

# МЕТОД АНАЛИЗА СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ЦЕНТРАЛИЗОВАННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ МАРШРУТИЗАЦИЕЙ И ЗАДЕРЖКОЙ ИНФОРМАЦИИ

И.Е. Тананко, Н.П. Фокина

Саратовский государственный университет, Россия

## 1. Описание сети массового обслуживания

Рассматривается однородная замкнутая экспоненциальная сеть массового обслуживания  $N$ , содержащая  $L$  систем массового обслуживания  $S_i$  типа  $M/M/1$  с интенсивностями обслуживания  $\mu_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , и  $Q$  требований. Топология сети определяется матрицей смежности  $W = (w_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$  ориентированного графа, вершины которого соответствуют системам обслуживания, а дуги – возможным переходам требований между системами. Введем обозначения:  $\Theta = (\theta_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, L$  – маршрутная матрица,  $T$  – множество возможных маршрутных матриц соответствующих заданной топологии. Тогда матрица  $\Theta \in T$ , если  $\theta_{ij} = 0$  при  $w_{ij} = 0$  и  $\theta_{ij} \geq 0$  при  $w_{ij} = 1$ . В сети применяется централизованный способ управления ее эволюцией, путем использования различных маршрутных матриц  $\Theta \in T$  в течение интервалов времени фиксированной длительности  $\varphi$ . Целью управления является повышение качества функционирования сети, определяемого значением некоторой стационарной характеристики сети, называемой ведущей.

Обозначим через  $X$  пространство состояний сети  $N$ :

$$X = \{s^{(1)}, \dots, s^{(r)}, \dots, s^{(c_X)}\},$$

где  $s^{(r)} = (s_1^{(r)}, \dots, s_L^{(r)})$  – состояние сети с номером  $r$ ,  $s_i^{(r)}$  – число требований в системе  $S_i$  при пребывании сети в состоянии  $s^{(r)}$ ,  $c_X$  – число состояний сети  $N$ . Предположим, что состояние  $s^{(n)}$  имеет характеристику  $V^{(n)}$  – потенциал этого состояния (значение потенциала – неотрицательное вещественное число) [1]. Потенциал состояния определяет значимость пребывания сети в данном состоянии для достижения сетью наилучшего значения ведущей характеристики. При нумерации состояний предполагается, что если  $V^{(m)} > V^{(n)}$ , то  $m < n$ . В случае равенства потенциалов состоянию с меньшим математическим ожидание (м.о.) длительности пребывания присваивается меньший номер. Состояние  $s^{(1)}$  с максимальным потенциалом называется базовым. Множество номеров всех состояний сети обозначим через  $B = \{1, \dots, c_X\}$ . В качестве ведущей характеристики выберем пропускную способность сети  $N$ .

В процессе эволюции сети  $N$  в моменты времени  $t_k = k\varphi$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , в систему управления сетью передается информация о текущем состоянии сети  $s(t_k) = (s_1(t_k), \dots, s_L(t_k))$ ,  $s(t_k) \in X$ . Предположим, что общее время, затрачиваемое на процессы передачи информации о состоянии сети, принятия решения о маршрутной матрице и передачи решения о маршрутизации в сеть, которое назовем временем принятия решения, фиксировано и равно  $\delta > 0$ .

В зависимости от состояния сети  $s^{(r)} = s(t_k)$ ,  $r \in B$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , в последующий интервал времени  $[t_k + \delta, t_k + \varphi + \delta)$  в сети используется зависящая от данного состояния маршрутная матрица  $\Theta^{(r)} \in T$ . Формирование маршрутных матриц производится согласно методу, предложенному в работе [2]. Фрагмент процесса функционирования сети с фиксированной маршрутной матрицей назовем тактом. Отметим, что в течение интервала времени принятия решения  $[t_k, t_k + \delta)$  в сети используется та же маршрутная матрица, что и в момент  $t_k$  передачи информации о состоянии сети.

Целью данной работы является разработка метода анализа замкнутой сети массового обслуживания с управлением маршрутизацией и задержкой информации.

## 2. Метод анализа сети $N$ с задержкой информации

Обозначим через  $\Xi$  случайный процесс с множеством состояний  $B$ , описывающий эволюцию сети  $N$  с управлением. Процесс  $\Xi$  представляет собой последовательность фрагментов, соответствующих тактам. Эволюция сети  $N$  в течение тактов описывается цепями Маркова  $\{C^{(r)}, r = 1, \dots, c_X\}$ , с множеством состояний  $B$  и непрерывным временем (все состояния являются устойчивыми, длительность пребывания в состоянии  $n \in B$  является случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром  $0 < \alpha_n < \infty$ ); в обозначении  $C^{(r)}$  индекс  $r$  указывает номер состояния, информация о котором была передана за время  $\delta$  до момента начала реализации данной цепи. Длительности реализаций

цепей  $C^{(r)}, r = 1, \dots, c_X$ , равны длительностям тактов. Характеристики процесса  $\Xi$  определяются характеристиками цепей Маркова  $C^{(r)}, r = 1, \dots, c_X$ , и длительностями их реализаций.

Введем обозначения параметров и характеристик цепи  $C^{(r)}$ :  $A^{(r)} = \begin{pmatrix} a_{mn}^{(r)} \end{pmatrix}, m, n = 1, 2, \dots, c_X$ , – инфинитезимальный оператор;  $P^{(r)} = \begin{pmatrix} p_{mn}^{(r)} \end{pmatrix}$  – матрица вероятностей переходов марковской цепи скачков, связанной с цепью  $C^{(r)}$ ;  $P^{r,(t)} = \begin{pmatrix} p_{mn}^{r,(t)} \end{pmatrix}$  – матрица вероятностей переходов за время  $t$ , определяемая известным соотношением  $P^{r,(t)} = \exp(A^{(r)}t)$ . Тогда

$$a_{mn}^{(r)} = \varepsilon(s_i^{(m)}) \mu_i \theta_{ij}^{(r)}, \quad i, j \in \{1, \dots, L\}, \quad i \neq j, \quad m \neq n, \quad m, n \in B,$$

$$a_{mm}^{(r)} = - \sum_{i=1}^L \varepsilon(s_i^{(m)}) \mu_i, \quad \alpha_m = -a_{mm}^{(r)}, \quad m \in B,$$

$$p_{mn}^{(r)} = \frac{a_{mn}^{(r)}}{\alpha_m}, \quad m \neq n, \quad m, n \in B, \quad p_{mm}^{(r)} = 0, \quad m \in B,$$

где  $\varepsilon(s_i^{(m)}) = \begin{cases} 1, & s_i^{(m)} > 0, \\ 0, & s_i^{(m)} = 0. \end{cases}$

Абсолютное распределение  $q(t) = (q_l(t))$ ,  $l = 1, \dots, c_X$ , вероятностей состояний процесса  $\Xi$  в момент  $t_{k+1}$  определяется рекуррентно по следующим формулам,  $i = 1, \dots, k$ :

$$q_s(t_i + \delta) = \sum_{r=1}^{c_X} q_r(t_i) \sum_{m=1}^{c_X} q_m(t_{i-1}) p_{rs}^{m,(\delta)}, \quad s = 1, 2, \dots, c_X, \quad (1)$$

$$q_l(t_{i+1}) = \sum_{s=1}^{c_X} q_s(t_i + \delta) \sum_{m=1}^{c_X} q_m(t_i) p_{sl}^{m,(\varphi-\delta)}, \quad l = 1, 2, \dots, c_X. \quad (2)$$

Подставляя (1) в (2), получим выражение

$$q(t_{i+1}) = \left( q(t_i) \sum_{m=1}^{c_X} q_m(t_{i-1}) P^{m,(\delta)} \right) \sum_{m=1}^{c_X} q_m(t_i) P^{m,(\varphi-\delta)}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (3)$$

где  $q(t_0) = q(0)$  – начальное распределение вероятностей состояний процесса  $\Xi$ ,

$$q_s(t_1) = q_s(\varphi) = \sum_{r=1}^{c_X} q_r(0) p_{rs}^{r,(\varphi)}, \quad s = 1, 2, \dots, c_X.$$

Обозначим через  $\pi = (\pi_r)$ ,  $r = 1, 2, \dots, c_X$ , предельное распределение сети  $N$ ,  $\pi_r = \lim_{i \rightarrow \infty} q_r(t_i)$ . Формулы (1), (2) задают итерационную процедуру вычисления предельного распределения вероятностей состояний процесса  $\Xi$ .

Введем обозначения характеристик системы  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ :  $s_i^*$  – м.о. числа требований в системе,  $\lambda_i$  – интенсивность входящего потока требований,  $u_i^*$  – м.о. длительности пребывания требования в системе,  $\psi_i$  – коэффициент использования. Данные характеристики в момент времени  $t_k$

$$s_i^* = \sum_{n=1}^Q n P\{s_i = n\},$$

где

$$P\{s_i = n\} = \sum_{s^{(r)} \in X \text{ & } s_i^{(r)} = n} q_r(t_k);$$

$$\lambda_i = \bar{\mu}_i (1 - P\{s_i = 0\});$$

$$u_i^* = s_i^*/\lambda_i;$$

$$\psi_i = \lambda_i/\mu_i.$$

Если в сети  $N$  не учитывается время задержки при принятии решения, т.е.  $\delta = 0$ , то абсолютное распределение вероятностей  $q(t_{k+1})$  в момент принятия решения  $t_{k+1}$ :

$$q_s(t_{k+1}) = \sum_{r=1}^{c_X} q_r(t_k) p_{rs}^{r,(\varphi)}, \quad s = 1, 2, \dots, c_X. \quad (4)$$

Обозначим через  $\tilde{\pi} = (\tilde{\pi}_r)$  предельное распределение сети  $N$  с  $\delta = 0$ . Распределение  $\tilde{\pi}$  является решением системы уравнений

$$\tilde{\pi}_s = \sum_{r=1}^{c_X} \tilde{\pi}_r p_{rs}^{r,(\varphi)}, \quad s = 1, 2, \dots, c_X, \quad (5)$$

с условием  $\sum_{s=1}^{c_X} \tilde{\pi}_s = 1$ .

### 3. Пример

Рассмотрим сеть  $N$  с  $L = 4$ ,  $Q = 8$ ,  $\mu = (0,9 \ 1 \ 1,1 \ 1,2)$ , матрицей смежности

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Множество  $X$  состояний сети включает  $c_X = 165$  состояний. Состояния сети пронумерованы в порядке убывания значения их потенциалов, определяемых выражением:

$$V^{(\cdot)} = \frac{L-1}{\sum_{i=1}^L (\bar{x}^{(\cdot)} - s_i^{(\cdot)} / \mu_i)^2},$$

где

$$\bar{x}^{(\cdot)} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L s_i^{(\cdot)} / \mu_i.$$

Базовое состояние  $s^{(1)} = (2, 2, 2, 2)$ , множество доминантных состояний  $Y = \{s^{(1)}\}$ .

Положим параметры метода управления равными  $\varphi = 3$ ,  $\delta = 0,2$ . Основные характеристики сети, полученные для момента времени  $t = 5\varphi$  представлены в табл. 1.

Таблица 1

Основные характеристики сети  $N$

Характеристики сети	Номер системы			
	1	2	3	4
$u_i^*$	3,123	2,629	2,175	1,832
$s_i^*$	2,204	1,989	1,709	1,478
$\lambda_i$	0,706	0,756	0,786	0,807

Таким образом, пропускная способность сети  $N$  равна  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 3,055$ .

Получены аналогичные характеристики сети  $N$  при отсутствии задержки информации, которые представлены в табл. 2.

Таблица 2

Основные характеристики сети  $N$  при  $\delta = 0$

Характеристики сети	Номер системы			
	1	2	3	4
$u_i^*$	3,219	2,784	2,335	1,876
$s_i^*$	2,389	1,218	1,896	1,497
$\lambda_i$	0,742	0,796	0,812	0,798

Пропускная способность сети без задержки информации равна  $\sum_{i=1}^4 \lambda_i = 3,148$ . Из результатов экспериментов видно, что пропускная способность в сети обслуживания с задержкой информации на 3% меньше пропускной способности сети обслуживания без такой задержки.

Предложенный метод анализа сетей массового обслуживания может быть использован для построения моделей дискретных стохастических сетевых систем с ненулевым временем принятия решения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Митрофанов Ю.И., Фокина Н.П. Анализ сетей массового обслуживания с динамическим управлением маршрутизацией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. Сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 7, вып. 1. С. 27 – 33.
2. Тананко И.Е. Метод оптимизации маршрутных матриц открытых сетей массового обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. 2002. № 4. С. 39 – 46.

# ПОСТРОЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАФА

Е.А. Татаринов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, Украина

**Введение.** Основной проблемой компьютерной науки является проблема взаимодействия управляющей и управляемой систем, в частности управляющего автомата, агента и его операционной среды [1, 2]. Взаимодействие этих систем, зачастую, представляется как процесс перемещения агента по помеченному графу среды [3]. Целенаправленное перемещение агента в его операционной среде невозможно без формирования достаточно полной модели среды. К моделированию операционных сред определился ряд подходов, одним из которых является топологический [4]. В этом случае агенту недоступна метрическая или алгоритмическая информация о среде и доступна только информация о связях между различными областями среды. Часто такая ситуация возникает в роботике [5]. Топологические модели представляют собой графы с помеченными различными способами вершинами, дугами, инциденторами.

В настоящее время выделились три основные задачи исследования среды агентом: 1) самолокализация агента, 2) контроль соответствия модели среды и самой среды (проверка карты) и 3) построение агентом модели карты среды [5]. Задача распознавания среды (построения карты) находится в центре внимания и ей посвящено значительное количество работ [6 – 8]. Известен ряд алгоритмов распознавания, получены принципиальные результаты о возможности, невозможности и сложности такого распознавания с помощью тех или иных средств агента. Однако, на наш взгляд, недостаточно исследована и понята “сущность” такого распознавания.

В настоящей работе предложен новый простой алгоритм распознавания. В нем используется два агента: агент – исследователь (АИ), который перемещается по графу, и агент – экспериментатор (АЭ), который принимает сообщения от агента АИ и по ним строит представление исследуемого графа, причем, основное внимание уделено анализу того, что и как распознается на каждом шаге алгоритма и выделению элементарного эксперимента. Алгоритм основан на методе обхода графа вглубь и при этом агент специальным образом окрашивает элементы графа.

## 1. Основные определения и обозначения

### 1.1. Раскрашенные графы

Рассматриваются конечные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все неопределенные понятия общеизвестны и их можно найти в [10 – 12]. Пусть  $G = (V, E)$  – граф, у которого  $V$  – множество вершин,  $E$  – множество ребер, т.е. двухэлементных подмножеств  $(u, v)$ , где  $u, v \in V$ . Тройку  $((u, v), v)$  будем называть инцидентором («точкой прикосновения») ребра  $(u, v)$  и вершины  $v$ . Множество таких троек обозначим  $I$ . Множество  $L = V \cup E \cup I$  назовем множеством элементов графа  $G$ . Функцией раскраски графа  $G$  назовем отображение  $\mu: L \rightarrow \{w, r, b\}$ , где  $W$  интерпретируется как белый цвет,  $r$  – красный,  $b$  – черный. Пара  $(G, \mu)$  называется раскрашенным графом.

Последовательность  $u_1, u_2, \dots, u_k$  попарно смежных вершин называется путем в графе  $G$ , а  $k$  – длина пути. При  $u_1 = u_k$  этот путь называется циклом. Окрестностью  $O(v)$  вершины  $v$  будем называть множество элементов графа, состоящее из вершины  $v$ , всех вершин и смежных с  $v$ , всех ребер  $(v, u)$  и всех инциденторов  $((v, u), v), ((v, u), v)$ . Мощность множеств вершин  $V$  и ребер  $E$  обозначим через  $n$  и  $m$  соответственно. Ясно что  $m \leq \frac{n(n-1)}{2}$ . Изоморфизмом графа  $G$  и графа  $H$  назовем такую биекцию  $\varphi: V_G \rightarrow V_H$ , что  $(u, v) \in E_G$  только тогда, когда  $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E_H$ . Таким образом, изоморфные графы равны с точностью до обозначения вершин и раскраски их элементов.

### 1.2. Мобильные агенты

Мобильный агент АИ характеризуется следующими свойствами. Он передвигается по графу из вершины  $v$  в вершину  $u$  по ребру  $(v, u)$ . При этом он может изменить окраску вершин  $v, u$ , ребра  $(v, u)$ , инциденторов  $((v, u), v), ((v, u), v)$ . Находясь в вершине  $v$  агент АИ воспринимает метки всех элементов окрестности  $O(v)$  и на этом основании определяет, по какому ребру  $(v, u)$  он будет перемещаться и как