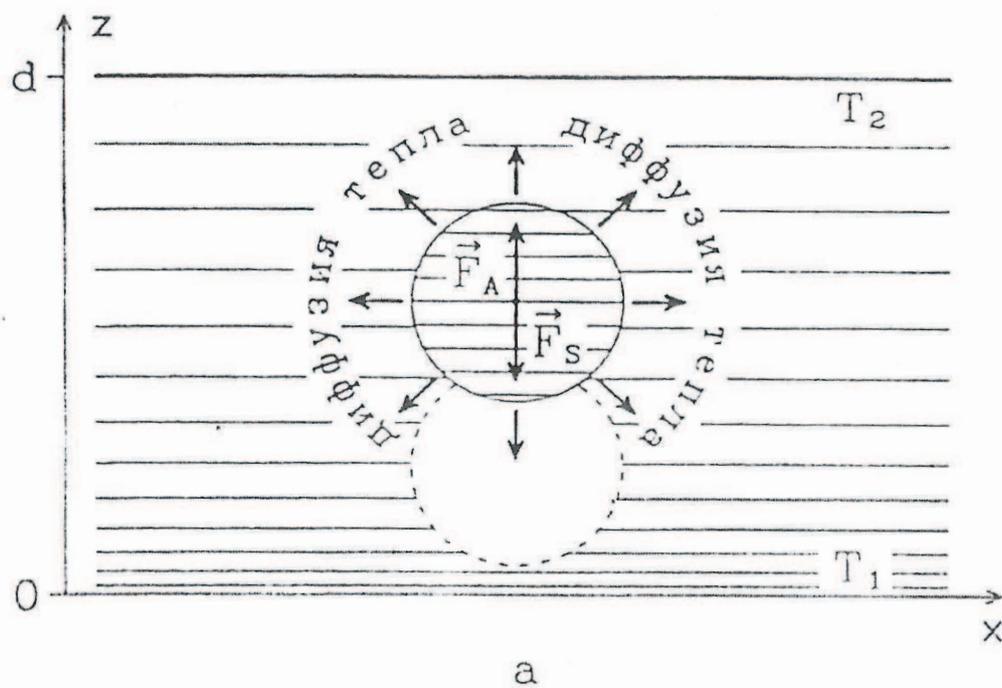
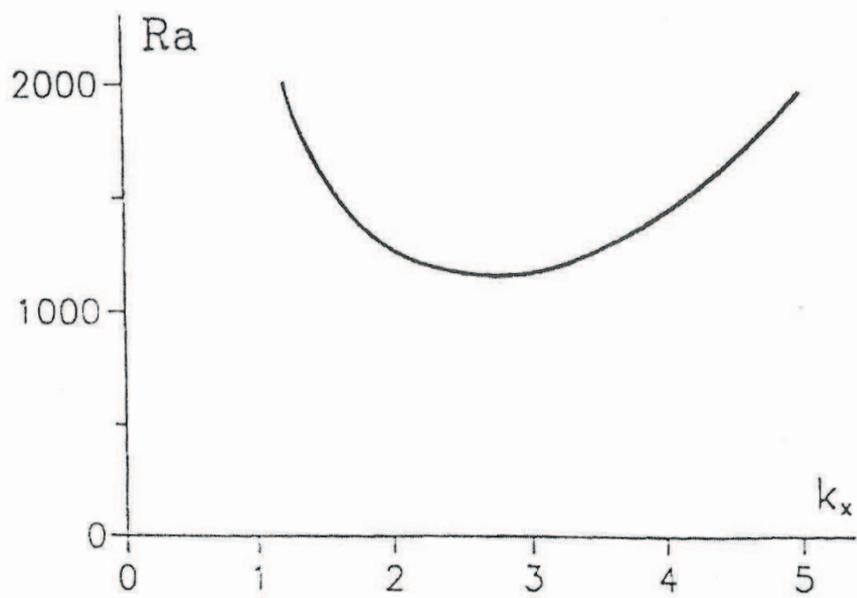
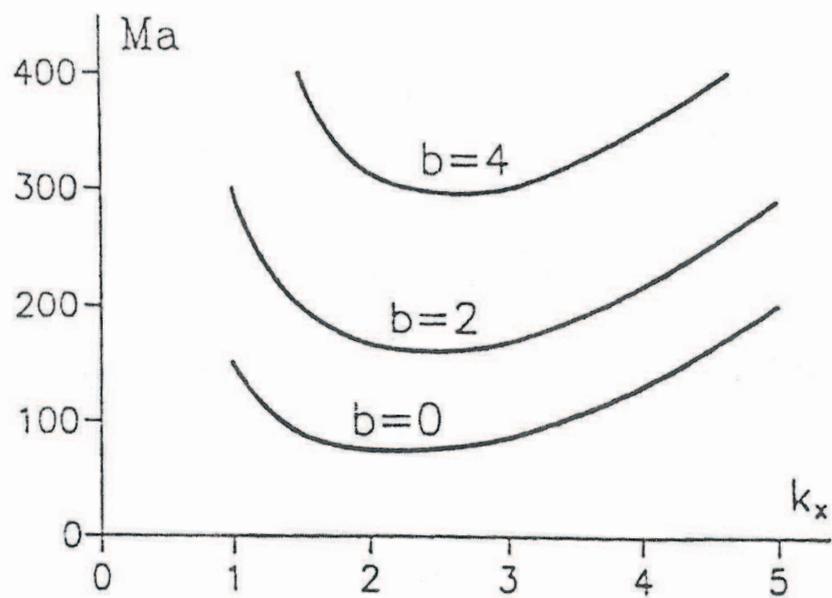


Рис. 1: а, б



a



б

Рис. 2: а, б

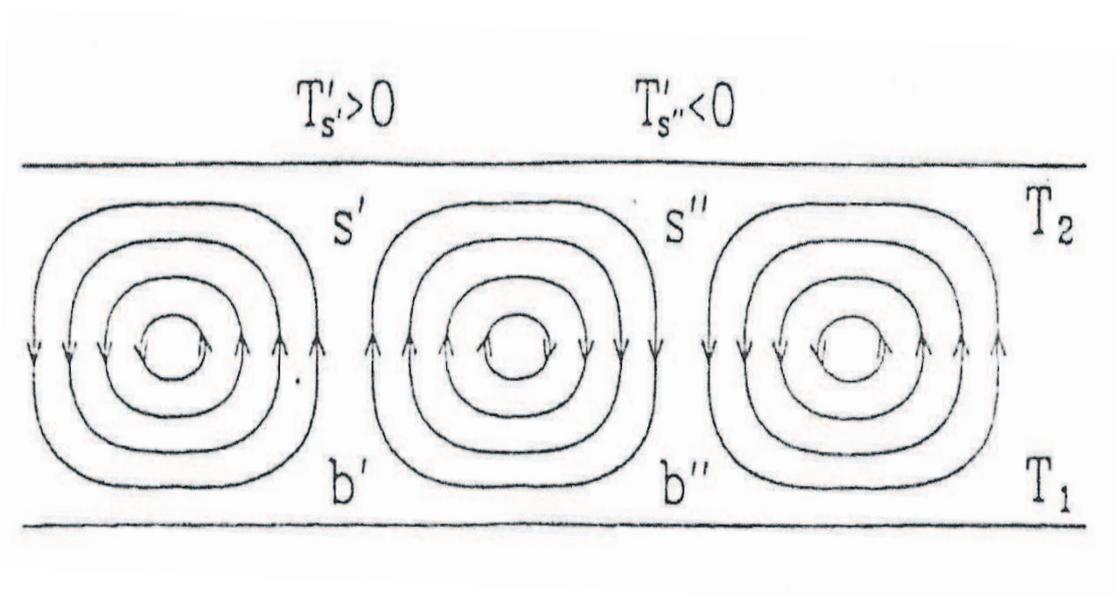


Рис. 3:

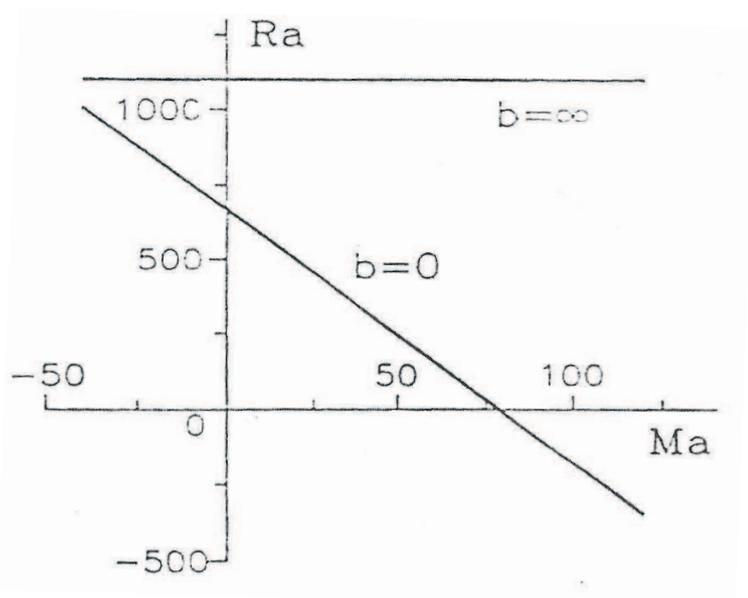
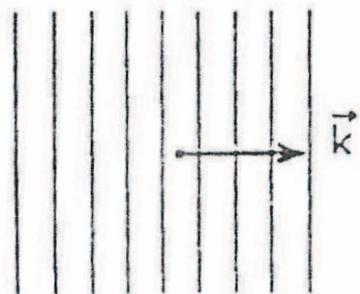
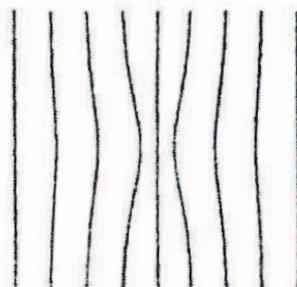


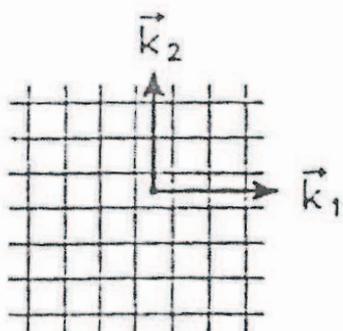
Рис. 4:



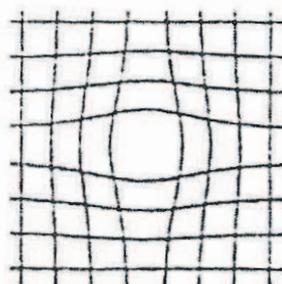
a



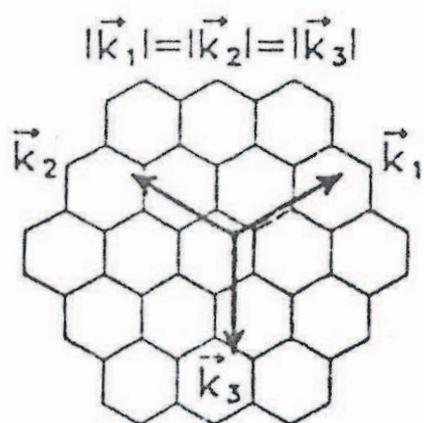
Г



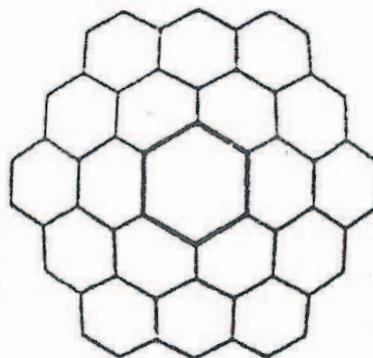
б



Д



B



e

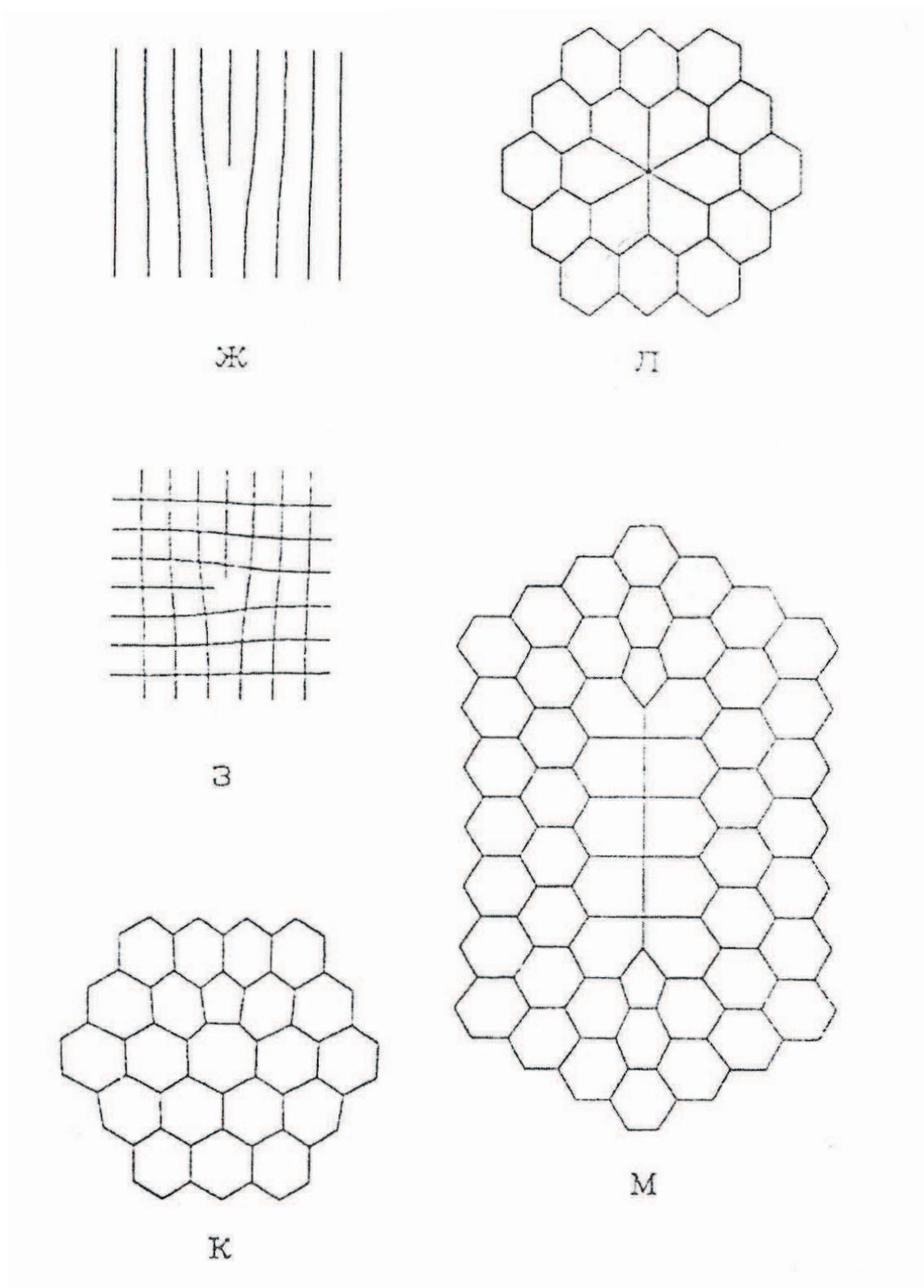


Рис. 5: а, б, в, г, д, е, ж, з, к, л, м, н

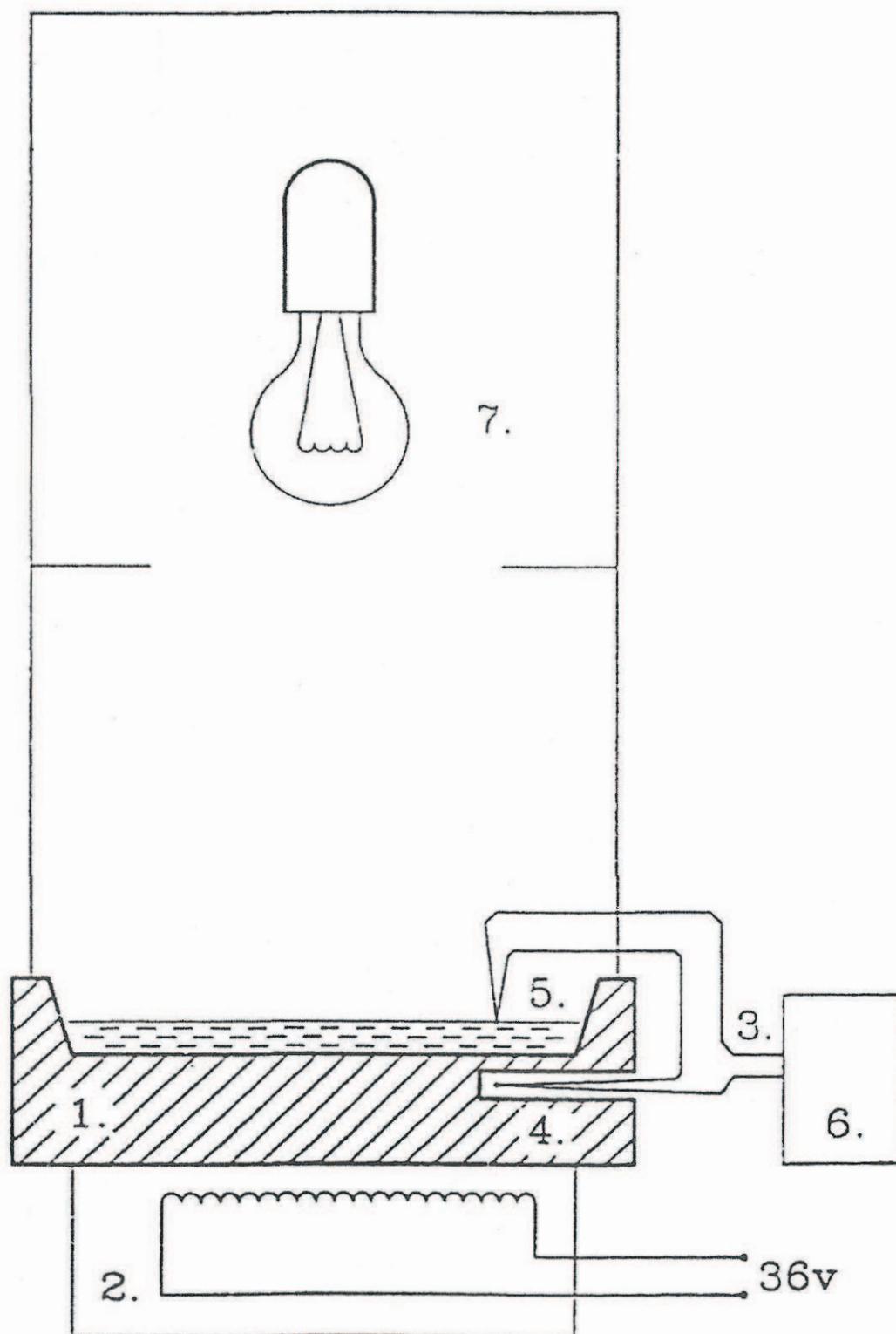


Рис. 6: