С.Ф.ЛУКОМСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ВВЕДЕНИЕ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

САРАТОВ

2012

УДК 517
ББК 22.19;
Л84 **Лукомский С.Ф.** Математический анализ. Введение. Дифференциальное исчисление Саратов, 2012, 106с.

Курс лекций по математическому анализу за 1-й семестр 1-го года обучения в современном изложении. Предназначен студентам механико-математического факультета.

Рецензент: профессор Терехин П.А.

Учебное издание
Лукомский Сергей Федорович
Математический анализ
Введение. Дифференциальное исчисление.

УДК 517

Оглавление

Введение

Настоящее издание представляет собой курс лекций по математическому анализу, который читается автором на протяжении многих лет. Он не является учебником, которым можно пользоваться самостоятельно без посещения занятий и лекций. Скорее это конспект лекций, который должен остаться у студента, после того как он прослушал этот курс, но по какой-то причине плохо его записал. Автор пытался сделать изложение максимально строгим и по возможности более полным. Здесь почти отсутствуют предложения студенту доказать самостоятельно. Автор пытался последовательно проводить в жизнь принцип: очевидно – это легко доказуемо. В результате почти все очевидные вещи доказаны.

Изложение начинается с теоретико-множественного и логического введения, которое скорее является языком данного издания. Подробно излагается аксиоматическая теория действительных чисел и на ее основе определяются натуральные, рациональные и иррациональные числа. Этому посвящена вся первая глава. В этой же главе вводятся такие фундаментальные понятия анализ, как верхняя и нижняя грани множества и функции.

В остальных главах содержится традиционный материал анализа. Издание не содержит задач, так как его основная цель – помочь студенту овладеть теоретическими понятиями.

Глава 1

Множество действительных чисел.

1. Высказывания, предикаты и операции над ними.

Определение 1.1. *Повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно, называется высказыванием. Высказывания обозначают большими буквами латинского алфавита A,B,C,...и т.д.*

Например: число 4 четное – истинное высказывание;
число 9 делится на 4 – ложное.

Определение 1.2. *Пусть A,B – высказывания.*
1) Высказывание "не A"или "неверно, что A"называется отрицанием и обозначается $\neg A$ или $\bar{A}$. Высказывание $\neg A$ считается истинно тогда и только тогда, когда A ложно.
2) Высказывание "A и B", которое считается истинным тогда и только тогда, когда одновременно истинны высказывания A и B, называется конъюнкцией и обозначается $A \wedge B$.
3) Высказывание "A или B", которое считается истинным, когда хотя бы одно из высказываний A и B истинно, называется дизъюнкцией и обозначается $A \vee B$.
4) Высказывание "A влечет B" или "из A следует B", которое ложно в единственном случае, когда A истинно и B ложно, называется импликацией и обозначается $A \Longrightarrow B$.
5) Высказывание "A равносильно B", которое истинно тогда и только тогда, когда A и B имеют одинаковые значения истинности, называются эквиваленцией и обозначается $A \Longleftrightarrow B$.

Значения операций можно записать в виде таблиц истинности.

A	$\neg A$
1	0
0	1

A	B	$A \wedge B$
1	0	0
1	1	1
0	0	0
0	1	0

A	B	$A \vee B$
1	0	1
1	1	1
0	0	0
0	1	1

$A \Longrightarrow B$	A	B
0	1	0
1	1	1
1	0	0
1	0	1

A	B	$A \Longleftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Свойства.
1) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
2) $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
3) $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$;
4) $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.
Докажем свойство 3). Запишем таблицу истинности

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Так как столбцы $\neg(A \wedge B)$ и $\neg A \vee \neg B$ совпадают, то свойство 3) доказано.

Определение 1.3. *Повествовательное предложение, содержащее переменную и обращающееся в высказывание при подстановке вместо переменной конкретного значения, называется предикатом. Обозначение:* $A(x), B(x), C(x, y)$.

Например: $x^2 = 1$ – предикат. Если $x = 1$ или $x = -1$, то имеем истинное высказывание. В противном случае – ложное.

Определение 1.4. *Выражение "существует"называется квантором существования, обозначается* $\exists$. *Выражение "для всех"или "для любых"называется квантором общности и обозначается* $\forall$

Кванторы используют для того, чтобы превратить предикат в высказывание.

Например: $\forall\, x,\ \ x^2 = 1$ –ложное высказывание;

$\exists\, x,\ \ x^2 = 1$ –истинное высказывание.

Замечание. Очевидно, что справедливы следующие равенства
$\neg(\forall\, x, P(x)) = \exists\, x, \neg P(x); \quad \neg(\exists\, x, P(x)) = \forall\, x, \neg P(x);$

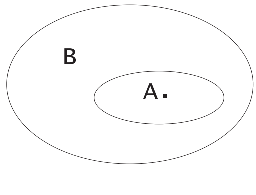
2. Множества и операции над ними

Под множеством будем понимать некоторую совокупность объектов произвольной природы. Объекты, составляющие множество, называются элементами. Обозначаются множества A, B, X, Z и так далее. Обозначения для элементов $a, b, c, d, x, z, y, \ldots$.
Если a и b – элементы множества A, то пишут $a \in A,\ b \in A$ и говорят, что a принадлежит множеству A. Множество, не содержащее ни одного элемента, называют пустым, обозначают $\emptyset$. Пустое множество единственно. Способы задания:
1) перечислением всех элементов множества, например $X = \{2, 3, 8\}$;
2) с помощью характеристического свойства: $X = \{x:\ P(x)\}$, например $X = \{x:\ x^2 = 1\}$.

Определение 2.1. *Пусть A и B множества.*
1) Множества A и B называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т.е. $A = B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$.
2) $A \subset B$*, если любой элемент множества A является элементом множества B. Читается: A подмножество B или A включается в B или B включает A.*
Коротко: $A \subset B \overset{df}{\Longleftrightarrow} (x \in A \Longrightarrow x \in B)$.

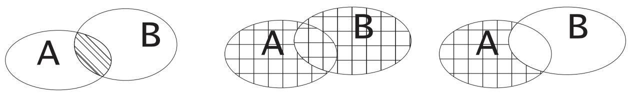
Предложение 2.1. $A = B \Longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
Доказательство. $A = B \Longleftrightarrow A$ и B состоят из одинаковых элементов, т.е. любой элемент x, принадлежащий A, обязательно принадлежит B и любой элемент x, принадлежащий B, обязательно принадлежит A. $\square$

Замечание. Графически включение $A \subset B$ изображается с помощью диаграмм Эйлера.



Определение 2.2. *Пусть A и B множества. Тогда*

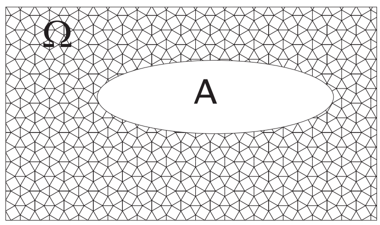
1) множество, состоящее из элементов, принадлежащих одновременно A и B, называется пересечением. Обозначается $A\bigcap B$;
2) множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B, называется объединением. Обозначается $A\bigcup B$;
3) множество, состоящее из элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B, называется разностью и обозначается $A \setminus B$.



$A\bigcap B$ $\qquad$ $A\bigcup B$ $\qquad$ $A \setminus B$

Таким образом, по определению
$A\bigcap B \stackrel{df}{=} \{x:\ x \in A \wedge x \in B\}$,
$A\bigcup B \stackrel{df}{=} \{x:\ x \in A \vee x \in B\}$,
$A \setminus B \stackrel{df}{=} \{x:\ x \in A \wedge x \notin B\}$.

Определение 2.3. *Обычно рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого универсального множества. Его обозначают Ω.В этом случае разность $\Omega\setminus A$ называют дополнением и обозначают A'.*



Свойства операций.
1) $A\bigcap(B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$;
2)$A\bigcup(B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$;
3) $(A\bigcup B)' = A'\bigcap B'$;
4) $(A\bigcap B)' = A'\bigcup B'$.
5) $A\bigcap B = B\bigcap A$ – коммутативность
$A\bigcup B = B\bigcup A$.
6) $A\bigcap(B\bigcap C) = (A\bigcap B)\bigcap C$
$A\bigcup(B\bigcup C) = (A\bigcup B)\bigcup C$ – ассоциативность.

Доказательство.
2) $x \in A\bigcup(B\bigcap C) \iff x \in A \vee x \in B\bigcap C \iff x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \iff (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \iff x \in (A\bigcup B) \wedge x \in A\bigcup C \iff x \in (A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$.

Определение 2.4. *Если $A \bigcap B = \emptyset$, то множества A и B называются дизъюнктными.*

Определение 2.5. *Множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются дизъюнктными или попарно непересекающимися, если $\forall\, i \neq j\ A_i \bigcap A_j = \emptyset$.*

Замечание. Объединение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначают $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$. Если множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ дизъюнктны, то их объединение обозначают $\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} A_j$. Пересечение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ обозначают $\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j$.

3. Декартово произведение, отношения между множествами

Определение 3.1. *Пусть X, Y – два множества, $x \in X,\ y \in Y$. Тогда множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ называется упорядоченной парой и обозначается (x, y).*

Теорема 3.1 (Основная теорема об упорядоченных парах).

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2 \wedge (y_1, y_2).$$

Доказательство.Необходимость. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Longrightarrow \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\} \Longrightarrow x_1 = x_2 \wedge \{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\} \Longrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$.
Достаточность. $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 \Longrightarrow \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}\square$

Определение 3.2. *Если X и Y два множества, то множество*

$$X \times Y \overset{df}{=} \{(x, y) :\ x \in X \wedge y \in Y\}$$

называется декартовым произведением.

Замечание. Если $X = \{x_1, x_2, ...x_n\}, Y = \{y_1, y_2, ...y_m\}$ –конечные множества, то элементы декартова произведения можно записать в виде прямоугольной таблицы

$$\begin{array}{cccc}
(x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \cdots & (x_1, y_m) \\
(x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \cdots & (x_2, y_m) \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
(x_n, y_1) & (x_n, y_2) & \cdots & (x_n, y_m)
\end{array}$$

Таким образом, если $X^\sharp = n, Y^\sharp = m \Longrightarrow (X \times Y)^\sharp = m \cdot n$

Определение 3.3. *Любое подмножество $R \subset X \times Y$ называется отношением между множествами X и Y. Подмножество $R \subset X \times X$ называется отношением на множестве X.*

Определение 3.4. *Пусть $R \subset X \times Y$ – отношение, $x \in X$. Множество*

$$R(x) = \{y \in Y : (x, y) \in R\}$$

называют сечением отношения по элементу x. Множество

$$R^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in R\}$$

называют сечением отношения R по элементу y.

Определение 3.5. *Если $R \subset X \times Y$ – отношение, то множество пар $(y, x) \in Y \times X$ таких, что $(x, y) \in R$, называют обратным отношением к R и обозначают R^{-1}, т.е. $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$.*

Определение 3.6. *1) Отношение $R \subset X \times X$ называется рефлексивным, если $\forall\ x \in X$, $(x, x) \in R$, т.е. $\Delta \subset R$, где $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ – диагональ.*
2) Отношение $R \subset X \times X$ называется симметричным, если

$$(x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$$

3) Отношение $R \subset X \times X$ называется транзитивным, если

$$(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R.$$

4) Отношение $R \subset X \times X$ называется антисимметричным, если

$$(x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$$

Определение 3.7. *Отношение, которое одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно, называется отношением эквивалентности.*

Замечание. Если R отношение эквивалентности и $(x, y) \in R$, то часто пишут $x \sim y$. В этих обозначениях
1) $x \sim x$ (рефлексивность);
2) $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$ (симметричность);
3) $x \sim y \wedge y \sim z \Longrightarrow x \sim z$ (транзитивность).
Пример. Отношение $=$ есть отношение эквивалентности, так как
1) $x = x$;
2) $x = y \Longrightarrow y = x$;
3) $x = y \wedge y = z \Longrightarrow x = z$.

Теорема 3.2. *Если R есть отношение эквивалентности на множестве X, то множество X распадается на непересекающиеся классы эквивалентных элементов.*

Доказательство. Пусть $x \in X$ и $R(x) = \{y \in X : \ y \sim x\}$ есть последовательность всех элементов, эквивалентных x. Очевидно, что $\bigcup\limits_{x} R(x) = X$.
Покажем, что классы $R(x_1)$ и $R(x_2)$ или не пересекается, или совпадает. Выбираем $R(x_1)$ и $R(x_2)$. Если $R(x_1) \bigcap R(x_2) = \emptyset$, то все выполняется. Пусть $R(x_1) \bigcap R(x_2) \neq \emptyset$. Покажем, что тогда $R(x_1) = R(x_2)$.
В самом деле, пусть $y \in R(x_1) \wedge y \in R(x_2) \Longrightarrow y \sim x_1 \wedge y \sim x_2 \Longrightarrow x_1 \sim x_2$.
Пусть теперь $x \in R(x_1)$, т.е. $x \sim x_1 \Longrightarrow x \sim x_2 \Longrightarrow x \in R(x_2)$.
Аналогично, $x \in R(x_2) \Longrightarrow x \in R(x_1)$, т.е. $R(x_1) \supset R(x_2)$. □

Определение 3.8. *Отношение R на X называют отношением нестрогого порядка, если*
1) $\forall\ x, \ \ (x,x) \in R$ (рефлексивность);
2) $(x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Longrightarrow x = y$ (антисимметричность);
3) $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$ (транзитивность).

Обычно, если R отношение нестрогого порядка и $(x,y) \in R$, то пишут $x \leq y$.
В этих обозначениях:1) $x \leq x$; 2) $x \leq y \wedge y \leq x \Longrightarrow x = y$; 3) $x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$.
Пример. Отношение $\leq$ для натуральных чисел есть отношение нестрогого порядка.

Определение 3.9. *Отношение R на X называется отношением строгого порядка, если*
1) $(x,x) \notin R$ - антирефлексивно;
2) $(x,y) \in R \Longrightarrow (y,x) \notin R$ - антисимметрично;
3) $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$ - транзитивно.
Если R отношение строгого порядка и $(x,y) \in R$, то часто пишут $x < y$.

Теорема 3.3. *Если R отношение строгого порядка, то $R \bigcup \Delta$ есть отношение нестрогого порядка.*

Доказательство. Пусть R – отношение строгого порядка.
1) $x \in X \Longrightarrow (x,x) \in \Delta \Longrightarrow (x,x) \in R \bigcup \Delta$, т.е. рефлексивность есть.
2) Пусть $x \neq y$. Тогда $(x,y) \notin \Delta \Longrightarrow (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R$, что невозможно, т.е. ассимметричность доказана.
3) $(x,y) \in R \bigcup \Delta \wedge (y,z) \in R \bigcup \Delta$;

если $x = y \Longrightarrow (x,z) \in R \bigcup \Delta$;
если $x \neq y \Longrightarrow (x,y) \in R$ или $y = z \Longrightarrow (x,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R \bigcup \Delta$.
Если $y \neq z \Longrightarrow (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R \bigcup \Delta$. $\square$
Замечание.Эту теорему записывают, обычно, в виде

$$x \leq y \Longleftrightarrow x < y \vee x = y.$$

4. Отображения, классификация отображений

Определение 4.1. *Пусть X и Y – множества, $R \subset X \times Y$ – отношение. Множество*

$$R(x) \stackrel{df}{=} \{y \in Y : \ (x,y) \in R\}$$

называется сечением отношения R по элементу x. Множество

$$R(A) \stackrel{df}{=} \{y \in Y : \ \exists x \in A, (x,y) \in R\}$$

называется образом множества E. Множество

$$R^{-1}(y) \stackrel{df}{=} \{x \in X : \ (x,y) \in R\}$$

называется сечением отношения R по элементу y.

Определение 4.2. *Пусть $R \subset X \times Y$. Отношение R называется отображением множества X в множество Y, если $\forall\ x \in X$ множество $R(x)$ содержит ровно один элемент множества Y.*
Если R отображение X в Y, то пишут:

$$R : \ X \to Y.$$

Сечение $R(x)$ называют в этом случае образом элемента x при отображении R, сечение $R^{-1}(y)$ называется прообразом элемента y.

Определение 4.3. *Пусть $R : \ X \to Y$ - отображение. Если пара $(x,y) \in R$, то соединяем точку x с точкой y стрелкой в направлении от x к y. Полученный рисунок называется графом отображения R.*

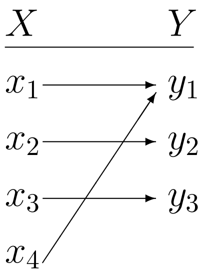
Определение 4.4. *Пусть $R : \ X \to Y$ и $A \subset X$. Множество $\{y \in Y : \exists\ x \in A, y = R(x)\}$ называется образом множества A при отображении R.*

Определение 4.5. *Отображение $R : \ X \to Y$ называется отображением X на Y, если $R(X) = Y$, т.е. любой элемент $y \in Y$ есть образ некоторого элемента $x \in X$.*

Определение 4.6. *Отображение* $R: X \overset{на}{\to} Y$ *называется взаимно однозначным, если*

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow R(x_1) \neq R(x_2).$$

Пример. $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Отображение R зададим равенствами $R(x_1) = y_1, R(x_2) = y_2, R(x_3) = y_3, R(x_4) = y_1$. Оно отображает X на Y, но не является взаимно однозначным. Граф отображения R имеет вид



Определение 4.7. *Если* $R: X \overset{на}{\to} Y$ *взаимно однозначно, то отображение* $R^{-1}: Y \overset{на}{\to} X$, *определяемое равенством* $R^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow R(x) = y$, *называется обратным к* R.

Определение 4.8. *Пусть* $R: X \to Y$ *и* $S: Y \to Z$. *Тогда отображение, которое элементу* x *ставит в соответствие элемент* $S(R(x))$, *называется композицией или суперизацией отображений и обозначается* $S \circ R$.

Очевидно,что $S \circ R: X \to Z$ и по определению

$$(S \circ R)(x) \overset{df}{=} S(R(x)).$$

Теорема 4.1. *Если* $R: X \overset{на}{\to} Y$ *взаимно однозначно, то*
1) $(R \circ R^{-1})(y) = y, \quad \forall\, y \in Y$;
2) $(R^{-1} \circ R)(x) = x, \quad \forall\, x \in X$;

Доказательство. 1) Пусть $y = R(x) \Longrightarrow R^{-1}(y) = x \Longrightarrow (R \circ R^{-1})(y) = R(R^{-1}(y)) = R(x) = y$ и $(R^{-1} \circ R)(x) = R^{-1}(R(x)) = R^{-1}(y) = x$. $\square$

Определение 4.9. *Отображение* $E: X \overset{на}{\to} X$, *определяемое равенством* $E(x) = x$, *называется тождественным.*

Таким образом, теорема 4.1 утверждает, что
1) $R^{-1} \circ R$ есть тождественное отображение $X \overset{на}{\to} X$;

2) $R \circ R^{-1}$ есть тождественное отображение $Y \overset{\text{на}}{\to} Y$.
Замечание. Определение отображения часто формулируют в виде:
Если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X в Y.
Замечание 2. Отображение $R: \ X \to Y$ называется так же функцией. Т.е. термины *отображение* и *функция* – это синонимы. Вместо R в этом случае используют буквы f, F и так далее, множество X называется областью определения функции f, а множество $f(X) \subset Y$ – множеством значений функции f.

5. Конечные и бесконечные множества

Определение 5.1. *Два множества A и B называются равномощными, если существует взаимно однозначное отображение $f: \ A \overset{\text{на}}{\to} B$. Если A равномощно B, будем писать $A \sim B$.*

Теорема 5.1. *Отношение равномощности есть отношение эквивалентности.*

Доказательство.
1) $A \sim A$, так как тождественное отображение $E: \ A \overset{\text{на}}{\to} A$ взаимно однозначно.
2) Если $A \sim B$, то $B \sim A$. В самом деле, пусть $A \sim B$, тогда существует $f: \ A \overset{\text{на}}{\to} B$ взаимно однозначное, следовательно, существует $f^{-1}: \ B \overset{\text{на}}{\to} A$. Покажем, что f^{-1} взаимно однозначно, т.е. из $y_1 \neq y_2$ следует $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$. Обозначим $f^{-1}(y_1) = x_1$ и $f^{-1}(y_2) = x_2$. Предположим, что $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2)$, тогда $f(f^{-1}(y_1)) = f(f^{-1}(y_2))$, отсюда $y_1 = y_2$, что невозможно.
3)Если $A \sim B \wedge B \sim C$ то существует отображение $f: \ A \overset{\text{на}}{\to} B$ взаимно однозначно и $g: \ B \to C$ взаимно однозначно, откуда

$$g \circ f: \ A \overset{\text{на}}{\to} C \ \text{ взаимно однозначно.}$$

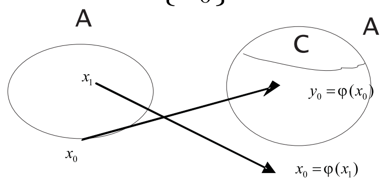
В самом деле, если $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$; следовательно, $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$, откуда $(g \circ f)(x_1) \neq (g \circ f)(x_1)$. $\square$

Определение 5.2. *Так как отношение равномощности есть отношение эквивалентности, то совокупность всех множеств разбивается на* *классы равномощных множеств. Совокупность множеств, равномощных множеству A называется мощностью множества A и обозначается $\overline{\overline{A}}$.*

Определение 5.3. *Множество A называется бесконечным, если оно равномощно некоторому своему собственному подмножеству, в противном случае A называется конечным множеством.*

Теорема 5.2. *Если A конечное множество, то после добавления к нему одного элемента получается снова конечное множество.*

Доказательство. Добавим к A элемент $x_0 \notin A$. Докажем, что $A \cup \{x_0\}$ – конечное множество. От противного. Пусть это бесконечное множество. Тогда $\exists \varphi: \ A \cup \{x_0\} \overset{\text{на}}{\to} B$ взаимно однозначно и B – собственное подмножество $A \cup \{x_0\}$. Рассмотрим несколько случаев.

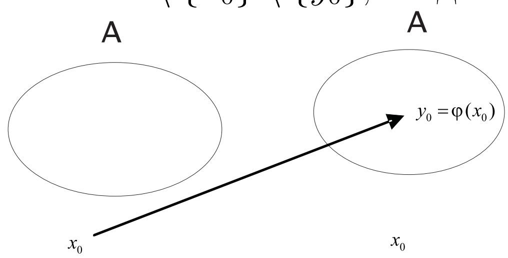


1) $\varphi(x_0) = y_0 \in A \ \wedge \ x_0 = \varphi(x_1)$, где $x_1 \in A$. Тогда $\exists C \subset A$, элементы которого не являются образами элементов из $A \bigcup \{x_0\}$ при отображении φ. Определим отображение ψ равенством

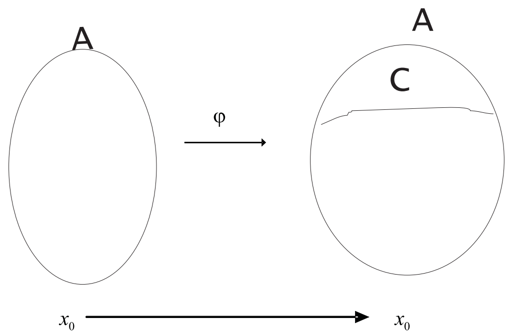
$$\psi(x) = \varphi(x), \text{ если } x \in A \text{ и } x \neq x_1;$$
$$\psi(x_1) = \varphi(x_0) = y_0$$

Отсюда $\psi: \ A \overset{\text{на}}{\to} A \setminus C$ взаимно однозначно, следовательно, A бесконечно.

2) $\varphi(x_0) = y_0 \in A$ и x_0 не имеет прообраза при отображении φ. Но тогда $\varphi: \ A \to B \setminus \{x_0\} \setminus \{y_0\}$, следовательно, A бесконечное множество.



3) $\varphi(x_0) = x_0$. Тогда $\exists C \subset A$, элементы которого не являются образами при отображении φ. Тогда $\varphi: \ A \overset{\text{на}}{\to} A \setminus C$ взаимно однозначно, следовательно, A бесконечно, что неверно. □



Теорема 5.3. *Если A – бесконечное множество, то добавляя (выбрасывая) элемент, получаем бесконечное множество.*

Доказательство. Пусть $B = A \setminus \{x_0\}$, отсюда $A = B \cup \{x_0\}$. Если B конечное, то A конечно по теореме 5.2, что невозможно. $\square$

Замечание. Используя такое определение конечного множества, можно дать следующее определение: Мощность конечного непустого множества называется *натуральным числом.*

6. Аксиомы действительных чисел

Определение 6.1. *Отображение $T: X \times X \to X$ называют операцией на множестве X. Если $T: (x, y) \to z$, то пишут $z = xTy$.*

Например, операция $+$ паре (x, y) ставит в соответствие число $x + y$.

Определение 6.2. *Пусть $\mathbb{R} \neq \emptyset$ непустое множество и в $\mathbb{R}$ определены операции "$+$"и "$\cdot$". Пусть эти операции удовлетворяют следующим свойствам (аксиомам).*

Аксиомы сложения.

A.1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ *(ассоциативность)*

A.2. $a + b = b + a$ *(коммутативность)*

A.3. $\exists \Theta \in \mathbb{R}$, *такой, что* $\forall\, a \in \mathbb{R}\ \ a + \Theta = a$ *(Θ – нулевой элемент)*

A.4. $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \exists\, (-a) \in \mathbb{R}$, *что* $a + (-a) = \Theta$

Замечание. *Аксиомы A.1-A.4 означают, что $\mathbb{R}$ относительно операции "$+$"есть коммутативная группа. Нулевой элемент в дальнейшем будем обозначать через 0.*

Аксиомы умножения.

A.5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ *(ассоциативность)*

A.6. $a \cdot b = b \cdot a$ *(коммутативность)*

A.7. $\exists\, e \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \forall\, a \in \mathbb{R}\ \ ae = a$. *Элемент e называется единичным и*

обозначается 1.
A.8. $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists\, a^{-1}$, *что* $a \cdot a^{-1} = 1.$

Замечание. Аксиомы A5-A8 означают, что множество $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ образует группу относительно операции $\cdot$.

Аксиома связи операций "+"и "$\cdot$".

A.9. $(a+b)c = ac + bc$ (дистрибутивность)

Аксиомы порядка.

В $\mathbb{R}$ определено отношение порядка "$\le$" , удовлетворяющее условиям:
A.10. $a \le a$
A.11. $a \le b \wedge b \le a \Rightarrow a = b$
A.12. $a \le b \wedge b \le c \Rightarrow a \le c$
A.13. $\forall\, a, b \in \mathbb{R} \quad a \le b \vee b \le a$ ($\mathbb{R}$ линейно упорядочено)

Аксиомы связи операции "+"с отношением порядка "$\le$"

A.14. Если $a \le b$, то $\forall\, c \in \mathbb{R} \quad a + c \le b + c$

Аксиомы связи операции "$\cdot$"с отношением порядка "$\le$"

A.15. Если $a \ge 0,\ b \ge 0 \Rightarrow a \cdot b \ge 0$

Аксиома непрерывности.

A.16. Если $A \subset \mathbb{R},\ B \subset \mathbb{R}$ такие, что $A \le B$, т.е. $\forall\, a \in A$ и $\forall\, b \in B\ \ a \le b$, то существует $c \in \mathbb{R}$, разделяющее множества A и B, т.е. $A \le c \le B$, т.е. $\forall\, a \in A, \forall\, b \in B\ \ a \le c \le b.$

Множество $\mathbb{R}$ называется множеством действительных чисел, а любой элемент $a \in \mathbb{R}$ – действительным числом.

7. Свойства действительных чисел, следующие из аксиом.

Свойства, следующие из аксиом A1-A4.

1) Нулевой элемент единственный.

Доказательство. Пусть Θ_1 и Θ_2 - два нулевых элемента. Тогда $\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_1$ и $\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta_2$, следовательно, $\Theta_1 = \Theta_2$.

2) $\forall\, a \in R$ обратный элемент – единственный.

Доказательство. Пусть b_1 и b_2 – два обратных элемента к a. Тогда $(b_1 + a) + b_2 = b_2$ и $b_1 + (a + b_2) = b_1$, т.е. $b_1 = b_2$.

3) Уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $x = b + (-a)$.

Доказательство. Пусть существуют два решения x_1 и x_2, т.е.

$$a + x_1 = b \quad \text{и} \quad a + x_2 = b$$

Прибавим к обеим сторонам $-a$. Тогда $x_1 = b + (-a), \quad x_2 = b + (-a)$, следовательно, $x_1 = x_2$. $\square$

Свойства, следующие из аксиом A5-A8.

1) единичный элемент e - единственный.

Доказательство. Пусть e_1 и e_2 – два единичных элемента. Тогда $e_1 \cdot e_2 = e_2$ и $e_1 \cdot e_2 = e_1$. Отсюда $e_1 = e_2$. $\square$
2) $\forall\, a \in \mathbb{R} \setminus \{\Theta\}$ обратный элемент единственный.
Доказательство. Пусть b_1 и b_2 – обратные. Тогда $b_1 a b_2 = b_1$ и $b_1 a b_2 = b_2$, следовательно, $b_1 = b_2$. $\square$
3) $\forall\, a \neq \Theta$ уравнение $ax = b$ имеет единственное решение $x = b \cdot a^{-1}\ \ \forall b \neq 0$
Доказательство. Ясно, что $a \cdot ba^{-1} = 1 \cdot b = b$. Предположим, что $ax_1 = b$ и $ax_2 = b$, тогда $x_1 = a^{-1}b$ и $x_2 = a^{-1}b$. Следовательно, $x_1 = x_2$. $\square$
Замечание. Вместо a^{-1} часто пишут $\frac{1}{a}$, т.е. $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Свойства, следующие из аксиом дистрибутивности.

1) $0 \cdot a = 0$.
Доказательство. $0 \cdot a = (0+0)a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Прибавим к обеим частям $-(0 \cdot a)$. Тогда $0 = 0 \cdot a$. $\square$
2) $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$.
Доказательство. Пусть $a \neq 0$. Умножим обе части равенства $ab = 0$ на a^{-1}. Тогда $1 \cdot b = 0$. Отсюда $b = 0$. $\square$
3) $(-1) \cdot a = -a$.
Доказательство.$a + (-1 \cdot a) = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 + (-1))a = 0 \cdot a = 0$. $\square$
4) $-(-a) = a$ – очевидно. $\square$

Свойства, следующие из аксиом порядка.

Определим в $\mathbb{R}$ отношение строгого порядка следующим образом: $a < b \overset{df}{\Leftrightarrow} a \leq b \wedge a \neq b$.

1) $\forall\, a, b,\ \ a < b \vee a = b \vee b < a$ – очевидно.

Доказательство. $a \leq b \vee b \leq a$, т.е. $a < b \vee a = b \vee b < a \vee a = b$. $\square$

2) $a < b \wedge b \leq c \Rightarrow a < c$.

3) $a \leq b \wedge b < c \Rightarrow a < c$.

Доказательство. Если $a \neq b$ то $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$, по определению отношение строгого порядка. Если $a = b$, то $a < c$. $\square$

Свойства, следующие из аксиом связи отношения порядка и операции сложения

4) Если $a < b$, то $\forall\, c \in \mathbb{R}\ \ a + c < b + c$.
Доказательство. Если $a < b$, то $a \leq b$ и по аксиоме А.14 $a + c \leq b + c$. Покажем, что $a + c \neq b + c$. От противного. Предположим, что $a + c = b + c$. Прибавим к обеим частям $-c$, получим $a = b$, что противоречит условию $a < b$. Таким образом, $a + c \neq b + c \Rightarrow a + c < b + c$. $\square$
5) Если $a < b \wedge c < d$, то $a + c < b + d$.
Доказательство. По свойству 4) из $a < b \Rightarrow a + c < b + c$. Из $c < d \Rightarrow b + c < b + d$. По свойству транзитивности $a + c < b + c < b + d$. $\square$
6) Если $a > 0$. то $-a < 0$.

Доказательство. Прибавим к обеим частям неравенства число $-a$. Получим $a + (-a) > -a \Rightarrow 0 > -a$, т.е. $-a < 0$. $\square$

Свойства, следующие из аксиом связи отношения порядка и операции умножения

1) Если $a > 0$ и $b > 0$, то $ab > 0$.

Доказательство. Так как $a > 0$ и $b > 0$, то $a \geq 0$ и $b \geq 0$, и по аксиоме А.15 $ab \geq 0$. Покажем, что $ab \neq 0$. Предположим, что $ab = 0$, тогда $a = 0$ или $b = 0$, что противоречит условию $a > 0 \wedge b > 0$. $\square$

2) Если $a > 0$ и $b < 0$, то $ab < 0$.

Доказательство. Из $b < 0 \Rightarrow -b > 0$. По свойству 1) $a \cdot (-b) > 0 \Rightarrow -ab > 0 \Rightarrow ab < 0$. $\square$

3) Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.

Доказательство. Так как $a < b$, то $b + (-a) > 0$ и по свойству 1) $(b + (-a))c > 0$. Отсюда $bc + (-ac) > 0$, и, значит, $bc > ac$. $\square$

4) Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.

Доказательство. Из $c < 0$ следует, что $-c > 0$ и по свойству 3) $-ac < -bc$. Прибавим к обеим частям ac, получим $0 < ac - bc$. Прибавим к обеим частям bc, получим $bc < ac$. $\square$

5) $1 > 0$.

Доказательство. От противного, пусть $\neg(1 > 0)$. Это означает, что $1 < 0$ или $1 = 0$. Равенство $1 = 0$ невозможно, т.е. $1 < 0$. Умножая обе части на число 1, которое меньше 0, получаем $1 > 0$, что противоречит предположению $1 < 0$. $\square$

7. Ограниченные множества и функции

Определение 7.1. *Пусть $X \subset \mathbb{R}$ – числовое множество. Множество X называется ограниченным сверху, если $\exists\, M \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in X$, $x \leq M$. Множество X называется ограниченным снизу, если $\exists\, m \in \mathbb{R}$, $\forall\, x \in X$, $m \leq x$.*

Определение 7.2. *Число C_2 называется верхней границей множества X, если $\forall\, x \in X$, $x \leq C_2$. Число C_1 называется нижней границей множества X, если $\forall\, x \in X$, $x \geq C_1$.*

Замечание. Если верхняя граница C_2 множества X существует, то любое число $C > C_2$ тоже будет верхней границей, т.е. верхняя граница не единственная. Аналогично, нижняя граница, если она существует, тоже не единственная.

Определение 7.3. *Наименьшая из верхних границ множества X называется верхней гранью и обозначается $\sup X$. Наибольшая из нижних границ множества X называется нижней гранью и обозначается $\inf X$.*

Из определения верхней грани следует, что если $M = \sup X$, то
1) $\forall\, x \in X,\ x \leq M$.
2) Любое число $M_1 < M$ не будет верхней границей, т.е.

$$\forall\, M_1 < M,\ \exists\, x \in X,\ M_1 < x \leq M,$$

или иначе

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in X,\ M - \varepsilon < x \leq M.$$

Аналогично, если $m = \inf X$, то
1) $\forall\, x \in X,\ m \leq x$.
2) Любое число $m_1 > m$ не будет нижней границей, т.е.

$$\forall\, m_1 > m,\ \exists\, x \in X,\ m_1 > x \geq m,$$

или иначе

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, x \in X,\ m + \varepsilon > x \geq m.$$

Теорема 7.1. *1) Всякое числовое множество, ограниченное сверху, имеет конечную верхнюю грань.*
2) Всякое числовое множество, ограниченное снизу, имеет конечную нижнюю грань.

Доказательство. 1) Пусть $X \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Оно имеет верхнюю границу. Обозначим через Y множество верхних границ множества X. По определению верхней границы $\forall\, x \in X\ \forall\, y \in Y\quad x \leq y$, т.е. $X \leq Y$. По аксиоме непрерывности существует число $M \in \mathbb{R}$, разделяющее множества X и Y. Покажем, что $M = \sup X$. Т.к. M разделяет множества X и Y, то $X \leq M \leq Y$, т.е. $\forall\, x \in X,\ x \leq M$. Это означает, что M – верхняя граница множества X. Покажем, что M – наименьшая из верхних границ. Пусть это не так, т.е. существует число $M_1 < M$, которое тоже верхняя граница. Значит, $M_1 \in Y$ и т.к. M – разделяющий элемент, то $M \leq M_1$, что противоречит выбору числа M_1. Полученное противоречие и показывает, что M наименьшая из верхних границ, и, значит, $M = \sup X$.
2) Существование нижней грани ограниченного снизу множества доказывается аналогично. $\square$

Определение 7.4. *Пусть* $X, Y \subset \mathbb{R}$ *– числовое множество и* $f: X \to Y$*. Положим по определению* $\inf\limits_{x \in X} f(x) \stackrel{df}{=} \inf f(X)$*, т.е. если* $m = \inf\limits_{x \in X} f(x)$*, то это означает, что*
1) $\forall\, x \in X,\ \ m \le f(x)$*;*
2) $\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, x \in X, \quad m \le f(x) < m + \varepsilon$*.*
Аналогично:

$$\sup_{x \in X} f(x) \stackrel{df}{=} \sup f(X)$$

то есть

$$M = \sup_{x \in X} f(X) \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \forall\, x \in X, \quad f(x) \le M \\ 2) \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, x \in X, \quad M - \varepsilon < f(x) \le M. \end{cases}$$

Определение 7.5. *Функция* $f : X \to \mathbb{R}$ *называется ограниченной сверху, если множество* $f(X)$ *ограничено сверху, т.е.* $\exists\ C_2 \in \mathbb{R}$*, что* $\forall\, x \in X,\ f(x) \le C_2$
Функция $f : X \to \mathbb{R}$ *называется ограниченной снизу, если множество* $f(X)$ *ограничено снизу, т.е.* $\exists\, C_1 \in \mathbb{R}$*, что* $\forall\, x \in X,\ f(x) \ge C_1$
Наконец, f *называется ограниченной, если множество* $f(X)$ *ограничено сверху и снизу, т.е.*$\exists\, C_1 < C_2$*, что* $\forall\, x \in X\ \ C_1 \le f(x) \le C_2$*.*

Теорема 7.2. *Если* $f : X \to \mathbb{R}$ *ограничена сверху (снизу), то существует* $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ *(*$\inf\limits_{x \in X} f(x)$*).*

Доказательство сразу следует из теоремы 7.1.

8. Множество натуральных чисел и его свойства

Определение 8.1. *Множество* $E \subset \mathbb{R}$ *называется индуктивным, если из условия* $x \in E$ *следует* $x + 1 \in E$*.*

Теорема 8.1. *Пересечение любого непустого семейства индуктивных множеств – индуктивное множество.*

Доказательство. Пусть $E_\alpha \subset \mathbb{R}$ индуктивны и $E = \bigcap\limits_\alpha E_\alpha$. Покажем, что E индуктивно. Пусть $x \in E$, тогда $\forall\ \alpha,\ \ x \in E_\alpha$. Отсюда $\forall\ \alpha\ \ x + 1 \in E_\alpha$, следовательно, $x + 1 \in \bigcap\limits_\alpha E_\alpha$. $\Box$

Определение 8.2. *Наименьшее индуктивное множество, содержащее 1, называется множеством натуральных чисел. Обозначается* $\mathbb{N}$*.*

Теорема 8.2 (Принцип математической индукции). *Пусть* $E \subset \mathbb{N}$ *удовлетворяет условиям*
1) $1 \in E$*;*
2) $n \in E \Rightarrow n+1 \in E$*.*
Тогда $E = \mathbb{N}$*.*

Доказательство. Из условия следует, что E индуктивно, следовательно, $\mathbb{N} \subset E$. Отсюда $\mathbb{N} = E$. $\square$
Замечание. Принцип математической индукции формулируют часто следующим образом:
Пусть некоторое свойство $P(x)$ выполнено для $x = 1$, и из условия, что $P(x)$ выполнено, следует, что $P(x+1)$ тоже выполнено. Тогда $P(x)$ справедливо для $\forall\, x \in \mathbb{N}$.
Свойства натуральных чисел.
1) $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$.
Доказательство. Методом индукции. Пусть $E = \{n \in \mathbb{N} :\ n > 0\}$. Покажем, что $E = \mathbb{N}$.
а) $1 > 0$. Это доказано в параграфе 7.
б) Пусть $n \in E$, тогда $n > 0$, отсюда $n+1 > 1+0 = 1 > 0$, следовательно, $n+1 \in E$. Таким образом, по принципу математической индукции $E = \mathbb{N}$. $\square$
2) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ n \geq 1$
Доказательство. $E = \{n \in \mathbb{N} :\ n \geq 1\}$
а) $1 \in E$, так как $1 \geq 1$.
б) Пусть $n \in E$, тогда $n \geq 1$, следовательно, $n+1 \geq 1+1 \geq 1$. Отсюда $n+1 \in E$, следовательно, $E = \mathbb{N}$. $\square$
3) Если $m, n \in \mathbb{N}$, то $m+n \in \mathbb{N}$
Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$ – фиксировано, произвольное. Обозначим $E = \{n \in \mathbb{N} :\ m+n \in \mathbb{N}\}$ и покажем, что $E = \mathbb{N}$.
а) $1 \in E$, так как $m+1 \in \mathbb{N}$.
б) Пусть $n \in E$, т.е. $m+n \in \mathbb{N}$. Тогда $m+n+1 = (m+1)+n \in \mathbb{N}$, откуда $m+(n+1) \in \mathbb{N}$, следовательно, $n+1 \in E$, т.е. по принципу математической индукции $E = \mathbb{N}$.
4) Если $m \cdot n \in \mathbb{N}$, то $m \cdot n \in \mathbb{N}$
Доказательство. Пусть $m \in \mathbb{N}$ – произвольное фиксированное и пусть $E = \{n \in \mathbb{N} :\ m \cdot n \in \mathbb{N}\}$.
а) $1 \in E$, так как $m \cdot 1 = m \in \mathbb{N}$.
б) Пусть $n \in E$,тогда $m \cdot n \in \mathbb{N}$, отсюда $m(n+1) = mn+m \in \mathbb{N}$ по свойству 3). Значит, $n+1 \in E$, следовательно, $E = \mathbb{N}$. $\square$
5) Если $n > 1,\ n \in \mathbb{N}$, то $n-1 \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $E = \{n - 1 \in \mathbb{N} : \ n > 1 \wedge n \in \mathbb{N}\}$. Покажем, что $E = \mathbb{N}$.
а) $n - 1 = 1$, отсюда $n = 1 + 1 \in \mathbb{N}$ и $n > 1$, следовательно, $1 \in E$.
б) $m = n - 1 \in E \Rightarrow n > 1 \wedge n \in \mathbb{N} \Rightarrow m + 1 = n = (n + 1) - 1$ и $n + 1 > 1$ и $n + 1 \in \mathbb{N} \Rightarrow m + 1 \in E \Rightarrow \mathbb{N} = E$. $\square$
6) $\min\{x \in \mathbb{N} : \ x > n\} = n + 1$.
Доказательство. Обозначим $E = \{n \in \mathbb{N} : \ \min\{x \in \mathbb{N} : \ x > n\} = n + 1\}$ и покажем, что $E = \mathbb{N}$. Тогда все будет доказано. Доказываем по индукции.
а) Покажем, что $1 \in E$, т.е. $\min\{x \in \mathbb{N} : \ x > 1\} = 1 + 1 = 2$.
Доказательство проводим по индукции. Обозначим

$$M = \{x \in \mathbb{N} : \ x = 1 \ \text{ или } \ x \geq 2\}.$$

Если мы докажем, что $M = \mathbb{N}$, то мы докажем, что $\min\{x \in \mathbb{N} : \ x > 1\} = 2$. Доказательство равенства $M = \mathbb{N}$ проводим по индукции.
$1 \in M$, так как $1 = 1$.
Пусть $m \in M$. Покажем, что тогда $m + 1 \in M$.
Если $m = 1$, то $m + 1 = 2 \geq 2 \in M$. Если $m > 1$, то $m + 1 > 1 + 1 \geq 2$, следовательно, $m + 1 \in M$, т.е. $M = \mathbb{N}$.
б) Предположим, что $n \in E$, т.е. $\min\{x \in \mathbb{N} : \ x > n\} = n + 1$ и покажем, что $\min\{x \in \mathbb{N} : \ x > n + 1\} = n + 2 = n + 1 + 1$. Очевидно, $\min\{x \in \mathbb{N} : \ x > n + 1\} = \min\{x - 1 : \ x - 1 > n\} + 1 = n + 1 + 1 = n + 2$.
$\square$
7) $\forall\, x \in \mathbb{N}$ невозможно неравенство $n < x < n + 1$, так как наименьшее из значений $x > n$ равно в точности $n + 1$. $\square$
8) Любое непустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент.
Доказательство. Пусть $E \subset \mathbb{N}$. Покажем, что существует наименьший элемент, т.е. элемент $m \in E$, что $m \leq E$.
а) Если $1 \in E$, то 1 и есть наименьший элемент.
б) Пусть $1 \notin E$. Тогда $1 \in \mathbb{N} \setminus E$, и существует ненулевое $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n \in \mathbb{N} \setminus E$ и $n + 1 \notin \mathbb{N} \setminus E$. Таким образом, $n + 1 \in E$. В самом деле, если это не так, то согласно методу математической индукции $\mathbb{N} \setminus E = \mathbb{N}$, откуда $E = \emptyset$. Но тогда этот элемент $n + 1$ и есть наименьший элемент в E. $\square$

9. Множество целых чисел и их свойства

Определение 9.1. *Положим по определению*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \sqcup \{0\} \sqcup (-\mathbb{N})$$

и множество $\mathbb{Z}$ называется множеством целых чисел.

Таким образом, если $n \in \mathbb{Z}$, то или $n \in \mathbb{N}$, или $n = 0$, или $-n \in \mathbb{N}$.

Теорема 9.1. *Множество $\mathbb{Z}$ замкнуто относительно операций "+"и "$\cdot$".*

Доказательство. Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$. Если $m > 0 \wedge n > 0$, то $m + n > 0$, отсюда $m + n \in \mathbb{Z}$.
Если $m = 0$ или $n = 0$, то $m + n$ совпадает с n или с m, следовательно, $m + n \in \mathbb{Z}$.
Если $m > 0$ и $n < 0$, то $m > 0$ и $-n > 0$. Предположим, что $m > -n$, т.е. $\exists\, p \in \mathbb{N},\ \ m = p + (-n)$, отсюда $m + n = p \in \mathbb{N} \in \mathbb{Z}$.
Если же $m < -n$, то $\exists\, p \in \mathbb{N},\ \ -n = p + m$, откуда $m + n = -p \in \mathbb{Z}$. Если $m = -n$, то $m + n = 0 \in \mathbb{Z}$. Таким образом, $\mathbb{Z}$ замкнуто относительно операции $+$.
Покажем, что $\mathbb{Z}$ замкнуто относительно операции "$\cdot$".
Если $m > 0 \wedge n > 0$, то $m \cdot n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
Если $m = 0$ или $n = 0$, то $m \cdot n = 0 \in \mathbb{Z}$.
Если $m < 0 \wedge n < 0$, то $-m > 0 \wedge -n > 0$, откуда $-m \cdot (-n) \in \mathbb{N}$, следовательно, $m \cdot n \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
Если $m > 0 \wedge n < 0$, то $m > 0 \wedge -n > 0$, отсюда $m \cdot (-n) \in \mathbb{N}$, следовательно, $m \cdot n \in -\mathbb{N}$. $\square$
Следствие. *$\mathbb{Z}$ есть группа относительно операции $+$.*

10. Множество рациональных чисел

Определение 10.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{Z}$ и $n \neq 0$ тогда число $m \cdot n^{-1}$ называется рациональным числом и обозначается $\frac{m}{n}$. Множество всех рациональных чисел обозначается $\mathbb{Q}$.*

Свойства. 1). $0 \in \mathbb{Q}$, так как $0 \cdot n^{-1} = \frac{0}{n} = 0 \in \mathbb{Q}$
2) Если $p \in \mathbb{Q}$, то $-p \in \mathbb{Q}$.
Доказательство. $p = \frac{m}{n}$, тогда $-p = \frac{-m}{n} \in \mathbb{Q}$. $\square$

3) $\frac{m}{n} = \frac{s\cdot m}{sn}\ \ \forall\, s \in \mathbb{R},\ s \neq 0.$
Доказательство. $\frac{sm}{sn} = sm\cdot(sn)^{-1} = sm\cdot s^{-1}n^{-1} = s\cdot s^{-1}\cdot mn^{-1} = \frac{m}{n}$. $\square$
4) $\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1n_2+n_1m_2}{n_1n_2} \in \mathbb{Q}$
Доказательство. $\frac{m_1n_2+n_1m_2}{n_1n_2} = (m_1n_2+n_1m_2)(n_1n_2)^{-1} = m_1n_2\cdot(n_1n_2)^{-1} + m_2n_1\cdot(n_1n_2)^{-1} = m_1n_1^{-1} + m_2n_2^{-1} = \frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}$. $\square$
5) $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1m_2}{n_1n_2} \in \mathbb{Q}$
Доказательство.

$$\frac{m_1m_2}{n_1n_2} = (m_1m_2)(n_1n_2)^{-1} = (m_1n_1^{-1})(m_2n_2^{-1}) = \frac{m_1}{n_1}\frac{m_2}{n_2} \quad \square$$

11. Иррациональные числа

Теорема 11.1. *Число $x \in \mathbb{R}$, такое, что $x^2 = 2$, не является рациональным числом.*

Доказательство. Рассмотрим множества

$$X = \{x \in \mathbb{R},\ x > 0 :\ \ x^2 < 2\},$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R},\ y > 0 :\ \ 2 < y^2\}.$$

Так как для таких чисел x и y неравенство $x < y \iff x^2 < y^2$, то $X < Y$. Поэтому по аксиоме непрерывности существует число $z \in \mathbb{R}$, такое, что

$$X \leq z \leq Y.$$

Покажем, что $z^2 = 2$. Доказательство проведем от противного. Пусть $z^2 \neq 2$. Рассмотрим два случая.
1) Пусть вначале $z^2 < 2$, тогда $z \in X$. Рассмотрим число

$$z + \left(\frac{2-z^2}{5}\right) = d.$$

Очевидно, что $d > z$, следовательно, $d \in Y$. Покажем, что $d^2 < 2$. Отметим, что $1 < z \Rightarrow 1 < z^2 \Rightarrow 1 < z^2 < 2 \Rightarrow 2 - z^2 < 1$. Поэтому

$$d^2 = \left(z + \frac{2-z^2}{5}\right)^2 = z^2 + 2z\cdot\frac{2-z^2}{5} + \left(\frac{2-z^2}{5}\right)^2 <$$

$$< z^2 + 4\cdot\frac{2-z^2}{5} + \frac{2-z^2}{5}\cdot\frac{1}{5} < z^2 + \left(\frac{2-z^2}{5}\right)(4+1) = z^2 + 2 - z^2 = 2.$$

Таким образом, $d^2 < 2 \Rightarrow d \in X$. Но $d \in Y \Rightarrow d < d$, что невозможно.
2) Пусть теперь $z^2 > 2 \Rightarrow z \in Y$. Рассмотрим число

$$z - \frac{z^2 - 2}{5} = d < z.$$

Так как $d < z$, то $d \in X$. Покажем, что $d^2 > 2$. Имеем

$$d^2 = z^2 - 2z\frac{z^2 - 2}{5} + \left(\frac{z^2 - 2}{5}\right)^2.$$

Но $2 < z^2 < 4 \Rightarrow z^2 - 2 < 2 \Rightarrow d^2 > z^2 - 4 \cdot \frac{z^2-2}{5} - \frac{z^2-2}{5} = 2 \Rightarrow d \in Y$. Но одновременно $d \in X$ и $d \in Y$ невозможно. Таким образом, $z^2 = 2$
Покажем, что z не рациональное число. Пусть это не так, т.е. $z = \frac{m}{n}$ и пусть $\frac{m}{n}$ несократимая дробь, т.е. m и n не имеют общих множителей. Из $z = \frac{m}{n} \Rightarrow z^2 n^2 = m^2 \Rightarrow 2n^2 = m^2 \Rightarrow m$ делится на $2 \Rightarrow m = 2k \Rightarrow 2n^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n$ делится на 2. Т.е. дробь $\frac{m}{n}$ сократима, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что z не рациональное число. $\square$

Определение 11.1. *Действительное число, которое не является рациональным, называют иррациональным.*

12. Принцип Архимеда

Предложение 12.1. *Любое множество $E \subset \mathbb{N}$, $E \neq \emptyset$, ограниченное сверху, имеет наибольший элемент.*

Доказательство. Так как E ограничено сверху, то $\exists \sup E = M$, т.е.
1) $\forall\, n \in E,\ n \leq M$.
2) $\exists\, n_0 \in E,\ n_0 \leq M < n_0 + 1 \Rightarrow M = n_0$, т.к. между n_0 и $n_0 + 1$ нет других натуральных чисел. $\square$

Предложение 12.2. *Множество $\mathbb{N}$ неограничено сверху.*

Доказательство. От противного. Предположим, что $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда в $\mathbb{N}$ существует наибольший элемент M, т.е. $M \in \mathbb{N}$ и $M \geq n \;\; \forall\, n \in \mathbb{N}$. Но $M + 1 \in \mathbb{N}$ и, значит, $M \geq M + 1$ – что невозможно, т.к. $M < M + 1$. $\square$

Предложение 12.3. *Всякое множество $E \subset \mathbb{Z}$, ограниченное сверху, содержит наибольший элемент.*

Доказательство. Пусть $E \subset \mathbb{N}$. Тогда по предложению 13.1 множество E содержит наибольший элемент. Пусть теперь $E \subset -\mathbb{N} \Rightarrow -E \subset \mathbb{N}$ и $-E$ ограничено снизу, следовательно, $-E$ содержит наименьший элемент $m \in \mathbb{N} \Rightarrow E$ содержит наибольший элемент $-m \in -\mathbb{N}$. Если $E \bigcap \mathbb{N} \neq 0 \wedge E \bigcap -\mathbb{N} \neq 0$, то множество $E \bigcap \mathbb{N}$ содержит наибольший элемент m_0, который будет наибольшим в E. $\square$

Предложение 12.4. *Множество $\mathbb{Z}$ ограниченое снизу, содержит наименьший элемент. (Очевидно.)*

Предложение 12.5. *Множество $\mathbb{Z}$ неограничено сверху и снизу. (Очевидно.)*

Предложение 12.6 (Принцип Архимеда). *Пусть $h > 0, h \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$. Тогда существует $n \in \mathbb{Z}$, такое, что $nh < x \leq (n+1)h \Leftrightarrow n < \frac{x}{h} \leq (n+1)$.*

Доказательство. Обозначим $E = \{m \in \mathbb{Z} : \ m < \frac{x}{h}\}$. E – ограничено сверху, значит, в E существует наибольший элемент $n \Rightarrow n < \frac{x}{h} \leq n+1$. $\square$

Предложение 12.7. *Пусть $q \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}$. Тогда существует $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $\frac{p}{q} < x \leq \frac{p+1}{q}$.*

Доказательство. Это принцип Архимеда при $h = \frac{1}{q}$. $\square$

Предложение 12.8. $\forall \, \varepsilon > 0, \ \varepsilon \in \mathbb{R}, \ \exists \, n \in \mathbb{N}$, *что* $\frac{1}{n} < \varepsilon$

Доказательство. По принципу Архимеда для $h = \varepsilon, x = 1 \ \exists \, n, \ \ n\varepsilon < 1 \leq (n+1)\varepsilon \Rightarrow \square$

13. Абсолютная величина числа

Определение 13.1. *Если $a \in \mathbb{R}$, то положим по определению* $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

Свойства.

1) $|a| \geq 0$. **Доказательство.** Рассмотрим 2 случая.
1. $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \geq 0$,
2. $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0 \Rightarrow |a| \geq 0$.
2) $a \leq |a|, \ -a \leq |a|, \ -|a| \leq a$.
Надо рассмотреть случай $a \geq 0$ и $a < 0$, например: $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a \geq a$, $a < 0 \Rightarrow |a| = -a > 0 > d \geq d$.
3) $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$.

Доказательство. Пусть $|a| \leq b \Rightarrow a \leq |a| \leq b$ и $-b \leq -|a| \leq a \Rightarrow -b \leq a \leq b$. Проверим противоположное утверждение.
Пусть $a \geq 0 \Rightarrow a = |a| \Rightarrow a \leq b \Rightarrow |a| \leq b$.
Пусть $a < 0 \Rightarrow a \geq -b \Rightarrow -a \leq b \Rightarrow |a| \leq b$. $\square$
4) $|a+b| \leq |a| + |b|$.
Доказательство. $a \leq |a| \wedge b \leq |b| \Rightarrow a+b \leq |a|+|b|$. Кроме этого $a \geq -|a| \wedge b \geq -|b| \Rightarrow a+b \geq -(|a|+|b|) \Rightarrow -(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b| \Rightarrow$ по свойству 3: $|a+b| \leq |a|+|b|$. $\square$
5) $|a+b| \geq |a| - |b|$.
Доказательство. $|a| = |a+b-b| \leq |a+b| + |b| \Rightarrow |a+b| \geq |a| - |b|$. $\square$

14. Изображение действительных чисел на прямой. Подмножества множества действительных чисел. Расширенная числовая прямая

Определение 14.1. *Прямая, на которой*
1) выбрано положительное направление обхода,
2) начальная точка,
3) масштабный отрезок,
называется числовой прямой. На числовой прямой целое число $n \in \mathbb{Z}$ изображается точкой, лежащей на расстоянии в $|n|$ масштабных отрезков.

Определение 14.2. *Множество $(a,b) \overset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}: \ a < x < b\}$ называется интервалом.*
Множество $[a,b] \overset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}: \ a \leq x \leq b\}$ называется отрезком.
Множество $[a,b) \overset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}: \ a \leq x < b\}$ называется полуинтервалом.
Множество $(a,b] \overset{df}{=} \{x \in \mathbb{R}: \ a < x \leq b\}$ называется полуинтервалом.

Определение 14.3. *Символом $]a,b[$ обозначается одно из множеств $(a,b), [a,b], (a,b]$ или $[a,b)$ и называется промежутком.*

Определение 14.4. *Число, которое больше любого действительного числа, обозначается $+\infty$ (+ бесконечность).*
Число, которое меньше любого действительного числа, обозначается $-\infty$ (- бесконечность).
Множество $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ называется расширенным множеством действительных чисел или расширенной числовой прямой.

Свойства. По определению полагаем
1) $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \ a + \infty = +\infty,\ a - \infty = -\infty,$
2) $\forall\, a \in \mathbb{R}, a > 0,\ \ a \cdot (+\infty) = +\infty,\ a \cdot (-\infty) = -\infty,$
3) $\forall\, a \in \mathbb{R}, a < 0,\ \ a \cdot (-\infty) = +\infty,\ a \cdot (+\infty) = -\infty,$
4) $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty,\ \ +\infty + (+\infty) = +\infty,$
5) $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty,\ \ -\infty + (-\infty) = -\infty,$
Не определены операции: $+\infty - (+\infty),\ \ -\infty - (-\infty)$

$$\frac{+\infty}{+\infty},\quad \frac{-\infty}{-\infty},\quad \frac{+\infty}{-\infty},\quad \frac{-\infty}{+\infty}.$$

15. Представление действительных чисел в виде бесконечной десятичной дроби.

Теорема 15.1. *Пусть* $a \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\exists\, a_0 \in \mathbb{Z}$ *и* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \exists\, a_k \in \{0, 1, ..., 9\}$, $k = \overline{1, n}$ *такие, что*

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n} \leq a < a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n} \qquad (15.1)$$

Доказательство. Так как $a \in \mathbb{R}$, то при $h = 1$ по признаку Архимеда $\exists\, a_0 \in \mathbb{Z}$, что

$$a_0 \leq a < a_0 + 1. \qquad (15.2)$$

Существование чисел $a_1, a_2, ...a_n, ...$ докажем по индукции.
1) $n = 1$. Рассмотрим число $a - a_0$. Положим $h = \frac{1}{10}$ и по принципу Архимеда $\exists\, a_1 \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$a_1 \cdot \frac{1}{10} \leq a - a_0 < (a_1 + 1)\frac{1}{10}. \qquad (15.3)$$

Отсюда

$$a_0 + a_1 \cdot \frac{1}{10} \leq a < a_0 + (a_1 + 1)\frac{1}{10}.$$

Покажем, что $0 \leq a_1 \leq 9$. Из (15.2) следует, что $0 \leq a - a_0 < 1 \Rightarrow a_1 \cdot \frac{1}{10} < 1 \Rightarrow a_1 < 10$. Кроме того, $(a_1 + 1)\frac{1}{10} > 0 \Rightarrow a_1 + 1 > 0 \Rightarrow a_1 > 0$. Отсюда $0 \leq a_1 \leq 9$.
2) Пусть выполнено (15.1). Тогда для $x = a - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n}\right)$ и $h = \frac{1}{10^{n+1}}$ по принципу Архимеда $\exists\, a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$a_{n+1} \cdot \frac{1}{10^{n+1}} \leq a - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n}\right) < \frac{a_{n+1} + 1}{10^{n+1}} \qquad (15.4)$$

Из (15.4) следует, что

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \le a < a_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}}. \tag{15.5}$$

Покажем, что $0 \le a_{n+1} \le 9$. Из (15.1) получаем

$$0 \le a - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_{n-1}}{10^{n-1}} + \frac{a_n}{10^n}\right) < \frac{1}{10^n}.$$

Отсюда $a_{n+1} \cdot \frac{1}{10^{n+1}} < \frac{1}{10^n} \Rightarrow a_{n+1} < 10 \Rightarrow a_{n+1} \le 9$. Так как $\frac{a_{n+1}+1}{10^{n+1}} > 0, a_{n+1} + 1 > 0 \Rightarrow a_{n+1} \ge 0$. $\Box$

Определение 15.1. *Тот факт, что для числа $a \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство (15.1) запишем в виде*

$$a = a_0, a_1 a_2 a_3 ... a_n ... \tag{15.6}$$

и запись (15.6) назовем представлением числа a в виде бесконечной десятичной дроби. Выражение $a_0, a_1 a_2 ...$ называется бесконечной десятичной дробью.

16. Принцип вложенных отрезков

Теорема 16.1 (Кантора–Коши). *Пусть дана система вложенных отрезков*

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

Тогда 1) $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ x_0 \in [a_n, b_n]$.
2) Если $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n \in \mathbb{N},\ \ |b_n - a_n| < \varepsilon$, то такое число x_0 единственное.

Доказательство. 1) Рассмотрим множества $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}, B = \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ Очевидно, что

$$a_1 \le a_2 \le ... \le a_n \le ...$$
$$b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n \ge ...$$

и $a_n \le b_n$. Отсюда следует, что $\forall\, n, m,\ \ a_n \le b_m$. Покажем это. Предположим, что $n < m$. Тогда

$$a_n \le a_m \le b_m \le b_n.$$

Это означает, что $A \le B$. По аксиоме непрерывности $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$, разделяющее множества A и B, т.е. $\forall\, m, n,\ \ a_m \le x_0 \le b_n \Rightarrow \forall\, n \in \mathbb{N},\ a_n \le x_0 \le b_n \Rightarrow x_0 \in$ всем отрезкам $[a_n, b_n]$.
2) Покажем, что x_0 единственное. Предположим, что $\exists\, x_1$ и $x_2 \in [a_n, b_n]$ при всех n и $x_1 \ne x_2$. Предположим для определенности $x_1 < x_2 \Rightarrow\ \ a_n \le x_1 < x_2 \le b_n$. Но тогда $x_2 - x_1 \le b_n - a_n$. Положим $\varepsilon = \frac{x_2 - x_1}{2}$. По условию, $\exists\, n,\ \ b_n - a_n < \frac{x_2 - x_1}{2} \Rightarrow x_2 - x_1 < \frac{x_2 - x_1}{2}$, что невозможно. $\Box$

17. Теорема о конечном покрытии

Определение 17.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Совокупность множеств $E_\alpha (\alpha \in I)$ называется покрытием множества E, если $\cup_{\alpha \in I} E_\alpha \supset E$. Покрытие называется конечным, если оно состоит из конечного числа попарно различных множеств E_α.*

Теорема 17.1 (Лемма Бореля–Лебега). *Из любого покрытия отрезка $[a, b]$ интервалами (a'_α, b'_α) можно выделить конечное подпокрытие.*

Доказательство. От противного. Пусть это не так, т.е. существует покрытие

$$\bigcup_{\alpha \in I} (a'_\alpha, b'_\alpha) \supset [a, b],$$

из которого нельзя выделить конечного подпокрытия. Обозначим $c = \frac{a+b}{2}$. Тогда
$\bigcup\limits_{\alpha \in I} (a'_\alpha, b'_\alpha)$ есть покрытие как отрезка $[a, c]$, так и отрезка $[c, b]$. Из него нельзя выделить конечного подпокрытия или отрезка $[a, c]$ или отрезка $[c, b]$, так как в противном случае, объединение конечных покрытий отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ дает конечное покрытие $[a, b]$. Обозначим через $[a_1, b_1]$ ту половину отрезка $[a, b]$, из покрытия которой нельзя выделить конечного подпокрытия. Очевидно, что $b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2}$. Снова поделим отрезок $[a_1, b_1]$ пополам и через $[a_2, b_2]$ обозначим ту половину, из покрытия которой нельзя выделить конечного подпокрытия. Ясно, что $b_2 - a_2 = \frac{b-a}{2^2}$ и $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$. Продолжая этот процесс, получим семейство отрезков $[a_n, b_n]$ таких, что
1) $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$
2) $|b_n - a_n| = \frac{b-a}{2^n}$.
3) Из покрытия $\bigcup\limits_{\alpha \in I} (a_\alpha, b_\alpha) \supset [a_n, b_n]$ нельзя выделить конечного подпокрытия отрезка $[a_n, b_n]$.
По теореме Кантора–Коши $\exists\ !\ x_0 \in \mathbb{R}$, что $\forall\ n,\ x_0 \in [a_n, b_n]$. Но $x_0 \in \cup(a'_\alpha, b'_\alpha) \Rightarrow \exists(a'_{\alpha_0}, b'_{\alpha_0}) \ni x_0$. Обозначим $d = \min(x_0 - a'_{\alpha_0}, b'_{\alpha_0} - x_0)$, тогда найдется такое n_0, что $|b_{n_0} - a_{n_0}| = \frac{1}{2^{n_0}} < d \Rightarrow [a_{n_0}, b_{n_0}] \subset (a'_{\alpha_0}, b'_{\alpha_0})$, т.е. $(a'_{\alpha_0}, b'_{\alpha_0})$ – образует покрытие отрезка $[a_{n_0}, b_{n_0}]$, что невозможно по построению отрезков $[a_n, b_n]$. $\square$

18. Лемма о предельной точке

Определение 18.1. *Множество* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *называется* δ-*окрестностью точки* x_0 *и обозначается* $O_\delta(x_0)$. *Множество* $(x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ *называется проколотой окрестностью точки* x_0 *и обозначается* $\overset{\circ}{O}_\delta (x_0)$.

Определение 18.2. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}$. *Число* $x_0 \in \mathbb{R}$ *называют предельной точкой множества* E, *если в любой* $O_\delta(x_0)$ *содержится бесконечно много точек множества* E.

Ясно, что $\overset{\circ}{O}_\delta (x_0) = O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Лемма 18.1. *Точка* x_0 *является предельной точкой множества* E *тогда и только тогда, когда в любой проколотой окрестности* $\overset{\circ}{O}_\delta (x_0)$ *содержится по крайней мере одна точка, принадлежащая* E.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Точка x_0 – предельная, значит в любой $O_\delta(x_0)$ существует бесконечное множество точек множества E, следовательно, существует по крайней мере одна точка $x \in \overset{\circ}{O}_\delta (x_0) \bigcap E$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Выберем $\overset{\circ}{O}_{\delta_1} (x_0)$, содержащую точку $x_1 \in E$ и $x_1 \neq x_0$. Положим $\delta_2 = |x_1 - x_0|$, тогда в $\overset{\circ}{O}_{\delta_2} (x_0)$ $\exists\ x_2 \in E$. Ясно, что $x_2 \neq x_1$. Продолжая эти рассуждения, получим бесконечное множество точек $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in E$, лежащих в исходной $\overset{\circ}{O}_{\delta_1} (x_0)$. $\square$

Теорема 18.2 (Лемма Больцано–Вейерштрасса). *Всякое бесконечное ограниченное множество имеет по крайней мере одну предельную точку.*

Доказательство. Пусть E ограничено, т.е. $\exists\ A$ и $B \in \mathbb{R}$, что $\forall\ x \in E$, $A \leq x \leq B$ и E бесконечно. Разделим отрезок $[A, B]$ пополам точкой $C = \frac{A+B}{2}$. Тогда или отрезок $[A, C]$ или отрезок $[C, B]$ содержит бесконечное множество точек множества E. Обозначим через $[A_1, B_1]$ ту половину, которая содержит бесконечное множество точек множества E. Ясно, что $|B_1 - A_1| = \frac{B-A}{2}$ и $[A, B] \supset [A_1, B_1]$. Продолжая процесс деления, получаем семейство отрезков $[A_n, B_n]$ таких, что
1) $[A, B] \supset [A_1, B_1] \supset ... \supset [A_n, B_n] \supset ...$
2) $|B_n - A_n| = \frac{B-A}{2^n}$.

3) Каждый отрезок $[A_n, B_n]$ содержит бесконечное множество точек множества E.
По теореме о вложенных отрезках $\exists\, !x_0 \in \mathbb{R}$ такая, что

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad x_0 \in [A_n, B_n].$$

Покажем, что x_0 – предельная точка множества E. Выберем $O_\delta(x_0)$. Выберем n так, чтобы $\frac{B-A}{2^{n_0}} < \delta$. Тогда $[A_{n_0}, B_{n_0}] \subset O_\delta(x_0)$. Отсюда следует, что в $O_\delta(x_0)$ содержится бесконечно много точек множества E. $\square$

19. Счетные множества

Определение 19.1. *Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется счетным, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$.*

Пример. Множество $2\mathbb{N}$ – четных чисел счетно, так как можно установить взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{N}$ и $2\mathbb{N}$ по формуле

$$\varphi: \quad n \to 2n.$$

Замечание. Множество E согласно определения счетно, если каждому элементу можно поставить в соответствие натуральный номер.

Теорема 19.1. *Объединение конечного числа счетных множеств – снова счетное множество.*

Доказательство. Пусть дано m счетных множеств

$$X_1 = \{x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)}, ...\} - \text{счетное.}$$

$$X_2 = \{x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)}, ...\} - \text{счетное.}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_m = \{x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)}, ...\} - \text{счетное.}$$

Занумеруем их по столбцам. Очевидно, что каждому числу будет присвоен номер. $\square$

Теорема 19.2. *Объединение счетного семейства счетных множеств – снова счетное множество.*

Доказательство. Пусть $X_n = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_k^{(n)}, ...\}$ – счетные множества. Запишем их в виде бесконечной таблицы

$$\begin{array}{lllllll}
A_1 = & \{ & a_1^{(1)} \to & a_2^{(1)}, & \dots, & a_n^{(1)}, & \dots\} \\
& & \qquad\swarrow & \nearrow & & & \\
A_2 = & \{ & a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \dots & a_n^{(2)}, & \dots\} \\
& & \downarrow \quad \nearrow & & & & \\
A_3 = & \{ & a_1^{(3)}, & a_2^{(3)}, & \dots, & a_n^{(3)}, & \dots\} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Занумеруем элементы объединения по диагоналям, пропуская занумерованные ранее. Очевидно, что все члены будут занумерованы. $\square$

Следствие 1. *Множества $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ счетные. множество.*

Доказательство. $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-\mathbb{N}\} \cup \{0\}$ – счетное по теореме 19.1. Пусть $\mathbb{Z}_n = \{\frac{k}{n}\}$, где $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ – фиксировано ($n = 1, 2, ...$). Таких множеств – счетное множество и $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_n$ – счетное по теореме 19.2. $\square$

20. Множества мощности континуум

Теорема 20.1. *Множество $(0, 1)$ – несчетное.*

Доказательство. Предположим, что $(0, 1)$ – счетное, тогда все его элементы

$a_1, a_2, ..., a_n, ...$ можно занумеровать. Запишем каждое число $a_k \in (0, 1)$ в виде десятичной дроби. Получим бесконечную таблицу

$$a_1 = 0, a_{1,1}, a_{1,2}, ..., a_{1,n}, ...$$
$$a_2 = 0, a_{2,1}, a_{2,2}, ..., a_{2,n}, ...$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_n = 0, a_{n,1}, a_{n,2}, ..., a_{n,n}, ...$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Построим новое число $c = 0, c_1 c_2 ...$ следующим образом: $c_1 \neq a_{1,1},\ c_2 \neq a_{2,2}, ...$ Тогда $c \neq a_1,\ c \neq a_2, ...,$ т.е. получим число, которое есть десятичная дробь и не содержится в таблице, что невозможно. $\square$

Определение 20.1. *Множество, равномощное множеству $(0, 1)$, называется множеством мощности континуум.*

Теорема 20.2. *Множество $\mathbb{R}$ имеет мощность континуум.*

Доказательство. Отображение $y = \operatorname{ctg} \pi x$ отображает $(0, 1)$ на $(-\infty, +\infty)$ взаимно-однозначно. $\square$

Глава 2

Последовательность и ее предел

1. Предел последовательности, различные определения предела

Определение 1.1. *Отображение $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называют последовательностью. Каждое число $a(n)$ называют элементом или членом последовательности. Обозначают последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ или (a_n).*

Пример. $a_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, ...)$ – последовательность.

Определение 1.2. *Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – числовая последовательность. Число $A \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности (a_n), если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\; \forall\, n \geq n_0 \;\; |a_n - A| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Последовательность (a_n) называется в этом случае сходящейся к A. Обозначение:

$$A = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{или} \quad a_n \to A.$$

Замечание. Очевидно, что (1.1) можно записать в виде $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\; \forall\, n > n_0 \;\; |a_n - A| < \varepsilon$.
Пример. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, так как по принципу Архимеда $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Отсюда находим, что $\forall n \geq n_0, \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Теорема 1.1. *Число A будет пределом последовательности (a_n) тогда и только тогда, когда вне любой окрестности $O_\delta(A)$ содержится конечное число элементов последовательности (a_n), а внутри – бесконечное.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Тогда $\forall\, \delta > 0\; \exists\, n_0,\; \forall\, n \geq n_0,\;\; |a_n - A| < \delta$, следовательно, вне окрестности $O_\delta(A)$ содержится не более n_0 элементов последовательности (a_n).
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть вне $O_\varepsilon(A)$ содержится конечное число

элементов a_n. Обозначим $n_0 = \max\{n :\ a_n \notin O_\varepsilon(A)\}$. Тогда $\forall\, n > n_0,\ a_n \in O_\varepsilon(A)$. Следовательно, $\forall\, n > n_0,\quad |a_n - A| < \varepsilon$. $\square$

Теорема 1.2. *Предел постоянной последовательности равен самой постоянной.*

Доказательство. Пусть $\forall\, n \in \mathbb{N}, a_n = a$. Тогда $|a_n - a| = 0 < \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \geq 1$. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. $\square$

2. Единственность предела

Теорема 2.1 (единственность предела). *Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ существует, то он единственный.*

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ и $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Положим $\varepsilon = \frac{|A-a|}{2}$, тогда в $O_\varepsilon(A)$ содержится бесконечное число элементов последовательности, а вне – конечное и в $O_\varepsilon(a)$ содержится бесконечное число элементов, а вне – конечное, что невозможно. $\square$

3. Ограниченность сходящейся последовательности

Определение 3.1. *Последовательность (a_n) называется ограниченной, если*

$$\exists\, c > 0,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\quad |a_n| \leq c.$$

Пример. 1) Последовательность $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ ограничена, так как

$$|a_n| = \left|1 + \frac{1}{n}\right| = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \quad (n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq 1).$$

2) Последовательность $a_n = n + 1$ неограничена, так как $\forall\, c \in \mathbb{R}\ \ \exists\, n \in \mathbb{N}$, что $n > c$ (здесь мы учли, что множество $\mathbb{N}$ – неограничено сверху)

Теорема 3.1. *Если последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$. Тогда для $\varepsilon = 1,\ \exists\ n_0,\ \forall\ n > n_0,\quad |a_n - A| < 1$, отсюда $|a_n| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A|\ \forall\ n > n_0$. Положим $M = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0}|,\}$ и $C = \max(M, (1 + |A|))$. Тогда $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ |a_n| \leq C$. $\square$

Замечание. Обратное утверждение неверно, например последовательность $(-1)^n$ ограничена, но предела не имеет.

4. Арифметические операции над пределами

Теорема 4.1. *Пусть* $\lim a_n$ *и* $\lim b_n$ *существуют. Тогда*
1) $\lim(a_n \pm b_n) = \lim a_n \pm \lim b_n$.
2) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} a_n$
3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4) Если $b_n \neq 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.
5) Если $b_n \neq 0$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

Доказательство. 1) Пусть $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n,\ B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, тогда

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_1,\ \forall\ n > n_1\ \ |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_2,\ \forall\ n > n_2\ \ |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Тогда $\forall\ n > n_0\ |(a_n + b_n) - (A + B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. $\Box$
2) По определению предела $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0,\ \forall\ n \ge n_0\ \ |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|+1} \quad \Rightarrow$ $|\lambda a_n - \lambda A| = |\lambda| \cdot |a_n - A| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|+1} < \varepsilon$. $\Box$
3) Запишем разность $|a_n b_n - AB|$ в виде

$$|a_n b_n - AB| = |a_n b_n - Ab_n + Ab_n - AB| \le |(a_n - A)||b_n| + |A||(b_n - B)|.$$

Так как последовательность (b_n) сходится, то она ограничена и,значит, $|b_n| \le M$. Записывая определение предела имеем

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0,\ \forall\ n > n_0,\ \ |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{(M+1)2}, |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{(|A|+1)2}.$$

Отсюда находим, что $\forall\, n > n_0\ |a_n b_n - AB| < \frac{\varepsilon}{(M+1)2} \cdot M + \frac{\varepsilon}{(|A|+1)2}|A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. $\Box$
4) Так как $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B \neq 0$, то для

$$\varepsilon = \frac{|B|}{2},\ \exists\ n_1,\ \forall\ n > n_1,\ \ |b_n - B| < \frac{|B|}{2}.$$

Отсюда

$$|b_n| = |b_n - B + B| \ge |B| - |b_n - B| \ge |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2} > 0.$$

Таким образом, $\forall\, n \geq n_1 + 1, \ \ |b_n| \geq \frac{|B|}{2}$. Запишем разность

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} = \frac{B - b_n}{b_n \cdot B}.$$

Так как $\lim b_n = B$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_2,\ \forall\, n > n_2,\ \ |B - b_n| < \varepsilon \cdot \frac{|B|^2}{2}.$$

Тогда при $n > n_0 = \max(n_1, n_2)$, $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B-b_n|}{|b_n|\cdot|B|} < \frac{\varepsilon\cdot\frac{|B|^2}{2}}{\frac{|B|^2}{2}} = \varepsilon$.

5) Сразу следует из свойств 3 и 4. $\square$

5. Предельный переход в неравенствах

Теорема 5.1. *Пусть* $\exists\ \lim a_n = A$, $\exists\ \lim b_n = B$ *и* $A < B$. *Тогда существует* n_0, $\forall\, n > n_0$, $\ a_n < b_n$

Доказательство. Выберем $\varepsilon = \frac{B-A}{2}$, тогда $\exists\, n_1$, $\forall\, n > n_1$, $\ a_n \in O_\varepsilon(A)$, $\exists\ n_2$, $\forall\ n > n_2$, $\ b_n \in O_\varepsilon(B)$. Тогда $\forall\ n > n_0 = \max(n_1, n_2)$, $\ a_n \in O_\varepsilon(A) \wedge b_n \in O_\varepsilon(B)$, следовательно, $a_n < A + \varepsilon = B - \varepsilon < b_n$. $\square$

Теорема 5.2. *Если* $\forall\, n,\ a_n \leq b_n$ *и* $\exists\ \lim a_n$, $\exists\ \lim b_n$, *то* $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Доказательство. От противного. Пусть $\lim a_n > \lim b_n$, тогда по теореме 5.1 $\exists\, n_0$, $\forall\, n > n_0\ \ a_n > b_n$, что противоречит условию. $\square$

Лемма 5.3. $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{n\to\infty} |A - a_n| = 0$.

Доказательство – очевидно.

Теорема 5.4 (теорема о сжатой переменной). *Пусть* $a_n \leq x_n \leq b_n$ *и* $\lim a_n = \lim b_n = A$. *Тогда существует* $\lim x_n = A$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$|x_n - A| = |x_n - a_n + a_n - A| \leq |x_n - a_n| + |a_n - A| \leq |b_n - a_n| + |a_n - A|$$

Но $\lim |b_n - a_n| = 0$, $\lim |a_n - A| = 0$. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, n > n_0,\ \ |b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

$\square$

6. Фундаментальная последовательность и ее свойства

Определение 6.1. *Последовательность* (a_n) *называется фундаментальной, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, m, n > n_0\ \ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Теорема 6.1. *Если последовательность* (a_n) *сходится, то она фундаментальна.*

Доказательство. Пусть $\lim a_n = A$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, m, n > n_0\ \ |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|a_m - A < \frac{\varepsilon}{2}| \Rightarrow |a_n - a_m| \le |a_n - A| + |A - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. $\square$

Теорема 6.2. *Фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Так как (a_n) фундаментальна, то для $\varepsilon = 1\ \exists\ n_0,\ \forall\ m, n > n_0\ \ |a_n - a_m| < 1$. Положим $m = n_0 + 1$, тогда $|a_n - a_{n_0+1}| < 1$, отсюда

$$\forall\, n > n_0,\ |a_n| \le |a_n - a_{n_0+1}| + |a_{n_0+1}| < 1 + |a_{n_0+1}|.$$

Пусть $C = \max(1 + |a_{n_0+1}|, |a_1|, |a_2|, ..., |a_{n_0}|) \Rightarrow \forall\, n\ \ |a_n| \le C$. $\square$

Замечание. Свойство фундаментальности иногда формулируют в следующем виде:

$$\lim_{n,m\to\infty}(a_n - a_m) = 0$$

7. Монотонная последовательность. Критерий сходимости монотонной последовательности

Определение 7.1. *Последовательность* (a_n) *называется возрастающей, если* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ a_{n+1} \ge a_n$ *и строго возрастающей, если* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ a_{n+1} > a_n$. *Последовательность* (a_n) *называется убывающей, если* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ a_{n+1} \le a_n$ *и строго убывающей, если* $\forall\, n \in \mathbb{N}\ \ a_{n+1} < a_n$.

Определение 7.2. *Последовательность* (a_n) *называется монотонной, если она является либо убывающей, либо возрастающей.*

Определение 7.3. *Последовательность называется стационарной, если* $\exists\, n_0,\ \ \forall\, n \ge n_0\ \ a_{n+1} = a_n$.

Теорема 7.1. *Стационарная последовательность сходится.*

Доказательство. Пусть $\forall\, n \ge n_0,\ a_n = A \Rightarrow \forall\, n \ge n_0,\ \ |a_n - A| = 0 < \varepsilon\ \ \forall\, \varepsilon > 0$. $\square$

Теорема 7.2. *Монотонная последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена.*

Доказательство. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для определенности (a_n) возрастает. Тогда множество ее значений ограничено. Следовательно, $\exists\ \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = A$. Покажем, что $A = \lim\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$. По определению верхней грани $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0$, что $A - \varepsilon < a_{n_0} \leq A$. Но (a_n) возрастает, следовательно, $\forall\ n > n_0\quad a_{n_0} \leq a_n \leq A \quad\Rightarrow\quad \forall\ n > n_0\quad |a_n - A| < |a_{n_0} - A| < \varepsilon$. $\Box$

Н е о б х о д и м о с т ь. Очевидна, т.к. любая сходящаяся последовательность ограничена. $\Box$

8. Подпоследовательность и ее предел

Определение 8.1. *Пусть (a_n) – числовая последовательность и $n(k)$ – строго возрастающая числовая последовательность, для которой $n(k) \in \mathbb{N}$. Тогда суперпозиция*

$$a(n(k))$$

называется подпоследовательностью. Вместо $a(n(k))$ обычно пишут a_{n_k}.

Пример. (a_n) – произвольная последовательность, $n(k) = 2k$, тогда $a_{n(k)} = a_{2k}$ –подпоследовательность с четными номерами. Аналогично, (a_{3k}) – подпоследовательность с номерами, кратными 3.

Теорема 8.1. *Если $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то для любой подпоследовательности (a_{n_k})*
$\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} a_{n_k} = A$.

Доказательство. По определению предела

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon > 0,\ \forall\ n > n_\varepsilon\ \ |a_n - A| < \varepsilon.$$

Так как n_k строго возрастает и $\lim n_k = +\infty$, то для $n_\varepsilon\ \exists\ k_0,\ \forall\ k > k_0\ \ n_k > n_\varepsilon\ \Rightarrow\ \forall\ k > k_0,\ \ |a_{n_k} - A| < \varepsilon\ \Rightarrow\ \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. $\Box$

Теорема 8.2. *Пусть для всех подпоследовательностей (a_{n_k}) существует некоторый предел, равный A. Тогда $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.*

Доказательство. От противного. Пусть $\lim a_n \neq A.\ \Rightarrow\ \exists\ \varepsilon_0 > 0,\ \forall\ n_k \in \mathbb{N},\ \exists\ n_{k+1} > n_k,\ \ |a_{n_{k+1}} - A| \geq \varepsilon_0$, т.е. существует подпоследовательность (a_{n_k}), для которой $A \neq \lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$. $\Box$

9. Выделение сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности

Теорема 9.1. *Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Рассмотрим 2 случая.
1) Множество значений последовательности (a_n) есть конечное множество. Тогда существует по крайней мере одно число $A \in \mathbb{R}$, которое есть образ бесконечного множества $\mathbb{N}_1 \in \mathbb{N}$. Тогда a_{n_k} при $n_k \in \mathbb{N}_1$ есть последовательность, у которой $\forall\, n_k,\ a_{n_k} = A$, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$.
2) Пусть множество значений последовательности (a_n) есть бесконечное множество. По теореме Больцано–Вейерштрасса существует предельная точка для множества $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Обозначим ее через A. Покажем, что существует подпоследовательность $a_{n_k} \to A$. Выбираем $\varepsilon_1 = 1$. В $O_1(A)$, содержится бесконечно много элементов последовательности. Выберем в ней элемент, с номером n_1 и положим $\varepsilon_2 = \frac{A-a_{n_1}}{2}$. Тогда в $O_{\varepsilon_2}(A)$ содержится бесконечно много элементов последовательности (a_n). Выберем в $O_{\varepsilon_2}(A)$ элемент a_{n_2}. Очевидно, что $n_2 > n_1$ и $|A - a_{n_2}| < \frac{|A-a_{n_1}|}{2}$. Продолжая этот процесс, получаем подпоследовательность a_{n_k}, удовлетворяющую условиям $|A - a_{n_{k+1}}| < \frac{|A-a_{n_1}|}{2^k} \to 0$ при $k \to \infty$, отсюда $\lim\limits_{k\to\infty} |A - a_{n_k}| = 0 \ \Rightarrow \lim a_{n_k} = A$. □

10. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Теорема 10.1. *Последовательность (a_n) сходится тогда и только тогда, когда (a_n) фундаментальна.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь очевидна, так как доказана ранее.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть (a_n) фундаментальна, тогда (a_n) ограниченная, следовательно, из (a_n) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(a_{n_k}) \to A$. Покажем, что $\lim a_n = A$. Так как $a_{n_k} \to A$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, k > k_0\ \ |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Но последовательность (a_n) фундаментальна, значит $\exists\, n_0\ \forall\, m, n > n_0,\ \ |a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Будем считать, что k выбрано так, что $n_k > n_0$. Тогда $\forall\, n > n_0\ \ |a_n - A| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$. □

11. Неравенство Бернулли

Теорема 11.1. *Если* $a > -1$, *то* $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$(1+a)^n \geq 1 + na. \tag{8.1}$$

Доказательство. По индукции. 1) $n = 1: \quad 1 + a \geq 1 + a$ – верно.
2) Пусть (8.1) выполнен при некотором $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что (8.1) верно при замене n на $n+1$. Имеем

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n \cdot (1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+na+a+na^2 > 1+a(n+1). \ \square$$

Неравенство (8.1) называется неравенством Бернулли.

12. Число Непера

Теорема 12.1. *Существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Покажем, что (a_n) убывающая последовательность, т.е. $a_{n+1} \leq a_n$. Имеем с учетом неравенства Бернулли

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)}\right)^{n+2} \frac{n}{n+1} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \frac{n}{1+n} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right) \frac{n}{1+n} = 1 \ \Rightarrow \ a_{n+1} \leq a_n.$$

Таким образом, последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает и ограничена снизу, следовательно, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$. $\square$
Следствие. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Определение 12.1. *Число* $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *называется числом Непера.*

Замечание. Число $e = 2.718281828...$ бесконечная непериодическая дробь.

13. Некоторые пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{\gamma^n} = 0 \ \ (\alpha \in \mathbb{N}, \gamma > 1).$

Доказательство. Пусть вначале $\alpha = 1$ Обозначим $x_n = \frac{n}{\gamma^n}$ и покажем, что последовательность x_n убывающая. Имеем

$$\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{n}{\gamma^n}\frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)} = \left(\frac{n}{n+1}\right) \cdot \gamma.$$

Отсюда

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Так как $\left(1+\frac{1}{n}\right) \to 1$, то

$$\frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{n}\right) \to \frac{1}{\gamma} < 1,$$

следовательно, $\exists\ n_0,\ \forall\ n > n_0\ \ \frac{1}{\gamma}\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1$. Таким образом, последовательность $(x_n)_{n=n_0}^{\infty}$ убывает. Значит, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Перейдем к пределу в неравенство $x_{n+1} \leq d \cdot x_n$. Отсюда $A \leq d \cdot A \ \ \Rightarrow \ \ A = 0$. Так как если $A > 0$, то $d \geq 1$, что невозможно. Если $\alpha > 1$, то $\frac{n^\alpha}{\gamma^n} = \left(\frac{n}{\left(\gamma^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n}\right)^\alpha$. Так как $\frac{n}{\left(\gamma^{\frac{1}{\alpha}}\right)^n} \to 0$, то $\frac{n^\alpha}{\gamma^n} \to 0$. □

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Доказательство. Обозначим $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$ $(\alpha_n > 0)$. Тогда по формуле Бинома Ньютона $n = (1+\alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n + \frac{n(n+1)}{2}\alpha_n > \frac{n(n+1)}{2}\alpha_n$. Отсюда

$$\alpha_n \leq \frac{2n}{n(n+1)} = \frac{2}{n+1} \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0.$$

Переходя к пределу в равенстве $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, получаем $\lim \sqrt[n]{n} = 1$. □

14. Формула Бинома Ньютона

Теорема 14.1. $\forall\ a, b \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. *Число* $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ *называется числом сочетаний из* n *по* k.

Доказательство. По индукции.

1) $n=1$. $(a+b)^1=\sum\limits_{k=0}^{1}C_1^k a^k b^{1-k}=C_1^0a^0b^1+C_1^1a^1b^0=b+a.$

2) Пусть $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$. Тогда

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)^n\cdot(a+b)=\left(\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}\right)(a+b)=$$

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k+1}=$$

положим $k+1=l$ в первой сумме

$$=\sum_{l=1}^{n+1}C_n^{l-1}a^l b^{n-l+1}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k+1}=\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}a^k b^{n+1-k}+\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n+1-k}=$$

$$=C_n^n a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}C_n^{k-1}a^k b^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n}C_n^k a^k b^{n+1-k}+C_n^0a^0b^{n+1}=$$

$$=C_{n+1}^{n+1}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}(C_n^{k-1}+C_n^k)a^k b^{n+1-k}+C_{n+1}^0a^0b^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k a^k b^{n+1-k}.\ \square$$

15. Верхний и нижний пределы последовательности

Определение 15.1. *Пусть $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограниченная числовая последовательность. Обозначим $A_n=\sup\{a_n,a_{n+1},...\}=\sup\limits_{k\geq n}a_k$. Очевидно, что $A_{n+1}\leq A_n$, т.е. (A_k) образуют убывающую последовательность. Так как (a_n) – ограниченная последовательность, то последовательность A_n тоже ограниченная последовательность. Поэтому $\exists\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$. Этот предел называется верхним пределом и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$ или $\limsup\limits_{n\to\infty}a_n$. Таким образом по определению*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\overset{df}{=}\lim_{n\to\infty}(\sup_{n\geq k}a_k).$$

Аналогично,

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n\overset{df}{=}\lim_{n\to\infty}(\inf_{k\geq n}a_k)$$

называется нижним пределом.

Предложение 15.1.
$$\underline{\lim} a_n \le \overline{\lim} a_n.$$

Доказательство. Пусть $A_n = \sup\limits_{k\ge n} a_k$, $B_n = \inf\limits_{k\ge n} a_n$. Тогда $B_n \le A_n \Rightarrow \lim B_n \le \lim A_n \Rightarrow \underline{\lim} a_n \le \overline{\lim} a_n$. □

Теорема 15.2. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$*, то* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = A$

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0\, \forall\, n > n_0, \;\; |a_n - A| < \varepsilon \;\Rightarrow\; A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon \;\; \forall\, n > n_0.$$

Поэтому числа $\sup\limits_{k\ge n} a_k = A_n$ удовлетворяет неравенству $A-\varepsilon < A_n \le A+\varepsilon$. Значит, $|A_n - A| \le \varepsilon\; \forall\, n > n_0 \Rightarrow \lim A_n = A$.
Аналогично доказывается, что $\forall\, n > n_0\; |B_n - A| < \varepsilon \Rightarrow \lim B_n = A$. □

Теорема 15.3. *Если* $\underline{\lim} a_n = \overline{\lim} a_n = A$*, то*
$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Доказательство. Пусть $B_k = \inf\limits_{k\ge n} a_k \le a_n \le \sup\limits_{k\ge n} a_k = A_n$. Отсюда, по теореме о сжатой переменной, $\lim a_n = \lim A_n = \lim B_n = A$. □

16. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Определение 16.1. *Последовательность* (a_n) *называется бесконечно малой, если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$*. Обозначение:* $a_n = o(1)$*.*

Определение 16.2. *Последовательность* (a_n) *называется бесконечно большой, если последовательность* $\left(\frac{1}{a_n}\right) = o(1)$*. Обозначение:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$*.*

Таким образом, по определению:
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Теорема 16.1. $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0, \forall\, n \ge n_0,\; |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Доказательство.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0 \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0, \quad \left|\frac{1}{a_n}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow |a_n| > \frac{1}{\varepsilon}.\ \square$$

Определение 16.3. $\lim a_n = +\infty$ *если* $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, n \geq n_0\ a_n > \frac{1}{\varepsilon}$.
$\lim a_n = -\infty$ *если* $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, n \geq n_0\ a_n < -\frac{1}{\varepsilon}$.

Теорема 16.2. *1) Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
2) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$
3) Обратное неверно. Очевидно.

Глава 3

Предел функции

1. Предел функции, различные определения предела

Определение 1.1. *Пусть $f(x)$ определена на E, x_0-предельная точка множества E. Число A называется пределом функции f в точке x_0, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in E \wedge x \neq x_0, \;\; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (1.1)$$

Обозначается: $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *или* $f(x) \to A \; (x \to x_0)$.

Замечание 1. Так как условие $x \neq x_0 \wedge |x - x_0| < \delta$ равносильно условию $x \in \overset{\circ}{O}_\delta (x_0)$, то определение 1.1 можно записать в виде

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \overset{\circ}{O}_\delta (x_0) \cap E, \;\; |f(x) - A| < \varepsilon. \qquad (1.2)$$

Замечание 2. Так как условие $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно $f(x) \in O_\varepsilon(A)$, то 1.2 можно записать в виде

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \;\; \forall\, x \in \overset{\circ}{O}_\delta (x_0) \cap E, \;\; f(x) \in O_\varepsilon(A) \qquad (1.3)$$

или иначе

$$\forall\, O_\varepsilon(A) \,\exists\, O_\delta(x_0) \;\; \forall\, x \in \overset{\circ}{O}_\delta (x_0) \cap E, \;\; f(x) \in O_\varepsilon(A) \qquad (1.4)$$

или

$$\forall\, O(A) \,\exists\, O(x_0) \;\; f(\overset{\circ}{O} (x_0) \cap E) \subset O_\varepsilon(A) \qquad (1.5)$$

(1.4) называется определением предела на языке окрестностей,
(1.5) называется топологическим определением предела.

2. Предел функции на языке последовательностей (по Гейне)

Теорема 2.1. *Пусть f определена на E, x_0 – предельная точка E. $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ тогда и только тогда, когда $\forall\ x_n \to x_0,\ x_n \in E,\ x_n \neq x_0$ выполняется $f(x_n) \to A$, или иначе $A = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. По определению предела $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \ \forall\ x \neq x_0, x \in E \cap O_\delta(x_0),\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$. Выберем произвольную последовательность $x_n \to x_0$ ($x_n \in E,\ x_n \neq x_0$). Так как $x_n \to x_0$, то для числа $\delta > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\ n > n_0,\ |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow \forall\ n > n_0,\ \ |f(x_n) - A| < \varepsilon$. Следовательно, $A = \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n)$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\forall\ x_n \to x_0\ (x_n \neq x_0, x_n \in E) f(x_n) \to A$. Покажем, что $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Предположим, что это не так, т.е.

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0,\ \forall\ \delta = \frac{1}{n},\ \exists\ x_n \in \overset{\circ}{O}_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap E,\ \ |f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Значит, $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \wedge f(x_n)$ не сходится к A, что противоречит условию $f(x_n) \to A$. $\square$

3. Единственность предела

Теорема 3.1. *Если $\exists\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то этот предел единственен.*

Доказательство. Предположим, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B$. Выберем $\varepsilon > 0$, тогда $\exists\ \delta > 0\ \forall\ x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \cap E,\ \ |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2},\ |f(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $|B - A| = |B - f(x) + f(x) - A| \leq |B - f(x)| + |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Таким образом, $\forall\ \varepsilon > 0,\ |B - A| < \varepsilon \Rightarrow |B - A| = 0 \Rightarrow B = A$. $\square$

4. Предельный переход в неравенствах

Теорема 4.1. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены в E, x_0 – предельная точка в E и $\exists\ O_\delta(x_0)$, что $\forall\ x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0) \cap E\quad f(x) \leq g(x)$. Если $\exists\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\exists\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Доказательство. Выберем последовательность $x_n \to x_0,\ x_n \in \overset{\circ}{O}_\delta (x_0) \cap E \ \Rightarrow\ f(x_n) \le g(x_n)$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_n) \le \lim_{x\to x_0} g(x_n) = \lim_{x\to x_0} g(x). \ \square$$

Теорема 4.2. *Пусть* $\alpha(x) \le f(x) \le \beta(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to x_0} \beta(x) = A$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Доказательство. Выбираем $x_n \to x_0,\ x_n \in E,\ x_n \ne x_0$. Тогда $\alpha(x_n) \le f(x_n) \le \beta(x_n)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x_n) = \lim\limits_{x\to x_0} \beta(x_n) = A$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ для любой последовательности $x_n \to x_0\ x_n \ne x_0$. Согласно определению предела по Гейне $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. $\square$

5. Арифметические операции над пределами

Теорема 5.1. *Пусть* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. *Тогда*
1) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
2) $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} \lambda f(x) = \lambda f(x)$,
3) $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,
4) Если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ne 0$, *то* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

Доказательство. 1) Выбираем произвольное $x_n \to x_0$ ($x_n \ne x_0,\ x_n \in E$). Тогда

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{n\to\infty} (f(x_n) \pm g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x).$$

2) – аналогично. 3) – аналогично. 4) Обозначим $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = G_0 \ne 0$. Тогда для $\varepsilon = \frac{|G_0|}{2}\ \exists\ O_\delta(x_0),\ \forall\ x \in \overset{\circ}{O}_\delta (x_0) \cap E$,

$$|g(x) - G_0| < \frac{|G_0|}{2} \ \ \Rightarrow\ \ |g(x)| \ge |G_0| - \frac{|G_0|}{2} = \frac{|G_0|}{2} > 0.$$

Выберем теперь последовательность $x_n \to x_0$, $x_n \ne x_0$, $x_n \in E$ такую, что $|x_n - x_0| < \frac{|G_0|}{2}$. Тогда $g(x_n) \ne 0$ и $\lim g(x_n) = G_0 \ne 0$. По определению Гейне

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{\lim f(x_n)}{\lim g(x_n)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}. \ \square$$

6. Предел сложной функции

Теорема 6.1. *Пусть* $f : X \overset{на}{\to} Y$, x_0 *– предельная точка* X *и* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$*. Пусть* y_0 *– предельная точка* Y, $\forall\, x \in X \;\; f(x) \neq y_0$*. Пусть* $g(y)$ *определена на* Y *и* $\exists \lim\limits_{y\to y_0} g(y) = z_0$*. Тогда* $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0 = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$*.*

Доказательство. По определению предела

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, y \in Y,\; y \neq y_0\;\; |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - z_0| < \varepsilon.$$

Так как $y_0 = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то для найденного $\delta > 0\; \exists\, \sigma > 0,\; \forall\, x \in X,\; x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \sigma \Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta \Rightarrow \forall\, x,\; |x - x_0| < \sigma\;\; |g(f(x)) - z_0| < \varepsilon$. $\square$

Задача. Привести пример, который показывает, что без условия $f(x) \neq y_0$ теорема неверна.

7. Критерий Коши существования предела у функции

Теорема 7.1 (Критерий Коши)*. Пусть* $l : E \to \mathbb{R}, x_0$ *– предельная точка множества* E*.* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ *существует тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x', x'' \in E,\; x', x'' \neq x_0\; |x' - x_0| < \delta, |x'' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \tag{7.1}$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\lim f(x) = A$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \neq x_0\; |x - x_0| < \delta, x \in E,\; |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\forall\, x', x'' \in \overset{\circ}{O}_\delta (x_0) \cap E\;\; |f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнено (7.1). Выберем последовательность $x_n \to x_0, x_n \neq x_0, x_n \in E$. Покажем, что последовательность $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальная. Из $x_n \to x_0$ следует, что для $\delta > 0\; \exists\; n_0,\; \forall\; m, n > n_0,\; |x_m - x_0| < \delta \wedge |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow \forall\; m, n > n_0,\; |f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon \Rightarrow (f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Но по критерию Коши для числовой последовательности $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$. Покажем, что $\forall\; x_n \to x_0,\; \lim f(x_n)$ равен одному и тому же числу.

Пусть $x'_n \to x_0, x''_n \to x_0$ и $\lim f(x'_n) = y_1,\; \lim f(x''_n) = y_2$. Покажем, что $y_1 = y_2$. Для этого образуем новую последовательность (x_n) по принципу:

$$x_{2n} = x'_n,\;\; x_{2n+1} = x''_n.$$

Тогда $x_n \to x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$. Но $f(x'_n)$ есть подпоследовательность для $f(x_n) \Rightarrow f(x'_n) \to y_0$. $f(x''_n)$ есть подпоследовательность для $f(x_n) \Rightarrow f(x''_n) \to y_0$. Следовательно, для всех последовательностей $x_n \to x_0$, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y_0$, где y_0 фиксированное число, тогда по определению на языке последовательностей $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$. $\square$

8. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых

Определение 8.1. *Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой в точке x_0, если $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$. Обозначение: $\alpha(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ $(x \to x_0)$*

Теорема 8.1. $\lim\limits_{x\to x_0} a(x) = A$ *тогда и только тогда, когда $a(x) = A+\alpha(x)$, где $\alpha(x) = \bar{\bar{o}}(1)$.*

Доказательство. Из определения предела следует, что $A = \lim\limits_{x\to x_0} a(x)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to x_0} (a(x) - A) = 0$. Обозначим $a(x) - A = \alpha(x)$, тогда $\alpha(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ и $a(x) = A + \alpha(x)$. $\square$

Определение 8.2. *Две бесконечно малых функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ в точке x_0 называются эквивалентными, если*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Теорема 8.2. *Пусть $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{a(x)}{b(x)} = y_0$ и $A(x) \sim a(x), B(x) \sim b(x)$, $a(x), b(x), A(x), B(x) = \bar{\bar{o}}(1)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = y_0$.*

Доказательство.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim \frac{A(x)}{a(x)} \cdot \frac{a(x)}{b(x)} \cdot \frac{b(x)}{B(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x)}{b(x)}. \ \square$$

Определение 8.3. *Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ $(x \to x_0)$. Будем писать $\alpha(x) = \bar{\bar{o}}(\beta(x))$ при $x \to x_0$ и говорить, что $\alpha(x)$ имеет более высокий порядок малости, если $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$.*

Теорема 8.3. *Если* $\alpha(x) = \bar{\bar{o}}(1)$ $(x \to x_0)$ *и* $|\beta(x)| \leq M$*, т.е.* $\beta(x)$ *ограничена на* E*, то* $\alpha(x) \cdot \beta(x) = \bar{\bar{o}}(1)$*, т.е. произведение бесконечно малой на ограниченную есть бесконечно малая.*

Доказательство. Самостоятельно.

9. Односторонние пределы

Определение 9.1. *Число* A_- *называется пределом слева функции* $f(x)$ *в точке* x_0*, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0,\; \forall\, x < x_0,\; |x - x_0| < \delta \wedge x \in E \Rightarrow |f(x) - A_-| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_-$.
Число A_+ *называется пределом справа функции* $f(x)$ *в точке* x_0*, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0,\; \forall\, x > x_0,\; |x - x_0| < \delta \wedge x \in E \Rightarrow |f(x) - A_+| < \varepsilon.$$

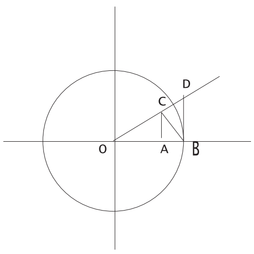
Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_+$.

Теорема 9.1. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Доказательство очевидно. Доказать самостоятельно.

10. Первый замечательный предел



Лемма 10.1. *1)* $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$.
2) $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$.

Доказательство. 1) Обозначим через x радианную меру угла и пусть $x > 0$. Из $\Delta OCB \Rightarrow S_{\Delta OCB} < S_{sect.OCB} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot |AC| < \frac{1}{2} x \cdot 1^2 \Rightarrow |AC| < x \Rightarrow \sin x < x \Rightarrow 0 < \sin x < x$ Отсюда $\lim\limits_{x \to 0+0} \sin x = 0$. Но тогда и

$\lim\limits_{x\to 0-0} \sin x = 0.$
2) $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = 1-2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1-2\lim\limits_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1.$
$\square$

Теорема 10.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$

Доказательство. $S_{\Delta OCB} < S_{sektOCB} < S_{\Delta ODB}$. Отсюда $\frac{1}{2}\sin x\cdot 1 < \frac{1}{2}x\cdot 1^2 < \frac{1}{2}\text{tg x}\cdot 1$. Следовательно,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Но $\lim\limits_{x\to 0+0}\cos x = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0+0}\frac{x}{\sin x} = 1$. $\square$

Предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ называется первым замечательным пределом.

Следствие. Теорема 10.2 означает, что $\sin x \sim x$ при $x\to 0$.

11. Бесконечные пределы и пределы в бесконечно удаленной точке

Окрестностью бесконечно удаленной точки $x_0 = +\infty$ называется множество $O_\delta(+\infty) = \{x:\ x > \delta\}\ \ (\delta > 0)$.
Окрестностью бесконечно удаленной точки $x_0 = -\infty$ называется множество $O_\delta(-\infty) = \{x:\ x < -\delta\}\ \ (\delta > 0)$.
Окрестностью бесконечно удаленной точки $x_0 = \infty$ называется множество $O_\delta(\infty) = \{x:\ |x| > \delta\}\ \ (\delta > 0)$.
Запишем определение предела на языке окрестностей: $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall\, O_\varepsilon(A)\ \exists\ \overset{\circ}{O}_\delta(x_0)\ \forall\, x \in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0)\cap E,\ \ f(x)\in O_\varepsilon(A).$$

Как выглядит это определение, если $A = \infty$ или $x_0 = \infty$? Если $x_0 = +\infty$, то на языке $\varepsilon-\delta$ получаем: $A = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ тогда и только тогда, когда

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0,\ \forall\, x\in E,\ x > \delta,\ \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Задача: Определения последовательностей $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ записать на языке $\varepsilon-\delta$.

Глава 4

Непрерывные функции

1. Непрерывные функции в точке. Несколько определений

Определение 1.1 (Основное определение). *Пусть f определена на $E \subset \mathbb{R}$ и $x_0 \in E$. f называется непрерывной в точке $x_0 \in E$, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in E,\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Замечание 1. Если x_0 – изолированная точка множества E, то это всегда выполняется. Следовательно, *любая* функция непрерывна в *изолированной* точке.

Замечание 2. Если x_0 – предельная точка множества E, то определение 1.1 означает, что

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

и, следовательно, функцию f можно назвать непрерывной в предельной точке $x_0 \in E$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Замечание 3. Определение непрерывности можно записать в виде:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \forall\, x \in O_\delta(x_0) \cap E,\ f(x) \in O_\varepsilon(f(x_0))$$

или, иначе,

$$\forall\, O_\varepsilon(f(x_0)),\ \exists\, O_\delta(x_0),\ \forall\, x \in O_\delta(x_0) \cap E,\ f(x) \in O_\varepsilon(f(x_0)), \tag{1.1}$$

или

$$\forall\, O(f(x_0)),\ \exists\, O(x_0),\ f(O(x_0) \cap E) \subset O(f(x_0)). \tag{1.2}$$

(1.1) – определение на языке окрестностей, (1.2) – определение топологическое.

2. Сохранение знака непрерывной функции в окрестности точки непрерывности

Теорема 2.1. *Пусть f определена на E, $x_0 \in E$, $f(x_0) \neq 0$ и f непрерывна в точке x_0. Тогда существует $O(x_0)$, в которой $f(x)$ имеет тот же знак, что и $f(x_0)$.*

Доказательство. По определению предела для $\varepsilon = \frac{|f(x_0)|}{2}$ $\exists\, O_\delta(x_0)$, $\forall\, x \in O_\delta(x_0) \cap E$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следовательно,

$$-\frac{|f(x_0)|}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{|f(x_0)|}{2}. \tag{2.1}$$

Если $f(x_0) > 0$, то левая часть неравенства (2.1) дает

$$f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Если $f(x_0) < 0$, то из правой части неравенства (2.1) получаем

$$f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0. \ \square$$

3. Арифметические операции над непрерывными функциями

Теорема 3.1. *Пусть $f(x), g(x)$ непрерывны в точке $x_0 \in E$. Тогда*
1) $f(x) \pm g(x)$ – непрерывна.
2) $f(x) \cdot g(x)$ – непрерывна.
3) Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0.
4) $f(x) = \mathrm{const}$ – непрерывна в любой точке $x_0 \in E$.

Доказательство. Если x_0 – изолированная точка множества E, то это очевидно. Пусть x_0 – предельная точка множества E. Докажем утверждения 1-2). По свойствам предела

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = f(x_0) \pm g(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = f(x_0) \cdot g(x_0) \Rightarrow$$

$f \pm g$ и $f \cdot g$ непрерывны в точке x_0.
3) Если $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow g(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки x_0. Следовательно, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.
4) Последнее утверждение очевидно. Доказать самостоятельно.$\square$

4. Непрерывность сложной функции

Теорема 4.1. *Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_0, $f(x_0) = y_0$, $Y = f(X)$, $g(y)$ непрерывна в точке $y_0 \in Y$, область определения функции g содержится в области значений f. Тогда сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Т.к. g непрерывна в т. y_0, то

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, y \in Y,\ |y - y_0| < \delta,\ \Rightarrow\ |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

Т.к. f непрерывна в т. x_0, то для выбранного $\delta > 0$,

$$\exists\, \sigma > 0,\ \forall\, |x - x_0| < \sigma,\ x \in X,\ \ |f(x) - f(x_0)| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon \Rightarrow |(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)| < \varepsilon.$$

$\square$

Следствие. Если f непрерывна в точке x_0, $f(x_0) = y_0$, $g(y)$ непрерывна в точке y_0 и x_0 – предельная точка области определения f, y_0–предельная точка области определения g, то

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right).$$

Это означает, что знак предела можно проносить под знак непрерывной функции.

5. Непрерывность элементарных функций

Определение 5.1. *Функция $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ $(a_n \neq 0)$ называется многочленом степени n.*

Теорема 5.1. *Многочлен есть непрерывная функция для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Очевидно, что функция $g(x)$ определена $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
1) Функция $\varphi(x) = x$ – непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, т.к. $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.
2) Функция $\varphi(x) = x^n$ непрерывна в каждой точке $x_0 \in \mathbb{R}$, т.к. $x^n = x \cdot x \cdot ... \cdot x$.
3) $a_k x^k$ – непрерывна, как произведение непрерывной g-функции на число.
4) $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ есть непрерывная функция как сумма непрерывных функций. $\square$

Теорема 5.2. $\sin x$ *есть непрерывная функция для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. По формуле разности синусов

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq |x-x_0|.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0} |\sin x - \sin x_0| \leq \lim |x-x_0| = 0$. Значит, $\lim\limits_{x\to x_0} (\sin x - \sin x_0) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$. Следовательно, $\sin x$ непрерывен в т. x_0. □

Теорема 5.3. *$\cos x$ – непрерывная функция для всех $x \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. $1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \Rightarrow \cos x$ – непрерывная функция. □

6. Односторонняя непрерывность

Определение 6.1. *Функция $f(x)$, определенная на E, называется непрерывной в точке $x_0 \in E$ слева, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \leq x_0, x \in E, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Определение 6.2. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in E$ справа, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, x \geq x_0, x \in E, \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Теорема 6.1. *$f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $f(x)$ непрерывна в точке x_0 слева и справа.*

Доказательство очевидно.

7. Разрывные функции. Классификация точек разрыва

Пусть $x_0 \in E$ предельная точка множества E и f ограничена на E.

Определение 7.1. *Если $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то f называется разрывной. Таким образом, $f(x)$ разрывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.*

Замечание. Очевидно, что точка разрыва всегда предельная точка!!

Определение 7.2. *$f(x)$ имеет в точке x_0 устранимый разрыв, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.*

Пример 1.

$$|f(x)| = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва.

Определение 7.3. $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *разрыв I рода, если существуют пределы* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, *но они не равны.*

Пример 2.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

В точке $x_0 = 0$ – разрыв I рода.

Определение 7.4. $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *разрыв II рода, если по крайней мере один из односторонних пределов* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to x_0+0)} f(x)$ *не существует или* $= \infty$.

Пример 3.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

В точке $x_0 = 0$ – разрыв II рода, т.к. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

Пример 4.

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\sin\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = k\pi \Rightarrow x = \frac{1}{k\pi}$.
$\sin\frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}$.
$\sin\frac{1}{x} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow x = \frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2\pi k}$.
Таким образом, $\lim\limits_{k\to+\infty} \sin\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)^{-1}} = \lim 1 = 1$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \sin\frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)^{-1}} = \lim -1 = -1$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0+0} \sin\frac{1}{x}$ не существует, следовательно, в точке $x = 0$ – разрыв II рода.

8. Равномерно непрерывные функции. Теорема Кантора

Определение 8.1. $f(x)$, *определенная на* E, *называется равномерно непрерывной на* E, *если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x', x'' \in E, \quad |x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Теорема 8.1. *Если $f(x)$ равномерно непрерывна на E, то $f(x)$ непрерывна в каждой точке множества E.*

Доказательство. $x_0 \in E \Rightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x'' \in E\ \ |x'' - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x'') - f(x_0)| < \varepsilon$. $\square$

Теорема 8.2. *Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. От противного. Пусть f не равномерно непрерывна. Тогда

$$\exists\ \varepsilon_0 > 0\ \forall\ \delta = \frac{1}{n},\ \exists\ x_n', x_n'' \in E,\ \ |x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \text{ но } |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0.$$

Из последовательности x_n' выделим сходящуюся подпоследовательность

$$x_{n_k}' \to x_0 \in [a, b].$$

Т.к. f непрерывна, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}') = f(x_0)$. Но $|x_{n_k}'' - x_{n_k}'| < \frac{1}{n_k} \to 0 \Rightarrow x_{n_k}'' \to x_0 \Rightarrow \lim f(x_{n_k}'') = f(x_0) \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} |f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| = 0$, что противоречит условию $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon_0$. $\square$

Замечание. Теорема неверна, если отрезок $[a, b]$ заменить на интервал. Например, функция $f(x) = \frac{1}{x}$ на $(0, 1)$ непрерывна в любой точке $x \in (0, 1)$, но $f(x)$ не равномерно непрерывна, так как если выберем $x_n' = \frac{1}{n},\ x_n'' = \frac{1}{n+1}$, то $|x_n' - x_n''| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \to 0$.
Но $|f(x_n') - f(x_n'')| = |n - (n+1)| = 1$ не стремится к 0.

9. Ограниченность функции, непрерывной на отрезке. Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке

Теорема 9.1. *Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f непрерывна на $[a, b]$, но неограничена. Тогда

$$\forall\ c = n \in \mathbb{N}\ \ \exists\ x_n \in [a, b],\ \ |f(x_n)| \geq n.$$

Выберем подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty},\ \ x_{n_k} \in [a, b]$ такую, что $x_{n_k} \to x_0\ (k \to \infty)$. Тогда $x_0 \in [a, b]$. Но f непрерывна в точке x_0, следовательно, $f(x_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$. Значит последовательность $(f(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ ограничена,

что противоречит условию $|f(x_n)| \geq n$. $\square$
Замечание. Обратное неверно, т.е. ограниченная функция не обязательно непрерывна.

Теорема 9.2. *Если f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на $[a, b]$ своего наибольшего и наименьшего значения, т.е. $\exists\, x_0', x_0'' \in [a, b]$, что $\forall\, x \in [a, b]$ $f(x') \leq f(x) \leq f(x'')$.*

Доказательство. Так как f непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$, значит, $\exists \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x) = m$, $\exists \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x) = M$. По определению $\inf$: $\forall\, \varepsilon = \frac{1}{n}$ $\exists\, x_n \in [a, b]$ $m \leq f(x_n) < m + \frac{1}{n}$. Последовательность (x_n) – ограничена, значит, из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to x_0' \in [a, b]$. для нее

$$m \leq f(x_{n_k}) < m + \frac{1}{n_k}.$$

Перейдем к пределу при $k \to \infty$, получим ввиду непрерывности f

$$m \leq \lim f(x_{n_k}) = f(x_0') \leq m,$$

т.е. $f(x_0') = m$. Аналогично доказываем, что $\exists\, x_0'' \in [a, b]$, что $f(x_0'') = M$. $\square$

10. Промежуточные значения непрерывной функции

Теорема 10.1. *Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, $f(a)$ и $f(b)$ имеют разные знаки, т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует точка $x_0 \in [a, b]$, в которой $f(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Если $f(x_1) = 0$, то все доказано. Если нет, то обозначим через $[a_1, b_1]$ ту половину отрезка $[a, b]$, на концах которой функция f принимает значения разных знаков. Очевидно, что $|b_1 - a_1| = \frac{b-a}{2}$. Продолжая процесс, получаем последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ таких, что

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

и таких, что
1) $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$
2) $|b_n - a_n| = \frac{|b-a|}{2^n} \to 0$
По теореме о вложенных отрезках $\exists!$ x_0, принадлежащее всем отрезкам

$[a_n, b_n]$. Отсюда $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow f(x_0) = \lim f(a_n) = \lim f(b_n)$. Переходя в неравенстве $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ к пределу при $n \to \infty$, имеем $0 \le f^2(x_0) \le 0 \Rightarrow f(x_0) = 0$. $\Box$

Теорема 10.2. *Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на $[a, b]$ все свои промежуточные значения между наибольшим и наименьшим значением.*

Доказательство. Так как f непрерывна, то f принимает на $[a, b]$ свои наибольшее и наименьшее значение, то есть
$\exists\ x_m \in [a, b],\ f(x_m) = m = \min\limits_{[a,b]} f(x)$ и $\exists\ x_M \in [a, b],\ f(x_M) = M = \max\limits_{[a,b]} f(x)$. Очевидно, что $m \le M$. Если $m = M$, то $f(x) \equiv \mathrm{const}$, и все доказано. Пусть $m < M$ и пусть y_0 такое, что $m < y_0 < M$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - y_0$. Тогда $h(x_m) = f(x_m) - y_0 = m - y_0 < 0$.
$h(x_M) = f(x_M) - y_0 = M - y_0 > 0$.
Таким образом, $h(x)$ непрерывна на $[x_m, x_M]$ и принимает на его границах значения разных знаков. Отсюда по теореме 10.1 $\exists\ x_0 \in [x_m, x_M] \subset [a, b]$ так, что $h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$. $\Box$

11. Непрерывность обратной функции

Определение 11.1. *$f(x)$ называется строго возрастающей на $[a, b]$, если $\forall\, x', x'' \in [a, b]$ таких, что $x' < x'' \Rightarrow f(x') < f(x'')$.*
$f(x)$ называется строго убывающей на $[a, b]$, если $\forall\, x', x'' \in [a, b]$ таких, что $x' < x'' \Rightarrow f(x') > f(x'')$.

Теорема 11.1. *Пусть 1) f непрерывна на $[a, b]$.*
2) f строго возрастает на $[a, b]$, (f строго убывает на $[a, b]$)
Тогда
1) существует обратная функция f^{-1}, определенная на $[A, B] = [f(a), f(b)]$
2) f^{-1} строго возрастает на $[A, B]$, (строго убывает на $[a, b]$)
3) f^{-1} непрерывна на $[A, B]$.

Доказательство проведем для строго возрастающей функции. 1) Т.к. f строго возрастает, то f взаимно-однозначна, следовательно, существует обратная функция f^{-1}.
2) Т.к. f непрерывна на $[a, b]$ и f возрастает, то $f[a, b] = [f(a), f(b)] = [A, B]$, и, значит, $f^{-1}:\ [A, B] \overset{\text{на}}{\to} [a, b]$ взаимно однозначно.

3) Очевидно, что f^{-1} строго возрастает на $[A, B]$. В самом деле, пусть $y_1 < y_2$, но $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$. Обозначим $f^{-1}(y_1) = x_1$, $f^{-1}(y_2) = x_2$, тогда $x_1 > x_2$, и т.к. f строго возрастает, то $f(x_1) > f(x_2)$, т.е. $y_1 > y_2$, что невозможно.
4) Покажем, что f^{-1} непрерывна на $[A, B]$. Выберем $y_0 \in [A, B]$. Т.к. f непрерывна на $[a, b]$, то $\exists\, x_0 \in [a, b]$, в которой $f(x_0) = y_0$, и, значит, $f^{-1}(y_0) = x_0$. Покажем, что f^{-1} непрерывна в т. y_0, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, y \in O_\delta(y_0),\ \ |f^{-1}(y) - x_0| < \varepsilon.$$

Выбираем $\varepsilon > 0$ и обозначаем $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$, $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$, $\delta = \min(|y_1 - y_0|, |y_2 - y_0|)$. Тогда $f^{-1}(y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, т.е. $f^{-1}(y)$ непрерывна в т. y_0. $\square$

12. Обратные тригонометрические функции и их непрерывность

Определение 12.1. *Функцию* $\sin x$ *рассматрим на* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *Так как* $\sin x$
1) строго возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
2) непрерывна на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
3) $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, *то по теореме 11.1 существует обратная функция к* $\sin x$, *определенная на* $[-1, +1]$, *строго возрастающая на* $[-1, +1]$ *и непрерывная на* $[-1, +1]$. *Эту функцию называют* $\arcsin x$.

Определение 12.2. *Функцию* $\cos x$ *рассмотрим на отрезке* $[0, \pi]$. *Так как* $\cos x$
1) строго убывает на $[0, \pi]$,
2) непрерывна на $[0, \pi]$,
3) $\cos 0 = 1$, $\cos \pi = -1$,
то по теореме 11.1 существует обратная функция к $\cos x$, *определенная на* $[-1, 1]$, *строго убывающая на* $[-1, 1]$ *и непрерывная на* $[-1, 1]$. *Ее называют* $\arccos x$.

Определение 12.3. *Функцию* $\operatorname{tg} x$ *рассмотрим на отрезке* $\left[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right] = [a_n, b_n]$. *По теореме 11.1 для* $\operatorname{tg} x$ *существует обратная, определенная на* $[A_n, B_n]$ $A_n = \operatorname{tg} a_n$, $B_n = \operatorname{tg} b_n$, $(A_n \to -\infty, B_n \to +\infty)$, *непрерывная на* $[A_n, B_n]$ *и строго возрастающая. Ее обозначают arctgx или* $\arctan x$. *как Так как* $A_n \to -\infty, B_n \to +\infty$, *то* $\arctan x$ *определен на всей числовой прямой и строго возрастает на* $(-\infty, +\infty)$ *и непрерывен на* $(-\infty, +\infty)$. *Кроме того,* $\lim\limits_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$.

Аналогично доказывается существование обратной к $\operatorname{ctg}x$.
Задача. Доказать существование обратной к $\operatorname{ctg}x$ и нарисовать график.

13. Определение показательной функции a^x

Лемма 13.1. *Пусть $a > 0, a \neq 1$. Тогда 1) $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.*
2) Если $r_n \to 0, r_n \in \mathbb{Q}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$.

Доказательство. 1) Пусть $a > 1, \Rightarrow a^{\frac{1}{n}} > 1 \Rightarrow \forall\ n > a$ справедливо неравенство $1 < a^{\frac{1}{n}} \leq n^{\frac{1}{n}}$. Но

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1,$$

следовательно, по теореме о сжатой переменной $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.
Если $0 < a < 1$, то полагаем $a = \frac{1}{b}$, где $b > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{b^{\frac{1}{n}}} = 1$. □
2) Пусть $r_n \to 0+0,\ r_n \in \mathbb{Q}$. Тогда существует последовательность натуральных чисел $(m_n) \to \infty$ такая, что $r_n < \frac{1}{m_n}$. Поэтому при $a > 1$ имеем $1 < a^{r_n} < a^{\frac{1}{m_n}} \to 1$. По теореме о сжатой переменной $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$.
Если $0 < a < 1$, то полагаем $b = \frac{1}{a} > 1$ и по только что доказанному $\lim\limits_{r_n\to 0+0} a^{r_n} = \lim\limits_{r_n\to 0+0} \frac{1}{b^{r_n}} = \frac{1}{1} = 1$. Аналогично получаем, что $\lim\limits_{r_n\to 0-0} a^{r_n} = 1$.
Отсюда и следует, что $\lim\limits_{\substack{r_n\to 0\\ r_n\in\mathbb{Q}}} a^{r_n} = 1$. □

Определение 13.1. *Пусть $m, n \in \mathbb{N},\ a > 0$. Положим по определению*

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m,\ \ a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}.$$

В школе были доказаны следующие свойства:
1) $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$. $(a > 0)$.
2)$(a\cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$. $(a > 0, b > 0)$.
3) $a < b \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} < b^{\frac{m}{n}}$.
4) Если $\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}$ то $a^{\frac{m_1}{n_1}} < a^{\frac{m_2}{n_2}}$, при $a > 1$ и $a^{\frac{m_1}{n_1}} > a^{\frac{m_2}{n_2}}$, при $0 < a < 1$.
5) $a^{\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{\frac{m_2}{n_2}}$.
6) $a^{\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}} = a^{\frac{m_1}{n_1}} \cdot a^{-\frac{m_2}{n_2}}$.

Лемма 13.2. *Пусть $x_0 \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Тогда существует предел*

$$\lim_{\substack{r\to x_0 \\ r\in\mathbb{Q}}} a^r.$$

Доказательство. 1)Выберем последовательность $r_n \to x_0$, $r_n \in \mathbb{Q}$. Покажем, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$. Для этого покажем, что последовательность (a^{r_n}) фундаментальна. Обозначим $m = n + p$ и рассмотрим разность

$$a^{r_n} - a^{r_m} = a^{r_n}\left(1 - a^{r_m - r_n}\right).$$

Так как $r_n \to x_0$, то (r_n) ограниченная последовательность, a^{r_n} – тоже ограниченная последовательность. Так как $r_m \to x_0, r_n \to x_0 \Rightarrow r_m - r_n \to 0 \Rightarrow a^{r_m - r_n} \to 1 \Rightarrow \lim\limits_{m,n\to\infty}(a^{r_n} - a^{r_m}) = 0 \Rightarrow (a^{r_n})$ – фундаментальная последовательность, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$.
2) Покажем, что $\forall\ r'_k \to x_0$ и $r''_k \to x_0 \quad \lim a^{r'_k} = \lim a^{r''_k}$, т.е. предел не зависит от выбора последовательности $r_k \to x_0$. Образуем последовательность (r_k), определяемую равенствами $r_{2n} = r'_n, r_{2n+1} = r''_n$. Очевидно, что $r_n \to x_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = A \Rightarrow \lim a^{r'_n} = A \wedge \lim a^{r''_n} = A$.
3) Таким образом, $\forall\ z_n \to x_0$ существует $\lim\limits_{r_n\to x_0} a^{r_n} = A \Rightarrow \exists \lim\limits_{\substack{r\to x_0 \\ r\in\mathbb{Q}}} a^r$. □

Определение 13.2. *Пусть $a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$. Положим по определению*

$$a^x = \lim_{\substack{r\to x \\ r\in\mathbb{Q}}} a^r.$$

14. Свойства показательной функции

Определение 14.1. *Пусть $a > 0, a \neq 1$. Функция $f(x) = a^x$ называется показательной.*

Свойства. 1) a^x определена $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Это очевидно из определения a^x.
2) $a^{x+y} = a^x a^y$; $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.
Доказательство. Выбираем $x_n \to x, y_n \to y,\ x_n, y_n \in \mathbb{Q}$. Тогда $x_n + y_n \to x + y$, и, значит,

$$a^{x+y} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n + y_n} = \lim_{n\to\infty}(a^{x_n} \cdot a^{y_n}) = \lim_{n\to\infty} a^{x_n} \lim_{n\to\infty} a^{y_n} = a^x \cdot a^y.$$

Аналогично доказываем второе равенство. □
3) $a^x a^{-x} = a^0 = 1$, т.е. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.
4) При $a > 1$ функция a^x строго возрастает, при $0 < a < 1$ – строго убывает.

Доказательство. Пусть $x < y$ и $a > 1$. Выберем последовательности (x_n) и (y_n) такие, что $x_n, y_n \in \mathbb{Q}$, $x_n < y_n$, $x_{n+1} < x_n$, $y_{n+1} > y_n$, $x_n \to x$, $y_n \to y$. По свойствам возведения в рациональную степень

$$a^{x_{n+1}} < a^{x_n} < a^{y_n} < a^{y_{n+1}}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $n \to \infty$, получаем

$$a^x < a^{x_1} < a^{y_1} < a^y,$$

т.е. a^x строго возрастает. Аналогично рассматривается случай $0 < a < 1$. $\square$

5) При $a > 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

Доказательство. Т.к. $a > 1$, то $a = 1 + \gamma$ $(\gamma > 0)$. По неравенству Бернулли

$$a^n = (1+\gamma)^n \geq 1 + n\gamma \to +\infty \ \ (n \to \infty).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$. Если $x \to -\infty$, то $x < 0$, и поэтому

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \lim_{|x|\to+\infty} a^{-|x|} = \lim_{|x|\to+\infty} \frac{1}{a^{|x|}} = 0.$$

6) При $0 < a < 1$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Доказательство. Обозначим $b = \frac{1}{a}$. Очевидно, $b > 1$. Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} b^x = +\infty$, и, значит, $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty} b^x} = 0$. Аналогично получаем $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$. $\square$

7) $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

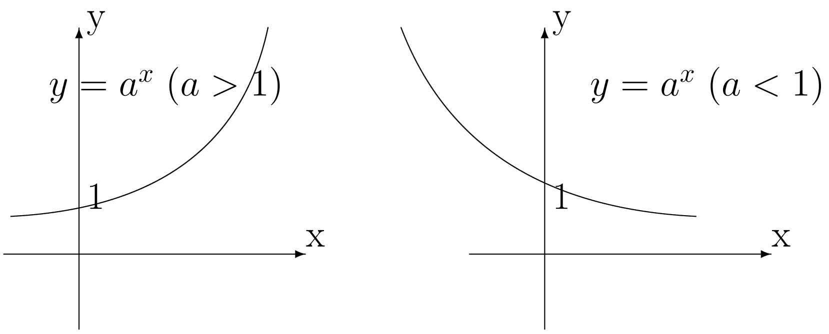
Доказательство. Пусть вначале $a > 1$. Покажем, что если $x_n \to 0+0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$. Выберем последовательность (r_n) так, что $r_n \to 0$, $r_n > x_n$, $r_n \in \mathbb{Q}$. По свойству монотонности $1 = a^0 < a^{x_n} < a^{r_n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$, то по теореме о сжатой переменной $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$. По определению предела на языке последовательности отсюда следует $\lim\limits_{x\to 0+0} a^x = 1$. Если $x \to 0-0$, то $\lim\limits_{x\to 0-0} a^x = \lim\limits_{|x|\to 0+0} a^{-|x|} = \lim\limits_{|x|\to 0} \frac{1}{a^{|x|}} = 1$, и, значит, $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 0$. Случай $0 < a < 1$ сводится к предыдущему заменой $b = \frac{1}{a}$. $\square$

8) $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, т.е. функция a^x непрерывна $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. $\lim\limits_{x\to x_0} (a^x - a^{x_0}) = \lim\limits_{x\to x_0} (a^{x-x_0} - 1)a^{x_0} = a^{x_0} \cdot \lim\limits_{x\to x_0} (a^{x-x_0} - 1) = a^{x_0} \cdot 0 = 0.$

$\square$

9) Используя свойства 1)-8), мы можем построить графики функций a^x при $a > 1$ и $0 < a < 1$



15. Логарифмическая функция как обратная к показательной

Определение 15.1. *Пусть* $a > 1$. *Тогда функция* $f(x) = a^x$ *определена на* $(-\infty, +\infty)$, *строго возрастает, непрерывна,* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$ *и* $f(-\infty, +\infty) = (0, +\infty)$.
Тогда по теореме 11.1 существует обратная функция $f^{-1}(y)$, *определенная на* $(0, +\infty)$, *строго возрастающая, непрерывная. Эта функция называется логарифмической и обозначается* $\log_a y$. *Таким образом,* $x = \log_a y \Leftrightarrow a^x = y$ *или* $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$. *Так как* $a^0 = 1$, *то* $\log_a 1 = 0$.

Определение 15.2. *Пусть* $0 < a < 1$. *Тогда функция* $f(x) = a^x$, *определенная на* $(-\infty, +\infty)$, *строго убывает, непрерывна,* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$. *Поэтому существует обратная функция* $f^{-1}(y)$, *определенная на* $(0, +\infty)$, *строго убывающая, непрерывная. Она называется тоже* $\log_a y$.

Свойства логарифма. 1) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y \ \ (x > 0, y > 0)$
2) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \ \ (x > 0)$.

16. Пределы, связанные с показательной и логарифмической функциями

Предложение 16.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Доказательство. Для x найдется $n \in \mathbb{N}$, что $N \leq x < N+1 \Rightarrow$

$$\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{N} \leq \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \leq \left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+1}.$$

Но $\lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{N+1} = \lim\limits_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N+1}\right)^{N} = e$. Отсюда по теореме о сжатой переменной $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$. □

Предложение 16.2. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Доказательство. Обозначим $x=-y$, тогда $y\to+\infty$ и $y>0$. Но

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{y}\right)^{y}} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \left(\frac{y-1+1}{y-1}\right)^{y} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} \to e \;\; (y\to+\infty). \;\; \square$$

Следствие. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Предложение 16.3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Доказательство. Обозначим $\frac{1}{x} = y \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e.$
□

Предложение 16.4. *Справедливы равенства*
1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
2)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x} = 1$

Доказательство. Используя свойства логарифмической функции, ее непрерывность и предложение 16.3 имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$$

и первое равенство доказано. Для доказательства 2-го равенства сделаем замену $e^x - 1 = y$. Получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1.\square$$

Глава 5

Дифференциальное исчисление

1. Производная, ее геометрический и физический смысл

Определение 1.1. *Пусть* $f : (a,b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$. f. *Предел*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

если он существует, называют производной функции f *в точке* x_0 *и обозначают* $f'(x_0)$ *или* $\frac{d\,f(x_0)}{d\,x}$ *или* $\frac{d\,f(x)}{d\,x}\big|_{x=x_0}$. *Таким образом, по определению*

$$f'(x_0) \stackrel{df}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.1}$$

Замечание. Если обозначить $x - x_0 = \Delta x_0$, то равенство (1.1) можно записать в виде

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x_0\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}. \tag{1.2}$$

Если в (1.2) x_0 заменить на x, то получим

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) определяет производную в произвольной точке $x \in (a,b)$. Δx называют приращением аргумента в точке x. Приращение Δx и переменная x не зависят друг от друга, и поэтому (1.3) можно записать в виде:

$$f'(x) = \lim_{y\to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Замечание. Если функция определена на отрезке $[a, b]$, то можно определить производную в граничных точках a и b

$$f'(a) \overset{df}{=} \lim_{x \to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{1.4}$$

$$f'(b) \overset{df}{=} \lim_{x \to b-0} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}. \tag{1.5}$$

Производную в (1.4) называют правой производной, а производную в (1.5) – левой производной.

Геометрический смысл производной

Пусть $f: (a, b) \to \mathbb{R}$. Множество

$$\Gamma(f) = \{M(x, y) : x \in (a, b), y = f(x)\}$$

называют графиком функции f.

Выберем точку $M_0(x_0, y_0) \in \Gamma(f)$ и точку $M(x, y) \in \Gamma(f)$. Проведем через эти точки прямую l. Обозначим через A точку с координатами $(x, f(x_0))$ и рассмотрим Δ_{AMM_0}. Пусть φ – угол, который образует прямая l с осью OX^+. Из Δ_{AMM_0} находим, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|AM|}{|AM_0|} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{1.6}$$

Устремим точку M к M_0, при этом прямая l будет поворачиваться вокруг точки M_0 и займет некоторое предельное положение.

Определение 1.2. *Предельное положение прямой l называется касательной к $\Gamma(f)$ в точке M_0. Обозначим через α – угол между касательной и осью OX^+. Ясно, что $\alpha = \lim \varphi$ при $M \to M_0$. Поэтому, переходя в (1.6) к пределу при $M \to M_0$, получаем*

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0),$$

т.е. производная $f'(x_0)$ есть тангенс угла наклона касательной.

Физический смысл производной

Пусть $S(t)$ – путь, пройденный точкой за время от t_0 до t. Тогда $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ есть средняя скорость.

Определение 1.3. *Предел средней скорости при $|t - t_0| \to 0$ называется мгновенной скоростью.*

Так как $\lim\limits_{t \to t_0} \frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0} = S'(t_0)$, то мгновенная скорость есть производная пути по времени.

2. Дифференцируемая функция и ее дифференциал

Определение 2.1. *Пусть* $f : (a,b) \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$. *Функция* f *называется дифференцируемой в точке* x_0, *если приращение* $f(x) - f(x_0)$ *представимо в виде*

$$f(x) - f(x_0) = A \cdot (x - x_0) + \alpha(x) \cdot (x - x_0), \tag{2.1}$$

где $A = A(x_0)$ *– число, зависящее от точки* x_0. $\alpha(x)$ *– функция, непрерывная в точке* x_0 *и такая, что* $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Теорема 2.1. *Функция* f *дифференцируема в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда существует производная в этой точке. При этом* $A = f'(x_0)$.

Доказательство. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть f дифференцируема в точке x_0, тогда выполнено (2.1). Поделим обе части (2.1) на $x - x_0$, получим

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A + \alpha(x).$$

Перейдем к пределу при $x \to x_0$. Т.к. предел правой части существует, то существует

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = f'(x_0).$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть существует производная $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \right) = 0$. Обозначим $\alpha(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$. Ясно, что $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Тогда $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0)$. Следовательно, $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $A = f'(x_0)$. $\square$

Замечание. (2.1) можно записать в виде

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x_0 + \alpha(x) \cdot \Delta x_0. \tag{2.2}$$

Определение 2.2. *Слагаемое* $f'(x_0) \cdot \Delta x_0$ *называется дифференциалом функции в точке* x_0 *и обозначается* $df(x_0)$. *Таким образом,*

$$df(x_0) \overset{df}{=} f'(x_0) \cdot \Delta x_0$$

Замечание. Заменим x_0 на x получим равенство

$$df(x) \overset{df}{=} f'(x) \cdot \Delta x \tag{2.3}$$

Лемма 2.2. *Дифференциал независимой переменной x равен Δx.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(x) = x$. Отсюда $df(x) = f'(x)\Delta x$. Но $f'(x) = 1 \Rightarrow dx = \Delta x$. $\square$
Следствие. Заменяем в (2.3) Δx на dx, тогда

$$df(x) = f'(x)dx.$$

3. Непрерывность дифференцируемой функции

Теорема 3.1. *Если f определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.*

Доказательство. Так как f дифференцируема в точке x_0, то $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0) \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$. Следовательно, f непрерывна в точке x_0. $\square$

4. Производная суммы, произведения и частного

Будем считать, что f и g определены в $O(x_0)$.

Теорема 4.1. *Пусть f и g дифференцируемы в точке x_0. Тогда*
1)если $f(x) = \lambda = \mathrm{const}$, то $f'(x) \equiv 0$. Это очевидно.
2) $f \pm g$ дифференцируема в точке x_0 и $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
3) $f \cdot g$ дифференцируема в точке x_0 и $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
4) Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке x_0 и $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Доказательство. 2) $(f \pm g)'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(f(x) \pm g(x)) - ((f(x_0) \mp g(x_0))}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$.
3) $(f \cdot g)' = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \cdot g(x) + \lim\limits_{x\to x_0} \frac{(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} \cdot f(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
4) Так как $g(x_0) \neq 0$, то $g(x) \neq 0$ в некоторой $O_\delta(x_0)$ тогда

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \left(\frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{x - x_0}\right) \frac{1}{g(x)g(x_0)} =$$

$$= \frac{g(x_0)f'(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}. \ \square$$

Следствие. $d(f+g) = df + dg, \ \ d(fg) = g \cdot df + f dg, \ \ d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2}.$

5. Производная сложной функции

Теорема 5.1. *Пусть f дифференцируема в точке x_0, $f(x_0) = y_0$, $g(y)$ дифференцируема в точке y_0. Тогда $g(f(x))$ дифференцируема в точке x_0 и справедливо равенство*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0).$$

Доказательство. Так как f дифференцируема в точке x_0, то

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0), \alpha(x) \to 0 \text{ при } x \to x_0.$$

Так как $g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, то

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y - y_0) + \beta(y)(y - y_0), \beta(y) \to 0 \text{ при } y \to y_0.$$

Тогда

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = g'(y_0)(f(x) - f(x_0)) + \beta(f(x))(f(x) - f(x_0)) =$$

$$g'(y_0)[f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)]+\beta(f(x))[f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)] =$$

$$g'(y_0)f'(x_0)(x - x_0) + (g'(y_0) \cdot \alpha(x) + \beta(f(x)) \cdot (f'(x_0) + \alpha(x))(x - x_0).$$

Обозначим

$$\varphi(x) = g'(y_0) \cdot \alpha(x) + \beta(f(x)) \cdot (f'(x_0) + \alpha(x))(x - x_0).$$

Так как $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(y) \to 0$, то

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = g'(y_0) \cdot 0 + 0 \cdot f'(x_0) = 0.$$

Следовательно, $g(f(x))$ дифференцируема и $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$. $\square$

Следствие. $g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$.

6. Производная обратной функции

Теорема 6.1. *Пусть $f(x)$ дифференцируема в $O(x_0)$, $f(x_0) = y_0$ и существует обратная функция $f^{-1}(y)$. Тогда $f'(x_0) \cdot (f^{-1})'(y_0) = 1$.*

Доказательство. Так как f^{-1} обратная к f, то $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, $f^{-1}(y) = x$, $f^{-1}(y_0) = x_0$. Тогда

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = 1.$$

Переходя к пределу, получаем $f'(x_0)\cdot(f^{-1})'(y_0) = 1$. $\square$

7. Производные некоторых элементарных функций

1) $(x^n)' = nx^{n-1}\ \ (n\in\mathbb{N})$.

Доказательство. По формуле бинома Ньютона

$$(x^n)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{((x+\Delta x)^n - x^n)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^n + C_n^1 x^{n-1}\Delta x + C_n^2 x^{n-2}\Delta x^2 + ... + \Delta x^n - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}(nx^{n-1} + C_n^2 x^{n-2}\Delta x + ... + \Delta x^{n-1}) = nx^{n-1}.\ \square$$

2)

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{x+\Delta x}-e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} e^x\cdot\frac{(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = e^x.$$

3)

$$(\ln x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

4) Используя формулу $\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$, получаем

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}} = 1\cdot\cos x.$$

5)

$$(\cos x)' = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)' = \sin x\cdot(-1) = -\sin x.$$

6) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Доказательство. По определению $\arcsin x$ справедливо равенство $\sin(\arcsin x) = x$. Дифференцируя это равенство, получаем $\cos(\arcsin x)\cdot \arcsin' x = 1$, откуда

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. $\square$
7) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (Доказывается аналогично.)
8) $(\arctan)' = \frac{1}{1+x^2}$.
Доказательство. По определению $\operatorname{arctg} x$ имеем $\operatorname{tg}(\arctan x) = x \Rightarrow \frac{1}{\cos^2(\arctan x)}(\arctan x)' = 1$. Так как $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$, то $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} \Rightarrow \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} \Rightarrow \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow (1+x^2)(\arctan x)' = 1 \Rightarrow (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$. $\square$
9) $\forall\, a \in \mathbb{R},\ \ (x^a)' = ax^{a-1}\ \ (x > 0)$.
Доказательство. $(x^a)' = (e^{a\ln x})' = e^{a\ln x} \cdot (a\ln x)' = e^{a\ln x} a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}$. $\square$

8. Инвариантность формы I дифференциала

По определению $df(x) = f'(x)dx$. Предположим, $x = x(t)$ и рассмотрим сложную функцию $f(x(t))$. Тогда ее дифференциал равен

$$df = f'_x(x(t)) \cdot x'(t)dt.$$

Но $x'(t)dt = dx(t) \Rightarrow df = f'_x(x(t))dx(t)$, или короче

$$df = f'dx,$$

но здесь dx есть дифференциал не независимой переменной, а дифференциал функции $x(t)$. Это свойство называют свойством инвариантности формы I дифференциала.

9. Производные высших порядков

Определение 9.1. *Если $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a, b), то $\forall\, x \in (a, b)$ существует $f'(x)$, т.е. $f'(x)$ – снова функция, определенная на (a, b). Поэтому можно говорить о производной $(f'(x))'$. Эта производная от $f'(x)$ называется производной 2-го порядка и обозначается $f''(x)$. Вообще, производная от производной порядка $(n-1)$ называется производной n-го порядка. Производная n-го порядка обозначается через $f^{(n)}(x)$. Т.о. по определению*

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Теорема 9.1 (формула Лейбница). *Если f и g имеют производные до n-го порядка включительно, то*

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x). \tag{9.1}$$

Доказательство. Методом математической индукции.
1) $n = 1$ – очевидно.
2) Пусть выполнено (9.1). Тогда

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) f^{(n-k)}(x)\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) =$$

положим $k + 1 = l$ в первой сумме

$$= \sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l-1} f^{(l)}(x) g^{(n+1-l)}(x) + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) =$$

в первой сумме выпишем отдельно последнее слагаемое, во второй сумме – первое

$$= C_n^n f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} C_n^{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + C_n^0 f^{(0)} g^{(n+1)} =$$

$$= C_{n+1}^0 f^{(n)} g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + C_{n+1}^{n+1} f^{(n+1)} g^{(0)}.$$

Но $C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n+1-k} + \frac{1}{k}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{(n+1)}{k(n+1-k)} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k$. Поэтому

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x). \ \square$$

10. Дифференциалы высших порядков

Определение 10.1. *Положим по определению*

$$d^n f(x) \stackrel{df}{=} d(d^{n-1} f(x)).$$

$d^n f(x)$ *называют дифференциалом n-го порядка.*

Предложение 10.1. $d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Доказательство. По индукции
1) $n = 1 \quad df(x) = f'(x)dx$ – верно.
2) Пусть $d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n$. Тогда

$$d^{n+1}f(x) = d(f^{(n)}(x)dx^n) = dx^n \cdot d(f^{(n)}(x)) = dx^n \cdot f^{(n+1)}(x)dx = f^{(n+1)}(x)dx^{n+1}. \quad \square$$

Свойства дифференциала I порядка:
1) $d(f + g) = df + dg$;
2) $d(f \cdot g) = gdf + fdg$;
3) если $\lambda = \mathrm{const}$, то $d(\lambda f) = \lambda df$.

Предложение 10.2.

$$d^n fg = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f \cdot d^{n-k} g.$$

Доказательство. По формуле Лейбница

$$d^n fg = \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}\right) dx^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} dx^k \cdot g^{(n-k)} dx^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k f d^{n-k} g. \quad \square$$

11. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке. Теорема Ферма

Теорема 11.1 (Ферма). *Пусть f 1) непрерывна на $[a, b]$,*
2) дифференцируема в (a, b),
3) в точке x_0 $f(x)$ принимает наибольшее значение (наименьшее значение). Если $x_0 \in (a, b)$, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности в точке x_0 f принимает наибольшее значение. В этом случае $f(x_0) \geq f(x)$. По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Пусть $x < x_0$, т.е. $x - x_0 < 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Пусть $x > x_0 \Rightarrow x - x_0 > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) \geq 0 \wedge f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$. Случай, когда f в точке x_0 принимает наименьшее значение, рассматривается аналогично. $\square$

12. Теоремы Ролля, Лагража и Коши

Теорема 12.1 (Ролля). *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям:*
1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,
2) $f(x)$ дифференцируема в (a, b),
3) $f(a) = f(b)$.
Тогда $\exists\, x_0 \in (a, b),\ f(x_0) = 0$,

Доказательство. Рассмотрим две возможности: 1) $\forall\ x \in (a, b),\ f(x) = f(a) \Rightarrow f(x) = \text{const} \Rightarrow f'(x) \equiv 0$.
2) $\exists\ x \in (a, b),\ f(x) \neq f(a)$. Пусть для определенности $f(x) > f(a) \Rightarrow \exists\, x_0 \in (a, b)$, в которой f достигает наибольшего значения. Следовательно, по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. $\square$

Теорема 12.2 (Лагранжа). *Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям:*
1) f непрерывна на $[a, b]$,
2) f дифференцируема на (a, b).
Тогда $\exists\, x_0 \in (a, b)$, в которой $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - \lambda x$. Найдем λ, при котором $h(a) = h(b)$. При таком λ выполняется равенство

$$f(a) - \lambda a = f(b) - \lambda b.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Записывая для $h(x)$ теорему Ролля, получаем, что $\exists\, x_0 \in (a, b)$, в которой

$$h'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) - \lambda = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \lambda = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.\ \square$$

Теорема 12.3 (Коши). *Пусть функции $f(x), g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), $g'(x) \neq 0$ на (a, b), $g(b) \neq g(a)$. Тогда $\exists\, \xi \in (a, b)$ такая, что*

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - \lambda g(x).$$

Подберем λ так, чтобы $h(a) = h(b)$, т.е. $f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(a)$. Отсюда находим, что $\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Тогда $h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы

Ролля, и, значит, существует $\xi \in (a,b)$ такая, что $f'(\xi)=0$. Тогда $f'(\xi) - \lambda g'(\xi) = 0$, следовательно,

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}. \ \square$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа
$f'(\xi)$ есть угловой коэффициент касательной в точке $M(\xi, f(\xi))$. С другой стороны, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть тангенс угла наклона хорды, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, лежащие на графике. Поэтому равенство $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ означает, что касательная, проведенная в точке $(\xi, f(\xi))$ параллельна хорде, стягивающей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

13. Формула Тейлора для многочлена

Теорема 13.1. *Пусть*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^k$$

многочлен степени n и $x_0 \in \mathbb{R}$ – произвольное число. Тогда $P(x)$ можно записать в виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \tag{13.1}$$

Доказательство. По формуле бинома Ньютона

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k((x-x_0)+x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{i=0}^{k} C_k^i (x-x_0)^i x_0^{k-i} \right).$$

Приведя подобные члены, получим

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x-x_0)^k, \tag{13.2}$$

где c_k – неизвестные коэффициенты. Найдем эти коэффициенты. Подставим $x = x_0$, получим

$$P(x_0) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)^2 + ... + c_n(x-x_0)^n|_{x=x_0} = c_0,$$

Продифференцируем (13.2) и подставим $x = x_0$, получим

$$P'(x_0) = c_1 + 2c_2(x-x_0) + ... + c_n n(x-x_0)^{n-1}|_{x=x_0} = c_1.$$

Продифференцируем дважды и подставим $x = x_0$, получим

$$P''(x_0) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x - x_0) + ... + c_n \cdot n(n-1)(x - x_0)^{n-2}|_{x=x_0} = 2 \cdot 1 \cdot c_2.$$

... ...

Продифференцируем k раз и подставим $x = x_0$, получим

$$P^{(k)}(x_0) = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (k-1) \cdot k \cdot c_k + (k+1) \cdot k \cdot ... \cdot 2c_{k+1}(x - x_0) + ...$$

$$+ n(n-1)...(n-k+1) \cdot (x - x_0)^{n-k}|_{x=x_0}.$$

Отсюда $P^{(k)}(x_0) = k! \cdot c_k$, следовательно, $c_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$. Подставляя c_k в (13.2), получаем (13.1) □

Определение 13.1. *Формулу (13.1) называют формулой Тейлора для многочлена $P(x)$.*

Замечание. В формуле Тейлора (13.2) многочлен записан по степеням не x, а $x - x_0$.

14. Формула Тейлора для произвольной функции

Пусть $f(x)$ имеет в $O(x_0)$ производные до порядка n включительно.

Определение 14.1. *Многочлен*

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \tag{14.1}$$

называется многочленом Тейлора для функции f.

Определение 14.2. *Положим*

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \tag{14.2}$$

Тогда (14.2) с учетом (14.1) можно записать в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \tag{14.3}$$

Формулу (14.3) называют формулой Тейлора для $f(x)$ в $O(x_0)$. $R_n(x)$ называют остатком формулы Тейлора.

15. Остаток формулы Тейлора в формах Лагранжа и Коши

Вопрос: чему равен остаток в формуле Тейлора?

Теорема 15.1. *Пусть $f(x)$ определена на интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ и имеет на этом интервале производные до $n+1$-го порядка включительно; Тогда для остатка $R_n(x)$ в формуле Тейлора в точке $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ справедливо равенство*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)^p}{n!p(x-\xi)^{p-1}}.$$

где $\xi \in (x_0, x), x \neq x_0, p \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть для определенности $x \in (x_0, x_0 + h)$. По формуле Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_n(x).$$

Выберем $p \geq 1$ $(p \in \mathbb{N})$ и будем искать $R_n(x)$ в виде

$$R_n(x) = A \cdot (x - x_0)^p,$$

где A – неизвестное пока число.
Зафиксируем точки x_0 и x и рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \cdot (x - z)^k + R_n(x) \right),$$

где $z \in [x_0, x]$, $R_n(x) = A \cdot (x - z)^p$. Тогда $\varphi(z)$ определена на $[x_0, x]$, дифференцируема на $[x_0, x]$ и производная $\varphi'(z)$ существует на (x_0, x). Кроме этого $\varphi(x_0) = f(x) - f(x) = 0$ и $\varphi(x) = f(x) - f(x) = 0$. Таким образом, φ удовлетворяет на $[x_0, x]$ условиям теоремы Ролля. Следовательно, $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ так, что $\varphi'(\xi) = 0$. Найдем производную

$$\varphi'(z) = -\left(f'(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} \cdot k(x-z)^{k-1} - A \cdot p(x-z)^{p-1} \right).$$

Произведем во второй сумме замену индекса суммирования $k - 1 = l$, получим

$$\varphi'(z) = -\left(f'(z) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k - \right.$$

$$- Ap(x-z)^{p-1}\Big) = -\left(f'(z) + \frac{f^{(n+1)}(z)(x-z)^n}{n!} - f'(z) - Ap(x-z)^{p-1}\right) =$$

$$= A\cdot p(x-z)^{p-1} - \frac{f^{(n+1)}(z)(x-z)^n}{n!}.$$

Полагая $z = \xi$ и учитывая, что $\varphi'(\xi) = 0$ для нахождения A получаем равенство

$$Ap(x-\xi)^{p-1} - \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!} = 0.$$

Из этого равенства находим A

$$A = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n}{n!p(x-\xi)^{p-1}}.$$

Подставляя это значение вместо A в $R_n(x) = A\cdot(x-x_0)^p$, получаем

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\cdot(x-x_0)^p}{n!p(x-\xi)^{p-1}}, \qquad (\xi\in(x_0,x))\ \Box \tag{15.1}$$

(15.1) называют остатком в форме Шлемильха–Роша. Отметим, что точка ξ в равенстве (15.1) нам неизвестна.

Следствие 1. Положим в (15.1) $p = n+1$, тогда $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$ – это остаток в форме Лагранжа. Подставив $R_n(x)$ в формулу Тейлора, получаем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Это есть формула Тейлора с остатком в форме Лагранжа.

Следствие 2. Положим в (15.1) $p = 1$, тогда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-x_0)}{n!}. \tag{15.2}$$

Так как $\xi\in(x_0,x)$, то $\xi = x_0 + \Theta(x-x_0)$, где $0<\Theta<1$. Отсюда $x-\xi = (x-x_0) - \Theta(x-x_0) = (x-x_0)(1-\Theta)$, следовательно,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\Theta(x-x_0))(x-x_0)^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!}$$

Это остаток в форме Коши.

16. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Теорема 16.1. *Пусть f определена в $O(x_0)$, имеет в $O(x_0)$ непрерывную производную до порядка n включительно. Тогда формулу Тейлора в $O(x_0)$ можно записать в виде*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \bar{\bar{o}}((x-x_0)^n) \ \ (x \to x_0) \tag{16.1}$$

Доказательство. Запишем формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа, добавим и вычтем $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$, получим

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)(x_0)}}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Обозначим $\alpha(x) = \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Так как $f^{(n)}$ непрерывна в точке x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0.$$

Т.е. $\alpha(x) = \bar{\bar{o}}((x-x_0)^n)$. □

Определение 16.1. *(16.1) называют формулой Тейлора с остатком в форме Пеано.*

17. Формулы Тейлора для элементарных функций

Теорема 17.1. *При любом $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \tag{17.1}$$

где $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$

Доказательство. По формуле Тейлора для $f(x) = e^x$ в точке $x_0 = 0$ имеем

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Вычисляя $f^{(k)}(0) = e^0 = 1, \;\; f^{(n+1)}(\xi) = e^\xi$, имеем

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^\xi \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Очевидно, что при фиксированном x $e^\xi \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = R_n \to 0$. $\square$

Замечание 1. В формуле (17.1), если зафиксировать n, то $R_n(x) \to \infty$ при $x \to \infty$.

Замечание 2. а) В формуле (17.1) при $n = 1$ получаем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + e^\xi \frac{x^2}{2!}.$$

Отсюда $\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{e^\xi \cdot x}{2!} \to 1$ при $x \to 0$. Следовательно, $e^x - 1 \approx x$ при $x \to 0$

б) Если в (17.1) положить $n = 2$, то

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + e^\xi \frac{x^3}{3!}.$$

Отсюда $\frac{e^x - 1 - \frac{x}{1!}}{\frac{x^2}{2!}} = 1 + \frac{e^\xi x \cdot 2!}{3!} \to 1$ при $x \to 0$. То есть $e^x - 1 - \frac{x}{1!} \approx \frac{x^2}{2!}$ при $x \to 0$.

Вообще:

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{1!} + ... + \frac{x^k}{k!}\right) \approx \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

при $x \to 0$.

Теорема 17.2. *При каждом* $x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+1}(x) \quad (R_{2n+1}(x) \to 0).$$

Доказательство. Записываем формулу Тейлора для $f(x) = \sin x$ в точке $x_0 = 0$. Получаем

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(\sin x)^{(k)}|_{x=0}}{k!} x^k + R_{2n+1}(x) \tag{17.2}$$

Вычислим $(\sin x)^{(k)}$. Имеем $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Тогда $(\sin x)'' = (-1)^2 \sin\left(x - \frac{\pi}{2} \cdot 2\right)$.

Вообще: $(\sin)^{(k)}(x) = (-1)^k \sin\left(x - k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$.

При $x = 0$ имеем.
$(\sin x)^{(k)}|_{x=0} = (-1)^k \cdot \sin\left(0 - k\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k+1} \cdot \sin k\frac{\pi}{2}$. Поэтому
$(\sin x)^{(2k)}|_{x=0} = (-1)^{2k+1} \cdot \sin\left(2k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 0$.
$(\sin x)^{(2k+1)}|_{x=0} = (-1)^{2k+2} \cdot \sin(2k+1) \cdot \frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = (-1)^k$.
Подставляя в (17.2), получаем

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\sin x)^{(2k)}|_{x=0}}{(2k)!} x^{2k} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(\sin x)^{(2k+1)}|_{x=0}}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x).$$

Запишем остаток в форме Лагранжа:

$$|R_{2n+1}(x)| = \left|\sin\left(\xi - (2n+2)\frac{\pi}{2}\right)\right| \cdot \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \le \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!} \to 0$$

при $n \to \infty$.
Следствие. Запишем формулу Тейлора для $\sin x$ с остатком в форме Пеано.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+1} \cdot \overline{\overline{o}}(1).$$

Отсюда
а) при $n = 0 :\quad \sin x = x + x \cdot \overline{\overline{o}}(1)$. Т.е. $\frac{\sin x}{x} = 1 + \overline{\overline{o}}(1)$, следовательно, $\sin x \sim x \ (x \to 0)$,
б) при $n = 1 :\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3 \cdot \overline{\overline{o}}(1)$. Отсюда $\frac{\sin x - x}{-\frac{x^3}{3!}} = 1 + \overline{\overline{o}}(1)$. Имеем $(\sin x - x) \sim -\frac{x^3}{3!} \ (x \to 0)$.

Теорема 17.3. *При любом* $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n}(x) \ \ (x \in \mathbb{R},\ R_{2n} \to 0 \ \ \text{\textit{при}} \ \ n \to +\infty).$$

Доказательство аналогично теореме 17.2. □

Теорема 17.4.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$(x \in (-1, 1],\ R_n \to 0 \ \ \text{\textit{при}} \ \ n \to +\infty)).$$

Доказательство. Запишем для функции $f(x) = \ln(1+x)$ формулу Тейлора в точке $x_0 = 0$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (\ln(1+x))^{(k)}|_{x=0} \cdot \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Вычислим производные
$\ln(1+x)' = \frac{1}{1+x}$
$(\ln(1+x))'' = (-1)(1+x)^{-2}$;
$(\ln(1+x))''' = (-1) \cdot (-2)(1+x)^{-3}$;
$- -$;
$(\ln(1+x))^{(k)} = (-1)(-2)...(-(k-1))(1+x)^{-k}$.
Следовательно,
$\ln(1+x)^{(k)}|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!$.
Отсюда $\ln(1+x) = \ln 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}(k-1)! \cdot \frac{x^k}{k!} + R_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + R_n(x)$.
Покажем, что $R_n(x) \to 0$.
а) Пусть вначале $0 \le x \le 1$. Запишем $R_n(x)$ в форме Лагранжа

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+\xi)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|x|^{n+1} n!}{|1+\xi|^{n+1}(n+1)!} \le \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

б) Пусть теперь $-1 < x < 0$. Запишем $R_n(x)$ остаток в форме Коши

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0 + \Theta(x-0))}{n!}(x-0)^{n+1}(1-\Theta)^n = \frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{n!} x^{n+1}(1-\Theta)^n.$$

Тогда

$$|R_n(x)| = \left| \frac{(-1)^n n!}{(1+\Theta x)^{n+1}} \cdot \frac{x^{n+1}}{n!} \cdot (1-\Theta)^n \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1+\Theta x)^{n+1}} \cdot (1-\Theta)^n.$$

Но $\frac{(1-\Theta)^n}{(1+\Theta x)^n} \le \frac{(1-\Theta)^n}{(1-\Theta)^n} = 1$, отсюда $|R_n(x)| \le \frac{|x|^{n+1}}{1+\Theta x} \le \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \to 0 \;\; (n \to +\infty)$. $\square$
Следствие. Запишем формулу Тейлора с остатком в форме Пеано.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^n}{n} + x^n \cdot \overline{\overline{o}}(1).$$

а) $n = 1: \;\; \ln(1+x) = x + x \cdot \overline{\overline{o}}(1)$. Отсюда $\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 + \overline{\overline{o}}(1)$. Следовательно, $\ln(1+x) \sim x. \;\; (x \to 0)$
б) $n = 2: \;\; \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \cdot \overline{\overline{o}}(1)$. Отсюда $\frac{\ln(1+x) - x}{-\frac{x^2}{2}} = 1 + \overline{\overline{o}}(1)$. Следовательно,

$$\ln(1+x) - x \sim -\frac{x^2}{2} \;\; (x \to 0). \;\; \square$$

Теорема 17.5. $\forall\, p \in \mathbb{R}$ *при* $x \in (-1,1)$ *справедливо равенство*

$$(1+x)^p = 1+px+\frac{p(p-1)}{2!}x^2+\frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{p(p-1)\ldots(p-(n-1))}{n!}x^n+R_n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}x^k + R_n(x) \;\; (R_n(x) \to 0 \text{ } при\; n \to \infty).$$

Доказательство. Запишем для $f(x) = (1+x)^p$ формулу Тейлора в точке $x_0 = 0$. Имеем

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{n} (1+x)^p|_{x=0}\frac{x^k}{k!} + R_n(x). \qquad (17.3)$$

Вычисляем производные:
$((1+x)^p)' = p(1+x)^{p-1}$;
$((1+x)^p)'' = p(p-1)(1+x)^{p-2}$;
. . . .
$((1+x)^p)^{(k)} = p(p-1)\ldots(p-(k-1))(1+x)^{p-k}$;
Следовательно, $((1+x)^p)^{(k)}\,|_{x=0} = p(p-1)\ldots(p-(k-1))$;
Подставляя в (17.3), получаем

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{n} \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-(k-1))}{k!}x^k + R_n(x).$$

Покажем, что $R_n(x) \to 0$ $(n \to \infty)$ $\forall\, x \in (-1,1)$. Рассмотрим несколько случаев.
1) $x > 0, p > 0$. Т.к. $p > 0$, то $\exists\, m = 0, 1, \ldots$, что $m \le p < m+1$. Запишем $R_n(x)$ в форме Лагранжа:

$$|R_n(x)| = \left| \frac{((1+x)^p)^{n+1}\big|_{x=\xi}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} \right| = \left| \frac{p(p-1)\ldots(p-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{p-n-1} \cdot x^{n+1} \right| =$$

$$= \left| \frac{p(p-1)\ldots(p-m)(p-(m+1))\ldots(p-n)}{1\cdots m\cdot(m+1)\cdots(n-1)n(n+1)} \frac{(1+\xi)^p}{(1+\xi)^{n+1}} \right| |x|^{n+1} =$$

$$\le \frac{p(p-1)\ldots(p-m)}{m!} \cdot \left(1-\frac{p}{m+1}\right)\left(1-\frac{p}{m+2}\right)\ldots\left(1-\frac{p}{n}\right) \cdot \frac{2^p}{n+1} \cdot |x|^{n+1} \le$$

$$\le \frac{(m+1)\cdot m\cdot\ldots 1}{m!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot 2^p \cdot |x|^{n+1} = (m+1)\cdot 2^p \cdot \frac{|x|^{n+1}}{n+1} = \frac{p(m+1)2^p\cdot 1}{n+1} \to 0.$$

2) $-1 < x < 0,\; p > 0$. Записываем $R_n(x)$ в форме Коши (15.2)

$$R_n(x) = \frac{((1+x)^p)^{(n+1)}_{x=\xi}}{n!} \cdot x \cdot (x-\xi)^n = \frac{p(p-1)\ldots(p-n)}{n!}(1+\xi)^{p-n-1} \cdot x \cdot (x-\xi)^n.$$

Как и в случае 1) $\frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!} \leq m+1$, следовательно,

$$|R_n(x)| \leq (m+1)\frac{|1+\xi|^p}{(1+\xi)^{n+1}}\cdot|x|\cdot|x-\xi|^n = (m+1)\cdot(1-|\xi|)^p\cdot\frac{|x|}{(1-|\xi|)}\cdot\left(\frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|}\right)^n \leq$$

$$\leq (m+1)\cdot 1^p\cdot\frac{|x|}{(1-|x|)}\cdot\left(\frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|}\right)^n = (m+1)\cdot\frac{|x|}{(1-|x|)}\cdot\left(\frac{|x|-1+1-|\xi|}{1-|\xi|}\right)^n =$$

$$= (m+1)\cdot\frac{|x|}{(1-|x|)}\left(1-\frac{1-|x|}{1-|\xi|}\right)^n \leq (m+1)\cdot\frac{|x|}{(1-|x|)}\left(1-\frac{1-|x|}{1}\right)^n =$$

$$= (m+1)\cdot\frac{|x|}{(1-|x|)}\cdot|x|^n \to 0$$

при $n\to\infty$ т.к. $|x|<1$.

3) $x>0,\ p<0$. Записываем $R_n(x)$ в форме Лагранжа

$$|R_n(x)| = \left|\frac{p(p-1)\dots(p-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{p-n-1}\cdot x^{n+1}\right| =$$

$$= |p|\cdot\left(1+\frac{|p|}{1}\right)\left(1+\frac{|p|}{2}\right)\dots\left(1+\frac{|p|}{n}\right)\frac{|1+\xi|^p}{|1+\xi|^{n+1}}|x|^{n+1}\cdot\frac{1}{n+1}.$$

Оцениваем

$$\ln\left[\left(1+\frac{|p|}{1}\right)\left(1+\frac{|p|}{2}\right)\dots\left(1+\frac{|p|}{n}\right)\right] = \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{|p|}{k}\right).$$

Т.к. $e^x \geq 1+x$ при $x>0$, то $x \geq \ln(1+x)$, следовательно,

$$\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{|p|}{k}\right)\right] \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{|p|}{k} = |p|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}. \tag{17.4}$$

Т.к. n – натуральное, то $\exists\, l$, что $2^l \leq n < 2^{l+1}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq \sum_{n=1}^{2^{l+1}}\frac{1}{k} = \sum_{i=0}^{l}\sum_{k=2^i}^{2^{i+1}-1}\frac{1}{k} \leq \sum_{i=0}^{l}2^i\cdot\frac{1}{2^i} = l+1 \leq \log_2 n+1,$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{|p|}{k}\right) \leq e^{|p|(1+\log_2 n)} = e^{|p|}\cdot e^{\log_2 n} = e^{|p|}e^{\frac{\log_e n}{\ln 2}} = e^{|p|}n^{\ln 2}.$$

Таким образом, мы имеем

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{|p|}\cdot n^{\ln 2}}{n+1}\cdot\frac{2^p}{1}\cdot 1^{n+1} \to 0$$

т.к. $\ln 2 < 1$ и, значит, $\frac{n^{\ln 2}}{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$.
4) $-1 < x < 0,\ p < 0$. В этом случае записываем $R_n(x)$ в форме Коши

$$|R_n(x)| = \left|\frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!}(1+\xi)^{p-n-1}\right| |x| \cdot |x+\xi|^n.$$

Как и в случае 2

$$\left|\frac{p(p-1)\dots(p-n)}{n!}\right| \le e^{|p|}n^{\ln 2}$$

$$|(1+\xi)^{p-n-1}| \cdot |x| \cdot |x+\xi|^n = (1-|\xi|)^p \cdot \frac{1}{(1-|\xi|)^{n+1}} \cdot |x| \cdot (|x|-|\xi|)^n \le$$

$$\le \frac{|x|}{(1-|x|)^{p+1}} \cdot \left(\frac{|x|-|\xi|}{1-|\xi|}\right)^n \le \frac{|x|}{(1-|x|)^{p+1}} \cdot |x|^n,$$

Таким образом, окончательно: $|R_n(x)| \le e^{|p|} \cdot n^{\ln 2} \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{p+1}} \to 0$ при $n \to \infty$, т.к. $|x| < 1$. $\square$

Глава 6

Приложения дифференциального исчисления к исследованию функций и построению графиков

1. Монотонность функции в точке. Необходимые условия монотонности в точке. Достаточные условия

Определение 1.1. *Пусть f определена в $O(x_0)$. Будем говорить, что $f(x)$ возрастает (убывает) в точке x_0, если $\exists\, O_\delta(x_0) \subset O(x_0)$ такая, что $\forall\, x \in O_\delta(x_0)\quad \mathrm{sign}\,\Delta \mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = \mathrm{sign}\,\Delta \mathrm{x}_0$ $(\mathrm{sign}\,\Delta \mathrm{f}(\mathrm{x}_0) = -\mathrm{sign}\,\Delta \mathrm{x}_0)$. Т.е. если в точке x_0 $f(x)$ возрастает, то в правой половине окрестности $O_\delta(x_0)$ $f(x) > f(x_0)$, а в левой – наоборот, $f(x) < f(x_0)$. Аналогично, $f(x)$ убывает в точке x_0 эквивалентно тому, что в правой половине окрестности $O_\delta(x_0)$ $f(x) < f(x_0)$, а в левой – $f(x) > f(x_0)$.*

Определение 1.2. *Функцию, возрастающую или убывающую в точке, называют монотонной в точке.*

Теорема 1.1 (Необходимые условия монотонности в точке). *1) Если f возрастает в точке x_0 и дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) \geq 0$.*
2) Если f убывает в точке x_0 и дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0) \leq 0$.

Доказательство. 1) Пусть f возрастает в точке x_0. Тогда $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$. Вычислим производную $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$.
2) Пусть f убывает в точке x_0. Вычислим производную $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$. $\square$

Теорема 1.2 (Достаточные условия монотонности в точке). .
1)Если $f'(x_0) > 0$, то f возрастает в точке x_0.
2)Если $f'(x_0) < 0$, то f убывает в точке x_0.

Доказательство. 1) Пусть $f'(x_0) > 0$ и пусть $x > x_0$. Тогда по определению производной

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} = f'(x_0) > 0.$$

Выбираем $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2}$. Тогда $\exists\, O_\delta(x_0)$, в которой $\left|\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} - f'(x_0)\right| < \frac{f'(x_0)}{2}$. Следовательно,

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} \geq f'(x_0) - \frac{f'(x_0)}{2} = \frac{f'(x_0)}{2} > 0,$$

значит, в точке x_0 функция возрастает.
2) Аналогично, и в случае убывания. Но можно иначе. Т.к. $f'(x_0) < 0 \Rightarrow (-f(x))|_{x=x_0} > 0$, значит, в точке x_0 функция $(-f)$ возрастает, следовательно, $f(x)$ в точке x_0 убывает. $\square$
Замечание 1. Условие $f'(x_0) \geq 0$ является необходимым для возрастания, но не является достаточным. Например, $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 0: \ f'(0) \geq 0$, но $f(x)$ не возрастает.
Замечание 2. Условие $f'(x_0) > 0$ является достаточным для возрастания, но не является необходимым. Например, $f(x) = x^3$ в точке x_0 возрастает, но $f'(0) = 0$.

2. Монотонность функции на отрезке. Необходимые и достаточные условия монотонности

Определение 2.1. *Функция $f(x)$ называется возрастающей на $[a, b]$, если $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$ из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \leq f(x_2)$. Функция $f(x)$ называется убывающей на $[a, b]$, если $\forall\, x_1, x_2 \in [a, b]$ из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Теорема 2.1 (Необходимое условие монотонности). *Пусть f дифференцируема на $[a, b]$. Если $f(x)$ возрастает на $[a, b]$, то $\forall\, x \in [a, b]$, $f'(x) \geq 0$. Если $f(x)$ убывает на $[a, b]$, то $\forall\, x \in [a, b]$, $f'(x) \leq 0$.*

Доказательство. 1) Пусть $f(x)$ возрастает и $x_0 \in (a, b)$. Тогда $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$.
2) Если $f(x)$ убывает, то $-f(x)$ возрастает, $\Rightarrow -f'(x) \geq 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$. $\square$

Теорема 2.2 (Достаточное условие монотонности). *Если $f(x)$ дифференцируема на $[a,b]$, $f'(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $f(x)$ возрастает на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0$. Следовательно, $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Значит, f возрастает.
Случай, когда $f'(x) \leq 0$ – доказывается аналогично. □
Замечание. Таким образом, условие $f'(x) \geq 0$ является необходимым и достаточным для возрастания на отрезке, в отличие от возрастания в точке, где оно является только необходимым.
Пример.

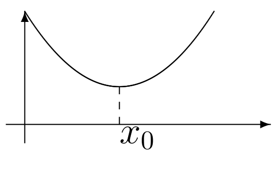
$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}; \quad f(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Следовательно, $f(x)$ возрастает на $[2, +\infty)$ и на $(-\infty, 0]$; убывает: на $[0, 1)$ и на $(1, 2]$.

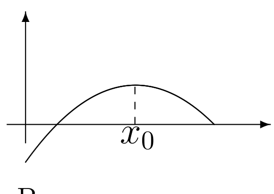
3. Экстремум функции в точке. Необходимое условие экстремума

Определение 3.1. *Пусть функция f определена в $O(x_0)$.*
1) Функция f имеет в точке x_0 max, *если $\exists\, O_\delta(x_0) \subset O(x_0)$ такая, что $\forall\, x \in O_\delta(x_0)$ $f(x) \leq f(x_0)$.*
2) Функция f имеет в точке x_0 min, *если $\exists\, O_\delta(x_0) \subset O(x_0)$ такая, что $\forall\, x \in O_\delta(x_0)$ $f(x) \geq f(x_0)$.*
3) Если функция f имеет в точке x_0 min *или* max, *то говорят, что она имеет в точке x_0 экстремум.*

Замечание. Понятие экстремума – локальное, т.е. зависит от значений функции в малой окрестности точки x_0.



В точке x_0–min



В точке x_0–max

Теорема 3.1 (Необходимое условие экстремума). *Пусть f определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0. Если f имеет в точке x_0 экстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

Доказательство. Пусть для определенности f имеет в точке x_0 max. Так как в точке x_0 существует производная $f'(x_0)$, то

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Так как в точке x_0 max, то $f(x) - f(x_0) \le 0$ в $O_\delta(x_0)$. Поэтому при $x > x_0$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0.$$

Переходя к пределу при $x \to x_0 + 0$, получаем $f'(x_0) \ge 0$. Аналогично, переходя к пределу при $x \to x_0 - 0$ в неравенстве

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0,$$

получаем $f'(x_0) \le 0$. Соединяя неравенства $0 \le f'(x_0) \le 0$, получаем $f'(x_0) = 0$. $\square$

4. Нахождение экстремума. 1-е достаточное условие экстремума

Теорема 4.1. *Пусть f определена в $O(x_0)$ и имеет в этой окрестности непрерывную производную $f'(x)$.*
1) Если $f'(x)$ изменяет знак с $+$ на $-$ при переходе через точку x_0, то в точке x_0 функция достигает max.
2) Если $f'(x)$ изменяет знак с $-$ на $+$ при переходе через точку x_0, то в точке x_0 функция достигает min.

Доказательство. 1) Пусть $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Если $x < x_0$, то $f(x_0) - f(x) = f'(\xi)(x_0 - x) \ge 0$. Тогда $f(x_0) \ge f(x)$. Если $x > x_0$, то $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) \le 0$. Тогда $f(x_0) \ge f(x)$. Следовательно, в точке x_0 max.
2) Аналогично. $\square$
Пример. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$, $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. В точке $x = 0$ – max, в точке $x = 2$ – min.

5. Нахождение экстремумов. 2-е достаточное условие

Теорема 5.1. *Пусть 1) f определена в $O(x_0)$, 2) f имеет в $O(x_0)$ непрерывную производную 2-го порядка. 3) $f'(x_0) = 0$. Тогда:*

1) Если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 – min.
2) Если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 – max.

Доказательство. Записываем для $f(x)$ формулу Тейлора до членов второго порядка с остатком в форме Пеано

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \alpha(x)(x - x_0)^2,$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$.
1) По условию $f'(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f''(x_0)}{2!} + \alpha(x)\right)(x - x_0)^2$.

Если $f''(x_0) > 0$, то $\exists\, O_\delta(x_0)$ в которой $|\alpha(x)| < \frac{f''(x_0)}{4}$. Отсюда $-\frac{f''(x_0)}{4} < \alpha(x) < \frac{f''(x_0)}{4}$

$$\frac{f''(x_0)}{2!}+\alpha(x) \geq \frac{f''(x_0)}{2}-\frac{f''(x_0)}{4} = \frac{f''(x_0)}{2} > 0 \Rightarrow f(x)-f(x_0) \geq 0 \Rightarrow f(x_0) \leq f(x).$$

Следовательно, в точке x_0 – min.
2) Аналогично. □

Теорема 5.2 (2-е достаточное условие в общем виде). *Пусть*
1) $f(x)$ определена в $O(x_0)$,
2) f имеет в $O(x_0)$ непрерывные производные до порядка $2n$ включительно,
3) $f'(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$.
Тогда
1) Если $f^{(2n)}(x_0) > 0$, то в точке x_0 – min.
2) Если $f^{(2n)}(x_0) < 0$, то в точке x_0 – max.

Доказательство. Записываем формулу Тейлора с остатком в форме Пеано

$$f(x) = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(2n-1)}(x_0)}{(2n-1)!}(x-x_0)^{2n-1}+\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}(x-x_0)^{2n}+$$

$$+\alpha(x) \cdot (x - x_0)^{2n}.$$

Так как $f'(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$, то

$$f(x) - f(x_0) = \left(\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} + \alpha(x)\right)(x - x_0)^{2n}.$$

После чего доказательство завершается как в теореме 4.1, т.е. $\exists\, O_\delta(x_0)$, в которой

$$|\alpha(x)| < \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha(x) > -\frac{1}{2}\cdot\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} \Rightarrow \frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!}+\alpha(x) > \frac{1}{2}\frac{f^{(2n)}(x_0)}{(2n)!} > 0$$

Поэтому $f(x) - f(x_0) > 0$, следовательно, в точке x_0 – min. □
Пример. $f(x) = \frac{x_2}{x-1}$, $f'(0) = 0$; $f'(2) = 0$.

$$f'' = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - x(x-2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} = 2\frac{(x-1)((x-1)^2 - x(x-2))}{(x-1)^4} =$$

$$= \frac{2(x-1)(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4},$$

в точке $x = 0$ производная $f''(0) < 0 \Rightarrow \max$, в точке $x = 2$ $f''(2) > 0 \Rightarrow$ min.

6. Касательная и ее уравнение

Определение 6.1. *Пусть функция f определена и дифференцируема в $O(x_0)$, $\Gamma(f)$ – график f. Пусть $M(x, f(x)) \in \Gamma(f)$, $M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma(f)$. Пусть l – прямая, проходящая через точку M_0, $d(M, l)$ – расстояние от точки $M \in \Gamma(f)$ до прямой l. Прямая l называется касательной к $\Gamma(f)$ в точке M_0, если $\lim\limits_{m\to M_0} \frac{d(M,l)}{d(M,M_0)} = 0$.*

Теорема 6.1. *Пусть f определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0. Тогда в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ существует касательная к $\Gamma(f)$ и ее уравнение имеет вид*

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{6.1}$$

Доказательство. Так как $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $f'(x_0)$ существует, поэтому уравнение (6.1) определяет на плоскости прямую l, проходящую через точку M_0. Покажем, что это касательная. Запишем уравнение (6.1) в виде

$$f'(x_0)x - y + (f(x_0) - f'(x_0)x_0) = 0.$$

Это общее уравнение прямой. Известно, что если прямая l имеет уравнение $Ax + By + C = 0$, $M_1(x_1, y_1) \notin l$, то

$$d(M_1, l) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

В нашем случае $A = f'(x_0)$, $B = -1$, $C = f(x_0) - f'(x_0)x_0$. Так как $M_1(x_1, y_1) \in \Gamma(f)$, то $y_1 = f(x_1)$. Поэтому

$$d(M_1, l) = \frac{|f'(x_0)\cdot x_1 + (-1)\cdot f(x_1) + f(x_0) - f'(x_0)x_0|}{\sqrt{(f'(x_0))^2 + 1}} =$$

$$= \frac{|f'(x_0)(x_1 - x_0) + (f(x_0) - f(x_1))|}{\sqrt{(f'(x_0))^2 + 1}}.$$

Так как f дифференцируема в точке x_0, то $f(x_1) - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) + \alpha(x_1)(x_1 - x_0)$. Тогда

$$d(M, l) = \frac{|\alpha(x_1)| \cdot |x_1 - x_0|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}}.$$

Отсюда находим

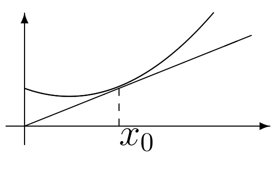
$$\frac{d(M, l)}{d(M, M_0)} = \frac{\alpha(x_1) \cdot |x_1 - x_0|}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (f(x_1) - f(x_0))^2}} =$$

$$= \frac{\alpha(x_1)}{\sqrt{1 + (f'(x_0))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\right)^2}} \to 0$$

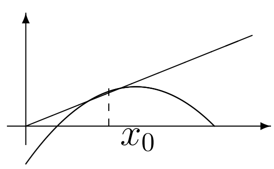
при $x_1 \to x_0$, т.к. $\alpha(x_1) \to 0$. $\square$

7. Выпуклость в точке, точки перегиба

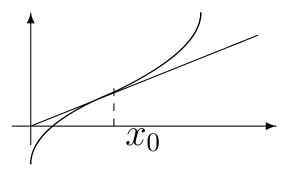
Определение 7.1. *Пусть f определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0.*
1) f называется выпуклой вверх в точке x_0, если $\exists\, O_\delta(x_0)$, что $\forall\, x \in O_\delta(x_0)$ $\Gamma(f)$ в этой $O(x_0)$ лежит ниже касательной.
2) f называется выпуклой вниз в точке x_0, если $\exists\, O_\delta(x_0)$, $\forall\, x \in O_\delta(x_0)$ $\Gamma(f)$ в $O(x_0)$ лежит выше касательной, проведенной в точке $(x_0, f(x_0))$.
3) Если при переходе через точку $M_0(x_0, f(x_0))$ график $\Gamma(f)$ переходит на другую сторону касательной, то точка M_0 называется точкой перегиба.



В точке x_0–выпуклость вниз



В точке x_0–выпуклость вверх



x_0–точка перегиба

Замечание. Так как касательная l имеет уравнение $l: \; y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, то
1) f выпукла вверх в точке x_0 тогда и только тогда, когда в $O_\delta(x_0)$ функция $F(x) = f(x) - f'(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \leq 0$.
2) f выпукла вниз в точке x_0 тогда и только тогда, когда в $O_\delta(x_0)$ функция $F(x) = f(x) - f'(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) \geq 0$.
3) Если $F(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то точка M_0 – точка перегиба.

Теорема 7.1. *Пусть f имеет в $O(x_0)$ непрерывную вторую производную f''.*
1) Если $f''(x_0) > 0$, то f выпукла вниз в точке x_0.
2) Если $f''(x_0) < 0$, то f выпукла вверх в точке x_0.

Доказательство. Запишем для $f(x)$ формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2!}.$$

Тогда

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2!} \quad \xi \in (x_0, x).$$

1) Пусть $f''(x_0) > 0$. Тогда $\exists\, O_\delta(x_0)$ в которой $f''(x) > 0$, значит, $f''(\xi) > 0$. Отсюда $\forall\, x \in O_\delta(x_0)$ $F(x) \geq 0$, следовательно, $\Gamma(f)$ выпукла вниз.
2) Пусть $f''(x_0) < 0$. Тогда $\exists\, O_\delta(x_0)$ в которой $f''(x) < 0$, значит, $f''(\xi) < 0$. Отсюда $\forall\, x \in O_\delta(x_0)$ $F(x) \leq 0$, следовательно, $\Gamma(f)$ выпукла вверх. $\square$

Теорема 7.2. *Пусть f имеет в $O(x_0)$ непрерывные производные до третьего порядка и $f''(x_0) = 0$. Если $f'''(x_0) \neq 0$, то точка $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба.*

Доказательство. Записываем формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3.$$

Так как $f''(x_0) = 0$, то $F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)^3$. Пусть $f'''(x_0) \neq 0$. Т.к. f''' непрерывна, то f''' сохраняет знак в некоторой $O_\delta(x_0)$. Тогда $F(x)$ изменяет знак при переходе через точку x_0, следовательно, M_0 – точка перегиба. $\square$

Теорема 7.3 (Общее достаточное условие выпуклости). *Пусть $f(x)$ имеет в $O(x_0)$ непрерывные производные до порядка $n = 2m$, и пусть $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(2m-1)}(x_0) = 0$.*
1) Если $f^{(2m)}(x_0) > 0$, то в точке M_0 f – выпукла вниз.
2) Если $f^{(2m)}(x_0) < 0$, то в точке M_0 f – выпукла вверх.

Доказательство. Записываем формулу Тейлора для $f(x)$ с остатком в форме Лагранжа

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(2m-1)}(x_0)(x - x_0)^{2m-1}}{(2m-1)!} +$$

$$+\frac{f^{(2m)}(\xi_0)(x-x_0)^{2m}}{(2m)!}.$$

Тогда

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \frac{f^{(2m)}(\xi)(x-x_0)^{2m}}{(2m)!}.$$

1) Если $f^{(2m)}(x_0) > 0$, то $\exists\, O_\delta(x_0)$ в которой $f^{(2m)}(\xi) > 0$, значит, $F(x) \geq 0$, следовательно, f выпукла вниз.
2) Случай $f^{(2m)}\ (x_0) < 0$ рассматривается аналогично. □

Теорема 7.4 (Общее достаточное условие точки перегиба). *Пусть f в $O(x_0)$ имеет непрерывные производные до порядка $n = 2m+1$ и $f''(x_0) = \ldots = f^{(2m)}(x_0) = 0$ и $f^{(2m+1)}(x_0) \neq 0$, то в точке x_0 – точка перегиба.*

Доказательство. Записываем формулу Тейлора.

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(2m)}(x_0)(x-x_0)^{2m}}{(2m)!} +$$

$$+\frac{f^{(2m+1)}(\xi)(x-x_0)^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Тогда

$$F(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x-x_0) = \frac{f^{(2m+1)}(\xi)(x-x_0)^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Так как $f^{(2m+1)}(x_0) \neq 0$, то $\exists\, O_\delta(x_0)$ в которой $f^{(2m+1)}(\xi)$ сохраняет знак, следовательно, $F(x)$ изменяет знак при переходе через точку x_0, значит, M_0 – точка перегиба. □

8. Выпуклые функции на отрезке. Критерий выпуклости

Определение 8.1. *Функция f, определенная на $[a,b]$, называется выпуклой вверх на $[a,b]$, если $\forall\,[x_1,x_2] \subset [a,b], \forall\, x \in [x_1,x_2]$ график f лежит выше хорды, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$. Функция f, определенная на $[a,b]$, называется выпуклой вниз на $[a,b]$, если $\forall\,[x_1,x_2] \subset [a,b], \forall\, x \in [x_1,x_2]$ график f лежит ниже хорды, соединяющей точки $(x_1, f(x_1))$ и $(x_2, f(x_2))$.*

Теорема 8.1. *Пусть f имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ на $[a,b]$.*
1) f выпукла вверх на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\forall\, x \in [a,b],\ f''(x) \le 0$.
2) f выпукла вниз на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $\forall\, x \in [a,b],\ f''(x) \ge 0$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f(x)$ выпукла вверх. Выберем $x_1 \in [a,b]$ и $h > 0$ так, чтобы $x_1 < x_1 + h < x_1 + 2h$. Запишем уравнение хорды, проходящей через точки $(x_1, f(x_1)), (x_1 + 2h, f(x_1 + 2h))$

$$y = \frac{f(x_1 + 2h) - f(x_1)}{2h}(x - x_1) + f(x_1).$$

Так как f выпукла вверх, то в точке $x = x_1 + h$

$$\frac{f(x_1 + 2h) - f(x_1)}{2h}(x_1 + h - x_1) + f(x_1) \le f(x_1 + h) \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_1 + 2h) - f(x_1)}{2} + f(x_1) \le f(x_1 + h) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1 + 2h) - f(x_1) + 2f(x_1) \le 2f(x_1 + h) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x_1+2h)+f(x_1) \le 2f(x_1+h) \Leftrightarrow f(x_1+2h)-f(x_1+h) \le f(x_1+h)-f(x_1) \tag{8.1}$$

Выберем $a \le x_1 < x_2 \le b$. Положим $h = \frac{x_2 - x_1}{n}$. По неравенству (8.1):

$$f(x_1 + h) - f(x_1) \ge f(x_1 + 2h) - f(x_1 + h) \ge f(x_1 + 3h) - f(x_1 + 2h) \ge$$

$$\ge \ldots \ge f(x_2) - f(x_2 - h).$$

Поделим обе части на $h > 0$, получим

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \ge \frac{f(x_2) - f(x_2 - h)}{h} = \frac{f(x_2 - h) - f(x_2)}{-h}.$$

Перейдем к пределу при $h \to 0$, получим $f'(x_1) \ge f'(x_2)$.

Таким образом, $\forall\, x_1 < x_2,\ f'(x_1) \ge f'(x_2) \Rightarrow f'(x)$ – убывающая функция на $[a,b]$, значит, $f''(x) \le 0$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f''(x) \le 0\ \forall\, x \in [a,b]$. Выберем произвольный отрезок $[x_1, x_2] \subset [a,b]$. Выпуклость вверх означает, что функция

$$F(x) = f(x) - f(x_1) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \ge 0. \tag{8.2}$$

Покажем, что $F(x) \ge 0$ на $[x_1, x_2]$. Предположим, что это не так, т.е. $\exists x \in [x_1, x_2]$, в которой $F(x) < 0$. Тогда в некоторой точке $x_0 \in (x_1, x_2)$

F достигает наименьшего значения, следовательно, в точке x_0 min, значит, $F'(x_0) = 0$. Запишем формулу Тейлора для $F(x)$ в точке x_0

$$0 = F(x_2) = F(x_0) + F'(x_0)(x_2 - x_0) + \frac{F''(\xi)(x_2 - x_0)^2}{2!} = \frac{f''(\xi)(x_2 - x_0)^2}{2!} + F(x_0).$$

Правая часть в этом равенстве < 0, а левая $= 0$. Получили противоречие. □

9. Асимптоты графика функции

Определение 9.1. *Прямая l называется асимптотой $\Gamma(f)$, если $d(M, l) \to 0$, когда точка $M \to \infty$ $(M \in \Gamma(f))$, где $d(M, l) \to 0$ – расстояние от точки M до прямой l.*

Теорема 9.1. *Пусть f определена на $(x_0, x_0 + \delta)$ и $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$). Тогда прямая $l: \ x = x_0$ является асимптотой $\Gamma(f)$. Такую асимптоту называют вертикальной асимптотой.*

Доказательство. Пусть $l: \ x = x_0$ – вертикальная прямая и $M \in \Gamma(f)$. Ясно, что $d(M, l) = (x - x_0)$ и $d(M, l) \to 0 \Leftrightarrow |x - x_0| \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0$. Но $M \to \infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, следовательно, $l: \ x = x_0$ – асимптота. □

Пример. $y = \frac{1}{x}$ $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$, тогда прямая $l: \ x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Теорема 9.2. *Пусть f определена на $(a, +\infty)$ и $l: \ y = kx + b$. Прямая l является асимптотой $\Gamma(f)$ тогда и только тогда, когда $k = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $l: \ y = kx + b$ является асимптотой, т.е. $\lim\limits_{M \to \infty} d(M, l) = 0$. Найдем $d(M, l)$. Пусть $M(x_1, f(x_1)) \Rightarrow$ $(l : y = kx + b)$

$$d(M, l) = \frac{|kx_1 - f(x_1) + b|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

По условию $d(M, l) \to 0$ при $x_1 \to +\infty$. Тогда $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} (kx_1 - f(x_1) + b) = 0$. Отсюда $b = \lim\limits_{x_1 \to +\infty} (f(x_1) - kx_1)$.

Так как $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} (kx_1 - f(x_1) + b) = 0$, то $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} \frac{1}{x_1}(kx_1 - f(x_1) + b) = 0$, следовательно, $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} \left(k - \frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{b}{x_1}\right) = 0$. Отсюда, $\lim\limits_{x_1 \to +\infty} \frac{f(x_1)}{x_1} = k$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $k = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx)$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0$, отсюда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|kx-f(x)+b|}{\sqrt{1+k^2}} = \lim d(M,l) = 0$. $\square$

Пример. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$. Найдем асимптоты.

1) $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1} = -\infty$, значит, прямая $x=1$ является вертикальной асимптотой.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x-1)} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{(x-1)} = 1 \Rightarrow k=1$.

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-kx\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x-1} = 1,\ b=1$.

Таким образом, $y=x+1$ – наклонная асимптота.

10. Построение графиков функций

Для построения графика необходимо

1) Найти область определения.

2) Найти характерные точки (точки пересечения с осями)

3) Найти асимптоты.

4) Найти участки возрастания и убывания функции.

5) Найти интервалы выпуклости.

6) Найти точки перегиба.

7) Найти область значений.

8) Построить эскиз графика.

Пример. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

1) Область определения: $x\neq 1$.

2) Пересечение с осями: с OX: $\frac{x^2}{x-1}=0 \Rightarrow x=0$, с осью OY: $x=0\Rightarrow y=0$.

3) Асимптоты: вертикальная: $x=1$, наклонная: $y=x+1$.

4) Участки монотонности: $f'(x) = \frac{2x(x-1)-x^2}{x-1} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, т.е. f возрастает на $(-\infty,0)$, на $(2,+\infty)$, убывает на $(0,1)\bigcup(1,2)$

5) Экстремумы: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=2$

в точке $x_1=0-\max,\ f(0)=0$, в точке $x_2=2-\min,\ f(2)=4$.

6) Выпуклость: $f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-x(x-2)2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4}[x^2-2x+1-x^2+2x] = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4}$, следовательно, на $(-\infty,1)$ $f''(x)\leq 0 \Rightarrow \Gamma(f)$ выпукла вверх. На $(1,+\infty)$ $f''(x)\geq 0\Rightarrow\Gamma(f)$ выпукла вниз.

7) Точек перегиба нет.

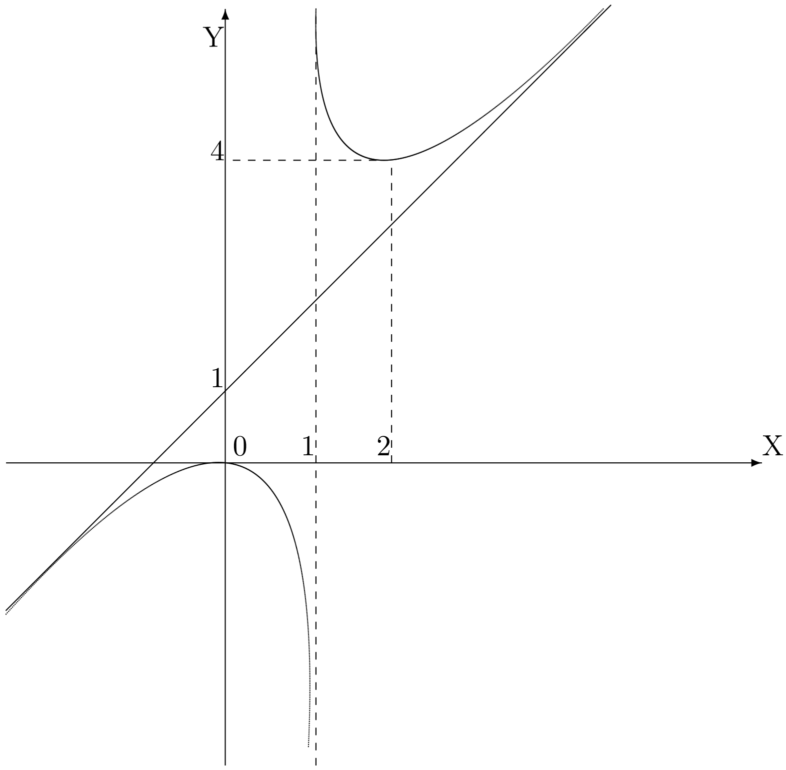
Строим график.

1)рисуем асимптоты $x=1$ и $y=x+1$

2)отмечаем характерные точки:$(0,0)$

3)отмечаем точку максимума $(0,0)$. Рисуем ветвь графика, двигаясь от

точки $(0,0)$ налево вниз приближаясь к асимптоте $y = x + 1$. Эта ветвь графика выпукла вверх. Теперь рисуем ветвь графика, двигаясь от точки $(0,0)$ направо вниз приближаясь к асимптоте $x = 1$. Эта ветвь графика тоже выпукла вверх.
4)отмечаем точку минимума $(2,4)$. Рисуем ветвь графика, двигаясь от точки $(2,4)$ налево вверх приближаясь к асимптоте $x = 1$. Эта ветвь графика выпукла вниз. Теперь рисуем ветвь графика, двигаясь от точки $(2,4)$ направо вверх приближаясь к асимптоте $y = x + 1$. Эта ветвь графика тоже выпукла вниз.



11. Правило Лапиталя для неопределенности $\frac{0}{0}$

Будем говорить, что при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ имеется неопределенность вида $\frac{0}{0}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \ \wedge \ \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

Теорема 11.1 (Правило Лапиталя). *Пусть f и g определены на $[a,b]$, f и g непрерывны на $[a,b]$, $f(a) = g(a) = 0$; $f(x), g(x)$ дифференцируемы на (a,b). Если $\exists \lim\limits_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\exists \lim\limits_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)} = A$*

Доказательство. Так как $f(a) = g(a) = 0$, то

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} =$$

по теореме Коши

$$= \lim_{x\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = |..a < \xi < x| = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A. \ \square$$

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

12. Правило Лапиталя для неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Будем говорить, что при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$

Лемма 12.1. *Пусть $f(x), g(x)$ определены на (a, b) $(a < b)$, дифференцируемы на (a, b) и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = +\infty$. Тогда существует функция $\alpha(x)$, определенная на (a, b), возрастающая на (a, b), $\lim\limits_{x\to b-0} \alpha(x) = b$ и такая, что*

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(\alpha(x))}{f(x)} = 0, \ \lim_{x\to b-0} \frac{g(\alpha(x))}{g(x)} = 0.$$

Теорема 12.2 (Правило Лапиталя). *Пусть $f(x), g(x)$ определены на (a, b) $(a < b)$, непрерывны на (a, b), дифференцируемы на (a, b) и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = +\infty$. Если существует $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Доказательство. Пусть $\alpha(x)$ – функция, определенная в в лемме 11.1. Тогда $\lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to b-0} \frac{f(x)-f(\alpha(x))}{g(x)-g(\alpha(x))}$. В самом деле:

$$\lim_{x\to b-0} \frac{f(x) - f(\alpha(x))}{g(x) - g(\alpha(x))} = \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1 - \frac{f(\alpha(x))}{f(x)}}{1 - \frac{g(\alpha(x))}{g(x)}} = \lim_{x\to b-0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Но по теореме Коши:

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)-f(\alpha(x))}{g(x)-g(\alpha(x))}=\lim_{x\to b-0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},$$

где $x<\xi<\alpha(x)$ и значения $\xi\to b$ при $x\to b$. $\lim\limits_{\xi\to b-0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=A$. $\square$

Доказательство леммы 11.1. Можно считать, что $f,g>0$ на (a,b). Будем строить функцию $\alpha(x)$, определенную на (a,b) следующим образом. Вначале выбираем произвольную точку $x_1\in(a,b)$. Затем выбираем $x_2\in(x_1,b)$ так, чтобы $\forall\, x\geq x_2$, $\frac{f(x)}{f(x_1)}>2$ и $\frac{g(x)}{g(x_1)}>2$. Затем выбираем $x_3>x_2$ так, чтобы $\forall\, x\geq x_3$, $\frac{f(x)}{f(x_2)}>3$ и $\frac{g(x)}{g(x_2)}>3$. И так далее. Затем выбираем $x_{n+1}>x_n$ так, чтобы $\forall\, x\geq x_{n+1}$, $\frac{f(x)}{f(x_n)}>n+1$ и $\frac{g(x)}{g(x_n)}>n+1$. Теперь строим функцию $\alpha(x)$ следующим образом.
Если $x\in(a,x_1)$ то $\alpha(x)=a$,
Если $x\in[x_1,x_2)$ то $\alpha(x)=a$.
Если $x\in[x_2,x_3)$ то $\alpha(x)=x_1$
$\ldots.\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$
Если $x\in[x_n,x_{n+1})$ то $\alpha(x)=x_{n-1}$,
$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$
и по построению $f(x)>nf(x_{n-1})$ при $x\in[x_n,x_{n+1})$. Тогда

$$\frac{f(\alpha(x))}{f(x)}=\frac{f(x_{n-1})}{f(x)}\leq\frac{f(x_{n-1})}{n\cdot f(x_{n-1})}=\frac{1}{n}\to 0.\ \square$$

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to 0+0}x^x$. Обозначим $f(x)=x^x$. Тогда $\ln f(x)=x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. По правилу Лопиталя $\lim_{x\to 0+0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'}=0$ $\Rightarrow\lim_{x\to 0+0}f(x)=\lim_{x\to 0+0}e^{\ln f(x)}=e^0=1$.

Литература

1. В.А.Зорич. Математический анализ, т.1-2, МЦНМО., 2007 г.
2. В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Бл.Х.Сендов. Математическипй анализ т.1-2, Наука, 1985.
3. Л.Д.Кудрявцев. Математический анализ. т.1-3, М.: Дрофа, 2003.
4. С.М.Никольский. Курс математического анализа. Т.1-2, Наука, 1973.
5. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Наука, 2000.
6. Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1-3.Физматгиз, М.:2001