

5 к.

САРАТОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМ. Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО

В.А. Двинских, В.П. Степанчук

*Установившиеся процессы  
в линейных электрических  
цепях с сосредоточенными  
параметрами  
при гармоническом  
воздействии*

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
САРАТОВСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА



Саратовский орден Трудового Красного Знамени  
государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

В.А. Двинских, В.П. Степанчук

УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ  
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ  
С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ  
ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Учебно-методическое пособие  
для студентов физического факультета

Издательство Саратовского университета  
1984







или только запасать энергию магнитного поля (элемент индуктивности), или только запасать энергию электрического поля (элемент емкости). В дальнейшем для краткости будем опускать полные наименования элементов и называть их соответственно источником напряжения, источником тока, активным сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$  и емкостью  $C$ . В линейной электрической цепи величины  $R$ ,  $L$ ,  $C$  не зависят от протекающих через эти элементы токов и проложенным к ним напряжениям. В противном случае электрическая цепь является нелинейной.

Источником напряжения (рис. I, а) считается такой источник, у которого напряжение на выходных зажимах не зависит от свойств цепи, являющейся внешней по отношению к источнику. Источник напряжения имеет нулевое внутреннее сопротивление и полностью характеризуется законом изменения во времени его электродвижущей силы  $e(t)$ . При гармоническом законе изменения имеем

$$e(t) = E_M \cos(\omega t + \varphi_e), \quad (1)$$

где  $E_M$  - амплитуда, измеряемая в вольтах (В);

$\omega = 2\pi f$  - круговая частота (рад/с);

$f$  - частота, измеряемая в герцах (Гц);

$\varphi_e$  - начальная фаза, которая может быть принята равной нулю.

У источника тока (рис. I, б) сила тока, проходящего через его выходные зажимы, не зависит от свойств цепи, внешней по отношению к источнику. Источник тока имеет бесконечное внутреннее сопротивление и полностью характеризуется законом изменения во времени заданного тока  $j(t)$ . При гармоническом законе изменения имеем

$$j(t) = J_M \cos(\omega t + \varphi_j), \quad (2)$$

где  $J_M$  - амплитуда, измеряемая в амперах (А);

$\varphi_j$  - начальная фаза, также может быть принята равной нулю.

Линейное активное сопротивление количественно характеризует ся отношением напряжения  $U$  на данном элементе (рис. I, в) и тока  $i$ , проходящего через него:

$$R = \frac{U}{i} \quad \text{или} \quad U = Ri. \quad (3)$$

Эти соотношения являются математической записью закона Ома и могут быть также представлены в виде

$$i = \frac{1}{R} U = GU. \quad (4)$$

Постоянные коэффициенты  $R$  и  $G$ , являясь характеристическими для элемента, называются соответственно активным сопротивлением и активной проводимостью.

При гармоническом возмущении имеем

$$U = R J_M \cos \omega t = U_M \cos \omega t, \quad (5)$$

$$i = G U_M \cos \omega t = J_M \cos \omega t, \quad (6)$$

где  $J_M$ ,  $U_M$  - соответственно амплитуды тока и напряжения. Из анализа выражений (5) и (6) следует, что ток и напряжение в рассматриваемом элементе находятся в фазе.

Мгновенная мощность электрических колебаний в активном сопротивлении определяется соотношением

$$p = U i = Ri^2 = G U^2 \quad (7)$$

и всегда положительна. Следовательно и количество электрической энергии, рассеиваемой в элементе за любой конечный интервал времени  $t - t_0 > 0$ :

$$W = R \int_{t_0}^t i^2 dt = G \int_{t_0}^t U^2 dt. \quad (8)$$

Между напряжением  $U$ , приложенным к линейной индуктивности (рис. I, г), и током  $i$ , протекающим через нее, существует соотношение

$$U = L \frac{di}{dt} \quad (9)$$

оправданное при условии существования протекания. Из выражения (9) можно получить

$$i = \frac{1}{L} \int U dt + i(t_0), \quad (10)$$

где  $t_0$  - значение времени, принятое за начало отсчета  $i(t_0)$  - начальное значение тока, протекающего через индуктивность.



Полагая, что начальный ток через индуктивность равен нулю, для линейной индуктивности можно принять

$$i = \frac{1}{L} \int u dt, \quad (11)$$

При гармоническом воздействии имеем

$$u = -\omega L J_M \sin \omega t = U_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (12)$$

Следовательно, между амплитудами гармонических напряжений и токов выполняется зависимость

$$U_M = \omega L J_M, \quad (13)$$

а гармонические колебания напряжения на индуктивности опережают по фазе колебания тока в этом элементе на  $\frac{\pi}{2}$ .

Мгновенная мощность колебаний в индуктивности определяется соотношениями

$$p = ui = L i \frac{di}{dt} \quad (14)$$

и может принимать как положительные значения (энергия накапливается), так и отрицательные (энергия, запасенная ранее в этом элементе, отдается во внешнюю по отношению к нему цепь). Энергия, запасаемая в линейной индуктивности, имеет вид:

$$w = L \int_{t_0}^t (i \frac{di}{dt}) dt = L \int_0^i i di = \frac{L i^2}{2} \quad (15)$$

и всегда положительна.

Напряжение  $U$  на зажимах линейной емкости (рис. I, д) и ток  $i$ , проходящий через него, связаны между собой соотношением

$$i = C \frac{dU}{dt}, \quad (16)$$

также справедливым при условии существования производной. Из уравнения (16) можно получить

$$u = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i dt + u(t_0), \quad (17)$$

где  $t_0$  - значение времени, принятое за начало отсчета;  $u(t_0)$  - начальное напряжение на емкости.

Полагая, что начальное напряжение на емкости равно нулю, для линейной емкости можно принять

$$u = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (18)$$

Для гармонического воздействия имеем:

$$i = -\omega C U_M \sin \omega t = J_M \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (19)$$

Следовательно, между амплитудами гармонических токов и напряжений имеет место зависимость

$$J_M = \omega C U_M, \quad (20)$$

а гармонические колебания тока, протекающего через емкость, опережат по фазе колебания напряжения на его зажимах на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Мгновенная мощность колебаний в емкости определяется соотношением

$$p = ui = cu \frac{du}{dt} \quad (21)$$

и может принимать как положительные значения (энергия накапливается), так и отрицательные значения (энергия, запасенная ранее в этом элементе, отдается во внешнюю по отношению к нему цепь). Энергия, запасаемая в емкости, имеет вид:

$$w = C \int_{t_0}^t (u \frac{du}{dt}) dt = C \int_0^u u du = \frac{Cu^2}{2} \quad (22)$$

и всегда положительна.

## 2. Векторные диаграммы электрических цепей

Пусть вектор  $S$ , начало которого совмещено с началом прямоугольной системы координат (рис. 2, а), вращается в положительном направлении, то есть против часовой стрелки, с круговой частотой  $\omega$ , при этом в каждый данный момент времени значение угла будет равно  $\theta = \omega t + \varphi$ . Пусть длина этого вектора в выбранном масштабе численно равна амплитуде  $J_M$  некоторого гармонического колебания. Тогда проекция этого вращающегося вектора на ось абсцисс



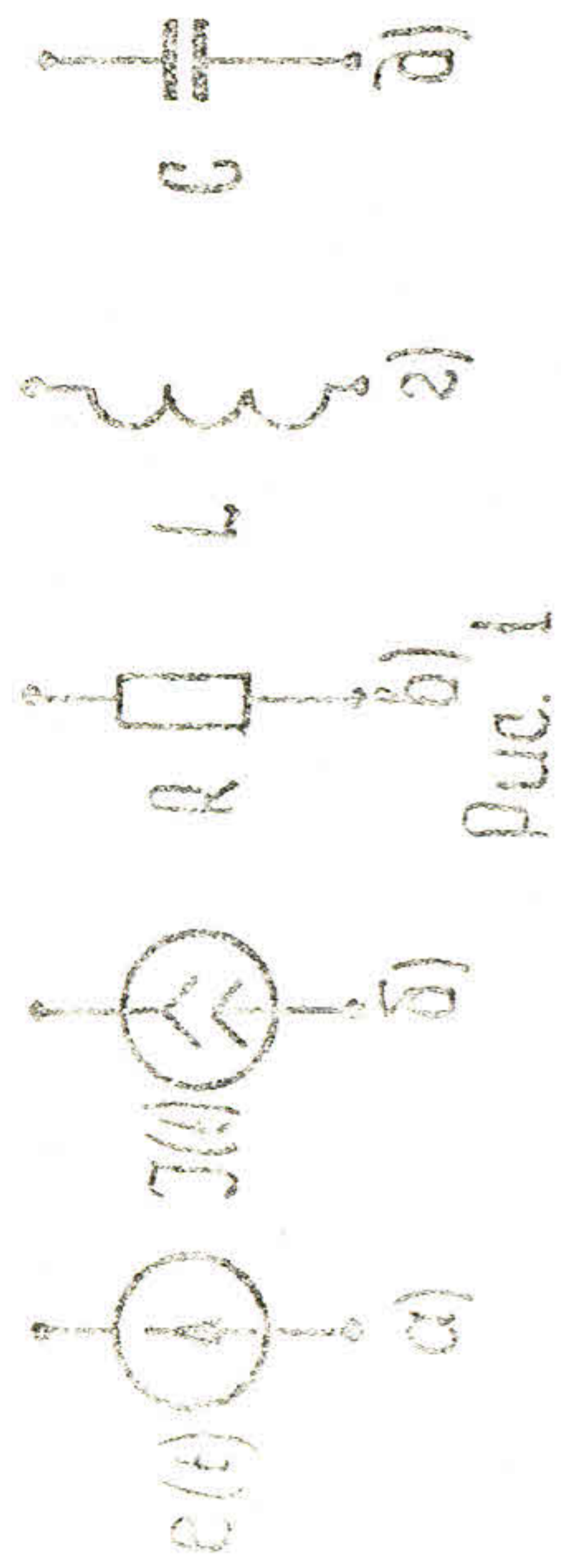
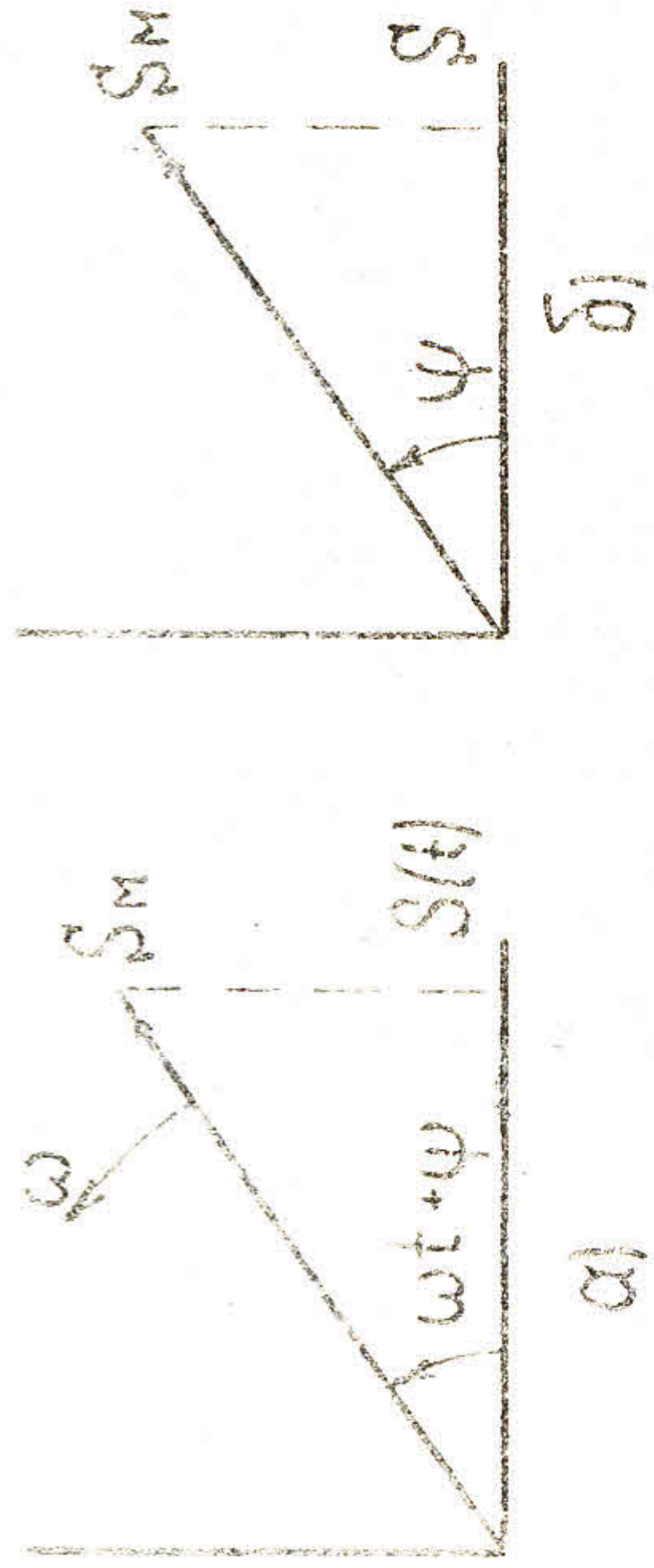
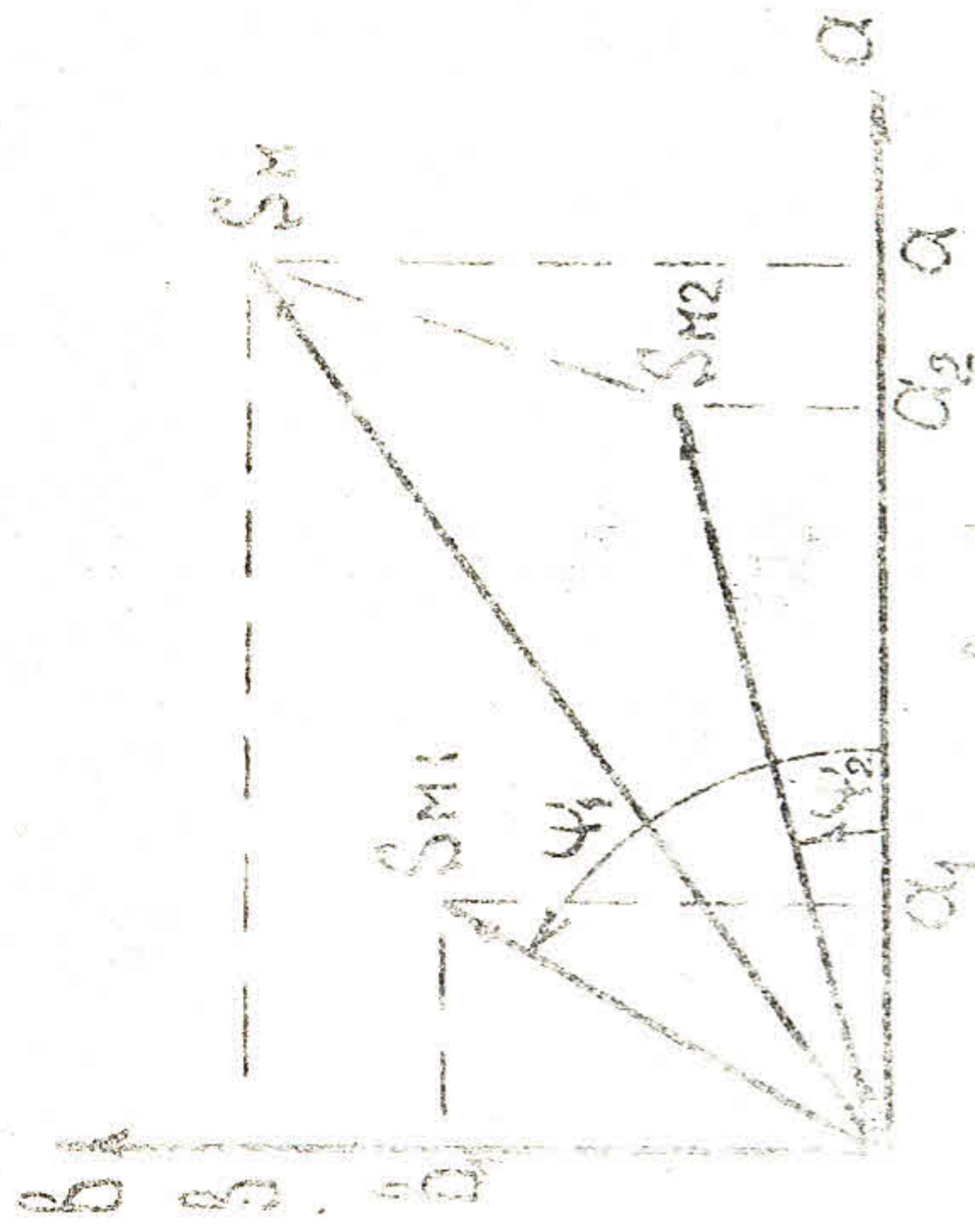


Рис. 1



а)

б)



б)

Рис. 2

$$S = S_M \cos \theta = S_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (23)$$

будет, в том же масштабе, численно равна мгновенному значению этого гармонического процесса. Чаще всего изобразят полосу вектора в момент времени  $t=0$ , когда угол  $\theta$  равен начальной фазе колебаний (рис. 2, б).

На одном и том же рисунке можно представить не один, а несколько векторов, изображающих в одном и том же масштабе гармонические колебания разных частот и в один и тот же момент времени, обычно при  $t=0$ . Тогда этот рисунок, называемый векторной диаграммой, позволяет наглядно судить о соотношениях амплитуд и начальной фаз гармонических колебаний в электрической цепи. Кроме того, векторное представление гармонических функций, частота которых одинакова, облегчает операции сложения и вычитания этих функций. В виду того, что сумма проекций двух векторов равна проекции геометрической суммы этих векторов, амплитуда и начальная фаза результирующей кривой легко находится из векторной диаграммы геометрическим сложением векторов. Действительно, для двух колебаний, векторы которых  $S_1$  и  $S_2$  изображены на рис. 2, в, построим и вектор  $S$ , являющийся суммой этих векторов. Проекции координатных векторов на координатные оси соответственно имеют вид

$$a_1 = S_{M1} \cos \varphi_1, \quad (24)$$

$$b_1 = S_{M1} \sin \varphi_1, \quad (25)$$

$$a_2 = S_{M2} \cos \varphi_2, \quad (26)$$

$$b_2 = S_{M2} \sin \varphi_2. \quad (27)$$

Проекции на те же оси результирующего вектора составят

$$a = a_1 + a_2, \quad (28)$$

$$b = b_1 + b_2. \quad (29)$$



Легко заметить, что модуль  $S_M$  и аргумент  $\varphi$  результирующего вектора определяются из выражений

$$S_M = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (30)$$

$$\tan \varphi = \frac{b}{a} \quad (31)$$

Следует подчеркнуть, что векторная диаграмма соответствует заданной частоте. Если в той же электрической цепи возникнет гармоническое колебание иной частоты, то все построения необходимо повторить заново. Обычно на векторной диаграмме дмкмы векторов выстраивают равными действующим (эффективным) значениям амплитуды для гармонических колебаний в  $\sqrt{2}$  раз меньше амплитуды.

На рис. 3, а приведена электрическая цепь, содержащая источник переменного напряжения и последовательно соединенные активные сопротивление, индуктивность и емкость. Очевидно, сумма мгновенных значений падений напряжений на элементах равна электродвижущей силе источника, то есть

$$U_{R1} + U_{L1} + U_{C1} = \mathcal{E} \quad (32)$$

где индексом указаны падения напряжения на соответствующих элементах. В такой цепи ток является общим и поэтому при построении векторной диаграммы (рис. 3, б) направление вектора этого тока  $I$  выбирают за основу и проводят ось  $Ox$  в направлении оси абсцисс. Разложение вектора падения напряжения на активном сопротивлении

$U_{R1}$  совпадает с направлением вектора тока. Направление вектора падения напряжения на индуктивности  $U_{L1}$  опережает направление вектора тока на  $\frac{\pi}{2}$ , то есть сдвинуто против часовой стрелки на такой угол. Направление вектора падения напряжения на емкости  $U_{C1}$  отстает от направления вектора тока на  $\frac{\pi}{2}$ . Таким образом, результирующей силой источника напряжения  $\mathcal{E}$  является вектор, полученный и сдвинут относительно вектора тока на угол  $\varphi$ . Вектор результирующей силы и падений напряжений в такой цепи будет рас-

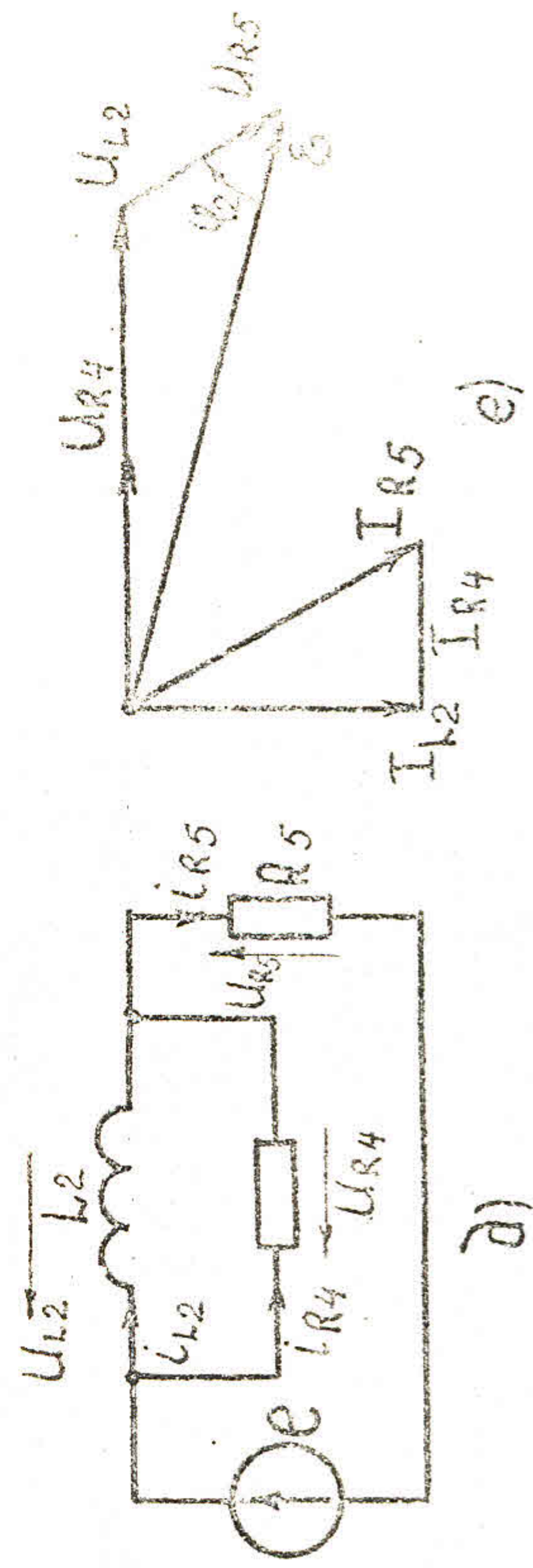
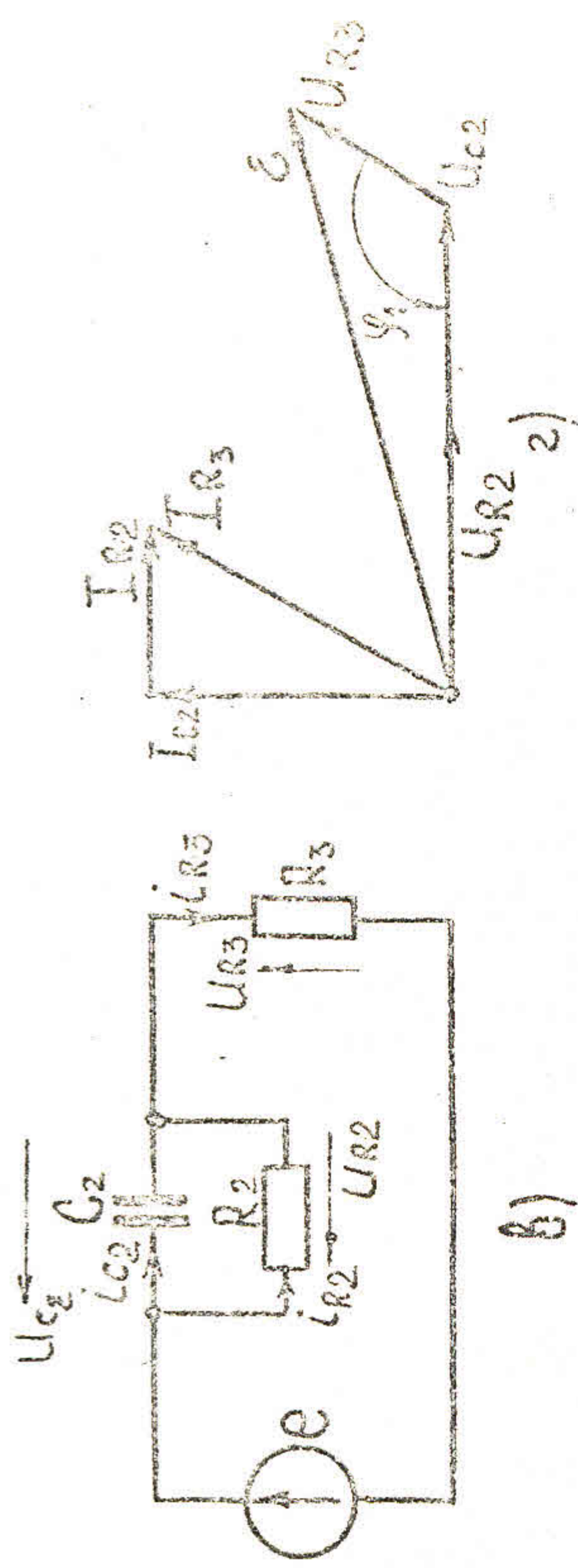
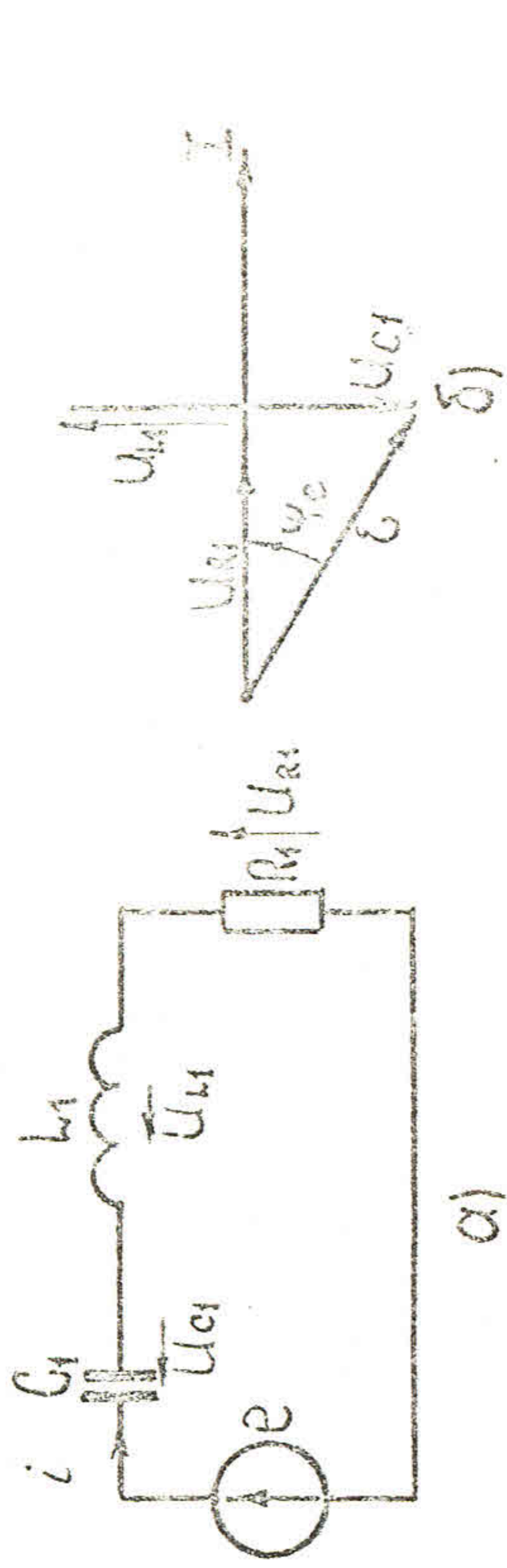


Рис. 3



на рис. 3, в приведенная электрическая цепь, в которой элементы  $L_2$  и  $R_2$  соединены параллельно, а к источнику напряжения эта цепочка включена через элемент  $R_3$ . При построении векторной диаграммы такой цепи (рис. 3, г) целесообразно по оси абсцисс направить вектор  $U_{C2}$ . Очевидно, вектор  $U_{R2}$  совпадает с вертикальным вектора  $U_{C2}$ , а вектор  $I_{C2}$  опережает последний на  $\frac{\pi}{2}$ . Учитывая, что вектор  $I_{R2}$  совпадает по направлению с вектором  $U_{R2}$ , получаем вектор  $I_{R3}$ . Прикладывая к концу вектора  $U_{C2}$  вектор  $U_{R3}$ , совпадающий по направлению с вектором  $I_{R3}$ , получаем вектор  $\mathcal{E}$ , сдвинутый относительно вектора  $U_{R3}$  на угол  $\varphi_1$ .

На рис. 3, д. приведена электрическая цепь, с которой элементами  $L_2$  и  $R_4$  соединены параллельно, а к источнику напряжения эта цепочка включена через элемент  $R_5$ . При построении векторной диаграммы такой цепи (рис. 3, е) целесообразно по оси абсцисс направить вектор  $U_{L2}$ , а направлением которого совпадает вектор  $U_{R4}$ , а вектор  $I_{L2}$  отстает на  $\frac{\pi}{2}$ . Поскольку вектор  $I_{R4}$  совпадает по направлению с вектором  $U_{R4}$ , получаем вектор  $I_{R5}$ . Прикладывая к концу вектора  $U_{L2}$  вектор  $U_{R5}$ , совпадающий по направлению с вектором  $I_{R5}$ , получаем вектор  $\mathcal{E}$ , сдвинутый относительно вектора  $U_{R5}$  на угол  $\varphi_2$ .

### 3. Символический метод анализа гармонических процессов

в линейных электрических цепях

Гармоническая функция

$$s(t) = S_M \cos(\omega t + \varphi) \quad (33)$$

известной круговой частоты полностью характеризуется двумя действительными числами  $S_M$  и  $\varphi$ , которые можно объединить в одно комплексное число.

$$\dot{S}_M = S_M e^{j\varphi}, \quad (34)$$

т.е.

называемое символическим изображением. Формально символическое изображение является результатом Фурье-преобразования исходной функции, а именно при  $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\begin{aligned} \dot{S}_M &= \frac{1}{T} \int_0^T S(u) e^{j\omega t} dt = \frac{2S_M}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{j(\omega t + \varphi)} + e^{j(\omega t - \varphi)}}{2} e^{j\omega t} dt \\ &= \frac{S_M}{T} e^{j\varphi} \int_0^T e^{-j\omega t} dt = S_M e^{j\varphi}. \end{aligned} \quad (35)$$

Обратному преобразованию символического изображения в исходную функцию соответствует операция

$$s(t) = \operatorname{Re}(\dot{S}_M e^{j\omega t}), \quad (36)$$

используя формулу Эйлера

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + jsin \alpha, \quad (37)$$

или

$$S_M e^{j\omega t} = S_M e^{j(\omega t + \varphi)} = S_M \cos(\omega t + \varphi) + j S_M \sin(\omega t + \varphi), \quad (38)$$

откуда следует, что вещественная часть этого выражения и есть исходная функция.

Если некоторая синусоидальная функция является суммой гармонических функций, то или любого числа синусоидальных функций равных частот, то есть

$$S_M \cos(\omega t + \varphi) = \sum_{k=1}^N S_{Mk} \cos(\omega t + \varphi_k), \quad (39)$$

то ее символическое изображение, в силу линейности преобразования или (35) равно сумме символических изображений функций

$$\dot{S}_M = \sum_{k=1}^N \dot{S}_{Mk}. \quad (40)$$

Очевидно, операция умножения гармонической функции на величину величин постоянной множитель, которая приводит лишь к изменению амплитуды функции, соответствует операции умножения символического изображения функции на тот же множитель.



Дифференцируя гармоническую функцию, имеем:

$$\frac{d}{dt} S(t) = -\omega S_M \sin(\omega t + \varphi) = \omega S_M \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \quad (41)$$

Символическое изображение найденной гармонической функции имеет вид:

$$\omega S_M e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} = \omega S_M e^{j\varphi} j \frac{1}{\omega} = j \omega S_M \quad (42)$$

и отличается от символического изображения исходной функции лишь множителем  $j\omega$ , называемым оператором.

Интегрируя гармоническую функцию, имеем

$$\int S(t) dt = \frac{S_M}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) = \frac{S_M}{\omega} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}). \quad (43)$$

Символическое изображение этой функции таково:

$$\frac{S_M}{\omega} e^{j(\varphi - \frac{\pi}{2})} = \frac{S_M e^{j\varphi}}{\omega} \cdot j \frac{1}{\omega} = \frac{S_M}{j\omega}, \quad (44)$$

что операции интегрирования гармонической функции соответствует знак операции деления ее символического изображения на операнд  $j\omega$ .

Следовательно, обращение к символическим изображениям позволяет перейти от интегро-дифференциальных уравнений во временной области к алгебраическим уравнениям в комплексной области, и тем самым упрощаются выкладки. При этом обратный переход осуществляется путем выделения вещественной части решения.

Для электрической цепи, приведенный на рис. 3, а, с учетом выражений (3), (9), (19) уравнение (32) приобретает вид

$$R_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = \mathcal{E}_M, \quad (45)$$

или в символической форме -

$$R_1 I_M + j\omega L_1 I_M + \frac{1}{j\omega C} I_M = \mathcal{E}_M. \quad (46)$$

Из последнего уравнения получаем

$$I_M = \frac{\mathcal{E}_M}{R_1 + j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C})}. \quad (47)$$

Пользуясь полученным соотношением, умножая числитель и знаменатель на комплексно сопряженное выражение последнего, можно записать выражения для модуля и аргумента действующего значения тока:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\sqrt{R_1^2 + (\omega L_1 - \frac{1}{\omega C})^2}} \quad (48)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \frac{R_1}{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}}. \quad (49)$$

При известных параметрах рассматриваемой электрической цепи, заданной электродвижущей силой источника и частоте сигнала, можно вычислить ток и падения напряжений на элементах этой цепи. Учитывая, что  $\varphi_e = -\varphi_i$ , получаем все необходимые данные и для построения векторной диаграммы этой электрической цепи.

Знаменатель выражения (47) можно рассматривать в качестве комплексного сопротивления

$$Z = R_1 + j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}), \quad (50)$$

$$\text{или} \quad Z = R + jX, \quad (51)$$

где  $R = R_1$  - активное сопротивление;

$X = (\omega L_1 - \frac{1}{\omega C})$  - реактивное сопротивление, которое для других целей может иметь иной вид.

Вводя комплексную проводимость, получаем:

$$Y = \frac{1}{Z} = g + j\beta, \quad (52)$$

$$g = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad (53)$$

$$\beta = -\frac{X}{R^2 + X^2}. \quad (54)$$

С учетом (50) и (52) символическая запись закона Ома приобретает вид:

$$I_M = \frac{U_M}{Z}, \quad (55)$$

$$I_M = U_M Y. \quad (56)$$



Для электрической цепи, приведенной на рис. 3, в. в символической форме имеет

$$I_{R3} = \frac{E_M (1 + j\omega C_2 R_2)}{R_2 (1 + j\omega C_2 R_2) + R_3} \quad (57)$$

Пользуясь полученным соотношением, также умножив числитель и знаменатель (57) на комплексно-сопряженное выражение, получаем:

$$I_{R3} = E \frac{\sqrt{(R_2 + R_3)^2 + (\omega C_2 R_2 R_3)^2}}{(R_2 + R_3)^2 + (\omega C_2 R_2 R_3)^2} \quad (58)$$

$$|I_{R3}| = \frac{E C_2 R_2^2}{R_2 + R_3 + (\omega C_2 R_2)^2 R_3} \quad (59)$$

Для электрической цепи, приведенной на рис. 3, д, получаем соответственно

$$I_{R5M} = \frac{E_M (R_4 + j\omega L_2)}{R_4 R_5 + j\omega L_2 (R_4 + R_5)} \quad (60)$$

$$I_{R5} = E \frac{\sqrt{(R_4 R_5 + (\omega L_2)^2 (R_4 + R_5))^2 + (\omega L_2 R_4)^2}}{(R_4 R_5 + (\omega L_2)^2 (R_4 + R_5))^2 + (\omega L_2 R_4)^2} \quad (61)$$

$$|I_{R5}| = \frac{\omega L_2 R_4^2}{R_4^2 R_5 + (\omega L_2)^2 (R_4 + R_5)} \quad (62)$$

### МНОГОЭЛЕМЕНТНЫЕ ТОКОВЫЕ И НАПРЯЖЕННЫЕ ИЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЦЕПИ

1. Соединение параллельно и последовательно элементов цепи

В теории цепей электрические напряжения определяются как разность потенциалов между соответствующими узлами электрической цепи. Поэтому если потенциал некоторого узла равен  $\varphi_k$ , а потенциал другого узла этой же цепи равен  $\varphi_l$ , то можно записать

или

$$U_{lk} = \varphi_l - \varphi_k \quad (2)$$

При этом величины  $U_{kl}$  и  $U_{lk}$  отличаются только знаком. В последующем примем, что при графическом изображении электрических цепей положительное направление соответствует направлению от низкого потенциала к более высокому.

Под электрическим током в теории электрических цепей понимается ток в ветвях и соединительных проводах, а за положительное направление тока принимается направление от более высокого потенциала такой цепи к более низкому.

При расчете токов и напряжений в реальных электрических цепях она заменяется некоторой идеализированной цепью из того или иного числа ветвей (частей цепи, содержащих элементы), токи и напряжения на них пренебрежимо мало отличаются от токов и напряжений в исходной цепи. Таким идеализированную цепь называют моделью реальной электрической цепи. Графическое изображение модели исходной цепи называем схемой замещения или просто схемой цепи, в которой соединительные провода изображаются линиями. При этом считается, что соединительные провода не оказывают влияния на свойства модели цепи, как имеющие нулевое сопротивление.

Можно считать, что резистор по своим свойствам не отличается от элемента активного сопротивления с сопротивлением  $R$  или проводимостью  $G = \frac{1}{R}$ , моделью катушки индуктивности является элемент индуктивности с индуктивностью  $L$ , а конденсатора - элемент емкости с емкостью  $C$ . С помощью трех основных элементов расчета следует учитывать, что в катушках индуктивности и конденсаторах энергии, подведенная к ним, не только запасается, но и рассеивается. Если рассеяние энергии в катушке не может считаться пренебрежимо малым по сравнению с рассеиваемой в других устройствах той же цепи, в схему замещения катушки следует ввести активное сопротивление, обычно выделяемое последовательно. При достаточно высоких частотах в схему замещения катушки индуктивности необходимо ввести емкость, например, включаемую параллельно. Рассеяние энергии



I-я группа уравнений	Уравнения пассивных элементов
$\sum_{k=1}^n i_k = 0$	$\sum_{k=1}^n u_k = 0$
$i = GU$	$u = Ri$
$i = C \frac{dU}{dt}$	$u = L \frac{di}{dt}$
$i = \int \frac{u}{L} dt$	$u = \int i R dt$

Уравнения источников

$$j = J(t) \quad e = e(t)$$

в конденсаторах учитывается подписанием параллельно емкости активного сопротивления. Если модель электрической цепи содержит конечно число элементов, то такая цепь называется цепью с сосредоточенными параметрами (параметрами). Отметим, что электрические модели привлекаются также для количественного изучения колебаний в механических и акустических системах, в оптике, ядерной физике и др. При этом необходимо, чтобы используемая система и ее электрическая модель описывались одинаковыми математическими уравнениями.

В основе методов расчета электрических цепей лежат законы, установленные опытным путем Кирхгофом. Первый из этих законов, описывающий непрерывность токов, гласит: алгебраическая сумма мгновенных значений токов в любом узле (соединения трех или более ветвей) электрической цепи равна нулю. Общее число уравнений, которое можно составить по первому закону Кирхгофа для заданной цепи, равно числу узлов цепи  $N_y$ , однако очевидно только

$$N = N_y - 1 \quad (3)$$

уравнений будут независимыми. При параллельном соединении элементов цепи напряжения на их зажимах будут одинаковыми, и поэтому для расчета таких цепей достаточно использовать первый закон Кирхгофа и на его основе заменить цепь, состоящую из параллельного соединения элементов с активными проводимостями  $G_1, G_2, \dots, G_n$ , эквивалентной активной проводимостью

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad (4)$$

Второй закон Кирхгофа, отражающий закон сохранения энергии, сводится к следующему: алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений в любом контуре цепи равна нулю. В случае последовательного соединения, например, активных сопротивлений  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , образующих контур, на основании второго закона имеем эквивалентное активное сопротивление:

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n \quad (5)$$

Уравнения и соотношения, характеризующие электрические цепи, можно разбить на две группы, как показано в приведенной ниже табл. 1, в которой уравнения Кирхгофа в левых частях включают в себя соответственно источники тока и источники напряжения.

Таблица свидетельствует о принципиальной возможности существования таких цепей, у которых токи в одной цепи изменятся, как напряжения в другой цепи. Уравнения подобны цепи схожи по форме и отличаются лишь обозначениями переменных и коэффициентов уравнений. Эти цепи называют дуальными. "Схожие" величины в уравнениях дуальных цепей также называют дуальными величинами (табл. 2).

Таблица 2

I-я группа величин	II-я группа величин
Ток	Напряжение
Напряжение	Ток
Активная проводимость	Активное сопротивление
Емкость	Индуктивность
Индуктивность	Емкость
Задающий ток	Электродвижущая сила



Прямая дуальности состоит в следующем: если как-либо положить, теорема, зависимости, решая и т.п. верны для некоторой электрической цепи, то они будут верны и для дуальных величин в дуальной электрической цепи. Например, последовательное (параллельное) соединение элементов в исходной электрической цепи переходит в параллельное (последовательное) соединение дуальных элементов в дуальной электрической цепи.

Напряжения и токи в электрической цепи представляют собой "реакции", или "отклик" цепи на приложенное к ней воздействие. В линейных электрических цепях реакция пропорциональна воздействию. В соответствии с принципом суперпозиции (наложения) реакция линейной электрической цепи на совокупность воздействий равна сумме реакций, вызываемых в той же цепи каждым из воздействий в отдельности.

Сложной электрической цепью называется такая цепь, которую можно свести путем эквивалентного преобразования к последовательному или параллельному соединению ветвей, содержащих элементы.

Узелом называют соединяющие несколько элементов электрической цепи (соединяющие 2-х элементов - простой узел, а 3-х элементов - сложный узел). Ветвь - это часть электрической цепи между двумя узлами, которая обменивается энергией с остальной частью цепи только через посредство этих узлов. Установившееся состояние в линейных электрических цепях при гармоническом воздействии описывается уравнениями Кирхгофа, которые в символической форме могут быть записаны в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^m \dot{I}_k + \sum_{k=1}^n \dot{y}_k = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{k=1}^m \dot{I}_k Z_k = \sum_{k=1}^n \dot{e}_k, \quad (7)$$

где  $\dot{I}_k$  - комплексное эффективное значение  $k$ -го тока;

$\dot{y}_k$  - комплексное эффективное значение  $k$ -го источника тока;

$Z_k$  - комплексное сопротивление  $k$ -й ветви;

$\dot{e}_k$  - комплексное эффективное значение  $k$ -й источника тока;

$\dot{I}_k$  - комплексное эффективное значение  $k$ -й ветви.

Зная токи, проходящие через любую ветвь цепи, можно найти как напряжение на зажимах этой ветви, так и напряжение между любой парой узлов цепи. Для чего следует взять алгебраическую сумму напряжений на ветвях, соединяющих эти узлы.

Метод расчета электрических цепей, когда неизвестными, подлежащими определению, являются токи в ветвях цепи, называется методом токов ветвей. Иногда его называют также методом уравнений Кирхгофа. Пусть цепь содержит  $N_B$  ветвей,  $N_U$  узлов и  $N_G$  источников напряжений, и  $N_G$  условий. Полагая, что в цепи отсутствуют источники токов. Задавшись произвольно направлением токов в ветвях цепи и переименовав эти токи в произвольном порядке. Тогда по первому закону Кирхгофа можно составить для  $N_U - 1$  независимых узлов цепи такое же число уравнений относительно токов элементов. По второму закону Кирхгофа можно составить  $N_B - N_U + 1$  уравнений. В эти уравнения будут входить как комплексные эффективные значения электродвижущих сил источников напряжений, так и падения напряжений на ветвях, пропорциональные протекающим через эти ветви токам. Следовательно получаем совокупность уравнений, составленных по первому и второму законам Кирхгофа, из которых вычислительными методами можно найти токи в ветвях цепи. Если в результате расчета один или несколько токов имеют знак минус, то выбранные направления этих токов надо сменить на противоположные.

Дуальным по отношению к изложенному методу токов ветвей является метод напряжений на зажимах ветвей. Здесь неизвестными, подлежащими определению, являются напряжения на зажимах ветвей цепи, зная которые можно найти токи в ветвях цепи и напряжения между любой парой узлов цепи. Используемые эти методы расчета электрических цепей приводят к максимальному числу уравнений и соответственно к громоздким вычислениям, затрудняет подготовку программ для расчетов на цифровых вычислительных машинах, и поэтому на практике для расчета линейных цепей используются другие методы, изложение которых дано ниже.



## 2. Метод контурных токов

В случае, когда электрическая цепь содержит только источники напряжения и является планарной (плоской), токи в такой цепи целесообразно определять по методу контурных токов, представляющему собой математическую абстракцию. Применение этого метода предпочтительно, когда число узлов цепи превышает число ее контур.

На рис. 4, а изображена электрическая цепь с отмеченными контурами 1, 2 и комплексными контурными токами  $\dot{I}_1$ ,  $\dot{I}_2$ , которые соответственно в элементах с комплексными сопротивлениями  $Z_1$  и  $Z_2$  совпадают с истинными токами, а в элементе с комплексным сопротивлением  $Z$  ток через этот элемент равен разности контурных токов. Направления контурных токов во всех контурах принято выбирать одинаковыми, например, по часовой стрелке. Для первого контура, также при обходе по часовой стрелке, согласно второго закона Кирхгофа имеем

$$Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 (\dot{I}_1 - \dot{I}_2) = \dot{\mathcal{E}}_1, \quad (8)$$

или

$$Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 = \dot{\mathcal{E}}_1, \quad (9)$$

где  $Z_{11} = Z_1 + Z_3$  — условно называемое собственным комплексным сопротивлением первого контура, равное сумме комплексных сопротивлений, входящих в первый контур;

$Z_{12} = -Z_3$  — взаимное комплексное сопротивление между первым и вторым контурами.

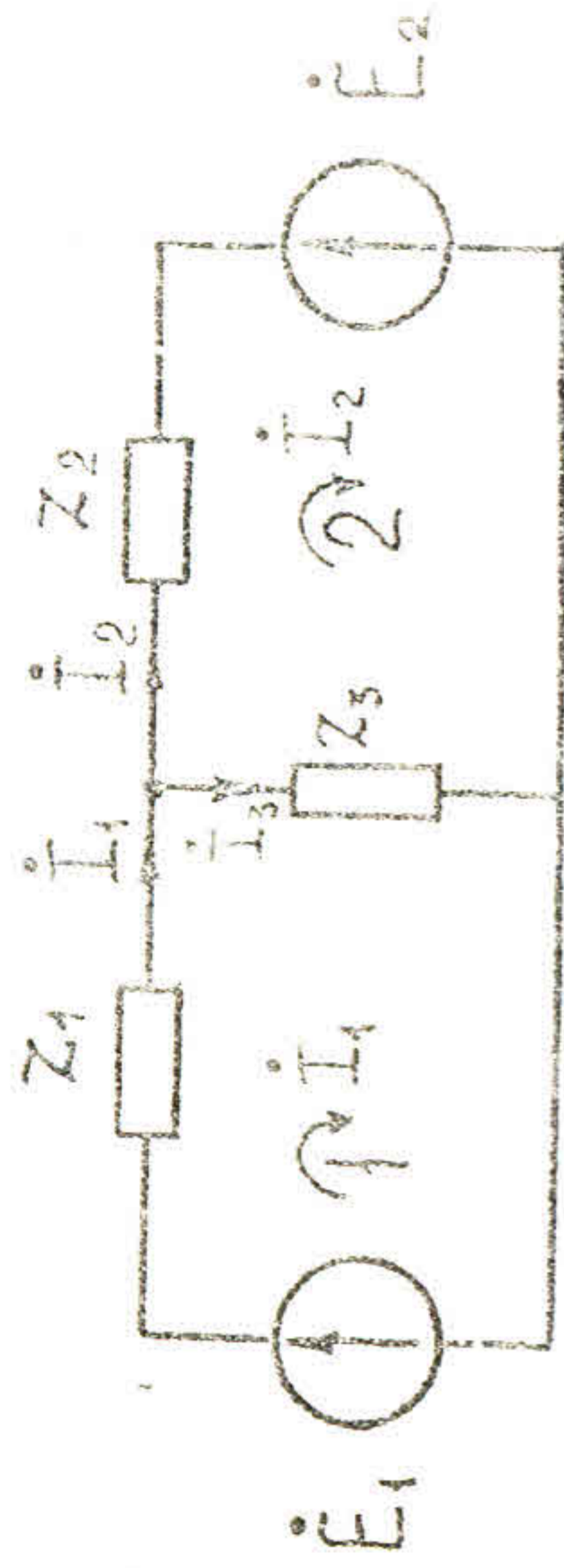
Для второго контура, также при обходе его по часовой стрелке, получаем

$$Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 (\dot{I}_2 - \dot{I}_1) = -\dot{\mathcal{E}}_2, \quad (10)$$

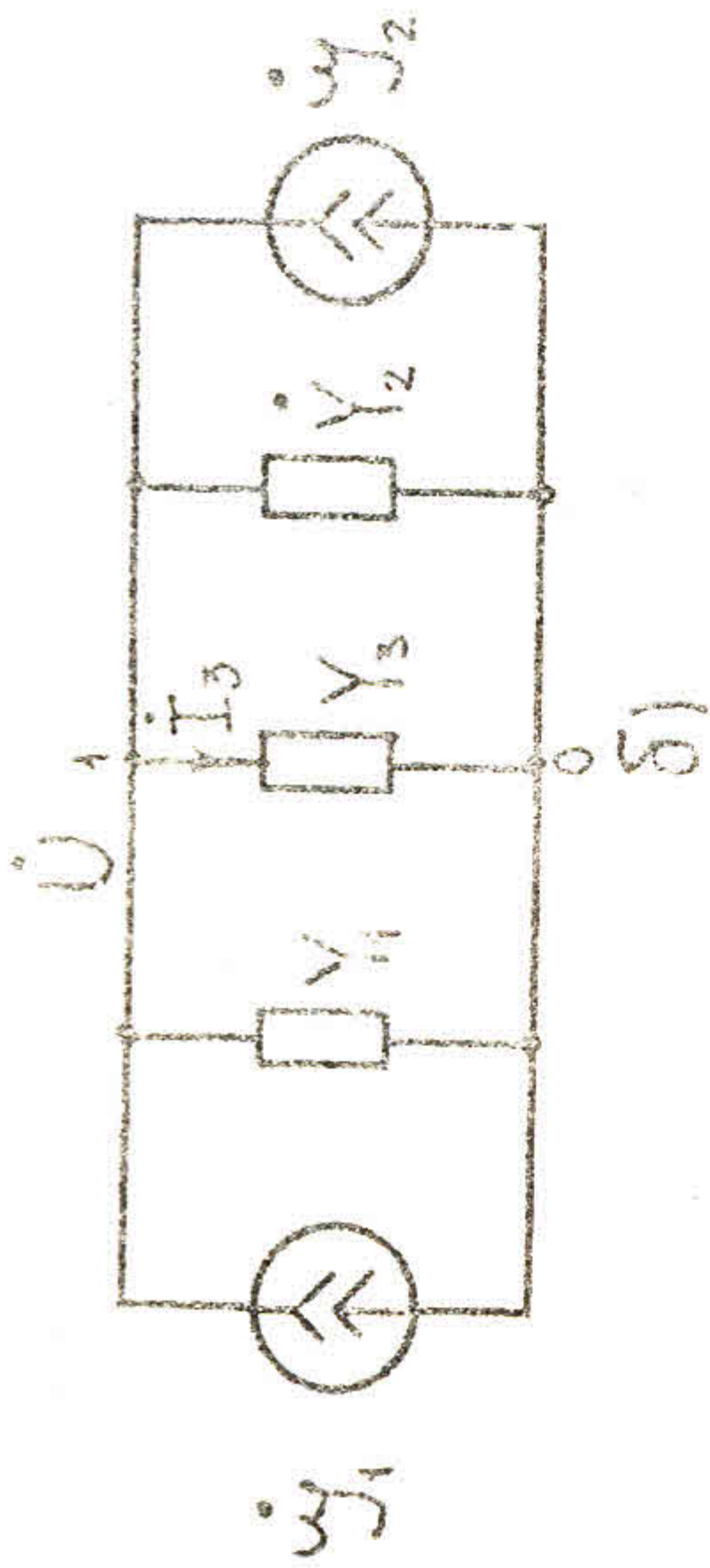
или

$$Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 = -\dot{\mathcal{E}}_2, \quad (11)$$

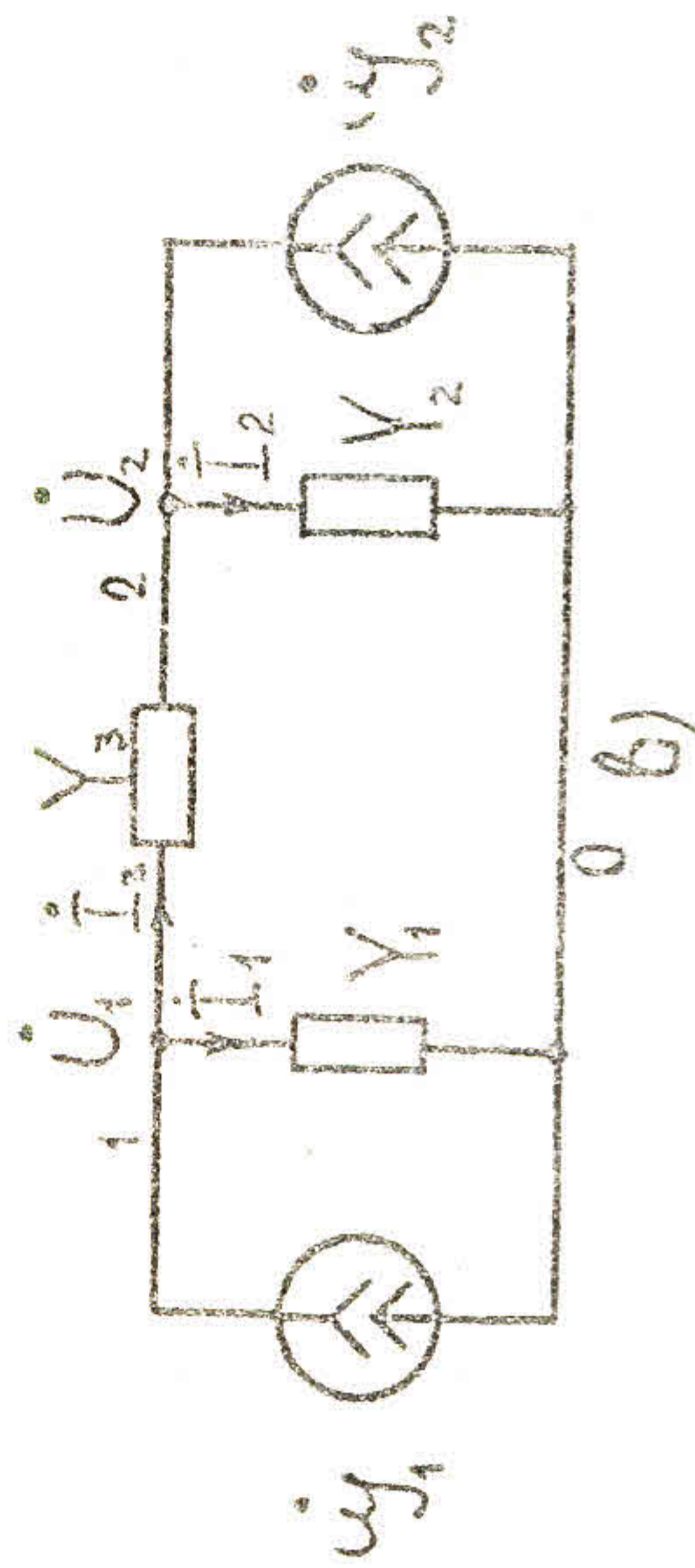
где  $Z_{21} = Z_3$  — условно называемое собственным комплексным сопротивлением второго контура, равное сумме сопротивлений, входящих во второй контур;



а)



б)



б)

Рис. 4



В результате значения токов в ветвях рассматриваемой цепи могут быть вычислены из следующих выражений

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_1, \quad (23)$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{I}_2, \quad (24)$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 - \dot{I}_2. \quad (25)$$

Для сокращения записи этой системы уравнений введем таблицы, называемые матрицами. Так, для рассматриваемой схемы

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\dot{I} = \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{E}}_1 \\ \dot{\mathcal{E}}_2 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

где  $Z$  - квадратная матрица комплексных сопротивлений электрической цепи порядка  $2 \times 2$ ;

$\dot{I}$  - матрица-столбец комплексных контурных токов, называемая искомым вектором, порядка  $1 \times 2$ ;

$\dot{\mathcal{E}}$  - матрица-столбец комплексных электродвижущих сил источников напряжения, называемая заданным вектором, порядка  $1 \times 2$ .

С учетом (26+28) матричное уравнение электрической цепи имеет вид

$$Z \cdot \dot{I} = \dot{\mathcal{E}}. \quad (29)$$

Если электрическая цепь содержит  $n$  независимых контуров, в каждый из которых может входить несколько источников напряжения, то матрица уравнения (29) имеет вид

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\dot{I} = \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dots \\ \dot{I}_n \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$Z_{21} = -Z_{12}$  - взаимное комплексное сопротивление между вторым и первым контурами.

Решение системы уравнений (9) и (11) по правилу Крамера, например, для первого контурного тока имеет вид

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}. \quad (12)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}, \quad (13)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dot{\mathcal{E}}_1 & Z_{12} \\ -\dot{\mathcal{E}}_2 & Z_{22} \end{vmatrix} \quad (14)$$

представляет собой определитель этой системы уравнений, а находится из такого определителя, если в нем столбец коэффициентов при неизвестном неизвестном заменить свободными членами. Раскрытая определитель  $\Delta_1$  по элементам его первого столбца, имеем:

$$\Delta_1 = (-1)^2 \dot{\mathcal{E}}_1 \Delta_{11} + (-1)^{2+1} (-\dot{\mathcal{E}}_2) \Delta_{21}, \quad (15)$$

где  $\Delta_{11}, \Delta_{21}$  - миноры определителя  $\Delta_1$ .

Для рассматриваемого случая эти миноры составляют

$$\Delta_{11} = Z_{22}, \quad (16)$$

$$\Delta_{21} = Z_{12}. \quad (17)$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \dot{\mathcal{E}}_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{\mathcal{E}}_2. \quad (18)$$

Первый контурный ток запишем выражением

$$\dot{I}_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{\mathcal{E}}_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{\mathcal{E}}_2. \quad (19)$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} Z_{11} & \dot{\mathcal{E}}_1 \\ Z_{21} & -\dot{\mathcal{E}}_2 \end{vmatrix}, \quad (20)$$

$$\Delta_{12} = Z_{21}, \quad (21)$$

$$\Delta_{22} = Z_{11}. \quad (22)$$



$$\dot{E} = \begin{pmatrix} \dot{E}_{11} \\ \dot{E}_{22} \\ \vdots \\ \dot{E}_{nn} \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где  $\dot{E}_{kk}$  - алгебраическая сумма электродвижущих сил источников напряжений входящих в k-й контур.

Комплексные контурные токи вычисляются из следующих выражений:

$$\dot{I}_k = (-1)^{1+k} \frac{\Delta_{1k}}{\Delta} \dot{E}_{11} + (-1)^{2+k} \frac{\Delta_{2k}}{\Delta} \dot{E}_{22} + \dots + (-1)^{n+k} \frac{\Delta_{nk}}{\Delta} \dot{E}_{nn} \quad k=1,2,\dots,n \quad (33)$$

При этом определитель равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}, \quad (34)$$

а его минор  $\Delta_{ik}$  - это определитель, который образуется из исходного определителя, если в нем вычеркнуть i-строку и k-столбец. Так, например

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}. \quad (35)$$

Для решения подобных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами используются стандартные программы для цифровых вычислительных машин, и задача сводится к вводу коэффициентов матриц сопротивлений и заданного вектора.

### 3. Метод узловых напряжений

В случае, когда электрическая цепь содержит только источники тока, напряжения между узлами целесообразно определять по методу узловых напряжений, также представляющих собой математическую абстракцию. При этом один из узлов принимается за опорный, obviously тот, к которому присоединено одним зажимом наибольшее

количество элементов, и напряжения в узлах отсчитываются относительно опорного узла и тем самым обеспечивается автоматическое выполнение второго закона Кирхгофа.

В качестве примера рассмотрим электрическую цепь, приведенную на рис. 4,б. Очевидно, эта цепь эквивалентна электрической цепи, показанной на рис. 4,а, при следующих соотношениях:

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{E}_1}{Z_1}, \quad (36)$$

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{E}_2}{Z_2}, \quad (37)$$

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}, \quad (38)$$

$$Y_2 = \frac{1}{Z_2}, \quad (39)$$

$$Y_3 = \frac{1}{Z_3}. \quad (40)$$

Использование этих соотношений позволяет осуществить переход от источников напряжений к эквивалентным источникам токов.

Однако для идеальных источников, то есть при  $Z_1 = 0; Z_2 = 0$ , такой переход невозможен, так как будет иметь место деление на ноль. Для рассматриваемой схемы (рис. 4,б), согласно первому закону Кирхгофа, имеем

$$\dot{U}_1(Y_1 + Y_2 + Y_3) = \dot{U}_1 + \dot{U}_2, \quad (41)$$

откуда

$$\dot{U}_1 = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{Y_1 + Y_2 + Y_3}. \quad (42)$$

Например, ток в комплексной проводимости  $Y_3$  (рис. 4,б) равен

$$\dot{I}_3 = \dot{U}_1 Y_3 = \frac{\dot{U}_1}{Z_3}. \quad (43)$$

По методу узловых напряжений можно рассчитывать и объемные электрические цепи, а также его целесообразно использовать в случае, когда число независимых контуров превышает число независимых узлов.

Для электрической цепи, данной на рис. 4,в, и содержащей два независимых узла, для первого узла по первому закону Кирхгофа можно записать уравнение



ЛИТЕРАТУРА

1. Белецкий А.Ф. Основы теории линейных электрических цепей. М., Связь, 1967.
2. Красильников В.А. Матричные методы анализа электрических цепей. Изд-во Саратов. ун-та, 1974.
3. Красильников В.А., Парусов В.П. Теоретические основы электротехники. Изд-во Саратов. ун-та, 1982.

$$Y_1 \dot{U}_1 + Y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = \dot{I}_1 \quad (44)$$

$$Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2 = \dot{I}_1 \quad (45)$$

где  $Y_{11} = Y_1 + Y_3$  - условно называемая собственной комплексной проводимостью первого узла, равная сумме комплексных проводимостей, присоединенных одним зажимом к первому узлу;  $Y_{12} = -Y_3$  - взаимная комплексная проводимость между первым и вторым узлами.

Для второго узла, также используя первый закон Кирхгофа, получим:

$$Y_2 \dot{U}_2 + Y_3 (\dot{U}_2 - \dot{U}_1) = \dot{I}_2 \quad (44)$$

$$Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2 = \dot{I}_2 \quad (45)$$

где  $Y_{22} = Y_2 + Y_3$  - условно называемая собственной комплексной проводимостью второго узла, равная сумме комплексных проводимостей, присоединенных одним зажимом ко второму узлу;  $Y_{21} = -Y_3$  - взаимная комплексная проводимость между вторым и первым узлами.

Из уравнений (45) и (47) можно вычислить значения комплексных узловых напряжений и затем определить токи в этой цепи.

Например, в элементе с комплексной проводимостью  $Y_2$  ток  $I_2$  этот комплексный ток описывается соотношением

$$I_2 = Y_2 U_2 \quad (46)$$

а в элементе с комплексной проводимостью  $Y_3$  -

$$I_3 = Y_3 (U_1 - U_2) \quad (47)$$

Следует на себе внимание левый характер связи уравнений, составляющих по известным контурным токам в условиях напряжений, и наоборот, для вычета электрической цепи, содержащей  $1/2$  независимых узлов, можно использовать матричное уравнение (23) при замене  $Y_{11}$  и  $Y_{22}$  комплексных проводимостей на комплексные проводимости контурных токов на комплексные узловые напряжения, комплексные электродвижущих сил источников напряжений, комплексными выходящие токи источников тока.



СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Анализ	
Гармонических процессов	
в линейных электрических цепях . . . . .	3
Методы расчета	
гармонических токов и напряжений	
в линейных электрических цепях . . . . .	16
Литература . . . . .	29

Василий Александрович Деминский,  
Микфор Петрович Степанчук

УСТАНОВИТЕЛЬСКИ ПРОЦЕССЫ  
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ  
С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ  
ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЗДЕЙСТВИИ

Учебно-методическое пособие  
для студентов физического факультета

Редактор Е.И.Филиппова  
Технический редактор Л.В.Агальцова  
Корректор И.В.Дареева

Подписано к печати 15.10.85.  
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2. Печать офсетная.  
Усл.печ.л. 1,96 (2). Уч.-изд.л. 1,4. Тираж 300.  
Заказ 203 Цена 5 к.

Издательство Саратовского университета, 410601, Саратов,  
Университетская, 42.  
Ротапринт СВУ. Саратов, Астраханская, 83.