Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САРАТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО"

Кафедра математического анализа

Ю.В. Матвеева, М.А. Осипцев, Д.В. Прохоров

Функциональные последовательности и ряды

Курс лекций

Саратов 2014

Содержание

Лекция 1.

СОДЕРЖАНИЕ

Сходимость функциональной последовательности и функционального ряда в точке и на множестве

Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ определены на множестве X. Если зафиксировать точку $x \in X$, можно говорить о сходимости числовой последовательности $f_n(x)$. Эта идея позволяет нам ввести следующее определение сходимости функциональной последовательности (последовательности функций) в точке $x \in X$.

Определение 1. *Пусть дана последовательность функций $\{f_n(x)\}$, определённых на множестве X. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в точке $x \in X$ к числу l или $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = l$, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0\ |f_n(x) - l| < \varepsilon.$$

Следующее определение кажется абсолютно естественным обобщением определения 1.

Определение 2. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется сходящейся на множестве X, если она сходится в каждой точке множества X.*

Напомним, что мы называли числовым рядом последовательность частичных сумм некой числовой последовательности. Следуя тем же путём, дадим определение функционального ряда.

Определение 3. *Пусть дана последовательность функций $f_1(x), f_2(x) \dots, f_n(x), \dots,$ определённых на множестве X. Рассмотрим*

$$\begin{aligned}
&S_1(x) = f_1(x),\\
&S_2(x) = f_1(x) + f_2(x),\\
&\dots\\
&S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x),\\
&\dots
\end{aligned}$$

Последовательность $\{S_n(x)\}$ называется функциональным рядом и обозначается $\sum f_n(x)$.

Если последовательность $S_n(x)$ сходится на множестве X, то функциональный ряд $\sum f_n(x)$ называется сходящимся на множестве X и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется суммой функционального ряда.

Ещё раз отметим, что сходимость функциональных последовательностей и рядов на множестве эквивалентна сходимости числовых последовательностей и рядов, рассмотренных в точках заданного множества. Поэтому утверждения, доказанные для числовых последовательностей и рядов, легко переносятся и на сходимость функциональных последовательностей и рядов. Например, сформулируем критерий Коши сходимости функциональной последовательности на множестве X.

Теорема 1. *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве X тогда и только тогда, когда в каждой точке $x \in X$ она является фундаментальной. То есть,*

$$\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 : \forall n > N_0,\ k > N_0\ \ |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Номер N_0 в Теореме 1 зависит не только от ε, но и от точки $x \in X$. В дальнейшем мы введём другой вид сходимости функциональных последовательностей и рядов, где потребуем независимость N_0 от конкретной точки.

При исследовании функциональных последовательностей и рядов очень важным является вопрос о наследовании функциональных свойств членов последовательности или ряда их пределом или суммой. Более конкретно, пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ определена на множестве X и $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

1. Если $f_n(x)$ непрерывны на множестве X, будет ли непрерывной $f(x)$?

2. Если $f_n(x)$ дифференцируемы на множестве X, будет ли дифференцируемой $f(x)$?

3. Если $f_n(x)$ интегрируемы на множестве X, будет ли интегрируемой $f(x)$?

Аналогичные вопросы можно поставить и в отношении суммы функционального ряда.

Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда

Введённый способ сходимости функциональной последовательности не может дать положительного ответа на поставленные вопросы. Действительно,

рассмотрим следующий пример. Пусть $f_n(x) = x^n$, $X = [0,\ 1]$. Все функции $f_n(x)$ являются непрерывными на $[0,\ 1]$. Вычислим

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & x \in [0,\ 1); \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Видим, что предел функциональной последовательности является функцией, разрывной на $[0,\ 1]$.

Для решения проблемы введём другой вид сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Определение 4. *Пусть функции $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ определены на множестве X. Функциональная последовательность $f_n(x)$ называется равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на множестве X, если*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отметим, что в отличие от введённой ранее поточечной сходимости, номер N_0 зависит лишь от выбора $\varepsilon > 0$. Таким образом, равномерная сходимость функциональной последовательности является более сильной, чем поточечная, то есть, если последовательность сходится равномерно на множестве X, то она сходится на этом множестве, обратное, как будет показано в дальнейшем, не верно.

Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

Сформулируем и докажем критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Теорема 2. *Функциональная последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X тогда и только тогда, когда*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0,\ k > N_0 \forall x \in X\ |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$. Тогда по определению,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Пусть $n > N_0$, $k > N_0$. Тогда, для всех x из множества X выполняется $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ и $|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} &|f_n(x) - f_k(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + (f(x) - f_k(x))| \leqslant \\ &\leqslant |f_n(x) - f(x)| + |f_k(x) - f(x)| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Окончательно получаем:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0,\ k > N_0\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_k(x)| < 2\varepsilon.$$

Выполняется условие Коши.

Достаточность. Пусть выполняется условие Коши

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0,\ k > N_0\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f_k(x)| < \varepsilon. \qquad (1)$$

Покажем, что последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Действительно, при каждом фиксированном x из множества X последовательность $f_n(x)$ является фундаментальной, следовательно сходится. Обозначим через $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Далее, без ограничения общности будем считать, что $N_0 < n < k$, тогда, раскрывая неравенство с модулем в (1), получаем

$$\forall x \in X,\ f_k(x) - \varepsilon < f_n(x) < f_k(x) + \varepsilon.$$

Перейдём в данном неравенстве к пределу при $k \to \infty$

$$\forall x \in X,\ f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \varepsilon,$$

или

$$\forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, нами показано

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0\ \forall x \in X\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon,$$

что говорит о равномерной сходимости последовательности $f_n(x)$. □

Определение 5. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X*, если последовательность его частичных сумм* $\{S_n(x)\}$ *равномерно сходится на множестве* X*.*

Переформулировка Теоремы 2 для последовательности частичных сумм функционального ряда позволяет нам получить критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 3. *Функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X *тогда и только тогда, когда*

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0,\ p \geqslant 1\ \forall x \in X\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Вопросы для тестирования и контроля

1. Показать, что равномерная сходимость функциональной последовательности $f_n(x)$ на множестве X равносильно тому, что

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

2. Доказать, что если последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X к $f(x) \equiv 0$, а последовательность $g_n(x)$ ограничена, то последовательность $f_n(x)g_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

3. Может ли функциональный ряд на отрезке:
   а) сходиться равномерно и не сходиться абсолютно,
   б) сходиться абсолютно и не сходиться равномерно?

4. Показать что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится равномерно на любом множестве X.

5. Пусть последовательности $f_n(x)$ и $g_n(x)$ сходятся равномерно на множестве X соответственно к $f(x)$ и $g(x)$. Что можно сказать о сходимости последовательности $\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)$?

Лекция 2.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Существование предела суммы равномерно сходящегося ряда
2. Интегрируемость суммы равномерно сходящегося ряда
3. Дифференцируемость суммы равномерно сходящегося ряда

Существование предела суммы равномерно сходящегося ряда

Выясним, наследует ли сумма равномерно сходящегося функционального ряда функциональные свойства членов ряда. Для этого докажем ряд теорем.

Самым простым, но не менее важным свойством суммы ряда является её непрерывность и существование предела в точке у суммы функционального ряда. Докажем теорему о переходе к пределу равномерно сходящегося функционального ряда.

Теорема 1. *Пусть в каждой δ-окрестности точки x_0 содержатся точки множества X, отличные от x_0. Функции $f_n(x)$ определены на множестве X и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$. Тогда, если функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n$ сходится и*

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n.$$

Доказательство. Покажем сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n$.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на множестве X. Тогда по критерию Коши равномерной сходимости функционального ряда

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0,\ p \geqslant 1\ \forall x \in X\ |\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| < \varepsilon.$$

Перейдём к пределу при $x \to x_0$ в последнем неравенстве

$$\lim_{x\to x_0} |\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)| = |\sum_{k=n+1}^{n+p} l_k| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, получаем

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ \ : \forall n > N_0,\ p \geqslant 1\ \ |\sum_{k=n+1}^{n+p} l_k| \leqslant \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n$ выполняются условия критерия Коши, следовательно, он сходится.

Осталось показать, что существует $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и он равен $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n$.

Запишем определение равномерной сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ множестве X:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \ : \forall n > N_1\ \forall x \in X\ \big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\big| < \varepsilon. \tag{1}$$

Далее, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n$ сходится,

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \ : \forall n > N_2\ \ \big|\sum_{k=1}^{n} l_k - \sum_{k=1}^{\infty} l_k\big| < \varepsilon. \tag{2}$$

По условию теоремы $\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = l_n$, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k$. То есть, по определению предела,

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x :\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \ \big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} l_k\big| < \varepsilon. \tag{3}$$

Пусть $n > \max(N_1,\ N_2)$, а точка x принадлежит δ-окрестности точки x_0. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&\big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} l_k\big| = \big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) + \sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} l_k + \\
&+ \sum_{k=1}^{n} l_k - \sum_{k=1}^{\infty} l_k\big| \leqslant \big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\big| + \big|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} l_k\big| + \\
&+ \big|\sum_{k=1}^{n} l_k - \sum_{k=1}^{\infty} l_k\big|.
\end{aligned}$$

С учётом (1) — (3), окончательно получаем

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x :\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \big|\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{\infty} l_k\big| < 3\varepsilon,$$

что полностью доказывает теорему. $\square$

Напомним, что функция называется непрерывной в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Исходя из этого получим простое следствие теоремы 1, в случае, когда члены ряда непрерывные функции.

Теорема 2 *Пусть функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится к функции* $S(x)$ *на множестве* X. *Если все функции* $f_n(x)$ *непрерывны в точке* $x_0 \in X$, *то сумма ряда* $S(x)$ *непрерывна в точке* x_0.

Доказательство. Функции $f_n(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in X$, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. По теореме 1

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = S(x_0),$$

что доказывает непрерывность $S(x)$ в точке x_0. □

Интегрируемость суммы равномерно сходящегося ряда

Покажем, что сумма равномерно сходящегося ряда интегрируемых функций также будет интегрируема.

Теорема 3. *Пусть функции* $f_n(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$, *а функциональный ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *равномерно сходится на* $[a, b]$. *Тогда сумма функционального ряда интегрируема на отрезке* $[a,\, b]$ *и справедлива формула:*

$$\int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\, dx.$$

Доказательство. Обозначим через $S(x)$ и $S_n(x)$ соответственно сумму ряда и частичную сумму ряда, то есть

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x).$$

Тогда условие равномерной сходимости ряда на отрезке $[a, b]$ может быть записано следующим образом

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0\ \forall x \in [a, b]\ \big|S_n(x) - S(x)\big| < \varepsilon.$$

По теореме о среднем для верхнего и нижнего интегралов получаем

$$\underline{I}(S - S_n) > -\varepsilon(b - a), \quad \overline{I}(S - S_n) < \varepsilon(b - a).$$

Рассмотрим

$$\overline{I}(S) = \overline{I}(S_n + S - S_n) \leqslant \overline{I}(S_n) + \overline{I}(S - S_n) < \overline{I}(S_n) + \varepsilon(b-a). \qquad (1)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} &\underline{I}(S) = -\overline{I}(-S) = -\overline{I}(-S_n - S + S_n) \geqslant -(\overline{I}(-S_n) + \overline{I}(-S + S_n)) = \\ &= \underline{I}(S_n) + \underline{I}(S - S_n) > \underline{I}(S_n) - \varepsilon(b-a). \end{aligned} \qquad (2)$$

Так как функции $f_n(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то и $S_n(x)$ интегрируема на $[a,b]$, следовательно, $\underline{I}(S_n) = \overline{I}(S_n)$. Вычтем из неравенства (1) неравенство (2)

$$\overline{I}(S) - \underline{I}(S) < \overline{I}(S_n) - \underline{I}(S_n) + 2\varepsilon(b-a) = 2\varepsilon(b-a).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем, $\overline{I}(S) - \underline{I}(S) \leqslant 0$ или $\overline{I}(S) = \underline{I}(S)$. Следовательно, функция $S(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Далее покажем, что $\int\limits_a^b S(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b S_n(x)\,dx$. Действительно,

$$\Big|\int\limits_a^b S(x)\,dx - \int\limits_a^b S_n(x)\,dx\Big| = \Big|\int\limits_a^b S(x) - S_n(x)\,dx\Big| \leqslant \int\limits_a^b |S(x) - S_n(x)|\,dx < \varepsilon(b-a).$$

Таким образом, получили

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists N_0\ : \forall n > N_0\ \Big|\int\limits_a^b S(x)\,dx - \int\limits_a^b S_n(x)\,dx\Big| < \varepsilon(b-a),$$

что доказывает утверждение теоремы. □

Дифференцируемость суммы равномерно сходящегося ряда

Выясним, при каких условиях сумма функционального ряда будет дифференцируемой. Ответ на этот вопрос изложим в двух теоремах. Вначале потребуем, чтобы члены ряда были непрерывно дифференцируемыми функциями.

Теорема 4. *Пусть $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ непрерывно дифференцируемы во всех точках интервала (a,b), функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$. Тогда*

функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *сходится равномерно на* (a,b)*, его сумма дифференцируема на* (a,b) *и справедлива формула*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in (a,b).$$

Доказательство. По условию теоремы ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно и члены ряда $f_n'(x)$ непрерывны на (a,b). По теореме 2, функция $\sigma(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ является непрерывной на (a,b). Всякая непрерывная функция имеет первообразную. Обозначим первообразную $\sigma(x)$ через $S(x)$, то есть для $x \in (a,b)$, $S'(x) = \sigma(x)$.

По определению определённого интеграла, запишем для $x \in (a,b)$

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sigma(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} S'(t)dt = S(x) - S(x_0). \tag{1}$$

С другой стороны, в силу теоремы 1,

$$\int\limits_{x_0}^{x} \sigma(t)dt = \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} f_n'(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right). \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), делаем вывод, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right)$ сходится на (a,b).

Покажем, что он равномерно сходится на (a,b).

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно, следовательно, по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_0 : \ \forall n > N_0, p \geqslant 1 \ \forall x \in (a,b) \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_n'(x) \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Обозначим через $S_{n,p}(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)$. Функции $f_n(x)$ непрерывно дифференцируемы на (a,b), поэтому и $S_{n,p}(x)$ также непрерывно дифференцируемы. Тогда, по теореме Лагранжа для любого $x \in (a,b)$ существует ζ, лежащая между x и x_0, такая, что

$$S_{n,p}(x) - S_{n,p}(x_0) = S_{n,p}'(\zeta)(x - x_0) = \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k'(\zeta)(x - x_0). \tag{4}$$

Окончательно, из (3) и (4) следует

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}(f_k(x)-f_k(x_0))\right| = |S_{n,p}(x)-S_{n,p}(x_0)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k'(\zeta)\right| |(x-x_0)| < \varepsilon(b-a),$$

что говорит о равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(f_n(x)-f_n(x_0))$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_n(x)-f_n(x_0)) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

представим в виде суммы равномерно сходящегося и числового рядов, следовательно, является равномерно сходящимся.

Из (1) и условия равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, получаем, что $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Напомним, что $S(x)$ – первообразная $\sigma(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$, и по определению первообразной, для $x \in (a,b)$

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Теорема доказана полностью. □

В действительности теорема о дифференцируемости функционального ряда справедлива при менее жёстких условиях. В частности, можно отказаться от условия непрерывной дифференцируемости функций $f_n(x)$, заменив его условием дифференцируемости этих функций. Правда, в этом случае теорема потребует более изощренного доказательства.

Теорема 5. *Пусть $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$ дифференцируемы во всех точках интервала (a,b), функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится в некоторой точке $x_0 \in (a,b)$. Тогда, функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на (a,b), его сумма дифференцируема на (a,b) и справедлива формула*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in (a,b).$$

Доказательство. Положим для всех $n \in \mathbb{N}$, и $x \in (a,b)$

$$g_n(x) = \begin{cases} \dfrac{f_n(x)-f_n(x_0)}{x-x_0}, & \text{если } x \neq x_0, \\ f_n'(x_0), & \text{если } x = x_0. \end{cases}$$

Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ равномерно сходится на интервале (a, b).

Действительно, в силу критерия Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0\ \forall n > N_0\ p \geqslant 1\ \forall x \in (a, b)\ \left| \sum_{n=k+1}^{n+p} f_k'(x) \right| < \varepsilon.$$

По теореме Лагранжа найдётся точка ξ лежащая между точками x и x_0 интервала (a, b), такая, что при $x \neq x_0$ выполняется равенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) \right| = \left| \frac{\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} (f_k(x) - f_k(x_0))}{x - x_0} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k'(\xi) \right| < \varepsilon.$$

Тогда как при $x = x_0$ имеем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x_0) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k(x)$ выполняется критерий Коши, и поэтому указанный ряд равномерно сходится на (a, b). Отсюда следует, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на интервале (a, b). В самом деле, для всякого $x \in (a, b)$ справедлива формула

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) + (x - x_0) \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (x - x_0) g_n(x),$$

причём числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ сходится, а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x - x_0) g_n(x)$ равномерно сходится на интервале (a, b) по критерию Коши в силу неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} (x - x_0) g_n(x) \right| = (b - a) \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_n(x) \right| < \varepsilon (b - a).$$

Обозначим через $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Тогда для всякого $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$, справедлива формула

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

Переходя к пределу при $x \to x_0$ по теореме 1 будем иметь

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} g_n(x),$$

что эквивалентно следующему:

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x_0),$$

в силу того, что для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to x_0} g_n(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f_n'(x_0).$$

Таким образом функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и для неё верна формула

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' (x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x_0).$$

Но теперь вместо точки x_0 можно взять любую другую точку $x \in (a, b)$ и, повторив для неё те же рассуждения, прийти к заключению, что функция $f(x)$ дифференцируема в интервале (a, b) и для всех $x \in (a, b)$ справедлива формула

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

$\square$

Вопросы для тестирования и контроля

1. Показать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}$ всюду непрерывна.

2. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$ сходится равномерно на всей числовой прямой. Можно ли его дифференцировать?

3. Вычислить сумму $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{2n-1}$. (Использовать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ на отрезке $[-q, q]$, $0 < q < 1$.)

4. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

5. Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2(nx)}{n(n+1)}$ непрерывна на всей числовой прямой и вычислить $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

Лекция 3.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Признак мажорации равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса
2. Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда
3. Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

Признак мажорации равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса

Мы видели, что равномерная сходимость необходима для наследования суммой ряда функциональных свойств членов ряда. В этой лекции сформулируем и докажем признаки равномерной сходимости функциональных рядов.

Первым докажем признак мажорации равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 1. *Пусть для всякого $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| \leqslant Cg_n(x)$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ сходится равномерно на множестве X, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.*

Доказательство. Запишем условия критерия Коши равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 :\ \forall n > N_0,\ \forall p \geqslant 1\ \forall x \in X\ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Знак модуля в последнем неравенстве можно опустить из-за неотрицательности функций $g_n(x)$.

Поскольку

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} Cg_k(x) < C\varepsilon,$$

переходим к условию

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 :\ \forall n > N_0,\ \forall p \geqslant 1\ \forall x \in X\ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \right| < C\varepsilon,$$

что равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ и доказывает теорему 1. $\square$

Сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ может трактоваться как равномерная сходимость функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ с функциями $g_n(x) \equiv c_n$, что влечёт простое следствие теоремы 1, которое называется признаком Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Теорема 2. *Пусть для всякого $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| \leqslant c_n$ $(n = 1, 2, \dots)$. Тогда если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится , то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.*

Заметим, как и в случае признака мажорации для числовых рядов, выполнение условия $|f_n(x)| \leqslant Cg_n(x)$ можно требовать не для всех натуральных n, а начиная с номера N_0. Поэтому условие теорем 1 и 2 допускает ослабление. Именно, условие $|f_n(x)| \leqslant Cg_n(x)$ и $|f_n(x)| \leqslant c_n$ выполняются для $n > N_0$.

Признак Дирихле равномерной сходимости функционального ряда

Пользуясь преобразованием Абеля, применённым к частичным суммам функционального ряда, получим признаки равномерной сходимости функционального ряда. Следующий признак называется признаком Дирихле.

Дадим определение равномерной ограниченности последовательности функций.

Определение 1. *Последовательность функций $f_n(x)$ называется равномерно ограниченной на множестве X, если*

$$\exists C > 0 \ \forall x \in X \ \forall n \ |f_n(x)| \leqslant C.$$

Теорема 3. *Пусть выполняются следующие условия:*
1) функции $G_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} g_k(x)$ равномерно ограничены на множестве X;
2) последовательность $f_n(x)$ является монотонной по n и равномерно сходится к 0 при $n \to \infty$ на множестве X.
Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Доказательство. Введём следующее обозначение $G_{n,k}(x) = \sum\limits_{j=n+1}^{n+k} g_j(x)$. Тогда, согласно преобразованию Абеля, для $p \geqslant 1$,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x) = f_{n+p}(x)G_{n,p}(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x))G_{n,k}(x). \quad (1)$$

Из условия равномерной ограниченности $G_n(x)$ получаем,

$$\exists C > 0 \ \forall x \in X \ \forall n \ |G_n(x)| \leqslant C.$$

Рассмотрим для $k \geqslant 1$

$$\begin{aligned} |G_{n,k}| = \left| \sum_{j=1}^{n+k} g_j(x) - \sum_{j=1}^{n} g_j(x) \right| = |G_{n+k}(x) - G_n(x)| \leqslant \\ \leqslant |G_{n+k}(x)| + |G_n(x)| \leqslant 2C. \end{aligned} \tag{2}$$

Далее, последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к 0 на множестве X, то есть, по определению,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 : \ \forall n > N_0 \ \forall x \in X \ |f_n(x)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Применяя преобразование (1), учитывая (2) и (3), оценим при $n > N_0$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| \leqslant |f_{n+p}(x)||G_{n,p}(x)| + \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) G_{n,k}(x) \right| < \\ < \varepsilon 2C + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)||G_{n,k}(x)| \leqslant \varepsilon 2C + 2C \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|. \end{aligned}$$

Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ для всякого $x \in X$ монотонна по n, то разности $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ имеют одинаковый знак и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x)) \right| = |f_{n+p} - f_{n+1}| \leqslant \\ \leqslant |f_{n+p}| + |f_{n+1}| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Соединяя оценки, убеждаемся, что

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 : \ \forall n > N_0 \ \forall x \in X \ \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) g_k(x) \right| < 6C\varepsilon,$$

что говорит о равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) g_n(x)$ на множестве X и доказывает теорему. □

Признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда

В следующей теореме сформулируем признак Абеля, близкий к признаку Дирихле.

Теорема 4. *Пусть выполняются следующие условия:*
1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ *равномерно сходится на множестве* X*;*
2) последовательность $f_n(x)$ *является монотонной по* n *и равномерно ограниченной на множестве* X*.*
Тогда функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ *сходится равномерно на множестве* X*.*

Доказательство. Пусть для всякого $x \in X$ и $n \geqslant 1$ $|f_n(x)| \leqslant C$. Запишем критерий Коши сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(x)$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 :\ \forall n > N_0\ p \geqslant 1\ \forall x \in X\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} g_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Обозначим $G_{n,k}(x) = \sum\limits_{j=n+1}^{n+k} g_j(x)$. Тогда в этих обозначениях получим

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 :\ \forall n > N_0\ p \geqslant 1\ \forall x \in X\ \ |G_{n,p}| < \varepsilon.$$

Применим преобразование Абеля к сумме

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x) = f_{n+p}(x)G_{n,p}(x) - \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x))G_{n,k}(x)$$

и получим оценку для $n > N_0$ и $p \geqslant 1$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| \leqslant |f_{n+p}(x)||G_{n,p}(x)| + \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x))G_{n,k}(x)\right| <$$
$$< C\varepsilon + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)||G_{n,k}(x)| < C\varepsilon + \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Так как последовательность $\{f_n(x)\}$ для всякого $x \in X$ монотонна по n, то разности $f_{k+1}(x) - f_k(x)$ имеют одинаковый знак и, следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1} (f_{k+1}(x) - f_k(x))\right| = |f_{n+p} - f_{n+1}| \leqslant$$
$$\leqslant |f_{n+p}| + |f_{n+1}| < 2C$$

Соединяя оценки вместе, убеждаемся, что

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 :\ \forall n > N_0\ p \geqslant 1 \forall x \in X\ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)g_k(x)\right| < C\varepsilon + 2C\varepsilon = 3C\varepsilon,$$

что эквивалентно равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ на множестве X и доказывает теорему. $\square$

Как и в случае числовых рядов, признаки Дирихле и Абеля очень близки. Сравнивая их, замечаем, что ослабление одного из условий теоремы влечёт усиление второго условия и наоборот.

Вопросы для тестирования и контроля

1. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n e^{-nx}$ сходится в точке x_0 , то он сходится абсолютно для всех $x > x_0$.

2. Показать, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X, функции $g_n(x)$ равномерно ограниченны на X, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)g_n(x)$ равномерно сходится на множестве X.

3. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ равномерно сходится на отрезке $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

4. Пользуясь признаком Вейерштрасса, показать равномерную сходимость на всей числовой прямой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$.

5. Показать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ равномерно сходится на множестве X, то и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ равномерно сходится на X. Верно ли обратное?

Лекция 4.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Теорема Коши-Адамара
2. Равномерная сходимость степенного ряда
3. Непрерывность и интегрируемость суммы степенного ряда

Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда. Теорема Коши-Адамара

Одной из самых простых функций является степенная функция $f_n(x) = c_n x^n$ или, в более общем случае, $f_n(x) = c_n(x-x_0)^n$. Разумно рассматривать ряды, членами которых являются степенные функции, такие ряды будем называть степенными рядами. Дадим более строгое определение степенного ряда.

Определение 1. *Функциональный ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

называется степенным рядом.

Естественным образом возникают вопросы о областях сходимости и равномерной сходимости степенных рядов. Ответ на первый из этих вопросов даёт теорема Коши–Адамара.

Теорема 1. *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. *Обозначим* $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}$. *Тогда*
1. если $l = 0$, *то ряд сходится для всех* $x \in \mathbb{R}$;
2. если $l = \infty$, *то ряд сходится лишь в точке* x_0;
3. если $0 < l < \infty$, *то ряд сходится для* x *таких, что* $|x - x_0| < \frac{1}{l}$, *и расходится для* x *таких, что* $|x - x_0| > \frac{1}{l}$.

Доказательство. Пусть $0 < l < \infty$. Зафиксируем $x \in \mathbb{R}$ и рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. Применим признак Коши для исследования его сходимости.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n(x-x_0)^n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}|x-x_0| = l|x-x_0|.$$

Ряд будет сходиться, если данный предел меньше 1, то есть, если $l|x-x_0| < 1$, что эквивалентно $|x-x_0| < \frac{1}{l}$. Аналогично, ряд будет расходиться при условии $|x-x_0| > \frac{1}{l}$. Пункт 3 утверждения теоремы доказан.

Если $l = 0$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n(x-x_0)^n|} = l|x-x_0| = 0 < 1$ и, согласно признаку Коши, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится для всех $x \in \mathbb{R}$.

Если же $l = \infty$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n(x-x_0)^n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}|x-x_0| = \infty$ и степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ будет расходиться для всех $x \neq x_0$.

Теорема доказана полностью. □

Определение 2. *Число* $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ *называют радиусом сходимости степенного ряда, а множество* $\{x : |x-x_0| < R\}$ *интервалом сходимости степенного ряда.*

Таким образом, теорема Коши -Адамара говорит о том, что степенной ряд сходится внутри интервала сходимости и расходится вне его. В граничных точках интервала сходимости степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Равномерная сходимость степенного ряда

Применим признак Вейерштрасса к исследованию равномерной сходимости степенного ряда.

Теорема 2. *Пусть дан степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *и пусть его радиус сходимости* $R > 0$. *Тогда данный ряд сходится равномерно на любом отрезке* $[a, b]$, *целиком принадлежащем интервалу сходимости* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

Доказательство. Пусть $x \in [a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$. Тогда верна оценка

$$|c_n(x-x_0)^n| = |c_n||x-x_0|^n \leqslant \max\{|c_n||a-x_0|^n, |c_n||b-x_0|^n\} = |c_n|R_0^n,$$

где $R_0 = \max\{|a-x_0|, |b-x_0|\}$.

Точки a и b принадлежат интервалу сходимости, следовательно по теореме Коши-Адамара, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ в этих точках сходится абсолютно, то есть, ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n||a-x_0|^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n||b-x_0|^n$ сходятся. Отсюда следует, что числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|R_0^n = \begin{cases} \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n||a-x_0|^n, & \text{если } |a-x_0| \geqslant |b-x_0|; \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n||b-x_0|^n, & \text{если } |a-x_0| \leqslant |b-x_0| \end{cases}$$

сходится. Тогда по признаку Вейерштрасса степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Теорема доказана. □

Непрерывность и интегрируемость суммы степенного ряда

Из теоремы 2 и теорем о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости суммы функционального ряда легко получаются утверждения о непрерывности, интегрируемости и дифференцируемости суммы степенного ряда. Выразим эти утверждения как следствия теоремы 2. В дальнейшем будем считать, что радиус сходимости степенного ряда $R > 0$.

Следствие 1. *Сумма степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *является непрерывной функцией на интервале сходимости.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что члены степенного ряда являются непрерывными функциями на всей числовой прямой. Пусть точка x' принадлежит интервалу сходимости $(x_0 - R, x_0 + R)$ степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ $(R = 1/\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|})$. Выберем отрезок $[a,b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$ так, чтобы он включал точку x'. Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ сходится равномерно на отрезке $[a,b]$ и его сумма непрерывна на $[a,b]$, в том числе, и в точке x'. □

Следствие 2. *Сумма степенного ряда есть функция, интегрируемая на любом отрезке* $[a,b]$*, целиком лежащем в интервале сходимости, и имеет место формула*

$$\int\limits_a^b \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int\limits_a^b (x-x_0)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}((b-x_0)^{n+1}-(a-x_0)^{n+1}).$$

Доказательство. Согласно следствию 1, сумма степенного ряда непрерывна на отрезке $[a,b]$, целиком лежащем в интервале сходимости, и поэтому интегрируема. Кроме того, степенной ряд сходится равномерно на $[a,b]$. Осталось применить теорему о почленном интегрировании суммы равномерно сходящегося функционального ряда. □

Следствие 3. *Сумма степенного ряда* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *имеет первообразную в интервале сходимости. Одна из первообразных может быть вычислена по формуле*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1},$$

причём радиус сходимости степенного ряда для $F(x)$ *равен радиусу сходимости ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$.

Доказательство. По следствию 1, функция $f(x)$ непрерывна в интервале сходимости степенного ряда, следовательно она имеет в интервале сходимости первообразную. Одну из первообразных можно представить как интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Применяя следствие 2 на отрезке $[x_0, x]$, получаем

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - x_0)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int\limits_{x_0}^{x} (t - x_0)^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}.$$

Осталось показать, что ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ имеют одинаковый радиус сходимости.

Действительно, пусть $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ — радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$. Вычислим радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{\frac{|c_n|}{n+1}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|c_n|}\,\sqrt[n+1]{\frac{1}{n+1}}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \left(|c_n|^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}}} = R.$$

□

Вопросы для тестирования и контроля

1. Показать, что радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ может быть вычислен по формуле

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

при условии, что предел существует.

2. Верно ли, что если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится в точке x_0, то он
   a) равномерно сходится на отрезке $[-x_0, x_0]$?
   b) равномерно сходится на отрезке $[0, x_0]$?

3. Показать, что если ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ имеют одну и ту же сумму, то для всех $n \in \mathbb{N}$ $a_n = b_n$.

4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}(4x)^n$.

5. Показать, что если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ расходится на конце интервала сходимости при $x = R$, то на $[0, R)$ сходимость не может быть равномерной.

Лекция 5.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Дифференцируемость суммы степенного ряда
2. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Аналитические функции
3. Пример Коши бесконечно дифференцируемой неаналитической функции
4. Достаточное условие аналитичности функции

Дифференцируемость суммы степенного ряда

Покажем, что сумма степенного ряда дифференцируема в интервале сходимости.

Следствие 4. *Сумма степенного ряда* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *дифференцируема в интервале сходимости и производная равна*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1},$$

причём ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$ *и* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *имеют одинаковый радиус сходимости.*

Доказательство. Члены ряда $c_n(x-x_0)^n$ являются непрерывно дифференцируемыми на всей числовой прямой функциями. Пусть $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}}$ – радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ и точка x принадлежит интервалу сходимости (x_0-R, x_0+R). Тогда существует отрезок $[a,b] \subset (x_0-R, x_0+R)$, включающий точку x.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$, полученный почленным дифференцированием ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. Вычислим его радиус сходимости R'

$$R' = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|nc_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n-1]{|c_n|}\,\sqrt[n-1]{n}} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (|c_n|^{\frac{1}{n}})^{\frac{n}{n-1}}} = R.$$

Таким образом, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ имеют одинаковый интервал сходимости, и, следовательно, на отрезке $[a,b]$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$ сходится равномерно. По теореме о дифференцируемости суммы функционального ряда сумма степенного ряда $f(x)$ дифференцируема в точке x и верна формула

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1},$$

что полностью доказывает следствие 4. □

Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда. Аналитические функции

При дифференцировании суммы степенного ряда вновь получаем степенной ряд с тем же радиусом сходимости. Это позволяет нам сформулировать следующее следствие.

Следствие 5. *Сумма степенного ряда* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *дифференцируема любое количество раз и верна формула*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k},$$

причём радиусы сходимости всех получающихся рядов одинаковы.

Доказательство. По следствию 4 функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ дифференцируема и $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n(x-x_0)^{n-1}$, причём радиусы сходимости обоих рядов совпадают. Далее, пусть существует

$$f^{(k-1)}(x) = \sum_{n=k-1}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(x-x_0)^{n-k+1}.$$

Применяя к функции $f^{(k-1)}(x)$ следствие 4, получаем, что $f^{(k-1)}(x)$ дифференцируема и верна формула

$$f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)' = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)(x-x_0)^{n-k},$$

причём радиусы сходимости рядов для $f^{(k-1)}(x)$ и $f^{(k)}(x)$ совпадают. Тем самым, следуя методу математической индукции, следствие 5 полностью доказано. □

Определение 1. *Сумма степенного ряда* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ *называется аналитической функцией в интервале сходимости.*

Пусть $f(x)$ – аналитическая функция, то есть $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ в интервале сходимости. Тогда, по следствию 5, $f(x)$ дифференцируема любое количество раз и верна формула

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}.$$

Вычислим $f^{(k)}(x_0) = c_k k(k-1)(k-2)\dots 1$, откуда следует, что $c_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Определение 2. *Пусть* $f(x)$ *– аналитическая функция,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называется рядом Тейлора функции $f(x)$*, а коэффициенты*

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

называются коэффициентами Тейлора.

Пример Коши бесконечно дифференцируемой неаналитической функции

Следствие 5 говорит о том, что всякая аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой. Покажем, что обратное не верно, то есть приведём пример бесконечно дифференцируемой функции, не являющейся аналитической.

Пример Коши. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Заметим, что для всякого натурального k

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} e^{-1/x^2} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{k/2}}{e^t} = 0.$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{4}{x^6} - \dfrac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

По индукции несложно показать, что

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

где $P_{3n}(t)$ – многочлен степени $3n$ от t.

Следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ равны 0. Поэтому сумма ряда Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ равна 0 и не совпадает с функцией $f(x)$. Таким образом, несмотря на то, что функция $f(x)$ бесконечное число раз дифференцируема, она не является аналитической в точке $x_0 = 0$.

Достаточное условие аналитичности функции

Теорема Тейлора о применении формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа поможет нам сформулировать достаточное условие аналитичности бесконечно дифференцируемой функции.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в δ– окрестности точки x_0. Если существует константа $C > 0$ такая, что для всех точек x из некоторой δ-окрестности точки x_0 выполняется неравенство*

$$\sqrt[n]{\frac{\left|f^{(n)}(x)\right|}{n!}} \leqslant C,$$

то функция $f(x)$ будет аналитической в точке x_0.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в δ– окрестности точки x_0. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где ξ – точка, промежуточная между x и x_0, которая вместе с x принадлежит некоторому интервалу из δ-окрестности точки x_0. Следовательно, для таких x справедлива оценка

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \right| \leqslant \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| \left|(x-x_0)^{n+1}\right| \leqslant C^{n+1} \left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

Если рассматривать ту часть δ-окрестности точки x_0, для точек x которой выполняется неравенство $C|x-x_0| < 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} C^{n+1} \left|x-x_0\right|^{n+1} = 0,$$

и, следовательно,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Теорема 1 полностью доказана. □

Вопросы для тестирования и контроля

1. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$, и показать, что этот ряд равномерно сходится на отрезке $[-\rho, \rho]$, $\rho < 1$.

2. Применяя почленное интегрирование, вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n$. Установить, где данный ряд сходится равномерно.

3. Показать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ является решением задачи $y'(x) = y(x)$, $y(0) = 1$.

4. Показать, что функции $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ удовлетворяют уравнению $y''(x) = -y(x)$.

5. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n}$ не сходится равномерно на $(-1, 1)$.

Лекция 6.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Разложение показательной функции
2. Разложение тригонометрических функций. Формула Эйлера
3. Разложение биномиальной функции
4. Разложение логарифмической функции

Разложение показательной функции

Используя аппарат степенных рядов, можно представить с помощью рядов Тейлора элементарные функции.

Теорема 1. *Ряд Тейлора функции e^x сходится к этой функции на всей числовой прямой и для каждого $x \in \mathbb{R}$ справедлива формула*

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Доказательство. Так как для любого $\delta > 0$ при $x \in (-\delta, \delta)$ справедливо соотношение $\left|(e^x)^{(n)}\right| = e^x < e^\delta$, то выполнено достаточное условие аналитичности функции $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$.

Далее, заметим что

$$f^{(n)}(0) = (e^x)^{(n)}\big|_{x=0} = e^0 = 1.$$

Откуда следует, что

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Воспользовавшись признаком Даламбера, найдём область сходимости данного степенного ряда. Для этого вычислим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}/(n+1)!}{|x|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

Следовательно, ряд сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, что полностью доказывает теорему 1. $\square$

Разложение тригонометрических функций. Формула Эйлера

Покажем, что тригонометрические функции $\sin(x)$ и $\cos(x)$ представимы с помощью степенных рядов на всей числовой прямой.

Теорема 2. *Ряды Тейлора функций* $\sin(x)$ *и* $\cos(x)$ *сходятся на всё числовой прямой и верны представления*

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Доказательство. Все производные функции $f(x) = \sin(x)$ ограничены. Действительно, для всякого $n \in \mathbb{N}$ верны оценки $\left|(\sin(x))^{(2n)}\right| = |\sin(x)| \leqslant 1$, $\left|(\sin(x))^{(2n+1)}\right| = |\cos(x)| \leqslant 1$. Таким образом, выполнено достаточное условие аналитичности для любого $x \in \mathbb{R}$, в том числе и для $x_0 = 0$.

Вычислим производные

$$\begin{aligned}
&\sin(0) = 0,\\
&(\sin(x))'\big|_{x=0} = \cos(0) = 1,\\
&((\sin(x))''\big|_{x=0} = -\sin(0) = 0,\\
&\dots\\
&(\sin(x))^{(2n-1)}\big|_{x=0} = (-1)^{n-1}\sin(0) = 0\\
&(\sin(x))^{(2n)}\big|_{x=0} = (-1)^{n-1}\cos(0) = (-1)^{n-1},\\
&\dots.
\end{aligned}$$

Следовательно, коэффициенты Тейлора для $f(x) = \sin(x)$ в $x_0 = 0$ равны $c_{2n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$, $c_{2n} = 0$ и верно представление

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Радиус сходимости этого ряда равен

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n-1]{(2n-1)!} = \infty,$$

то есть ряд сходится на всей числовой прямой.

По теореме о дифференцируемости суммы степенного ряда для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x) = (\sin(x))' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

и радиусы сходимости рядов совпадают. Теорема 2 доказана. □

Напомним, что мнимая единица $\imath$ является решением уравнения $x^2+1=0$, то есть $\imath^2=-1$. Рассмотрим

$$e^{\imath x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\imath x)^n}{n!} = 1 + \imath x - \frac{x^2}{2!} - \imath\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \imath\frac{x^5}{5!} + \dots + =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \imath\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = \cos(x) + \imath\sin(x).$$

Таким образом, нами получена формула $e^{\imath x} = \cos(x) + \imath\sin(x)$, называемая формулой Эйлера. Подставляя в неё $-x$ получаем $e^{-\imath x} = \cos(x) - \imath\sin(x)$, откуда, после несложных преобразований, следуют формулы

$$\cos(x) = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2}, \quad \sin(x) = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}.$$

Разложение биномиальной функции

Определение 1. *Функция $f(x) = (1+x)^\alpha$ называется биномиальной функцией.*

Введём следующее обозначение

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Теорема 3. *Справедливо разложение для биномиальной функции*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

Радиус сходимости данного ряда равен 1.

Доказательство. Вычислим производные биномиальной функции $f(x) = (1+x)^\alpha$ в точке $x_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 1,\\
&f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f'(0) = \alpha;\\
&f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \quad f''(0) = \alpha(\alpha-1);\\
&\dots\\
&f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Следовательно, коэффициенты Тейлора биномиальной функции в точке $x_0 = 0$ равны

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}.$$

Подставляя в формулу Тейлора, получаем

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Для нахождения области сходимости данного ряда воспользуемся признаком Даламбера

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1} x^{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n} x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)x^{n+1}\right| n!}{\left|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n\right| (n+1)!} =\\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha-n||x|}{n+1} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha/n - 1|}{1+1/n} = |x|.
\end{aligned}
$$

Ряд сходится, если $|x| < 1$, и расходится, если $|x| > 1$. Следовательно, радиус сходимости ряда равен 1. Теорема доказана. □

Разложение логарифмической функции

Применим формулу разложения биномиальной функции для разложения логарифмической функции.

Теорема 4. *Справедливо разложение*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}.$$

Радиус сходимости ряда равен 1.

Доказательство. Положим в теореме 3 $\alpha = -1$ и, замечая что,

$$\binom{-1}{n} = \frac{-1(-2)(-3)\cdots(-n)}{n!} = (-1)^n \frac{n!}{n!} = (-1)^n,$$

получаем разложение

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad \forall x \in (-1, 1).$$

Далее, по теореме о почленном интегрировании степенного ряда для всех $x \in (-1, 1)$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n \, dt =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n},$$

что доказывает теорему 4. □

Вопросы для тестирования и контроля

1. Разложить функции $\mathrm{sh}(x) = (e^x - e^{-x})/2$ и $\mathrm{ch}(x) = (e^x + e^{-x})/2$ в ряд Тейлора в δ– окрестности точки $x_0 = 0$.

2. Проведя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложение $y = \mathrm{arctg}(x)$.

3. Разложить $f(x) = 1/x$ в ряд Тейлора в δ– окрестности точки $x_0 = 3$. Найти область сходимости полученного степенного ряда.

4. Разложить функцию $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ в степенной ряд и вычислить радиус сходимости данного ряда.

5. Пользуясь тождеством

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{2} + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3},$$

вычислить число π с точностью 0.001.