

Саратовский государственный университет  
имени Н.Г. Чернышевского

И.А. Панкратов

# Введение в методы взвешенных невязок

*Учебное пособие для студентов  
механико-математического факультета*

Саратов, 2012

# Содержание

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Предисловие . . . . .</b>                      | <b>3</b>  |
| <b>Методы взвешенных невязок . . . . .</b>        | <b>4</b>  |
| <b>Метод конечных элементов . . . . .</b>         | <b>16</b> |
| <b>Заключение . . . . .</b>                       | <b>22</b> |
| <b>Список использованных источников . . . . .</b> | <b>23</b> |

# Предисловие

В настоящее время методы взвешенных невязок и метод конечных элементов весьма часто применяются для решения различных прикладных задач, например при проведении расчетов на прочность, решении проблем динамики жидкости и др. Наглядность этих методов сделала их популярными среди широкого круга прикладников.

Данное пособие состоит из двух частей. В первой из них для аппроксимации решения дифференциальных уравнений использованы непрерывные базисные функции, а во второй – кусочно-определенные. Приведено большое количество примеров, иллюстрирующих применение излагаемых методов.

# Методы взвешенных невязок

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}\varphi - p = 0 \quad (1)$$

в некоторой области  $\Omega$ .

Здесь  $\mathcal{L}$  – некоторый линейный дифференциальный оператор, а  $p$  не зависит от неизвестной функции  $\varphi$ .

Решение уравнения (1) должно удовлетворять условию

$$\mathcal{B} = \mathcal{M}\varphi + r = 0 \quad (2)$$

на замкнутой кривой  $\Gamma$ , ограничивающей область  $\Omega$ .

Здесь  $\mathcal{M}$  – соответствующий линейный дифференциальный оператор, а  $r$  не зависит от неизвестной функции  $\varphi$ . (Например, краевые условия Дирихле можно записать в виде (2), положив  $\mathcal{M}\varphi = \varphi$ ,  $r$  – постоянный вектор.)

Построим аппроксимацию для решения  $\varphi$ , которая на граничной кривой  $\Gamma$  принимает те же значения, что и  $\varphi$ . Если найти некоторую функцию  $\psi$ , принимающую одинаковые с  $\varphi$  значения на  $\Gamma$ , т.е.  $\psi|_{\Gamma} = \varphi|_{\Gamma}$ , и ввести систему линейно независимых базисных функций  $\{N_m; m = 1, 2, \dots, M\}$ , то на  $\Omega$  можно предложить следующую аппроксимацию  $\hat{\varphi}$  для  $\varphi$ :

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (3)$$

где  $a_m$ ,  $m = \overline{1, M}$  – некоторые параметры, вычисляемые так, чтобы получить хорошее приближение, а функция  $\psi$  и базисные функции  $N_m$  выбраны таким образом, что

$$\mathcal{M}\psi = -r, \quad \mathcal{M}N_m = 0, \quad m = \overline{1, M} \quad \text{на } \Gamma, \quad (4)$$

и поэтому  $\varphi$  автоматически удовлетворяет краевым условиям (2) при произвольных коэффициентах  $a_m$ . Отметим, что система базисных функций (которые также называют функциями формы) должна быть выбрана так, чтобы гарантировать улучшение аппроксимации при возрастании числа базисных функций  $M$ .

Для того, чтобы найти аппроксимации производных от  $\varphi$ , продифференцируем (3), получим:

$$\begin{aligned}\varphi &\approx \widehat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &\approx \frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial N_m}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &\approx \frac{\partial^2 \widehat{\varphi}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \sum_{m=1}^M a_m \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2},\end{aligned}$$

и т.д.

Так как построенное разложение (3) удовлетворяет краевым условиям (2), то для получения аппроксимации искомой функции  $\varphi$  осталось гарантировать, что  $\widehat{\varphi}$  – приближённое решение уравнения (1). Для этого вначале введём погрешность или невязку  $R_\Omega$  в аппроксимации, определяемую по формуле

$$R_\Omega = A(\widehat{\varphi}) = \mathcal{L}\widehat{\varphi} + p = \mathcal{L}\psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p.$$

Чтобы уменьшить эту невязку, потребуем равенства нулю соответствующего числа интегралов от погрешности, взятых с различными весами, т.е

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega = \int_{\Omega} W_l \left\{ \mathcal{L}\psi + \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m \right) + p \right\} d\Omega = 0; \quad l = \overline{1, M}; \quad (5)$$

где  $\{W_l : l = 1, 2, \dots, M\}$  – это множество линейно независимых весовых (или пробных) функций.

Таким образом, система уравнений метода взвешенных невязок (5) сводится к системе линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов  $a_m$ , которую можно записать так

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{f},$$

где

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M)^T,$$

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l \mathcal{L} N_m d\Omega, \quad l, m = \overline{1, M}; \quad (6)$$

$$f_l = - \int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Omega} W_l \mathcal{L} \psi d\Omega, \quad l = \overline{1, M}. \quad (7)$$

Вычислив элементы матрицы  $\mathbf{K}$  и столбца свободных членов  $\mathbf{f}$  и решив затем полученную систему, мы найдём неизвестные  $a_m, m = \overline{1, M}$ ; и тем самым закончим процесс построения приближённого решения уравнения (1).

Отметим, что на практике могут быть использованы различные виды систем весовых функций  $\{W_l : l = \overline{1, M}\}$ . Приведём наиболее употребительные варианты:

### **Коллокация по подобластям (одномерный случай)**

Если весовые функции выбираются по правилу:

$$W_l = \begin{cases} 1, & \text{если } x_l \leq x \leq x_{l+1}, \\ 0, & \text{если } x < x_l, x > x_{l+1}; \end{cases}$$

то соотношения (6), (7) примут вид

$$K_{lm} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} \mathcal{L} N_m dx, \quad l, m = \overline{1, M};$$

$$f_l = - \int_{x_l}^{x_{l+1}} p dx - \int_{x_l}^{x_{l+1}} \mathcal{L} \psi dx, \quad l = \overline{1, M}.$$

### **Метод Галёркина**

В этом наиболее популярном методе взвешенных невязок в качестве весовых множителей выбираются сами базисные функции:

$$W_l = N_l, \quad l = \overline{1, M}.$$

В этом случае элементы матрицы  $\mathbf{K}$  и столбца  $\mathbf{f}$  имеют вид:

$$K_{lm} = \int_{\Omega} N_l \mathcal{L} N_m dx, \quad l, m = \overline{1, M};$$

$$f_l = - \int_{\Omega} N_l p dx - \int_{\Omega} N_l \mathcal{L} \psi dx, \quad l = \overline{1, M}.$$

**Задача 1:** Обыкновенное дифференциальное уравнение

Требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi, \quad (8)$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1. \quad (9)$$

**Решение:**

Запишем (9) в общем виде. Для этого положим  $\mathcal{M}\varphi = \varphi$ ,  $r = 0$  при  $x = 0$  и  $r = -1$  при  $x = 1$ . Тогда, согласно (4), функция  $\psi$  и базисные функции  $N_m$  должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} &\text{при } x = 0, \quad \psi = 0, \quad N_m = 0; \\ &\text{при } x = 1, \quad \psi = 1, \quad N_m = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Этим условиям удовлетворяет функция  $\psi = x$ , а в качестве базисных функций, обращающихся в нуль при  $x = 0$  и  $x = 1$ , можно взять систему  $\{N_m = x^m(1-x); m = \overline{1, M}\}$ .

Тогда разложение

$$\widehat{\varphi} = x + \sum_{m=1}^{M} a_m x^m (1-x)$$

будет удовлетворять краевым условиям задачи. Решаемое уравнение (8) можно записать в общем виде, положив

$$\mathcal{L}\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \varphi \quad \text{и} \quad p = 0.$$

Решим задачу методом коллокации по подобластям. Обозначим  $h = 1/M$ ,  $x_l = (l - 1)h$ . Компоненты матрицы системы и вектора свободных членов примут вид:

$$K_{lm} = \int_{x_l}^{x_{l+1}} \mathcal{L} N_m dx = \int_{(l-1)h}^{lh} \left( \frac{d^2 N_m}{dx^2} - N_m \right) dx,$$

$$f_l = \int_{x_l}^{x_{l+1}} \mathcal{L} \psi dx = - \int_{(l-1)h}^{lh} x dx = \frac{h^2}{2} (1 - 2l).$$

Очевидно, что

$$\frac{dN_m}{dx} = x^{m-1} [m - (m + 1)x],$$

$$\frac{d^2 N_m}{dx^2} = mx^{m-2} [m - 1 - (m + 1)x].$$

Таким образом,

$$K_{lm} = \int_{(l-1)h}^{lh} x^{m-2} [m(m - 1) - m(m + 1)x - x^2 + x^3] dx =$$

$$= mh^{m-1} [l^{m-1} - (l - 1)^{m-1}] - (m + 1)h^{m+1} [l^m - (l - 1)^m] - \quad (11)$$

$$- \frac{h^{m+1}}{m + 1} [l^{m+1} - (l - 1)^{m+1}] + \frac{h^{m+2}}{m + 2} [l^{m+2} - (l - 1)^{m+2}]; l, m = \overline{1, M}.$$

В справедливости соотношения (11) читателю предлагается убедиться самостоятельно. Отметим, что при численном решении целесообразно не выносить за скобки величины  $h^{m-1}, \dots, h^{m+2}$ . В этом случае в квадратных скобках как уменьшаемое, так и вычитаемое будут меньше единицы; противное может привести к переполнению разрядной сетки или потере точности вычислений, что неприемлемо.

Дифференциальное уравнение (8) можно решить аналитически с помощью метода Эйлера. Его общее решение имеет вид

$$\varphi = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные интегрирования. Удовлетворяя граничным условиям (9), получим

$$\varphi = \frac{e}{e^2 - 1} (e^x + e^{-x}).$$

Результаты численного решения задачи для  $M = 20$  приведены на рис. 1. Показан закон изменения искомой функции и график изменения модуля разности между аналитическим и численным решениями задачи.

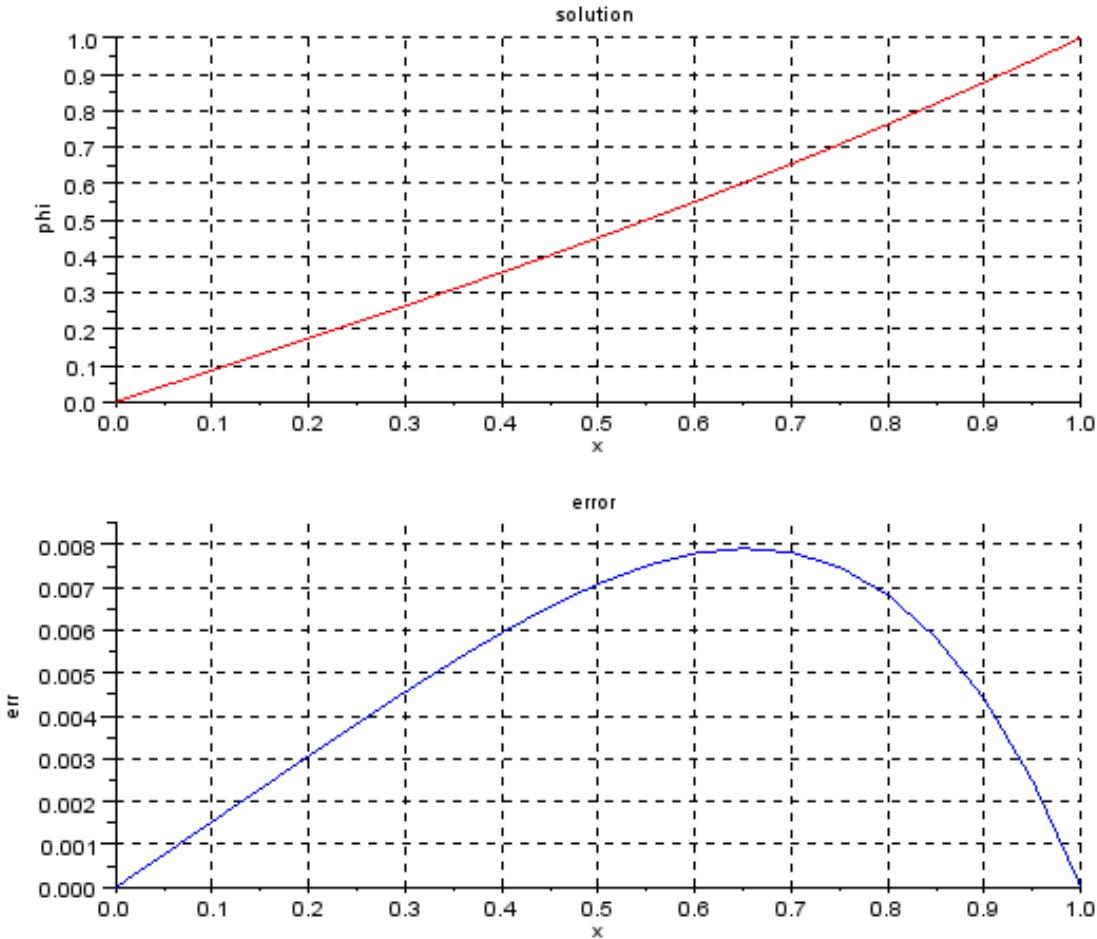


Рис. 1. Решение уравнения (8) (красный); погрешность решения (синий)

**Задача 2:** Дифференциальное уравнение в частных производных  
Требуется найти решение стационарного уравнения теплопроводности

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

в области  $\Omega = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ , удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0 \quad \varphi = 0; & \quad \text{при } y = 0 \quad \varphi = 0; \\ \text{при } x = 1 \quad \varphi = y^2; & \quad \text{при } y = 1 \quad \varphi = x^2. \end{aligned} \quad (13)$$

**Решение:**

Запишем (13) в общем виде. Для этого положим  $\mathcal{M}\varphi = \varphi$ , и

$$r = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0 \text{ и при } y = 0; \\ -y^2, & \text{при } x = 1; \\ -x^2, & \text{при } y = 1. \end{cases}$$

Тогда, согласно (4), функция  $\psi$  и базисные функции  $N_m$  должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, \quad \psi = 0, \quad N_m = 0, \\ \text{при } y = 0, \quad \psi = 0, \quad N_m = 0, \\ \text{при } x = 1, \quad \psi = y^2, \quad N_m = 0 \\ \text{при } x = 1, \quad \psi = x^2, \quad N_m = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Этим условиям удовлетворяет функция  $\psi = x^2y^2$ . Пусть система базисных функций, которые обращаются в нуль на границе квадрата  $\Omega = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$ , имеет вид  $\{N_m = \sin \pi mx \sin \pi my; m = \overline{1, M}\}$ .

Тогда разложение

$$\hat{\varphi} = x^2y^2 + \sum_{m=1}^{M} a_m \sin \pi mx \sin \pi my$$

будет удовлетворять краевым условиям задачи. Решаемое уравнение (12) можно записать в общем виде, положив

$$\mathcal{L}\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad p = 0.$$

Решим задачу методом Галёркина. Компоненты матрицы системы и вектора свободных членов примут вид:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{\Omega} N_l \mathcal{L} N_m d\Omega = \int_0^1 \int_0^1 N_l \left( \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} \right) dx dy, \\ f_l &= - \int_{\Omega} N_l \mathcal{L} \psi d\Omega = -4 \int_0^1 \int_0^1 N_l dx dy. \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial N_m}{\partial x} = \pi m \cos \pi mx \sin \pi my, \quad \frac{\partial^2 N_m}{\partial x^2} = -(\pi m)^2 \sin \pi mx \sin \pi my;$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial y} = \pi m \sin \pi mx \cos \pi my, \quad \frac{\partial^2 N_m}{\partial y^2} = -(\pi m)^2 \sin \pi mx \sin \pi my.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} K_{lm} &= -2(\pi m)^2 \int_0^1 \int_0^1 \sin \pi mx \sin \pi my \sin \pi lx \sin \pi ly dx dy = \\ &-2(\pi m)^2 \int_0^1 \sin \pi my \sin \pi ly dy \int_0^1 \sin \pi mx \sin \pi lx dx; \quad l, m = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (15)$$

Известно, что

$$\int_0^1 \sin \pi mx \sin \pi lx dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } m = l; \\ 0, & \text{если } m \neq l. \end{cases} \quad (16)$$

С учетом формулы (16) соотношение (15) примет вид

$$K_{lm} = \begin{cases} -\frac{(\pi l)^2}{2}, & \text{если } m = l; \\ 0, & \text{если } m \neq l. \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, в силу ортогональности базисных функций, матрица системы имеет диагональный вид.

Вычислим компоненты столбца свободных членов:

$$\begin{aligned} f_l &= -4 \int_0^1 \int_0^1 N_l dx dy = -4 \int_0^1 \sin \pi ly dy \int_0^1 \sin \pi lx dx = \\ &= -4 \left. \frac{-\cos \pi lx}{\pi l} \right|_0^1 \cdot \int_0^1 \sin \pi ly dy = -4 \left. \frac{-\cos \pi lx}{\pi l} \right|_0^1 \cdot \left. \frac{-\cos \pi ly}{\pi l} \right|_0^1 = \\ &= -4 \frac{(-\cos \pi l + 1)^2}{(\pi l)^2} = -4 \frac{(1 - (-1)^l)^2}{(\pi l)^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Итак, система уравнений имеет вид

$$-\frac{(\pi l)^2}{2} a_l = -4 \frac{(1 - (-1)^l)^2}{(\pi l)^2}, \quad l = \overline{1, M}.$$

Отсюда,

$$a_l = 8 \frac{(1 - (-1)^l)^2}{(\pi l)^4} = \begin{cases} 0, & \text{если } l \text{ — чётное;} \\ \frac{32}{(\pi l)^4} & \text{если } l \text{ — нечётное;} \end{cases} \quad l = \overline{1, M}.$$

На рис. 2 приведены изолинии решения уравнения (12), полученные при  $M = 50$ .

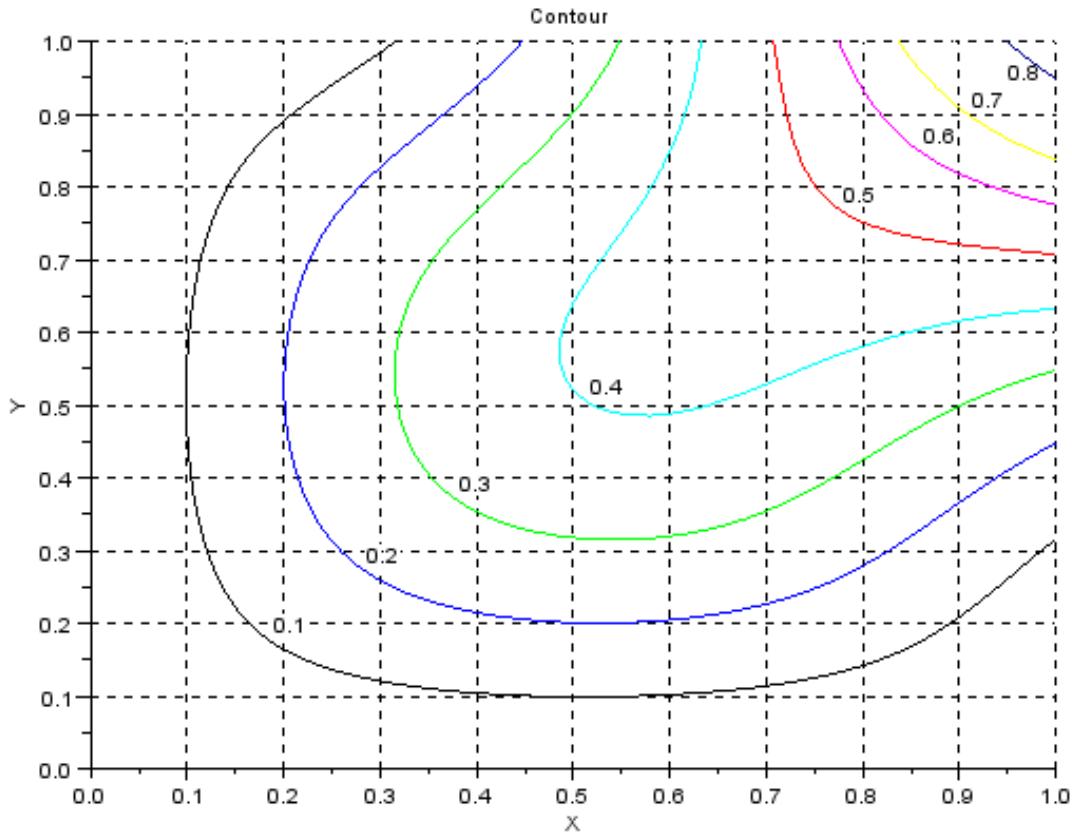


Рис. 2. Изолинии

Ранее было показано, как можно найти приближённое решение дифференциального уравнения, построив аппроксимирующую функцию  $\widehat{\varphi}$ , которая тождественно удовлетворяет краевым условиям задачи. Ослабим это требование, так как оно ограничивает выбор вида базисных функций.

Возьмём теперь разложение в виде

$$\varphi \approx \widehat{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_m. \quad (19)$$

Если оно не удовлетворяет некоторым или всем краевым условиям задачи, то к невязке по области

$$R_\Omega = A(\widehat{\varphi}) = \mathcal{L}\widehat{\varphi} + p = \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m + p \text{ на } \Omega$$

добавляется невязка по краевым условиям

$$R_\Gamma = B(\widehat{\varphi}) = \mathcal{M}\widehat{\varphi} + r = \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{M}N_m + r \text{ на } \Gamma.$$

Уменьшим взвешенную сумму невязок по области и по краевым условиям, положив

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega + \int_{\Gamma} W_l R_\Gamma d\Gamma &= \int_{\Omega} W_l \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L}N_m + p \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} \overline{W}_l \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{M}N_m + r \right) d\Gamma = 0; \quad l = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (20)$$

Отметим, что в общем случае весовые функции  $W_l$  и  $\overline{W}_l$  не зависят друг от друга.

Таким образом, систему уравнений метода взвешенных невязок можно записать в общем виде

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{f},$$

где

$$K_{lm} = \int_{\Omega} W_l \mathcal{L}N_m d\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W}_l \mathcal{M}N_m d\Gamma, \quad l, m = \overline{1, M}; \quad (21)$$

$$f_l = - \int_{\Omega} W_l p d\Omega - \int_{\Gamma} \overline{W}_l r d\Gamma, \quad l = \overline{1, M}. \quad (22)$$

Решим уравнение из задачи 1, воспользовавшись разложением по базисным функциям, которое необязательно удовлетворяет всем граничным условиям.

**Задача 3:** Обыкновенное дифференциальное уравнение (одновременная аппроксимация решения уравнения и краевых условий)

Требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

**Решение:**

В общем виде уравнение и краевые условия были записаны ранее. По прежнему будем решать задачу методом коллокации по подобластям, но в качестве базисных функций возьмём систему  $\{N_m = x^m; m = \overline{1, M}\}$ .

В нашем случае кривая  $\Gamma$  состоит лишь из двух точек  $x = 0$  и  $x = 1$ , так что (20) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W_l \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{L} N_m + p \right) d\Omega + \overline{W}_l \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{M} N_m + r \right) \Big|_{x=0} + \\ & + \overline{W}_l \left( \sum_{m=1}^M a_m \mathcal{M} N_m + r \right) \Big|_{x=1} = 0; \quad l = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так как  $N_m(0) = 0$ ,  $m = \overline{1, M}$ , то второе слагаемое в (23) тождественно равно нулю.

Выберем функции  $\overline{W}_l$  так, чтобы  $\overline{W}_l = -W_l$ ,  $l = \overline{1, M}$ . Таким образом, компоненты матрицы системы и вектора свободных членов примут вид:

$$\begin{aligned} K_{lm} &= \int_{x_l}^{x_{l+1}} \mathcal{L} N_m dx = \int_{(l-1)h}^{lh} \left( \frac{d^2 N_m}{dx^2} - N_m \right) dx, \quad l \neq m; \\ K_{Mm} &= \int_{x_M}^{x_{M+1}} \mathcal{L} N_m dx - 1 = \int_{(M-1)h}^1 \left( \frac{d^2 N_m}{dx^2} - N_m \right) dx - 1; \\ f_l &= \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq M; \\ -1, & \text{если } l = M. \end{cases} \end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\frac{dN_m}{dx} = mx^{m-1}; \quad \frac{d^2 N_m}{dx^2} = m(m-1)x^{m-2}.$$

Вычислим значение интеграла

$$\begin{aligned} & \int_{(l-1)h}^{lh} \left( \frac{d^2 N_m}{dx^2} - N_m \right) dx = \int_{(l-1)h}^{lh} [m(m-1)x^{m-2} - x^m] dx = \\ & = mh^{m-1} [l^{m-1} - (l-1)^{m-1}] + \frac{h^{m+1}}{m+1} [l^{m+1} - (l-1)^{m+1}]. \end{aligned} \quad (24)$$

Итак, необходимо заполнить всю матрицу коэффициентов по формуле (24), а затем вычесть единицу из каждого элемента последней строки.

Результаты численного решения задачи для  $M = 20$  приведены на рис. 3. Показан закон изменения искомой функции и график изменения модуля разности между аналитическим и численным решениями задачи.

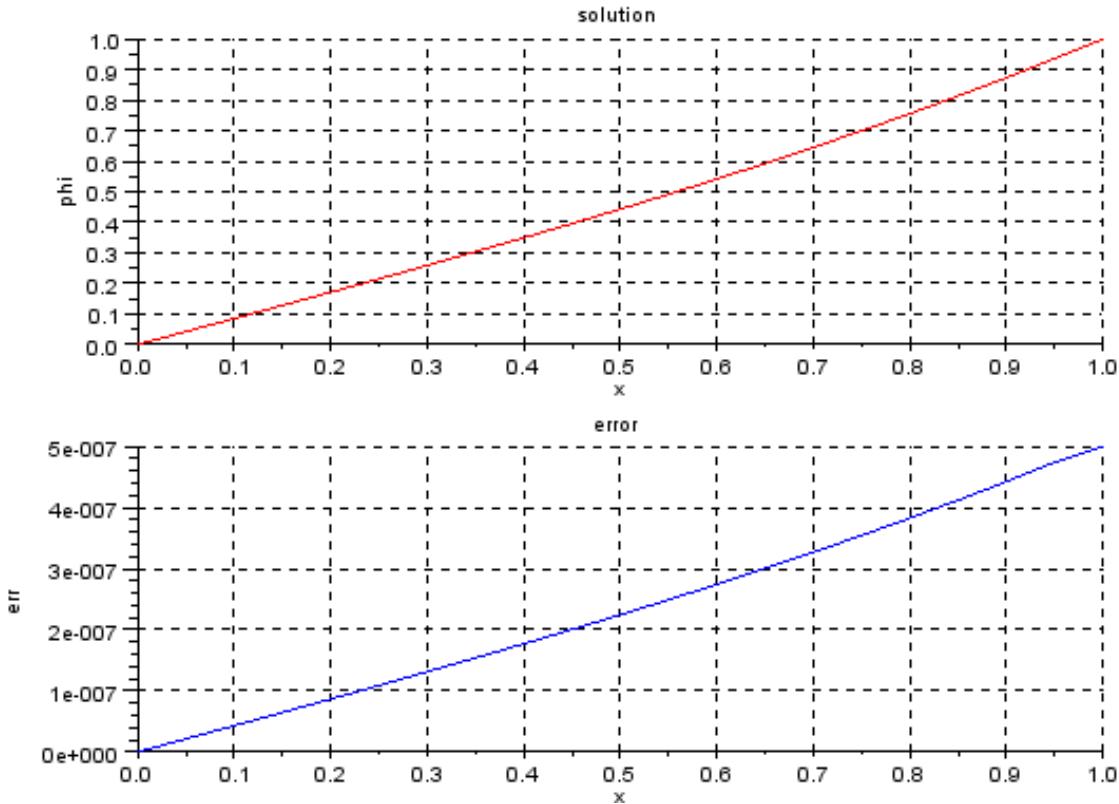


Рис. 3. Решение уравнения (8) (красный); погрешность решения (синий)

В этом разделе для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных был применён метод аппроксимации базисными функциями, являющийся альтернативой методу конечных разностей. Ценность этого способа в том, что он позволяет найти значение искомой функции во всей интересующей нас области  $\Omega$ , а не в конечном числе точек.

К сожалению, использование метода взвешенных невязок не снимает основных трудностей. В частности, матрица  $\mathbf{K}$  системы линейных алгебраических уравнений при увеличении числа базисных функций в ряде случаев может стать плохо обусловленной. (Обычно эту проблему удаётся решить выбрав базисные функции с более сильными свойствами ортогональности.)

# Метод конечных элементов

В предыдущем разделе предполагалось, что базисные функции  $N_m$  определены одним выражением на всей области  $\Omega$ . При этом интегралы в аппроксимирующих уравнениях (5), (20) вычислялись по всей этой области.

С другой стороны, область  $\Omega$  можно разбить на несколько непересекающихся подобластей (или элементов  $\Omega^e$ ) и аппроксимировать решение уравнения отдельно на каждой подобласти. Тогда базисные функции могут быть определены различным образом для каждой из подобластей  $\Omega^e$ . В этом случае определённые интегралы, входящие в аппроксимирующие уравнения, можно подсчитать просуммировав вклады по каждому элементу:

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} W_l R_{\Omega} d\Omega^e, \\ \int_{\Gamma} \bar{W}_l R_{\Gamma} d\Gamma = \sum_{e=1}^E \int_{\Gamma^e} W_l R_{\Gamma} d\Gamma^e; \quad (25)$$

Здесь  $\sum_{e=1}^E \Omega^e = \Omega$ ,  $\sum_{e=1}^E \Gamma^e = \Gamma$ ;  $E$  – число подобластей, на которые разбивается область  $\Omega$ ;  $\Gamma^e$  – часть границы  $\Omega^e$ , лежащая на  $\Gamma$ .

Идея метода конечных элементов заключается в следующем: если подобласти имеют простую форму и базисные функции на этих подобластиях вычисляются однотипно, то решать задачу указанным выше способом становится очень просто. Отметим, что рассмотренные в предыдущем разделе методы взвешенных невязок есть частный случай метода конечных элементов, когда используется лишь один элемент.

Если базисные функции определены кусочным способом, то весьма выгодно положить, что базисная функция равна нулю всюду, кроме рассматриваемого элемента и примыкающих к нему подобластей. Рассмотрим подроб-

нее одномерный случай. Пусть область  $\Omega = [0; L]$ . Разобьём её на  $E$  подобластей вида  $\Omega^e = [x_e; x_{e+1}]$  ( $x_1 = 0, x_{E+1} = L$ ). Часто применяются базисные функции  $N_m$ , удовлетворяющие следующим условиям:

1.  $N_m(x_m) = 1$ ;
2.  $N_m(x_{m-1}) = 0$ , на отрезке  $[x_{m-1}; x_m]$   $N_m$  изменяется линейно,  $m \neq 1$ ;
3.  $N_m(x_{m+1}) = 0$ , на отрезке  $[x_m; x_{m+1}]$   $N_m$  изменяется линейно,  $m \neq E$ .

Установим вид функции  $N_m$ , удовлетворяющей указанным условиям. (Пусть  $m \neq 1, m \neq E$ .) На отрезке  $[x_{m-1}; x_m]$  будем искать функцию  $N_m$  в виде  $N_m^1 = A_1^m x + B_1^m$ ; где  $A_1^m, B_1^m = \text{const}$ . Тогда

$$\begin{cases} A_1^m x_{m-1} + B_1^m = 0; \\ A_1^m x_m + B_1^m = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1^m = \frac{1}{x_m - x_{m-1}}; \\ B_1^m = -\frac{x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}. \end{cases}$$

Аналогично на отрезке  $[x_m; x_{m+1}]$  будем искать функцию  $N_m$  в виде  $N_m^2 = A_2^m x + B_2^m$ ; где  $A_2^m, B_2^m = \text{const}$ . Тогда

$$\begin{cases} A_2^m x_m + B_2^m = 1; \\ A_2^m x_{m+1} + B_2^m = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2^m = \frac{1}{x_m - x_{m+1}}; \\ B_2^m = -\frac{x_{m+1}}{x_m - x_{m+1}}. \end{cases}$$

Объединяя оба случая, получим

$$N_m = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq x_{m-1}, m > 1; \\ \frac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}, & \text{если } x_{m-1} < x < x_m, m > 1; \\ 1, & \text{если } x = x_m; \\ \frac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m}, & \text{если } x_m < x < x_{m+1}, m < E; \\ 0, & \text{если } x \geq x_{m+1}, m < E. \end{cases} \quad (26)$$

На практике слагаемое, содержащее взвешенную невязку по области

$$\int_{\Omega} W_l \mathcal{L} N_m d\Omega,$$

часто может быть заменено выражением вида

$$\int_{\Omega} (\mathcal{E}W_l)(\mathcal{D}N_m) d\Omega + \text{интегралы по границе } \Gamma,$$

где операторы  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{D}$  включают в себя производные более низких порядков, чем исходный оператор  $\mathcal{L}$ . Преимущество такого преобразования при использовании кусочно-определеных базисных функций состоит в том, что для последних теперь требуется более низкий порядок гладкости.

Рассмотрим решение одномерной задачи, описываемой уже известным нам обыкновенным дифференциальным уравнением.

**Задача 4:** Обыкновенное дифференциальное уравнение (метод конечных элементов)

Требуется найти решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \varphi,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

### Решение:

В общем виде уравнение и краевые условия были записаны ранее. Решим задачу методом конечных элементов (методом Галёркина), взяв в качестве базисных функций систему (26). Тогда можно построить аппроксимацию

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^{M+1} \varphi_m N_m,$$

где  $M + 1 = E$ , а  $\varphi_m$  – значение аппроксимации в точке  $x_m$ . Удобно составить уравнения метода взвешенных невязок, не задавая граничные значения функции  $\varphi$ , а затем учесть эти условия при решении конечной системы уравнений. Таким образом, аппроксимирующие уравнения метода взвешенных невязок (23) принимают вид

$$\int_0^1 W_l \left( \frac{d^2\hat{\varphi}}{dx^2} - \hat{\varphi} \right) dx = 0, \quad l = \overline{1, M+1}.$$

Слагаемое, учитывающее невязку на границе  $\Gamma$ , отсутствует, так как краевые условия будут выполняться тождественно после преобразования системы уравнений. Приведённая выше формулировка метода взвешенных невязок требует  $C^1$ -гладкости базисных функций. Интегрирование по частям ослабляет это требование и приводит к так называемой «слабой» формулировке метода взвешенных невязок:

$$\left[ W_l \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right] \Big|_0^1 - \int_0^1 \left( \frac{dW_l}{dx} \frac{d\hat{\varphi}}{dx} + W_l \hat{\varphi} \right) dx = 0, \quad l = \overline{1, M+1}.$$

Теперь требуется только  $C^0$ -гладкость функций  $\hat{\varphi}$  (а значит, и  $N_m$ ) и  $W_l$ . Кусочно-линейные базисные функции (26) удовлетворяют этому требованию. Система линейных уравнений метода Галёркина имеет вид (напомним, что  $W_l = N_l$ ):

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f},$$

где

$$\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{M+1})^T,$$

$$K_{lm} = \int_0^1 \left( \frac{dN_l}{dx} \frac{dN_m}{dx} + N_l N_m \right) dx, \quad l, m = \overline{1, M+1};$$

$$f_l = \left[ N_l \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right] \Big|_0^1 = \begin{cases} N_1 \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_0^1 \\ 0, & \text{если } l = \overline{2, M}; \\ N_{M+1} \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_0^1. \end{cases}$$

Легко видеть, что вклад в эти коэффициенты элемента  $e$ , узлы которого имеют номера  $i$  и  $j$  (фактически, в нашем случае  $i = e, j = e+1$ ), может быть найден в общем виде; и становится очевидной полезность суммирования (25). Единственными отличными от нуля базисными функциями на элементе  $e$  будут  $N_i$  и  $N_j$ . Так как

$$K_{lm} = \sum_{e=1}^E K_{lm}^e,$$

то для вычисления матрицы  $\mathbf{K}$  достаточно найти вклад произвольного элемента  $e$ :

$$\begin{aligned}
 K_{lm}^e &= 0, \quad l, m \neq i, j; \\
 K_{ii}^e = K_{jj}^e &= \int_{x_i}^{x_j} \left[ \left( \frac{dN_i}{dx} \right)^2 + (N_i)^2 \right] dx = \int_{x_i}^{x_j} \left[ \left( \frac{1}{x_j - x_i} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{x - x_j}{x_j - x_i} \right)^2 \right] dx = \left( \frac{1}{x_j - x_i} \right)^2 x \Big|_0^1 + \frac{(x - x_j)^3}{3(x_j - x_i)^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{x_j - x_i} + \frac{x_j - x_i}{3}; \\
 K_{ij}^e = K_{ji}^e &= \int_{x_i}^{x_j} \left[ \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + N_i N_j \right] dx = \int_{x_i}^{x_j} \left[ -\frac{1}{(x_j - x_i)^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(x_j - x)(x - x_i)}{(x_j - x_i)^2} \right] dx = -\frac{1}{x_j - x_i} + \frac{x_j - x_i}{6}.
 \end{aligned}$$

Теперь можно вычеркнуть из этой системы первое и последнее уравнения, заменив их соотношениями

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_{M+1} = 1,$$

которые легко получить из краевых условий.

Отметим, что не нужно вычислять каждую компоненту матрицы элемента  $\mathbf{K}^e$ , так как её компонента  $K_{lm}^e$  равна нулю, если узлы  $l$  и  $m$  не принадлежат элементу  $e$ . На практике вычисляется только приведённая матрица  $\mathbf{k}^e$ , содержащая ненулевые элементы  $\mathbf{K}^e$ . Для данного примера матрица  $\mathbf{k}^e$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}^e &= \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \left( \frac{dN_i}{dx} \right)^2 + (N_i)^2 & \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + N_i N_j \\ \frac{dN_i}{dx} \frac{dN_j}{dx} + N_i N_j & \left( \frac{dN_i}{dx} \right)^2 + (N_i)^2 \end{bmatrix} dx = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{x_j - x_i} + \frac{x_j - x_i}{3} & -\frac{1}{x_j - x_i} + \frac{x_j - x_i}{6} \\ -\frac{1}{x_j - x_i} + \frac{x_j - x_i}{6} & \frac{1}{x_j - x_i} + \frac{x_j - x_i}{3} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Результаты численного решения задачи для  $M = 20$  приведены на рис. 4. Показан закон изменения искомой функции и график изменения модуля разности между аналитическим и численным решениями задачи.

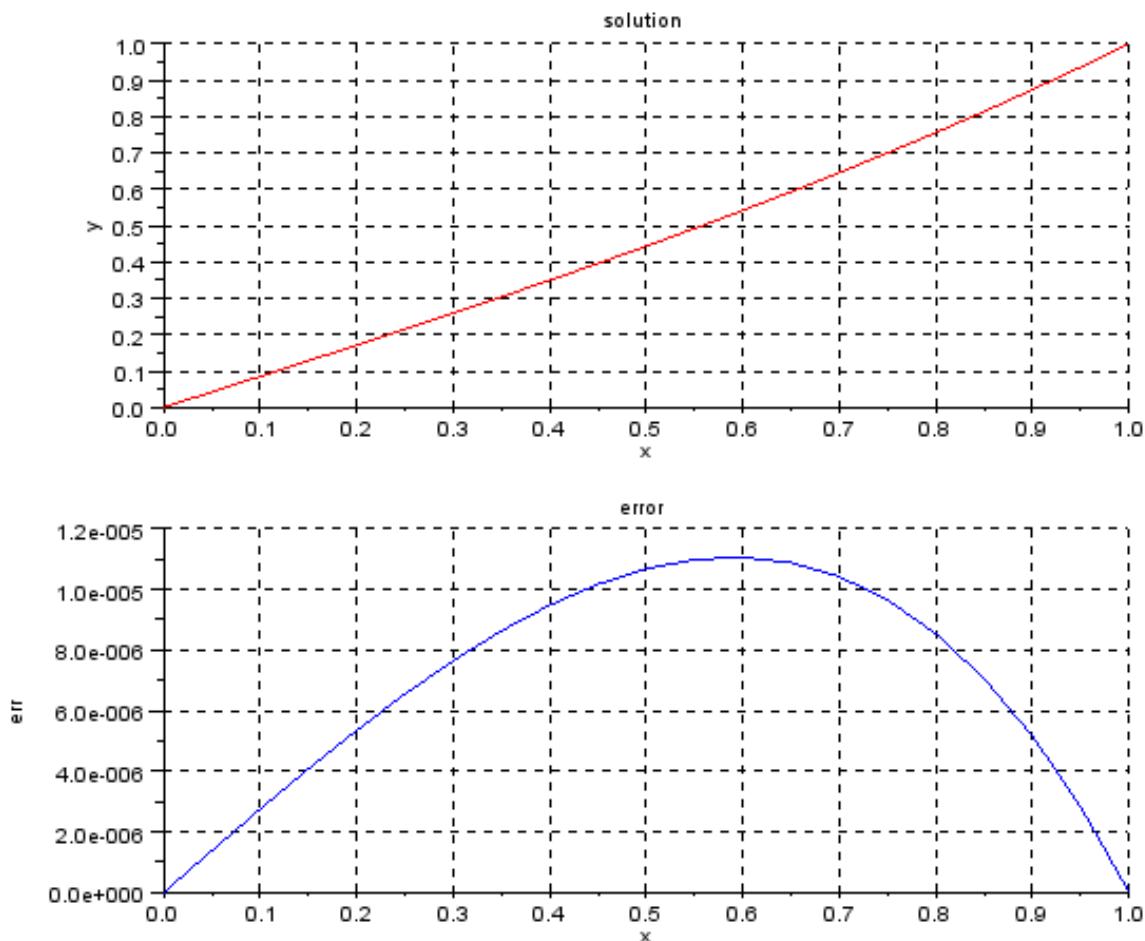


Рис. 4. Решение уравнения (8) (красный); погрешность решения (синий)

Также указанный метод успешно применяется для решения дву- и трёхмерных задач. При этом решаемые задачи могут быть самыми разнообразными, а конечно-элементная методология не меняется и фактически используется единая программа численного решения.

## **Заключение**

В настоящем пособии были рассмотрены некоторые способы решения стационарных линейных дифференциальных уравнений. Рассмотренные методы могут быть успешно применены для решения нелинейных уравнений или нестационарных задач. При этом система алгебраических уравнений к которой сводится решение нелинейных дифференциальных уравнений, также будет нелинейной. Отметим, что матрица системы уравнений метода взвешенных невязок часто является разреженной. Для эффективного хранения таких матриц и решения соответствующих систем линейных уравнений существуют специальные алгоритмы, рассмотрение которых выходит за рамки данного пособия.

## **Список использованных источников**

1. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. М.: Мир, 1986, 318 с.
2. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж. Коннор, К. Бреббия. Л.: Судостроение, 1979, 264 с.
3. Стренд Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренд, Дж. Фикс. М.: Мир, 1977, 350 с.
4. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1 / К. Флетчер. М.: Мир, 1991, 504 с.