Глава 1

Обобщенный интеграл Римана и его основные свойства

1. Первообразная и неопределенный интеграл

Вначале докажем следующее очевидное утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть*
1) $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$,
2) $F(x)$ дифференцируема на (a, b),
3) $F'(x) = 0$ на (a, b).
Тогда $F(x) = const$ на $[a, b]$.

Доказательство. По теореме Лагранжа

$$F(x) - F(a) = F'(\xi)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0.$$

Следовательно, $\forall\, x \in (a, b]$, $\quad F(x) = F(a)$. $\square$

Определение 1.1. *Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Функция $F(x)$, непрерывная на $[a, b]$, называется первообразной для $f(x)$, если $\forall\, x \in [a, b] \quad F'(x) = f(x)$. В граничных точках положим $F'(a) = F'(a + 0)$, $F'(b) = F'(b - 0)$.*

Таким образом, согласно определению, каждая функция является первообразной для своей производной.

Теорема 1.2. *1) Если $F_1(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $F_1(x) + C$ – первообразная для $f(x)$.*
2) Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$, то $F_1(x) - F_2(x) = const$.

Доказательство. 1) Так как $F_1(x)$ первообразная для $f(x)$, то $F_1'(x) = = f(x)$, следовательно, $(F_1(x) + C)' = f(x)$. Отсюда $F_1(x) + C$ тоже первообразная.

2) Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две первообразные для $f(x)$, то $(F_1(x) - F_2(x))' = = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$ на $[a, b]$. Следовательно, $F_1(x) - F_2(x) = = C = const$. Отсюда $F_1(x) = F_2(x) + C$. $\square$

Из определения следует, что задача нахождения первообразной – это задача обратная к нахождению производной. Доказанная теорема 1.2. означает, что первообразная определена неоднозначно. Для однозначности обратной операции вводят понятие неопределенного интеграла.

Определение 1.2. *Пусть $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ первообразную $F(x)$. Тогда совокупность всех первообразных для $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается $\int f(x)\,dx$. Таким образом, по определению*

$$\int f(x)\,dx \stackrel{df}{=} \{F(x) + C\}_{C\in\mathbb{R}}. \tag{1.1}$$

Замечание 1. В определении 1.2 в формуле (1.1) фигурные скобки обычно опускают и пишут $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.
Замечание 2. Из определения следует, что

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \stackrel{df}{\Longleftrightarrow} \quad F'(x) = f(x).$$

Замечание 3. Очевидно, что если две функции назвать эквивалентными, когда их разность есть постоянное число, то введенное таким образом отношение будет отношением эквивалентности, а неопределенный интеграл будет фактор-множеством по этому отношению.

Свойства неопределенного интеграла.

1)$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
Доказательство. Пусть $F'(x) = f(x)$, т.е. $F(x)$ – первообразная для $f(x)$. Тогда $(\lambda F(x))' = \lambda F'(x) = \lambda f(x)$, т.е. $\lambda F(x)$ – первообразная для $\lambda f(x)$. Поэтому

$$\int \lambda f(x)\,dx = \lambda F(x) + C = \lambda\left(F(x) + \frac{C}{\lambda}\right) = \lambda\cdot(F(x) + C_1) = \lambda\int f(x)\,dx.$$

2) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.
Доказательство. Пусть $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$. Тогда $(F(x)+ +G(x))' = f(x) + g(x)$. Отсюда

$$\int (f+g)\,dx = F(x) + G(x) + C = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

3) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$ – очевидно по определению.
4) $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.
Доказательство.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x).$$

Теорема 1.3 (замена переменной). *Пусть*
1) $f(x)$ имеет на $[a, b]$ первообразную $F(x)$,
2) функция $x = x(t)$ определена на $[\alpha, \beta]$, $([\alpha, \beta]) \subset [a, b]$, $x(t)$ дифференцируема в $[\alpha, \beta]$. Тогда справедливо равенство

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))x'(t)\,dt. \tag{1.2}$$

Доказательство. Так как $F(x)$ первообразная для $f(x)$, то $F'(x) = f(x)$. Поэтому $(F(x(t)))'_t = F'_x(x(t))x'(t) = f(x(t))x'(t)$. По определению интеграла

$$\int f(x(t))x'(t)\,dt = F(x(t)) + C \quad \text{и} \quad \int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Приравнивая левые части, получаем равенство (1.2). $\square$

Теорема 1.4 (интегрирование по частям). *Пусть*
1) $f(x)$, $g(x)$ *дифференцируемы на* $[a, b]$,
2) функция $f'(x)g(x)$ *имеет первообразную.*
Тогда функция $f(x)g'(x)$ *имеет первообразную и справедливо равенство*

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx. \tag{1.3}$$

Доказательство. Так как f и g дифференцируемы, то

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{1.4}$$

Левая часть в (1.4) имеет первообразную $f(x)g(x)$. Поэтому если $f'(x)g(x)$ имеет первообразную $H(x)$, то $f(x)g'(x)$ имеет первообразную $f(x)g(x) - H(x)$. Но по свойству неопределенного интеграла

$$\int (f(x)g(x))'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx,$$

откуда и следует (1.3). $\square$
Замечание. Так как $f'(x)dx = df(x)$, $g'(x)dx = dg(x)$, то равенство (1.3) обычно записывают в виде

$$fg = \int f\,dg + \int g\,df \quad \Longleftrightarrow \quad \int f\,dg = fg - \int g\,df.$$

2. Метки и отмеченные разбиения, масштабирующие функции

Определение 2.1. *Любую функцию* $\delta(x) > 0$ *на* $[a, b]$ *будем называть масштабирующей функцией.*

Определение 2.2. *Совокупность чисел*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

будем называть разбиением отрезка $[a, b]$ *и обозначать* $(x_k)_{k=0}^n$ *или* (x_k) *или* $\mathfrak{X}$.

Определение 2.3. *Пусть* $(x_k)_{k=0}^n = \mathfrak{X}$ *– разбиение отрезка* $[a, b]$. *Точку* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ *будем называть меткой, а совокупность* $([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$, *состоящую из отрезков разбиения* $[x_{k-1}, x_k]$ *и точек* $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, *будем называть отмеченным разбиением и обозначать* $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$.

Определение 2.4. *Пусть* $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$ *— отмеченное разбиение отрезка* $[a, b]$ *и* $\delta(x) > 0$ *— масштабирующая функция. Разбиение* $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$ *называют* δ*-конечным, если* $\forall\, k = 1, \dots, n$

$$|[x_{k-1}, x_k]| < \delta(\xi_k).$$

Для обозначения δ-конечного разбиения будем использовать символ $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta$. Иногда δ-конечное отмеченное разбиение $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$ называют подчиненным масштабирующей функции $\delta(x)$.

Предложение 2.1. *Пусть* $\delta(x) > 0$ *— масштабирующая функция на* $[a, b]$ *и* $c \in [a, b]$*. Пусть* $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]}$ *—* δ*-конечное разбиение отрезка* $[a, c]$*;* $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]}$ *—* δ*-конечное разбиение отрезка* $[c, b]$*. Тогда* $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} = \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]} \cup \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]}$ *–* δ*-конечное разбиение отрезка* $[a, b]$*.*

Доказательство. Пусть $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$ — δ-конечное разбиение $[a, c]$, т.е.

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = c, \xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \ |x_k - x_{k-1}| < \delta(\xi_k), \quad (k = 1, \dots, n).$$

Пусть далее $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=n+1}^{n+p}$ — δ-конечное разбиение $[c, b]$, т.е.

$$c = x_n < x_{n+1} < \ldots < x_{n+p} = b, \ \xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ и } |x_k - x_{k-1}| < \delta(\xi_k),$$

$(k = n + 1, \dots, n + p)$. Очевидно, что

$$\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]} \cup \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]} = ([x_{k-1}, x_k]_{k=1}^{n+p}, \xi_k)$$

отмеченное разбиение отрезка $[a, b]$ и

$$|x_k - x_{k-1}| < \delta(\xi_k) \quad \forall\, k = 1, 2, \dots, n + p. \ \square$$

Предложение 2.2. *Пусть* $\delta(x) > 0$ *– масштабирующая функция на* $[a, b]$ *и*

$$a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$$

и пусть $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_k$*,* $(k = 1, 2, \dots, n)$ *–* δ*-конечные разбиения отрезков* $[y_{k-1}, y_k]$*. Тогда* $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_k$ *есть* δ*-конечное разбиение отрезка* $[a, b]$*.*

Доказательство получается индукцией из предложения 2.1.

Теорема 2.3 (существования δ-конечного разбиения)*. Для любой масштабирующей функции* $\delta(x) > 0$ *на* $[a, b]$ *существует* δ*-конечное отмеченное разбиение* $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$*.*

Доказательство. От противного. Пусть $\delta(x) > 0$ и не существует δ-конечных разбиений. Разобьем отрезок $[a, b]$ пополам точкой $c = \frac{a+b}{2}$. Если существует δ-конечное разбиение отрезка $[a, c]$ и отрезка $[c, b]$, то по предложению 2.1 существует δ-конечное разбиение отрезка $[a, b]$. Поэтому, по крайней мере для одного из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, не существует δ-конечного разбиения. Обозначим его через $[a_1, b_1]$. Очевидно, что $|[a_1, b_1]| = \frac{b-a}{2}$. Аналогично обозначим через $[a_2, b_2]$ ту половину $[a_1, b_1]$, для которой не существует δ-конечное разбиение. Очевидно, что $|[a_2, b_2]| = \frac{b-a}{2^2}$. Продолжим этот процесс. Получится последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, которые не имеют δ-конечных разбиений и $|[a_n, b_n]| = \frac{b-a}{2^n} \to 0$. По теореме о вложенных отрезках $\exists\,!\ x_0 \in [a_n, b_n]$, и так как не существует δ-конечного разбиения отрезка $[a_n, b_n]$, то разбиение $([a_n, b_n], x_0)$, состоящее из одного отрезка, не является δ-конечным. Отсюда $|[a_n, b_n]| \ge \delta(x_0) > 0$. Перейдем к пределу, получим $0 \ge \delta(x_0) > 0$, что невозможно. $\square$

3. Интеграл Римана, необходимое условие существования интеграла Римана

Определение 3.1. *Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$, $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}= ([x_{k-1},x_k],\xi_k)_{k=1}^n$ – отмеченное разбиение. Сумма*

$$S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}},f)=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

называется интегральной суммой функции f на отрезке $[a,b]$.

Определение 3.2. *Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a,b]$, называется интегрируемой по Риману на $[a,b]$, если существует число $I(f)$ такое, что*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(x)=\delta=const>0,\ \forall\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}}\ll\delta,\quad |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}},f)-I(f)|<\varepsilon.$$

Число $I(f)$ называется интегралом Римана и обозначается $(R)\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Замечание. В определении интеграла Римана $\delta(x)>0$ есть постоянная функция.

Теорема 3.1. *Если $f(x)$ неограничена на $[a,b]$, то она не интегрируема по Риману.*

Доказательство. Выберем произвольное δ-конечное разбиение

$$([x_{k-1},x_k],\xi_k)_{k=1}^n,\quad \text{то есть}\quad |[x_{k-1},x_k]|<\delta.$$

Покажем, что изменяя ξ_k, можно сделать интегральные суммы $S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}},f)$ неограниченными. Так как $f(x)$ неограничена на $[a,b]$, то $f(x)$ неограничена на каком-то отрезке $[x_{k-1},x_k]$. Предположим для определенности, что $f(x)$ неограничена на отрезке $[x_0,x_1]$. Запишем сумму $S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}},f)$ в виде

$$S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}},f)=f(\xi_1)\Delta x_1+\sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Тогда

$$|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}},f)|>|f(\xi_1)|\Delta x_1-|\sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k|. \tag{3.1}$$

Метки $\xi_2,\ldots,\xi_n$ зафиксируем и будем менять ξ_1. Подберем ξ_1 так, чтобы $|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}},f)|>N$, где N – произвольно выбранное натуральное число. Для этого должно быть

$$|f(\xi_1)|\Delta x_1-|\sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k|>N,$$

то есть

$$|f(\xi_1)|>\frac{N+|\sum_{k=2}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k|}{\Delta x_1}. \tag{3.2}$$

Так как $f(x)$ неограничена в $[x_0, x_1]$, то ξ_1 можно выбрать так, чтобы (3.2) выполнялось. Таким образом, при фиксированном разбиении $\mathfrak{X}$, фиксированных метках $\xi_2, \ldots, \xi_n$ можно выбрать ξ_1 так, чтобы

$$|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f)| > N.$$

Но тогда ни для какого конечного числа $I(f)$ и ни для какого $\varepsilon > 0$ неравенство

$$|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) - I(f)| < \varepsilon$$

невозможно. $\square$

4. Обобщенный интеграл Римана (Хенстока). Формула Ньютона–Лейбница

Определение 4.1. *Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$. Функция $f(x)$ называется интегрируемой в обобщенном римановском смысле на отрезке $[a, b]$, если существует число $I(f) \in \mathbb{R}$ такое, что*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(x) > 0 \text{ на } [a, b]\ \forall\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta(x), \quad |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) - I(f)| < \varepsilon.$$

Число $I(f)$ называют обобщенным интегралом Римана или интегралом Хенстока и обозначают $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ или $(R^*)\int\limits_a^b f(x)\,dx$, или $(R^*)\int\limits_a^b f$.

Функцию f, интегрируемую в обобщенном римановском смысле на отрезке $[a, b]$, будем называть также (R^*)-интегрируемой. Совокупность всех (R^*)-интегрируемых функций на отрезке $[a, b]$ будем обозначать $R^*(a, b)$.

Замечание 1. Определение (R^*)-интеграла было дано в 1957 г. Я. Курцвейлем, а в 1961 г. Р. Хенсток начал его систематическое изучение. Поэтому интеграл называют также интегралом Курцвейля–Хенстока, а чаще просто интегралом Хенстока.

Замечание 2. В определении 4.1 вместо $< \varepsilon$ достаточно написать $\leq \varepsilon$.

Замечание 3. Приведенное выше определение интеграла корректно в том смысле, что интеграл определен однозначно. Докажем это.

Пусть $I_1(f)$ и $I_2(f)$ – два значения интеграла и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда для этого $\varepsilon > 0$ найдутся масштабирующие функции $\delta_1(x) > 0$ и $\delta_2(x) > 0$ на $[a, b]$ такие, что

$$\forall\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta_1(x) \quad |S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) - I_1(f)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.1}$$

$$\forall\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta_2(x) \quad |S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) - I_2(f)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Обозначим

$$\delta(x) = \min(\delta_1(x), \delta_2(x)).$$

Если $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta(x)$, то для $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$ будут выполнены неравенства (4.1) и (4.2). Но тогда

$$|I_1(f) - I_2(f)| \leq |I_1(f) - S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}})| + |S(f, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) - I_2(f)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольное, то $I_1(f) = I_2(f)$, и единственность интеграла доказана. $\square$

Теорема 4.1 (формула Ньютона–Лейбница). *Если $f(x)$ дифференцируема в каждой точке $x \in [a,b]$, то $f'(x)$ (R^*)-интегрируема на $[a,b]$ и*

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

Доказательство. Если $f(x)$ дифференцируема $[a,b]$ в точке $x \in [a,b]$ то

$$\forall x \in [a,b]\ \exists f'(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

и по определению предела в точке x

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(x) > 0\ \forall\ y \in [a,b],\ |x-y| < \delta(x),\ y \neq x$$

выполняется неравенство

$$\left| f'(x) - \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)},$$

или иначе

$$|f'(x)\cdot(x-y) - (f(x)-f(y))| \leq \frac{\varepsilon}{(b-a)}|x-y|. \tag{4.3}$$

Отметим, что неравенство (4.3) выполняется и при $y = x$.

Покажем, что число $I(f) = f(b) - f(a)$ есть интеграл Хенстока. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем масштабирующую функцию $\delta(x)$, которая появилась в (4.3). Пусть $\mathring{\mathfrak{x}}= ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n \ll \delta(x)$. Рассмотрим разность

$$\left| S(\mathring{\mathfrak{x}}, f') - (f(b)-f(a)) \right| = \left| \sum_{k=1}^n f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^n (f'(\xi_k)(x_k - \xi_k) + f'(\xi_k)(\xi_k - x_{k-1})) - \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(\xi_k)) + (f(\xi_k) - f(x_{k-1})) \right| \leq$$

$$\leq \left| \sum_{k=1}^n f'(\xi_k)(x_k - \xi_k) - (f(x_k) - f(\xi_k)) \right| + \left| \sum_{k=1}^n f'(\xi_k)(\xi_k - x_{k-1}) - (f(\xi_k) - f(x_{k-1})) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n |f'(\xi_k)(x_k - \xi_k) - (f(x_k) - f(\xi_k))| + \sum_{k=1}^n |f'(\xi_k)(\xi_k - x_{k-1}) - (f(\xi_k) - f(x_{k-1}))|. \tag{4.4}$$

Так как разбиение $\mathring{\mathfrak{x}} \ll \delta$, то $|x_k - x_{k-1}| < \delta(\xi_k)$. Поэтому $|x_k - \xi_k| < \delta(\xi_k)$ и $|\xi_k - x_{k-1}| < \delta(\xi_k)$. Тогда по неравенству (4.3)

$$|f'(\xi_k)(x_k - \xi_k) - (f(x_k) - f(\xi_k))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|x_k - \xi_k|, \tag{4.5}$$

$$|f'(\xi_k)(\xi_k - x_{k-1}) - (f(\xi_k) - f(x_{k-1}))| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}|\xi_k - x_{k-1}|. \tag{4.6}$$

Подставляя (4.5) и (4.6) в (4.4), получим

$$\left|S(\overset{\circ}{\mathfrak{x}}, f') - (f(b) - f(a))\right| \le \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{(b-a)}|x_k - \xi_k| + \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{(b-a)}|\xi_k - x_{k-1}| =$$

$$= \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{k=1}^{n} |x_k - x_{k-1}| = \frac{\varepsilon}{(b-a)} \cdot (b-a) = \varepsilon,$$

и теорема доказана. □

Следствие. *Если $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на $[a,b]$, то*
1) $f(x) \in R^*(a,b)$,
2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Надо положить $f(x) = F'(x)$ в теореме 4.1. □

5. Свойства интеграла, связанные с арифметическими операциями

Теорема 5.1. *Если $f, g \in R^*(a,b)$, то $f + g \in R^*(a,b)$ и*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Так как $f, g \in R^*(a,b)$, то $\forall \varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1(x) > 0 \; \forall \overset{\circ}{\mathfrak{x}} \ll \delta_1(x) \quad \left|S(\overset{\circ}{\mathfrak{x}}, f) - \int_a^b f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists \delta_2(x) > 0 \; \forall \overset{\circ}{\mathfrak{x}} \ll \delta_2(x) \quad \left|S(\overset{\circ}{\mathfrak{x}}, g) - \int_a^b g(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Положим $\delta(x) = \min(\delta_1(x), \delta_2(x))$. Тогда $\delta(x) > 0$ для всех $x \in [a,b]$, т.е. $\delta(x)$ – масштабирующая функция и если $\overset{\circ}{\mathfrak{x}} \ll \delta(x)$, то $\overset{\circ}{\mathfrak{x}} \ll \delta_1(x)$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{x}} \ll \delta_2(x)$, так как $\delta(x) = \min(\delta_1(x), \delta_2(x))$, то $\delta(x) \le \delta_1(x)$ и $\delta(x) \le \delta_2(x)$.

Пусть теперь $\overset{\circ}{\mathfrak{x}} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n \ll \delta(x)$. Рассмотрим разность

$$\left|S(\overset{\circ}{\mathfrak{x}}, f+g) - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) + g(\xi_k))\Delta x_k - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx\right)\right| =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \int\limits_a^b f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k - \int\limits_a^b g(x)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| + \left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, g) - \int\limits_a^b g(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \Box$$

Теорема 5.2. *Если $f \in R^*(a,b)$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda f \in R^*(a,b)$ и*

$$\int\limits_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Так как $f \in R^*(a,b)$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(x) > 0, \ \forall \ \mathring{\mathfrak{X}} \ll \delta(x) \quad \left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda|}.$$

Отсюда

$$\left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, \lambda f) - \lambda \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| = |\lambda| \left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{1 + |\lambda|} < \varepsilon. \ \Box$$

6. Замена переменной в интеграле Хенстока

Теорема 6.1. *Пусть 1) $f(x)$ имеет первообразную на $[a,b]$, 2) $x(t)$ дифференцируема на $[\alpha,\beta]$, 3) $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$, 4) $x(t)$ отображает $[\alpha,\beta]$ на $[a,b]$.*
Тогда
1) $f(x(t))x'(t) \in R^*(a,b)$,
2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)\,dt$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$ т.е. $F'(x) = f(x)$. Тогда $F'_t(x(t)) = F'_x(x(t)) \cdot x'(t) = f(x(t))x'(t)$, т.е. $F(x(t))$ есть первообразная для $f(x(t))x'(t)$ на $[\alpha,\beta]$. По следствию из теоремы 4.1 (формула Ньютона–Лейбница)

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

$$\int\limits_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)\,dt = F(x(\beta)) - F(x(\alpha)) = F(b) - F(a).$$

Приравнивая левые части этих равенств, мы и получаем утверждение теоремы. $\Box$

7. Интегрирование по частям в интеграле Хенстока

Теорема 7.1. *Пусть функции* $u(x)$, $v(x)$ *дифференцируемы на* $[a,b]$. *Если* $u(x)v'(x) \in R^*(a,b)$, *то* $u'(x)v(x) \in R^*(a,b)$ *и*

$$u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx. \tag{7.1}$$

Доказательство. Так как $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы, то

$$(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + u'(x)v(x). \tag{7.2}$$

Левая часть в (7.2) (R^*)-интегрируема как производная (по теореме 4.1). По условию $u(x)v'(x) \in R^*(a,b)$. Следовательно, по теореме 5.1 $u'(x)v(x) \in R^*(a,b)$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b (u(x)v(x))'\,dx = \int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int\limits_a^b u'(x)v(x)\,dx,$$

откуда по формуле Ньютона–Лейбница получаем равенство (7.1). □

Замечание. Так как $v'dx = dv(x)$, $u'dx = du(x)$, то равенство (7.1) обычно записывают в виде

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv|_a^b - \int\limits_a^b v\,du. \tag{7.3}$$

(7.1) и (7.3) называются формулами интегрирования по частям. Выражение

$$uv|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

называют подстановкой.

8. Свойства интеграла, связанные с неравенствами

Теорема 8.1. *Пусть* $f \in R^*(a,b)$ *и* $f(x) \geq 0$ *на* $[a,b]$. *Тогда* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Доказательство. Так как f (R^*)-интегрируема, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(x) > 0$ так, что $\forall\ \mathring{\mathfrak{X}} \ll \delta(x)$ выполняется неравенство

$$\left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$-\varepsilon + S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) < \int\limits_a^b f(x)\,dx < S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) + \varepsilon.$$

Так как $f \geq 0$, то $S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) \geq 0$. Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \quad \int_a^b f(x)\,dx > -\varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. $\square$

Следствие 1. *Если $f, g \in R^*(a,b)$ и $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Доказательство. Так как $f(x) \leq g(x)$ на $[a,b]$, то $g(x) - f(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и по теореме 8.1 $\int_a^b (g - f) \geq 0$. Отсюда $\int_a^b g - \int_a^b f \geq 0$. $\square$

Следствие 2. *Если $f, |f| \in R^*(a,b)$, то $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.*

Доказательство. Так как $-|f| \leq f \leq |f|$ на $[a,b]$, то по следствию 1

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|,$$

откуда и следует утверждение леммы. $\square$

9. Критерий Коши ($\mathbf{R}^*$)-интегрируемости

Теорема 9.1. *$f \in R^*(a,b)$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(x) > 0\ \forall\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1 \ll \delta(x),\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2 \ll \delta(x) \quad |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1, f) - S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2, f)| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f \in R^*(a,b)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(x) > 0\ \forall\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1 \ll \delta(x),\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2 \ll \delta(x)$$

$$\left| S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1, f) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \left| S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2, f) - \int\limits_a^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому

$$|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1, f) - S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2, f)| \leq \left| S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1, f) - \int\limits_a^b f\,dx \right| + \left| S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2, f) - \int\limits_a^b f\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнено условие (9.1). Тогда

$$\forall \varepsilon = \frac{1}{n}\ \exists \delta_n(x) > 0\ \forall\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1 \ll \delta_n(x),\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2 \ll \delta_n(x) \quad |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1, f) - S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2, f)| < \frac{1}{n}.$$

Можно считать, что $\delta_1(x) \geq \delta_2(x) \geq \delta_3(x) \geq \ldots$, так как в противном случае можно взять $\tilde{\delta}_n(x) = \min(\delta_{n-1}(x), \delta_n(x))$. При каждом $n \in \mathbb{N}$, выберем произвольное разбиение $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_n \ll \delta_n(x)$. Тогда для всех $p \geq 1$, $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{n+p} \ll \ll \delta_{n+p}(x) \leq \delta_n(x)$. Поэтому

$$\forall n,\ \forall p \geq 1, \quad |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_n, f) - S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{n+p}, f)| < \frac{1}{n}. \tag{9.2}$$

Неравенство (9.2) означает, что последовательность $(S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_n, f))_{n=1}^{\infty}$ является фундаментальной, и по критерию Коши для числовой последовательности существует $\lim\limits_{n\to\infty} S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_n, f) = I(f)$.

Покажем, что $I(f)$ есть значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. В неравенстве (9.2) перейдем к пределу при $p \to \infty$, получим

$$|S(\mathring{\mathfrak{X}}_n, f) - I(f)| \le \frac{1}{n}. \tag{9.3}$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ – произвольное. Выберем n так, чтобы $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ и пусть $\delta(x) = \delta_n(x)$. Если $\mathring{\mathfrak{X}} \ll \delta(x) = \delta_n(x)$, то

$$|S(\mathring{\mathfrak{X}}_n, f) - S(\mathring{\mathfrak{X}}, f)| \le \frac{1}{n}.$$

Отсюда

$$|S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - I(f)| \le |S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - S(\mathring{\mathfrak{X}}_n, f)| + |S(\mathring{\mathfrak{X}}_n, f) - I(f)| < \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Таким образом, $f \in R^*(a, b)$. □

10. Интеграл как аддитивная функция интервала

Теорема 10.1. *Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $c \in (a, b)$. $f(x) \in R^*(a, b)$ тогда и только тогда, когда $f \in R^*(a, c)$ и $f \in R^*(c, b)$. При этом*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f \in R^*(a, c)$ и $f \in R^*(c, b)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1(x) > 0 \ \forall \ \mathring{\mathfrak{X}}_{[a,c]} \ll \delta_1(x) \qquad \left| S(\mathring{\mathfrak{X}}_{[a,c]}, f) - \int\limits_a^c f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\exists \delta_2(x) > 0 \ \forall \ \mathring{\mathfrak{X}}_{[c,b]} \ll \delta_2(x) \qquad \left| S(\mathring{\mathfrak{X}}_{[c,b]}, f) - \int\limits_c^b f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Построим масштабирующую функцию $\delta(x)$ на $[a, b]$ следующим образом:

$$\delta(x) = \begin{cases} \min(\delta_1(x), |x - c|), & x \in [a, c), \\ \min(\delta_1(x), \delta_2(x)), & x = c, \\ \min(\delta_2(x), |x - c|), & x \in (c, b]. \end{cases}$$

Пусть $\mathring{\mathfrak{X}} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n \ll \delta(x)$. Покажем, что для такого разбиения точка c является меткой.

В самом деле, пусть $[x_{m-1}, x_m]$ – тот отрезок, который содержит точку c. Так как разбиение $\mathring{\mathfrak{X}}$ δ-конечное, то $|x_m - x_{m-1}| < \delta(\xi_m)$. Если $\xi_m \ne c$, то из определения масштабирующей функции $\delta(\xi_m) < |\xi_m - c|$. Отсюда $|x_m - x_{m-1}| < |\xi_m - c|$, что невозможно.

Таким образом, c является меткой. Но тогда слагаемое $f(c)(x_m - x_{m-1})$ можно записать в виде $f(c)(c - x_{m-1}) + f(c)(x_m - c)$ и поэтому

$$S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) = \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} f(\xi_k)\Delta x_k + f(c)(c - x_{m-1})}_{S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]}, f)} + \underbrace{f(c)(x_m - c) + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k}_{S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]}, f)}$$

причем $S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]}, f) \ll \delta_1(x)$ на $[a, c]$ и $S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]}, f) \ll \delta_2(x)$ на $[c, b]$. Поэтому

$$\left| S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) - \left(\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx \right) \right| \leq \left| S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]}, f) - \int\limits_a^c f(x)\,dx \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_c^b f(x)\,dx - S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]}, f) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

и достаточность доказана.
Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f \in R^*(a, b)$ и $c \in (a, b)$. Покажем, что $f \in R^*(a, c)$. Так как $f \in R^*(a, b)$, то по критерию Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(x) > 0 \text{ на } [a, b]\ \forall\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2 \ll \delta(x), \quad |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1, f) - S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2, f)| < \varepsilon.$$

Выберем разбиения $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}'_{[a,c]} \ll \delta(x)$ на $[a, c]$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}''_{[a,c]} \ll \delta(x)$ на $[a, c]$ и пусть $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]} \ll \delta(x)$ – разбиение отрезка $[b, c]$. Образуем разбиения

$$\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1 = \overset{\circ}{\mathfrak{X}}'_{[a,c]} \cup \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]},$$

$$\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2 = \overset{\circ}{\mathfrak{X}}''_{[a,c]} \cup \overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[c,b]}\ .$$

Для этих разбиений $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1 \ll \delta(x)$ и $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2 \ll \delta(x)$ и

$$\varepsilon > |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_1, f) - S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_2, f)| = |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}'_{[a,c]}, f) - S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}''_{[a,c]}, f)|,$$

т.е. выполняется критерий Коши на $[a, c]$. Аналогично доказывается, что выполняется критерий Коши на $[c, b]$. □

11. Теорема сжатия

Приводимая ниже теорема является аналогом теоремы о сжатой переменной из теории пределов последовательностей.

Теорема 11.1. *$f(x) \in R^*(a, b)$ тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ существуют функции $h_\varepsilon(x)$, $g_\varepsilon(x) \in R^*(a, b)$ такие, что*

$$g_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq h_\varepsilon(x)$$

на $[a, b]$ и

$$\left| \int_a^b h_\varepsilon - \int_a^b g_\varepsilon \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь очевидна. Можно выбрать $g_\varepsilon(x) = h_\varepsilon(x) = f(x)$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Выберем $\varepsilon > 0$ и пусть $g_\varepsilon(x), h_\varepsilon(x)$ – соответствующие функции. Так как $g_\varepsilon(x) \le f(x) \le h_\varepsilon(x)$, то $\forall\ \mathring{\mathfrak{X}}$ на $[a,b]$ выполняется неравенство

$$S(\mathring{\mathfrak{X}}, g_\varepsilon) \le S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) \le S(\mathring{\mathfrak{X}}, h_\varepsilon). \tag{11.1}$$

Так как $h_\varepsilon \in R^*(a,b)$, то для выбранного $\varepsilon > 0\ \exists \delta_1(x) > 0$ на $[a,b]$, что $\forall\ \mathring{\mathfrak{X}} \ll \delta_1(x)$

$$\left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, h_\varepsilon) - \int_a^b h_\varepsilon(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда с учетом (11.1)

$$\int\limits_a^b h_\varepsilon(x)\,dx > S(\mathring{\mathfrak{X}}, h_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} > S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично, $\exists \delta_2(x) > 0$ на $[a,b]$, что $\forall\ \mathring{\mathfrak{X}} \ll \delta_2(x)$

$$\left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, g_\varepsilon) - \int\limits_a^b g_\varepsilon(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и с учетом (11.1)

$$\int\limits_a^b g_\varepsilon(x)\,dx < S(\mathring{\mathfrak{X}}, g_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \le S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь $\delta(x) = \min(\delta_1(x), \delta_2(x))$ и $\mathring{\mathfrak{X}}' \ll \delta(x)$ и $\mathring{\mathfrak{X}}'' \ll \delta(x)$. Тогда

$$\int\limits_a^b g_\varepsilon(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < S(\mathring{\mathfrak{X}}', f) < \int\limits_a^b h_\varepsilon(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$\int\limits_a^b g_\varepsilon(x)\,dx - \frac{\varepsilon}{2} < S(\mathring{\mathfrak{X}}'', f) < \int\limits_a^b h_\varepsilon(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Вычитая почленно эти неравенства, имеем двойное неравенство

$$\int\limits_a^b g_\varepsilon(x)\,dx - \int\limits_a^b h_\varepsilon(x)\,dx - \varepsilon < S(\mathring{\mathfrak{X}}', f) - S(\mathring{\mathfrak{X}}'', f) < \int\limits_a^b h_\varepsilon(x)\,dx - \int\limits_a^b g_\varepsilon(x)\,dx + \varepsilon,$$

которое эквивалентно одному неравенству

$$|S(\mathring{\mathfrak{X}}', f) - S(\mathring{\mathfrak{X}}'', f)| < \int\limits_a^b (h_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(x))\,dx + \varepsilon < 2\varepsilon,$$

т.е. выполняется критерий Коши и, следовательно, $f \in R^*(a,b)$. $\square$

12. Ступенчатые функции, их интегрируемость

Определение 12.1. *Функция $h(x)$ называется ступенчатой на $[a,b]$, если существует разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ такое, что при $x \in (x_{k-1}, x_k)$*

$$h(x) = c_k = const.$$

Лемма 12.1. *Если $f(x) = c = const$ на (a,b), то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)\cdot c$.*

Доказательство. Для $\varepsilon > 0$ определим масштабирующую функцию равенством

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{d}, & x = a, \\ \min(x-a, b-x), & a < x < b, \\ \frac{\varepsilon}{d}, & x = b \end{cases}$$

где $d = 1 + |2c| + |f(a)| + |f(b)|$ и пусть $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta(x)$. Тогда $\xi_1 = a,\ \xi_n = b$,

$$S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) = f(a)(x_1 - a) + \sum_{k=2}^{n-1} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + f(b)(b - x_{n-1}) =$$

$$= f(a)(x_1 - a) + c(x_{n-1} - x_1) + f(b)(b - x_{n-1}).$$

и с учетом определения функции $\delta(x)$ имеем

$$|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) - (b-a)c| = |f(a)(x_1 - a) - c(x_1 - a) + f(b)(b - x_{n-1}) - c(b - x_{n-1})| =$$

$$= |(f(a) - c)(x_1 - a) + (f(b) - c)(b - x_{n-1})| < \frac{\varepsilon}{d}(|2c| + |f(a)| + |f(b)|) < \varepsilon. \ \square$$

Замечание. Доказанная лемма означает, что если функция постоянна внутри отрезка интегрирования, то ее значения в граничных точках не влияют на величину интеграла.

Теорема 12.2. *Ступенчатая функция $h(x)$ интегрируема и*

$$\int\limits_a^b h(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Доказательство. По лемме 12.1 функции $h(x) = c_k$ на (x_{k-1}, x_k) интегрируемы на $[x_{k-1}, x_k]$ и $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(x)\,dx = c_k(x_k - x_{k-1})$. Тогда по теореме 10.1 $h(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b h(x)\,dx = \sum \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} h(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$. $\square$

13. Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 13.1. *Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция (R^*)-интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Так как f непрерывна на $[a, b]$, то f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Следовательно,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x', x'',\ |x' - x''| < \delta \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Выберем разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

так, чтобы $\max\limits_k |x_k - x_{k-1}| < \delta$. Пусть $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$. Очевидно, что $M_k - m_k \le \varepsilon < 2\varepsilon$. Определим функции $g(x)$ и $h(x)$ на каждом полуинтервале $[x_{k-1}, x_k)$ равенствами $h(x) = M_k$, $g(x) = m_k$ и пусть $g(x) = h(x) = f(x)$ при $x = b$. Очевидно, что $g(x) \le f(x) \le h(x)$, $0 < h(x) - g(x) < 2\varepsilon$. Но $g(x)$, $h(x) \in R^*(a, b)$, так как они ступенчатые функции. Кроме этого

$$\int_a^b (h(x) - g(x)) \le 2\varepsilon(b - a).$$

Следовательно, по теореме сжатия $f(x) \in R^*(a, b)$. □

Следствие (теорема о среднем). *Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f = f(\xi)(b - a).$$

Доказательство. Так как f непрерывна на $[a, b]$, то

$$\inf f(x) = m \le f(x) \le M = \sup f(x),$$

и по свойствам интеграла

$$m(b - a) \le \int_a^b f \le M(b - a).$$

Но функция $(b - a)f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и поэтому принимает все свои промежуточные значения между $m(b - a)$ и $M(b - a)$, в том числе и значение $\int_a^b f$. Поэтому существует точка $\xi \in [a, b]$, в которой $f(\xi)(b - a) = \int_a^b f$. □

Однако можно утверждать, что непрерывная функция интегрируема и по Риману. Доказательство этого использует критерий Коши (R)-интегрируемости который доказывается точно также как критерий Коши (R^*)-интегрируемости.

Лемма 13.2 (критерий Коши (R)-интегрируемости).

$$f \in R[a, b] \ \Leftrightarrow\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\ \mathring{\chi}_1, \mathring{\chi}_2 \ll \delta \quad |S(f, \mathring{\chi}_1) - S(f, \mathring{\chi}_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 13.3. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на $[a, b]$.*

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то значит $f(x)$ равномерно непрерывна. Поэтому,

$$\forall\,\varepsilon>0\ \ \exists\,\delta>0\ \ \forall\,x',x''\in[a,b],\quad |x'-x''|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Выберем два разбиения $\overset{\circ}{\chi}_1\ll\delta,\overset{\circ}{\chi}_2\ll\delta$, и пусть

$$\overset{\circ}{\chi}_1=([x'_{i-1},x'_i],\xi'_i)_{i=1}^{n_1},\quad \overset{\circ}{\chi}_2=([x''_{j-1},x''_j],\xi''_j)_{j=1}^{n_2}.$$

Образуем новое разбиение $\chi_1=\chi_1\cup\chi_2$, т.е. в χ входят точки x'_i и x''_j. Ясно, что χ более мелкое разбиение, чем χ_1 и χ_2. Пусть $\overset{\circ}{\chi}=([x_{k-1},x_k],\xi_k)_{k=1}^{n}$. Тогда

$$S(f,\overset{\circ}{\chi})-S(f,\overset{\circ}{\chi}_1)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-\sum_{i=1}^{n_1}f(\xi'_i)\Delta x'_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{k}f(\xi_k)\Delta x_k-\sum_{i=1}^{n_1}f(\xi'_i)\Delta x'_i,$$

причем в сумме $\sum_k f(\xi_k)\Delta x_k$ суммирование происходит по тем k, для которых $[x_{k-1},x_k]\subset[x'_{i-1},x'_i]$. Очевидно, что

$$\Delta x'_i\inf_{[x'_{i-1},x'_i]}f(x)\le\sum_k f(\xi_k)\Delta x_k\le\Delta x'_i\sup_{[x'_{i-1},x'_i]}f(x)$$

и так как функция $f(x)\cdot\Delta x'_i$ непрерывна на $[x'_{i-1},x'_i]$, то существует точка $\eta_i\in[x'_{i-1},x'_i]$ такая, что

$$\sum_{k=1}f(\xi_k)\Delta x_k=f(\eta_i)\Delta x'_i.$$

Поэтому

$$|S(f,\overset{\circ}{\chi})-S(f,\overset{\circ}{\chi}_1)|=\left|\sum_{i=1}^{n_1}f(\eta_i)\Delta x'_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi'_i)\Delta x'_i\right|\le$$

$$\sum_{i=1}^{n_1}|f(\eta_i)-f(\xi'_i)|\Delta x'_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Аналогично,

$$|S(f,\overset{\circ}{\chi})-S(f,\overset{\circ}{\chi}_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда окончательно находим

$$|S(f,\overset{\circ}{\chi}_1)-S(f,\overset{\circ}{\chi}_2)|\le|S(f,\overset{\circ}{\chi}_1)-S(f,\overset{\circ}{\chi})|+|S(f,\overset{\circ}{\chi})-S(f,\overset{\circ}{\chi}_2)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т.е. выполнен критерий Коши (R)-интегрируемости. □

Как следствие отсюда получаем формулу Ньютона-Лейбница для интеграла Римана.

Теорема 13.4. *Если $F'(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то*

$$(R)\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a).$$

14. Интегрируемость монотонной функции

Теорема 14.1. *Монотонная на отрезке $[a,b]$ функция (R^*)-интегрируема на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть, для определенности, $f(x)$ возрастает и пусть $m = f(a)$, $M = f(b)$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$, натуральное $n > \frac{(M-m)(b-a)}{\varepsilon}$ и рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[a,b]$ точками

$$x_k = a + k\frac{(b-a)}{n} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Определим функции $g(x)$ и $h(x)$ на каждом полуинтервале $[x_{k-1}, x_k)$ равенствами $h(x) = f(x_{k-1})$, $g(x) = f(x_k)$ и $g(x) = h(x) = f(x)$ при $x = b$. Очевидно, что $h(x) \le f(x) \le g(x)$ и $g(x),\ h(x) \in R^*(a,b)$. Кроме этого,

$$\int_a^b (g-h) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (g-h) = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x_k) - f(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon.$$

Следовательно, по теореме сжатия $f(x) \in R^*(a,b)$. □

15. Первая теорема о среднем

Теорема 15.1 (1-я теорема о среднем). *Пусть*
1) f непрерывна на $[a,b]$;
2) $g \in R^*(a,b)$;
3) g не меняет знак на $[a,b]$.
Тогда
1) $fg \in R^*(a,b)$
2) $\exists \xi \in [a,b],\ \int\limits_a^b fg = f(\xi)\int\limits_a^b g$.

Доказательство. 1) Покажем, что $fg \in R^*(a,b)$. Для этого проверим выполнение условий теоремы сжатия. Пусть для определенности $g(x) \ge 0$ и пусть $\varepsilon > 0$ произвольное число. Так как f непрерывна на $[a,b]$, то она равномерно непрерывна на $[a,b]$ и значит можно найти ступенчатые функции h_1 и h_2 такие, что

$$\forall\, x \in [a,b] \ \ h_1(x) \le f(x) \le h_2(x),\ \ 0 \le h_2(x) - h_1(x) \le \frac{\varepsilon}{1 + \int_a^b g}. \tag{15.1}$$

Так как $g(x) \ge 0$, то из (15.1) следует

$$h_1(x)g(x) \le f(x)g(x) \le h_2(x)g(x) \tag{15.2}$$

Но $g \in R^*(a,b)$. Поэтому функция $gh_i \quad (i = 1,2) \quad (R^*)$ – интегрируема на каждом интервале, где h_i принимает постоянное значение, значит, $gh_i \in R^*(a,b)$. Тогда из (15.1) следует

$$\left|\int\limits_a^b h_2 g - \int\limits_a^b h_1 g\right| \le \int\limits_a^b (h_2 - h_1) g \le \frac{\varepsilon}{1 + \int\limits_a^b g} \int\limits_a^b g < \varepsilon.$$

Последнее неравенство, вместе с (15.2), и дает R^* – интегрируемость функции fg.
2) Так как f непрерывна на $[a,b]$, то $\forall\, x \in [a,b]$ $\; m \le f(x) \le M$, где

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Умножая неравенство $m \le f(x) \le M$ почленно на $g(x)$ и интегрируя его, имеем

$$\int\limits_a^b mg \le \int\limits_a^b f(x)g(x) \le \int\limits_a^b Mg.$$

Но функция

$$\Theta(x) = f(x) \int\limits_a^b g$$

непрерывна на $[a,b]$, причем $M \int\limits_a^b g$ ее наибольшее значение, а $m \int\limits_a^b g$ – наименьшее. Поэтому существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b fg = f(\xi) \int\limits_a^b g. \; \square$$

16. Вторая теорема о среднем

Лемма 16.1 (облегченный вариант второй теоремы о среднем). *Пусть*
1) f *непрерывна на* $[a,b]$*;*
2) $g(x) \ge 0$*,* $g(x)$ *возрастает и дифференцируема на* $[a,b]$.
Тогда
1) $fg \in R^*(a,b)$*;*
2) существует $\xi \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int\limits_a^b fg = g(b) \int\limits_\xi^b f.$$

Доказательство. 1) В первой теореме о среднем было доказано, что $fg \in R^*(a,b)$.
2) Определим функцию $H(x) = \int\limits_x^b f$. Так как f непрерывна, то $H(x)$ дифференцируема на $[a,b]$ и

$$H'(x) = -f(x).$$

Покажем это. Пусть $x \in [a,b)$ и $\Delta x > 0$. По теореме о среднем $\frac{H(x+\Delta x)-H(x)}{\Delta x} = -\frac{1}{\Delta x}\int\limits_x^{x+\Delta x} f = -f(\xi)$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем $H'(x+0) = -f(x)$. Аналогично получаем, что при $x \in (a,b]$ $H'(x-0) = -f(x)$. Так как $H(x)$ дифференцируема, а значит и непрерывна на $[a,b]$, то существуют

$$m = \inf_{x\in[a,b]} H(x), \quad M = \sup_{x\in[a,b]} H(x).$$

Ясно, что $\forall\, x \in [a,b]$

$$m \le H(x) \le M \tag{16.1}$$

Так как $g(x)$ и $H(x)$ дифференцируемы на $[a,b]$, то по формуле интегрирования по частям

$$\int\limits_a^b g(x)H'(x)\,dx = g(x)H(x)|_a^b - \int\limits_a^b H(x)g'(x)\,dx. \tag{16.2}$$

Так как $H'(x) = -f(x)$ и $H(b) = 0$, то равенство (16.2) принимает вид

$$\int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx = g(a)H(a) + \int\limits_a^b H(x)g'(x)\,dx. \tag{16.3}$$

По условию $g'(x) \ge 0$. Поэтому из (16.1) следует неравенство

$$mg'(x) \le H(x)g'(x) \le Mg'(x). \tag{16.4}$$

По первой теореме о среднем $H(x)g'(x) \in R^*[a,b]$. Интегрируя неравенство (16.4) почленно, получаем

$$\int\limits_a^b H(x)g'(x)\,dx \le M\int\limits_a^b g'(x)\,dx = M(g(b)-g(a)).$$

$$\int\limits_a^b H(x)g'(x)\,dx \ge m\int\limits_a^b g'(x)\,dx = m(g(b)-g(a)).$$

С учетом этих неравенств из (16.3) вытекает неравенство

$$mg(b) \le \int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx \le Mg(b).$$

Но функция

$$A(x) = H(x)g(b) = g(b)\int\limits_x^b f(t)dt$$

непрерывна на $[a,b]$ и $\sup A(x) = Mg(b)$, $\inf A(x) = mg(b)$. Поэтому существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$H(\xi)g(b) = A(\xi) = \int\limits_a^b g(x)f(x)\,dx.$$

Заменяя $H(\xi)$ на $\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx$ получаем утверждение леммы. □

Теорема 16.2 (вторая теорема о среднем). *Пусть*
1) $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$;
2) $g(x)$ монотонная, дифференцируемая на $[a,b]$ функция.
Тогда
1) $fg \in R^*(a,b)$;
2) существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть для определенности $g(x)$ возрастает на $[a,b]$. Тогда $g(x) - g(a) \geq 0$ на $[a,b]$ и по лемме функция $(g(x)-g(a))f(x) \in R^*(a,b)$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)(g(x)-g(a))\,dx = (g(b)-g(a))\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx. \qquad (16.5)$$

Так как $f \in R^*(a,b)$, то $gf \in R^*(a,b)$ и из равенства (16.5) получаем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a)\int\limits_a^b f(x)\,dx - g(a)\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx + g(b)\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx =$$

$$= g(a)\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\int\limits_{\xi}^{b} f(x)\,dx$$

и теорема доказана. □

17. Геометрический смысл интеграла Хенстока

Определение 17.1. *Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$. Множество*

$$B(f,[a,b]) = \{(x,y):\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

называется подграфиком функции f на $[a,b]$.

Определение 17.2. *Пусть $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – разбиение отрезка $[a,b]$. Обозначим*

$$M_k(f) = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x),\ m_k(f) = \inf_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

и пусть
$h'_n(x) = m_k(f),\ x \in (x_{k-1},x_k)$;
$h''_n(x) = M_k(f),\ x \in (x_{k-1},x_k)$.

В граничных точках положим $h'_n(x_k) = h''_n(x_k) = f(x_k)$. Тогда $h'_n(x)$ и $h''_n(x)$ ступенчатые функции. Обозначим

$$\underline{S}_n(f,\mathfrak{X}) = \int\limits_a^b h'_n, \quad \overline{S}_n(f,\mathfrak{X}) = \int\limits_a^b h''_n.$$

Очевидно, что $\underline{S}_n(f,\mathfrak{X}) \le \overline{S}_n(f,\mathfrak{X})$. Число

$$\underline{S}(f,\mathfrak{X}) \stackrel{df}{=} \sup_{\mathfrak{X}} \underline{S}_n(f,\mathfrak{X})$$

называется нижней мерой подграфика. Число

$$\overline{S}(f,\mathfrak{X}) \stackrel{df}{=} \inf_{\mathfrak{X}} \overline{S}_n(f,\mathfrak{X})$$

называется верхней мерой подграфика. Если верхняя и нижняя меры подграфика равны, то подграфик $B(f,[a,b])$ называется измеримым, а их общее значение называется мерой или площадью подграфика и обозначается $|B(f,[a,b])|$.

Теорема 17.1. *Если f непрерывна на $[a,b]$, $f(x) \ge 0$, то подграфик $B(f,[a,b])$ измерим и его площадь вычисляется по формуле*

$$|B(f,[a,b])| = \int\limits_a^b f.$$

Доказательство. Пусть f непрерывна, тогда f интегрируема, следовательно,

$$\int\limits_a^b h'_n \le \int\limits_a^b f \le \int\limits_a^b h''_n.$$

Так как f непрерывна, то как было доказано в теореме 13.1, $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \mathfrak{X}$, такое, что

$$\int\limits_a^b h''_n - \int\limits_a^b h'_n < \varepsilon.$$

Это означает, что $\inf\limits_{\mathfrak{X}} \int\limits_a^b h''_n = \int\limits_a^b f$ и $\sup\limits_{\mathfrak{X}} \int\limits_a^b h'_n = \int\limits_a^b f$. $\square$

18. О связи между интегралом Римана и обобщенным интегралом Римана

1) Так как интеграл Римана получается, если в определении интеграла масштабирующая функция $\delta(x) \equiv \delta > 0$, то всякая функция интегрируемая по Риману всегда интегрируема в обобщенном Римановском смысле и $(R)\int\limits_a^b f = (R^*)\int\limits_a^b f$.

2) Обратное неверно. Существуют функции, интегрируемые в смысле (R^*), но не интегрируемы по Риману. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & x \in (0,1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(R^*) – интегрируема на $[0,1]$ и $(R^*)\int\limits_0^1 f(x)\,dx = (R^*)\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2x^{\frac{1}{2}}\,|_0^1 = 2(1-0) = 2$, однако, f не (R) – интегрируема, так как неограничена на $[0,1]$.

19. Общая схема применения определенного интеграла

Пусть требуется вычислить некоторую величину V. Общую схему ее вычисления с помощью определенного интеграла можно записать в виде:
1 шаг. Разбиваем V на конечное число элементарных частей V_i, т.е. представляем

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i \tag{19.1}$$

2 шаг. Записываем (если это возможно) V_i в виде

$$V_i = f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{19.2}$$

где f – непрерывная на $[a,b]$ функция, $\mathring{\mathfrak{X}} = ([x_{i-1}, x_i], \xi_i)_{i=1}^n$ – отмеченное разбиение отрезка $[a,b]$
3 шаг. С учетом (19.2) переписываем (19.1) в виде

$$V = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{19.3}$$

и в равенстве (19.3) переходим к пределу при $d = \max|\Delta x_i| \to 0$.

Так как f непрерывна на $[a,b]$, то

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = (R)\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

и так как левая часть в (19.3) постоянна, то

$$V = (R)\int\limits_a^b f(x)\,dx \tag{19.4}$$

Однако не всегда возможно записать равенство (19.3). Часто удается получить лишь равенство

$$V = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i + \varepsilon_n \tag{19.5}$$

в котором $\varepsilon_n \to 0$ при $d \to 0$. Но и в этом случае после предельного перехода получаем равенство 19.4.

В качестве примера применения этой схемы рассмотрим задачу вычисления давления на пластину, погруженную вертикально в жидкость.

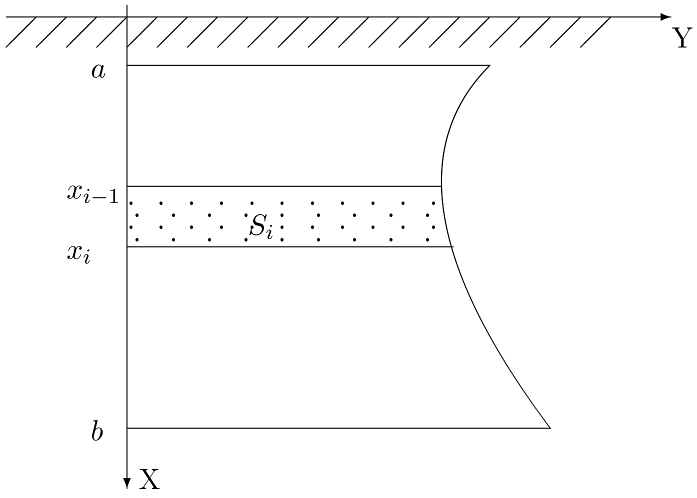

Рис. 19.1

Пусть тонкая пластина имеет вид криволинейной трапеции и погружена в жидкость так, как показано на рисунке 19.1. Пусть $y = f(x)$ есть уравнение правой границы пластины и f непрерывна на $[a, b]$. Будем считать, что плотность жидкости постоянна и равна ρ, верхний край пластины находится на глубине a, нижний — на глубине b. Ось OY располагаем горизонтально на уровне границы жидкости, ось OX — вертикально и направленной вниз. Разобьем отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

на элементарные части и обозначим через S_i часть пластины, заключенную между прямыми $x = x_{i-1}$ и $x = x_i$. Пусть P_i – давление жидкости на S_i. Если P – давление на всю пластину, то

$$P = \sum_{i=1}^{n} P_i.$$

Давление P_i на пластину S_i равно весу столба жидкости с основанием S_i и высотой h т.е. $P_i = \rho h|S_i|$ в случае, когда пластина расположена горизонтально. В нашем случае пластина расположена вертикально и значит давление удовлетворяет неравенству

$$\rho|S_i|x_{i-1} \le P_i \le \rho|S_i|x_i.$$

Поэтому

$$P_i = \rho|S_i|(x_i + \gamma_i),$$

где $|\gamma_i| \le \Delta x_i$. Очевидно также, что

$$\Delta x_i \cdot \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) \le |S_i| \le \cdot\Delta x_i \cdot \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

и так как $f(x)$ непрерывна, то существует $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ такая, что

$$|S_i| = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Таким образом
$$P = \rho \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \cdot (x_i + \gamma_i) =$$
$$= \rho \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \cdot \xi_i + \rho \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \cdot (x_i - \xi_i + \gamma_i).$$
Обозначим
$$\rho \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \cdot (x_i - \xi_i + \gamma_i) = \varepsilon_n.$$
Так как $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то $|x_i - \xi_i + \gamma_i| \le 2\Delta x_i \le 2d$. Поэтому
$$|\varepsilon_n| \le \rho 2d \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \to 0$$
при $d = \max \Delta x_i \to 0$. Мы видим, что P представлено в виде
$$P = \rho \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\xi_i \Delta x_i, +\varepsilon_n$$
где $|\varepsilon_n| \to 0$ при $d = \max \Delta x_i \to 0$ и согласно общей схеме применения итеграла
$$P = \rho \int\limits_a^b f(x)x\,dx.$$

Задачи и упражнения к главе 1.

1) Доказать, что если в определении (R^*) интеграла предполагать, что функция $\delta(x) \ge C_0 > 0$ на $[a,b]$, то получится интеграл Римана.

2) Доказать, что если в определении (R^*) интеграла предполагать, что масштабирующая функция $\delta(x)$ непрерывна, то получится интеграл Римана.

3) Доказать, что если $\alpha + 1 > 0$, то
$$(R^*) \int_0^1 x^\alpha \,dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

4) Доказать, что при $-1 < \alpha < 0$ интеграл
$$(R) \int_0^1 x^\alpha \,dx$$
не существует.

5) Является ли функция $F(x) = |x|$ первообразной для функции $f(x) = \operatorname{sign}\, x$ на отрезке $[-1,1]$?

6) Доказать лемму 13.2 (критерий Коши (R) интегрируемости).

7) Сформулируйте и докажите теорему сжатия для интеграла Римана.

8) Пусть $a < c < b$. Докажите, что если $f \in R(a,c)$ и $f \in R(c,b)$, то $f \in R(a,b)$ и
$$(R) \int_a^b f = (R) \int_a^c f + (R) \int_c^b f$$

.

9) Пусть $a < c < b$. Докажите, что если $f \in R(a,b)$ то $f \in R(a,c)$, $f \in R(c,b)$, и

$$(R)\int_a^b f = (R)\int_a^c f + (R)\int_c^b f$$

.

10) Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$ и $f(x) = \lambda$ на интервале (a,b). Докажите, что $f \in R(a,b)$ и $(R)\int_a^b f = \lambda(b-a)$.
11) Докажите, что ступенчатая функция интегрируема в смысле Римана.
12) Докажите, что непрерывная функция интегрируема в смысле Римана.
13) Докажите, что монотонная функция интегрируема в смысле Римана.
14) Пусть функция $f \in R^*(a,b)$. Докажите, что если изменить значение функции в одной точке отрезка $[a,b]$, то получится снова (R^*)-интегрируемая функция.
15) Пусть функция $f \in R^*(a,b)$. Докажите, что если изменить значение функции в граничных точках отрезка $[a,b]$, то получится снова (R^*)-интегрируемая функция.
16) Резервуар, имеющий форму цилиндра высотой H и радиуса R, и стоящий вертикально, полностью наполнен водой. Найти работу, необходимую для того, чтобы выкачать всю воду.
17) Пусть резервуар из задачи 9 лежит на боку. Найти работу, необходимую для того, чтобы выкачать всю воду.

Глава 2

Числовые ряды

1. Числовой ряд, основные понятия, необходимое условие сходимости

Определение 1.1. *Пусть* $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ *– числовая последовательность. Выражение вида*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1.1}$$

называется числовым рядом, числа a_n *– членами ряда.*

Определение 1.2. *Суммы*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называются частичными суммами ряда (1.1). Ряд (1.1) называется сходящимся, если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S \neq \infty$. *Само число* S *называется суммой ряда и обозначается символом* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Замечание 1.1 Понятие числового ряда возникло из желания сложить бесконечное множество чисел.

Теорема 1.1 (Необходимое условие сходимости). *Если числовой ряд (1.1) сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k - \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k = S_n - S_{n-1}$. Так как ряд сходится, то $\lim S_n = S$ и $\lim S_{n-1} = S \Rightarrow \exists \lim a_n = \lim S_n - \lim S_{n-1} = S - S = 0$. $\square$

Следствие. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд расходится.*

Пример. 1) Ряд $\sum_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 \neq 0$.

2)Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует.

Замечание. Обратное утверждение неверно, т.е. из условия $\lim a_n = 0$ не следует сходимость ряда $\sum a_n$. Для примера рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Ясно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Найдем частичные суммы

$$S_{2^n}=\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}=1+\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l}\frac{1}{k}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l}\frac{1}{k}\geq\sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l}\frac{1}{2^l}=\frac{1}{2^l}\cdot 2^{l-1}=\frac{1}{2}\Rightarrow S_{2^n}\geq 1+\frac{1}{2}n\to+\infty.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует, значит, ряд расходится.

2. Критерий Коши сходимости числового ряда

Теорема 2.1. *Числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится тогда и только тогда, когда*

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,n_0,\;\forall\,n\geq n_0, p\geq 1\;\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon.$$

Доказательство. Обозначим через $S_n=\sum\limits_{n=1}^{n}a_k$ – частичные суммы, тогда ряд $\sum a_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность (S_n) сходится. Значит, по критерию Коши

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,n_0\;\forall\,m,n\geq n_0\;|S_m-S_n|<\varepsilon.$$

Пусть для определенности $m>n$ т.е. $m=n+p$ $(p\geq 1)$, тогда

$$|S_m-S_n|=\left|\sum_{k=1}^{n+p}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right|<\varepsilon.\;\square$$

3. Отбрасывание и добавление конечного числа членов ряда

Теорема 3.1. *Отбрасывание и добавление конечного числа членов ряда не влияет на сходимость.*

Доказательство. Пусть

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n_0-1}a_k+\sum_{k=n_0}^{n}a_k,$$

где n_0 – фиксированное. Тогда $\lim\sum\limits_{n=1}^{n}a_k$ существует тогда и только тогда, тогда $\lim\sum\limits_{k=n_0}^{n}a_k$ существует. $\square$

Определение 3.1. *Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то сумма*

$$R_n=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k$$

называется остатком ряда.

4. Числовые ряды с неотрицательными членами. Критерий сходимости

Будем рассматривать ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, в которых $a_n \geq 0$. Такие ряды называются рядами с неотрицательными членами.

Теорема 4.1. *Числовой ряд с неотрицательными членами сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частных сумм ограничена.*

Доказательство. Пусть $a_n \geq 0$. Тогда

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n,$$

т.е. последовательность (S_n) возрастающая и $S_n \geq 0$. Но такая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена. □

5. Геометрическая прогрессия

Теорема 5.1. *1) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$.*
2) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ расходится при $|q| \geq 1$.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k$. Найдем явное выражение для S_n

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} q^k = 1 + q + \ldots + q^n + q^{n+1} = S_n + q^{n+1}.$$

С другой стороны

$$1 + S_n \cdot q = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n + q^{n+1} = S_{n+1} \Rightarrow S_n + q^{n+1} = 1 + S_n q \Rightarrow S_n(q-1) = q^{n+1} - 1 \Rightarrow$$

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Отсюда следует, что

1)Если $|q| < 1 \Rightarrow \lim |q|^n = 0 \Rightarrow \lim q^n = 0 \Rightarrow \exists \lim S_n = \frac{1}{1-q}$, т.е. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2) Если $|q| \geq 1$, то $\lim q^n \neq 0$, значит, ряд расходится. □

6. Признак сравнения в допредельной форме

Теорема 6.1. *Пусть даны ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ с неотрицательными членами.*
1) Если $\exists \lambda > 0$ такое, что $a_n \leq \lambda \cdot b_n$ и $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится.
2) Если $\exists \lambda > 0$ такое, что $a_n \geq \frac{1}{\lambda} \cdot b_n$ и $\sum b_n$ расходится, то $\sum a_n$ расходится.

Доказательство. 1) Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по критерию Коши

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,n_0,\;\forall\,n\geq n_0,\;\forall\,p\geq 1\;\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k<\frac{\varepsilon}{\lambda}\Rightarrow\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\leq\lambda\sum b_k<\lambda\cdot\frac{\varepsilon}{\lambda}=\varepsilon,$$

т.е. выполнен критерий Коши.
2) Пусть $\sum a_n$ сходится. Но $b_n\leq\lambda a_n$, тогда $\sum b_n$ сходится, что противоречит условию. □

7. Признак сравнения в предельной форме

Теорема 7.1. *Пусть даны ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$, $a_n>0, b_n>0$ и существует $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda>0$. Тогда ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda>0$, то для $\varepsilon=\frac{\lambda}{2}$

$$\exists\,n_0,\;\forall\,n\geq n_0\;\left|\frac{a_n}{b_n}-\lambda\right|<\frac{\lambda}{2}\Leftrightarrow\lambda-\frac{\lambda}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\lambda+\frac{\lambda}{2},$$

т.е. $\frac{\lambda}{2}b_n\leq a_n\leq\frac{3}{2}\lambda\cdot b_n$. Отсюда, по признаку сравнения в допредельной форме: если $\sum b_n$ сходится, то $\sum a_n$ сходится. Если $\sum b_n$ расходится, то $\sum a_n$ расходится. □
Пример. $\sum\frac{n+2}{n^2+1}$ расходится, т.к.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+1}:\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+1}=1\neq 0\Rightarrow$$

ряды $\sum\frac{n+2}{n^2+1}$ и $\sum\frac{1}{n}$ ведут себя одинаково, но $\sum\frac{1}{n}$ расходится, значит и $\sum\frac{n+2}{n^2+1}$ расходится.

8. Сумма рядов и произведение ряда на число

Определение 8.1. *Пусть даны ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$. Тогда*
1) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ называется суммой рядов.
2) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\lambda a_n$ называется произведением ряда на число.

Теорема 8.1. *Если ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся, то*
1) $\sum(a_n+b_n)$ сходится и $\sum(a_n+b_n)=\sum a_n+\sum b_n$.
2) $\sum\lambda a_n$ сходится и $\sum\lambda a_n=\lambda\sum a_n$.

Доказательство. Пусть $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k$, $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)$. Очевидно, что $S_n=A_n+B_n$. Тогда $\lim S_n=\lim A_n+\lim B_n=\sum a_n+\sum b_n\Rightarrow\sum(a_n+b_n)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k+\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$. □

2) доказывается аналогично.

9. Признак Коши

Теорема 9.1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*,* $a_n \geq 0$ *и пусть* $\lambda = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$*.*
1) Если $\lambda < 1$*, то ряд сходится.*
2) Если $\lambda > 1$*, то ряд расходится.*
3) Если $\lambda = 1$*, то требуются дополнительные исследования.*

Доказательство. 1) Пусть $\lambda < 1$, т.е. $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda < 1$. По определению $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{k\geq n} \sqrt[k]{a_k}\right)$. Обозначим $A_n = \sup\limits_{k\geq n} \sqrt[k]{a_k}$. Последовательность A_n убывает и $\lim A_n = \lambda$, тогда $\exists\, n_0$, $\forall\, n \geq n_0$ $\lambda \leq A_n < \frac{1+\lambda}{2}$. Но

$$\sqrt[n]{a_n} \leq \sup_{k\geq n} \sqrt[k]{a_k} = A_n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \leq A_n \leq \frac{1+\lambda}{2} = d < 1 \Rightarrow a_n \leq d^n$$

и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d^n$ сходится, откуда следует по признаку сравнения в допредельной форме, что $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ сходится, значит, ряд $\sum a_k$ сходится.
2) Пусть $\lambda > 1$. Аналогично предыдущему, $\exists\, n_0$, $\forall\, n \geq n_0$ $\frac{\lambda+1}{2} < A_n \leq \lambda$. Так как $A_n = \sup\limits_{k\geq n} \sqrt[k]{a_k}$, то $\forall\, n$, $\exists\, k_n > n$, что $\sqrt[k_n]{a_{k_n}} \geq \frac{\lambda+1}{2} \Rightarrow a_{k_n} \geq \left(\frac{\lambda+1}{2}\right)^{k_n} \to +\infty$ т.к. $\frac{\lambda+1}{2} > 1$. Значит, не выполнено необходимое условие, и ряд расходится.
3) $\sum \frac{1}{n}$ расходится и $\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится и $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = 1$. $\square$

10. Признак Даламбера

Теорема 10.1. *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*,* $a_n > 0$*, и существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$*. Тогда*
1) если $\lambda < 1$*, то ряд сходится;*
2) если $\lambda > 1$*, то ряд расходится;*
3) если $\lambda = 1$*, то требуются дополнительные исследования.*

Доказательство. 1) $\lambda > 1$. По определению предела для $\varepsilon = \frac{1-\lambda}{2}$ $\exists\, n_0$, $\forall\, n > n_0$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda\right| < \frac{1-\lambda}{2}$. Тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda < \frac{1-\lambda}{2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+\lambda}{2} = d < 1 \Rightarrow \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0}} \leq \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \cdot \frac{a_{n_0+k-1}}{a_{n_0+k-2}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} < d^k.$$

Отсюда $a_{n_0+k} < d^k a_{n_0}$, значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_0+k}$ сходится, тогда $\sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} a_n$ сходится, значит, $\sum a_n$ сходится.
2) $\lambda > 1$. По определению предела для $\varepsilon = \frac{\lambda-1}{2}$ $\exists\, n_0$, $\forall\, n \geq n_0$, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda\right| < \frac{\lambda-1}{2} \Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} - \lambda > \frac{1-\lambda}{2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{\lambda+1}{2} = d > 1 \Rightarrow a_{n_0+k} > d^k a_{n_0} \to +\infty,$$

т.е. не выполнено необходимое условие сходимости.
3) $\sum \frac{1}{n}$ расходится, $d=1$, $\sum \frac{1}{n^2}$ сходится, $d=1$. $\Box$
Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!},\ a_n = \frac{1}{n!},\ \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1},\ \lim \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1,$$

значит, ряд сходится.

11. Интегральный признак сходимости

Теорема 11.1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *– числовой ряд, такой, что*
1) $a_{n+1} \le a_n$. *2)* $a_n > 0\ \forall n$. *3)* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
Пусть существует функция $f(x)$ *на* $[1, +\infty)$ *такая, что*
1) $f(x) > 0$ *на* $[1, +\infty)$. *2)* $f(x)$ *убывающая. 3)* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$
Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится тогда и только тогда, когда существует* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx \neq +\infty$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, тогда рассмотрим

$$\int\limits_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} f(k)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k = S_{n-1}.$$

Т.к. ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то его частные суммы S_n ограничены, значит, существует $C > 0$, что $\int\limits_1^n f(x)\,dx \le C$. Но последовательность $\left(\int\limits_1^n f(x)\,dx\right)_{n=1}^{\infty}$ возрастающая, следовательно существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx$. Тогда последовательность $\left(\int\limits_1^n f(x)\,dx\right)_{n=1}^{\infty}$ возрастает и ограничена. Кроме этого,

$$\int\limits_1^n f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n-1} \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \ge \sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) = \sum_{k=2}^{n} a_k.$$

Отсюда, частные суммы ряда $\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ ограничены, $a_n \ge 0$, значит, он сходится, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. $\Box$

12. Обобщенный гармонический ряд

Определение 12.1. *Ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a} \ \ (a > 0)$$

называется обобщенным гармоническим рядом.

Замечание. Очевидно, что при $a \le 0$ обобщенный гармонический ряд расходится.

Теорема 12.1. *Если $a > 1$, то обобщенный гармонический ряд сходится.*
Если $a \le 1$, то обобщенный гармонический ряд расходится.

Доказательство. 1) $a > 1$. Воспользуемся интегральным признаком. Положим $f(x) = \frac{1}{x^a}$. Тогда $f(n) = \frac{1}{n^a}$, $f(x)$ убывает и $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$

$$\int\limits_1^n \frac{1}{x^a}\,dx = \left.\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_1^n = \frac{1}{1-a}(n^{1-a}-1) = \frac{1}{a-1}\left(1-\frac{1}{n^{a-1}}\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int\limits_1^n \frac{1}{x^a}\,dx = \frac{1}{a-1},$$

т.е. ряд сходится.
2) $a = 1$.

$$\int\limits_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln x|_1^n = (\ln n - \ln 1) = \ln n \to +\infty \Rightarrow$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_1^n \frac{1}{x}\,dx$ не существует, значит, ряд расходится.
3) $0 < a < 1$. Аналогично 1). Доказать самостоятельно. $\Box$
Пример. Исследуем на сходимость ряд

$$\sum_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^3+1}.$$

Сравним с рядом $\sum\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$ по признаку сравнения в предельной форме.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^3+1} : \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2(n+1)}{n^3+1} = \lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^3}} = 1 > 0 \Rightarrow$$

ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+1}$ ведут себя одинаково. Но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, значит, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^3+1}$ сходится.

13. Абсолютно сходящиеся ряды

Определение 13.1. *Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$.*

Теорема 13.1. *Если ряд сходится абсолютно, то он сходится.*

Доказательство. Пусть $\sum|a_n|$ сходится. Тогда выполняется критерий Коши

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\forall\,n \ge n_0,\;\forall\,p \ge 1\;\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k|\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k\right| \le \sum_{k=n+1}^{n+p}|a_k| < \varepsilon.\;\Box$$

14. Условно сходящиеся ряды. Признаки Дирихле и Лейбница

Теорема 14.1. *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *такой, что*
1) $a_n \downarrow 0$,
2) частные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k = B_n$ *равномерно ограничены, т.е.* $|B_n| \leq B\ \forall\, n$.
Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *сходится.*

Доказательство. Рассмотрим отрезок ряда $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$. Обозначим $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \Rightarrow b_k = B_k - B_{k-1}$. Тогда

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k (B_k - B_{k-1}) = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_{k-1} =$$

пусть $k - 1 = l$, тогда

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{l=n}^{n+p-1} a_{l+1} B_l = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_k B_k + (a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n) -$$

$$- \sum_{k=n+1}^{n+p-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + (a_{n+p} B_{n+p} - a_{n+1} B_n) \Rightarrow$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq B \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) + B(|a_{n+1}| + |a_{n+p}|) =$$

$$= B(a_{n+1} - a_{n+p}) + B(a_{n+1} + a_{n+p}) = 2B a_{n+1}.$$

Так как $\lim a_n = 0$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, n \geq n_0,\ |a_n| < \frac{\varepsilon}{2B} \Rightarrow \forall\, n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq 2B \cdot \frac{\varepsilon}{2B} = \varepsilon,$$

т.е. выполняется критерий Коши. □

Следствие 1. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *удовлетворяет условиям теоремы 14.1, то для остатка* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k b_k$ *справедливо неравенство*

$$|R_n| \leq 2M a_{n+1},$$

где $M = \sup\limits_{n} |\sum_{k=1}^{n} b_k|$.

Доказательство. При доказательстве теоремы 14.1 было доказано неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) + M(a_{n+1} + a_{n+p}) = 2M a_{n+1}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $p \to +\infty$ при фиксированном n получаем неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k||b_k| \le 2Ma_{n+1}. \ \square$$

Следствие 2.[Признак Лейбница] *Если $a_n \downarrow 0$ то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(-1)^k$$

сходится. При этом для остатка R_n справедливо: $R_n \le 2a_{n+1}$

Доказательство. Полагая $b_n = (-1)^k$, видим, что $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^n\right| \le 1$, следовательно, по теореме Дирихле ряд сходится, а по следствию 2 $|R_n| \le 2a_{n+1}$. $\square$

Замечание. Можно доказать, что на самом деле в ряде Лейбница

$$|R_n| \le a_{n+1}.$$

Теорема 14.2. *Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$, $a_n \downarrow 0$ сходится. Тогда для остатка R_n справедливо равенство $|R_n| \le a_{n+1}$.*

Доказательство. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ сходится по признаку Лейбница. Поэтому надо оценить только остаток $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k(-1)^k$.

Пусть для определенности $n+1$ – четное. Тогда $a_{n+1}(-1)^{n+1} > 0$. $a_{n+2}(-1)^{n+2} < 0$, но $a_{n+2} < a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1}(-1)^{n+1} + a_{n+2}(-1)^{n+2} > 0$, тогда

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(-1)^k = (a_{n+1}(-1)^{n+1} + a_{n+2}(-1)^{n+2}) + (a_{n+3}(-1)^{n+3} + a_{n+4}(-1)^{n+4}) + \ldots > 0.$$

Запишем эту сумму иначе:

$$R_n = a_{n+1}(-1)^{n+1} + (a_{n+2}(-1)^{n+2}) + (a_{n+4}(-1)^{n+4} + a_{n+5}(-1)^{n+5}) + \ldots \Rightarrow R_{n+1} < 0$$

и $R_n = a_{n+1}(-1)^{n+1} + R_{n+1} \Rightarrow R_n - R_{n+1} = (-1)^{n+1}a_{n+1} \Rightarrow |R_n| \le |R_n - R_{n+1}| = a_{n+1}$. $\square$

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится, но не сходится абсолютно.

Определение 14.1. *Ряд, который сходится, но абсолютно расходится, называют условно сходящимся рядом.*

15. Перестановки абсолютно сходящегося ряда

Теорема 15.1. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами остается сходящимся после любой перестановки, причем к той же сумме.*

Доказательство. Пусть переставленный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$ расходится к $+\infty$, т.е. $\lim\limits_{M\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{M} a_{n_k} = +\infty$. Ясно, что последовательность частичных сумм $\sum\limits_{k=1}^{M} a_{n_k}$ возрастает. Выберем произвольное $M \in \mathbb{N}$. Тогда существует $N \in \mathbb{N}$, что в сумме $\sum\limits_{k=1}^{N} a_{n_k}$ присутствуют все слагаемые из суммы $\sum\limits_{k=1}^{M} a_{n_k}$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \geq \sum\limits_{k=1}^{M} a_{n_k} \to +\infty$. Поэтому $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{N} a_k = +\infty$. Получили противоречие, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ сходится.

Покажем, что он сходится к той же сумме. Как и выше, для частичной суммы $\sum\limits_{k=1}^{M} a_{n_k}$ переставленного ряда при достаточно большом N имеем неравенство $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \geq \sum\limits_{k=1}^{M} a_{n_k}$. С другой стороны, для частичной суммы $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ найдется число $M_1 > M$ так, что $\sum\limits_{k=1}^{M_1} a_{n_k} \geq \sum\limits_{k=1}^{N} a_k$, т.е. мы имеем двойное неравенство

$$\sum_{k=1}^{M_1} a_{n_k} \geq \sum_{k=1}^{N} a_k \geq \sum_{k=1}^{M} a_{n_k}.$$

Переходя к пределу при $M \to \infty$, получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \lim \sum_{k=1}^{M_1} a_{n_k} \geq \lim \sum_{k=1}^{N} a_k \geq \lim \sum_{k=1}^{M} a_{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}.$$

Значит, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n_k}$. $\square$

Теорема 15.2. *Абсолютно сходящийся ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *остается сходящимся после любой перестановки, причем к той же сумме.*

Доказательство. Обозначим

$$a_k^+ = \frac{|a_k| + a_k}{2}, \quad a_k^- = \frac{|a_k| - a_k}{2}.$$

или, что то же самое

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k, & a_k \geq 0 \\ 0, & a_k < 0 \end{cases}$$

$$a_k^- = \begin{cases} -a_k, & a_k \leq 0 \\ 0, & a_k > 0 \end{cases}$$

Очевидно, что $a_k^+ \geq 0,\ a_k^- \geq 0$. Поэтому по теореме 15.1 ряды $\sum a_{n_k}^+$ и $\sum a_{n_k}^-$ сходятся и

$$\sum a_{n_k}^+ = \sum a_k^+, \ \sum a_{n_k}^- = \sum a_k^-.$$

Поэтому

$$\sum a_{n_k} = \sum a_{n_k}^+ - \sum a_{n_k}^- = \sum a_k^+ - \sum a_k^- = \sum a_k. \ \square$$

16. Перестановка членов условно сходящегося ряда. Расходимость к $+\infty$

Перестановку множества $\mathbb{N}$ будем обозначать через (n_k)

Теорема 16.1. *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится условно. Тогда*

1) существует перестановка (n_k) *такая, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ *расходится к* $+\infty$.

2) существует перестановка (n_k)*, такая что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ *расходится к* $-\infty$.

Доказательство. Так как $\sum a_k$ сходится условно, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, но $\sum |a_k|$ расходится. Значит, $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Отсюда $\exists\, M > 0$, что $\forall\, k\ |a_k| \le M$. Обозначим

$$a_k^+ = \frac{|a_k| + a_k}{2}, \quad a_k^- = \frac{|a_k| - a_k}{2}.$$

Покажем, что ряды $\sum a_k^+$ и $\sum a_k^-$ расходятся. Если ряд $\sum a_k^+$ сходится и ряд $\sum a_k^-$ сходится, то ряд $\sum(a_k^+ + a_k^-) = \sum |a_k|$ сходится, что неверно. Если $\sum a_k^+$ сходится и $\sum a_k^-$ расходится, то $\sum_k(a_k^+ - a_k^-) = \sum a_k$ сходится, что неверно, т.к. $\sum a_k^- = \sum a_k^+ - \sum a_k$, т.к.разность сходящихся рядов есть расходящийся ряд. Аналогично, невозможен случай $\sum a_k^+$ расходится и $\sum a_k^-$ сходится. Остается последняя возможность: $\sum a_k^+$ расходится и $\sum a_k^-$ расходится.

1) Докажем, что $\exists\, n_k$, для которой ряд $\sum a_{n_k}$ расходится к $+\infty$. Так как $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ расходится и $a_n^+ \ge 0$, но последовательность частных сумм $S_n^+ = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^+$ возрастающая последовательность, значит, неограниченная сверху, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^+ = +\infty$. Поэтому существует такая последовательность $n_k \uparrow +\infty$, что $n_1 = 1$ и

$$\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k^+ \ge 2M.$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k^+ \right) - a_j^- \right),$$

который есть переставленный исходный ряд. Покажем, что он расходится к $+\infty$. В самом деле

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\left(\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k^+ \right) - a_j^- \right) \ge \sum_{j=1}^{m} M = m \cdot M \to +\infty \ \text{ при } \ m \to \infty.$$

$$\sum_{j=1}^{m} \left(\left(\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} a_k^+ \right) - a_j^- \right) + \sum_{k=n_{m+1}}^{n_{m+1}+p} a_k^+ \ge m \cdot M \to +\infty \ \text{ при } \ m \to \infty.$$

2) Покажем, что слагаемые можно переставить так, чтобы ряд расходился к $-\infty$. Для этого рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-a_n)$. По 1) существует перестановка n_k, что $\sum_{k=1}^{\infty} -a_{n_k}$ расходился к $+\infty$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ расходится к $-\infty$. $\square$

17. Перестановка членов условно сходящегося ряда. Сходимость к любому наперед заданному числу

Теорема 17.1.[Теорема Римана] *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится условно. Тогда* $\forall\, A \in \mathbb{R}$ *существует перестановка* (n_k)*, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ *сходится к числу* A*.*

Доказательство. Можно считать, что все $a_k \neq 0$.
1) Пусть $A \geq 0$. Обозначим через α_k^+ положительные слагаемые, занумерованные в том порядке, в котором они присутствуют в исходном ряде, через α_k^- – отрицательные слагаемые, занумерованные в том порядке, в котором они присутствуют в исходном ряде. Например, если дан ряд

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\dots,$$

то

$$\alpha_1^+ = \frac{1}{3}, \alpha_2^+ = \frac{1}{5}, \alpha_3^+ = \frac{1}{7}\dots,$$

$$\alpha_1^- = -\frac{1}{2}, \alpha_2^- = -\frac{1}{4}, \alpha_3^- = -\frac{1}{6}\dots.$$

Пусть n_1 выбрано так, что $\sum\limits_{k=1}^{n_1} \alpha_k^+ > A$, это возможно. Выберем m_1 так, чтобы

$$S_{n_1+m_1} = \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k^- < A, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1-1} \alpha_k^- \geq A.$$

Выберем n_2 так, чтобы

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \alpha_k^+}_{S_{n_2+m_1}} > A, \text{ но } \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} \alpha_k^+ \leq A.$$

Выберем m_2 так, чтобы

$$S_{n_2+m_2} = \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \alpha_k^+ + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} \alpha_k^- < A,$$

но

$$S_{n_2+m_2-1} = \sum_{k=1}^{n_1} \alpha_k^+ + \sum_{k=1}^{m_1} \alpha_k^- + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \alpha_k^+ + \sum_{k=m_1+1}^{m_2-1} \alpha_k^- \geq A.$$

Продолжая этот процесс, получим ряд

$$\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\alpha_k^+ + \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}}\alpha_k^-\right)\quad (n_0=0, m_0=0), \tag{17.1}$$

который есть перестановка исходного ряда. Покажем, что ряд (17.1) сходится к A. Рассмотрим различные возможности

$$\left|\sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\alpha_k^+ + \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}}\alpha_k^-\right) - A\right| = |S_{n_{p+1}+m_{p+1}} - A| \le |\alpha_{m_{p+1}}^-| \to 0$$

$$\left|\sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\alpha_k^+ + \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}}\alpha_k^-\right) + \sum_{k=n_{p+1}+1}^{n_{p+1}+s}\alpha_k^+ - A\right| \le |\alpha_{m_{p+1}}^-| \to 0$$

$$\left|\sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\alpha_k^+ + \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}}\alpha_k^-\right) + \sum_{k=n_{p+1}+1}^{n_{p+2}}\alpha_k^+ - A\right| \le |\alpha_{n_{p+2}}^+| \to 0.$$

$$\left|\sum_{j=0}^{p}\left(\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}}\alpha_k^+ + \sum_{k=m_j+1}^{m_{j+1}}\alpha_k^-\right) + \sum_{k=n_{p+1}+1}^{n_{p+2}}\alpha_k^+ + \sum_{k=m_{p+1}+1}^{m_{p+1}+s}\alpha_k^-\right| \le |\alpha_{n_{p+2}}^+| \to 0.$$

2) Пусть $A < 0$. Тогда рассмотрим ряд $\sum -a_n$, который сходится условно и существует перестановка n_k, такая, что $\sum -a_{n_k} = -A$, следовательно, $\sum a_{n_k} = A$. $\square$

18. Приближенное вычисление суммы числового ряда

Пусть требуется вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{18.1}$$

Обычно ее вычислить невозможно, поэтому сумму вычисляют приближенно. Пусть A – точная сумма, $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ – частичная сумма, и $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – остаток ряда. Тогда справедливо равенство

$$A = A_n + R_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + R_n.$$

Общий принцип: для приближенного вычисления суммы в качестве приближенного значения выбирают частичную сумму ряда и полагают

$$A \approx A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Вопрос: насколько A_n отличается от такого значения?
Ответ:

$$A - A_n = R_n \Rightarrow |A - A_n| = |R_n|.$$

т.е. A_n отличается от A на величину $|R_n|$.
Задача. Требуется вычислить сумму ряда с точностью до $\varepsilon > 0$. Это означает, что надо подобрать частичную сумму A_n так, чтобы $|A - A_n| < \varepsilon$. Как это сделать?
Ответ: т.к. $|A - A_n| = |R_n|$, то надо найти n такое, что $|R_n| < \varepsilon$, и тогда $|A_n - A| < \varepsilon$, следовательно, A_n – приближенное значение с такой точностью.
Пример 1. Вычислить приближенную сумму ряда с точностью до $\varepsilon = 0.001$

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{1+\sqrt{k}}.$$

Ряд удовлетворяет условному признаку Лейбница, значит, $|R_n| \leq a_{n+1} = \frac{1}{1+\sqrt{n+1}}$. Выбираем n так, чтобы $\frac{1}{1+\sqrt{n+1}} < \frac{1}{1000}$. Тогда $1 + \sqrt{n+1} > 1000$. Отсюда $\sqrt{n+1} > 999$, значит, $n + 1 > 999^2$, т.е. $n > (999)^2$, т.е. $n = (999)^2 + 1$ или $n \approx (1000)^2$.
Пример 2. Вычислить с точностью до $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ приближенную сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}.$$

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots \leq a_{n+1} + \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{a_{n+1}}{2^2} + \ldots =$$
$$= a_{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = a_{n+1} \cdot 2.$$

Т.е. $|R_n| \leq a_{n+1} \cdot 2$. Из неравенства $2 \cdot \frac{n+1}{3^n+1} < \frac{1}{1000}$ находим перебором значение $n = 9$. Т.е. надо взять 9 слагаемых.

Глава 3

Функциональные последовательности и ряды

1. Функциональные последовательности. Сходимость поточечная и равномерная

Определение 1.1. *Последовательность, элементами которой являются функции, определенные на $X \subset \mathbb{R}$, называется функциональной последовательностью. Обозначается $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$, здесь $f_n(x)$ – функции, определенные на X, т.е. функциональная последовательность – это отображение $n \mapsto f_n(x)$.*

Определение 1.2. *Последовательность (f_n) называется сходящейся в точке x_0 к числу A, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = A$.*

Если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$ существует $\forall\, x_0 \in X$, то говорят, что $f_n(x)$ сходится поточечно на множестве X. Так как при каждом $x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ зависит от x, то этот предел есть функция от x. Обозначим ее $f(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ \ \forall\, x \ \ \textit{или}\ \ f_n(x) \to f(x)\, \forall\, x.$$

Определение 1.3. *Последовательность $f_n(x)$ называется сходящейся к $f(x)$ на $X \subset \mathbb{R}$ равномерно, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0,\ \forall\, n \geq n_0,\ \forall\, x \in X,\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Обозначается $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$.

Теорема 1.1. *Если $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, то $f_n(x) \to f(x)$ на X поточечно.*

Доказательство. Очевидно.
Замечание. Обратное неверно, например, $f_n(x) = x^n$, $0 \leq x \leq 1$, т.е. $X = [0,1]$. Тогда $\forall\, 0 \leq x < 1$ $\lim f_n(x) = \lim x^n = 0$, $\lim f_n(1) = \lim 1^n = 1$, т.е.

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Но $f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$ на $[0,1]$. В самом деле, пусть $x_n = \frac{1}{n^{\frac{1}{n^2}}}$, тогда

$$f_n(x_n) = \left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n^2}}}\right)^n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \Rightarrow |f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$$

значит, $\sup\limits_x |f_n(x) - f(x)| \not\to 0$, т.е. нет равномерной сходимости.

2. Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций

Теорема 2.1. *Пусть 1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X,*
2) $f_n(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in X$. Тогда $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда существует n_0, $\forall\, x$, $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Но $f_{n_0}(x)$ непрерывна в точке x_0, значит, для этого ε существует $\delta > 0$ $\forall\, x \in X$, $|x - x_0| < \delta$ следует $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда $\forall\, x$ $|x - x_0| < \delta$ имеем

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \ \square$$

Замечание. Используя теорему 2.1, можно доказать, что $x^n \not\rightrightarrows \varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

В самом деле, если $x^n \rightrightarrows \varphi(x)$, то $\varphi(x)$ непрерывна в каждой точке, где x^n непрерывна. Тогда $\varphi(x)$ непрерывна на $[0,1]$.

3. Критерий Коши равномерной сходимости

Теорема 3.1. *$f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, m, n \ge n_0,\ \forall\, x \in [a,b]\ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, m, n \ge n_0,\ \forall\, x\ \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \wedge |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\forall\, m, n \ge n_0,\ \forall\, x\ \ |f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполняется условие критерия Коши, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, m, n \ge n_0,\ \forall\, x\ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\forall\, x \in [a,b]$, числовая последовательность $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна. Тогда $\forall\, x \in [a,b]$ $\exists \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Покажем, что на самом деле сходимость равномерная. В неравенстве $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ перейдем к пределу при фиксированном x при $m \to \infty \Rightarrow |f_n - f(x)| \le \varepsilon$ $\forall\, n \ge n_0$, $\forall\, x \in X$, т.е. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. $\square$

4. Арифметические действия над сходящимися функциональными последовательностями

Теорема 4.1. *Если* $\lim f_n(x) = f(x)$ *и* $\lim g_n(x) = g(x)$, *то* $\lim(f_n(x) + g_n(x)) = f(x) + g(x)$ *и* $\lim \lambda f_n(x) = \lambda \lim f_n(x) = \lambda f(x)$. *Это верно как для поточечной, так и для равномерной сходимости.*

Доказательство. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $g_n(x) \rightrightarrows g(x)$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_1, \, \forall n \geq n_1, \, \forall x \in X \ \ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_2, \, \forall n \geq n_2, \, \forall x \in X \ \ |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

отсюда

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall n \geq n_0 = \max(n_1, n_2), \, \forall x \in X \ \ |f_n(x) + g_n(x) - (f(x) + g(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \ \square$$

5. Почленное интегрирование равномерно сходящейся функциональной последовательности

Постановка задачи: Пусть $f_n(x) \to f(x)$. Верно ли утверждение: $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx \to \int\limits_a^b f(x)\,dx$?

Теорема 5.1. *Пусть 1)* $f_n(x) \in R^*(a,b)$, *2)* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a,b]$. *Тогда*
1) $f(x) \in R^*(a,b)$.
2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, тогда $f_n(x)$ фундаментальна, значит,

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0, \, \forall m, n \geq n_0, \, \forall x [a,b] \ \ |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$$

$$-\frac{\varepsilon}{b-a} < f_n(x) - f_m(x) < \frac{\varepsilon}{b-a} \ \ \forall x.$$

Тогда

$$-\int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx < \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f_m(x)\,dx < \varepsilon \int\limits_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx \Rightarrow \left| \int\limits_a^b f_n(x)\,dx - \int\limits_a^b f_m(x)\,dx \right| < \varepsilon, \quad (5.1)$$

т.е. числовая последовательность $\int\limits_a^b f_n(x)\,dx$ фундаментальна, следовательно, она сходится, и пусть $I = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$. Переходя в (5.1) к пределу при $m \to \infty$ при фиксированном $n = n_0$ получаем неравенство

$$\left| \int\limits_a^b f_{n_0}(x)\,dx - I \right| \leq \varepsilon, \quad (5.2)$$

Покажем, что $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Выберем разбиение $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta(x)$ так, чтобы

$$\left| \int\limits_a^b f_{n_0}(x)\,dx - S(f_{n_0}, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) \right| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Тогда с учетом (5.1)-(5.3) получаем

$$|I - S(f\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}})| \leq \left| I - \int\limits_a^b f_{n_0}(x)\,dx \right| + \left| \int\limits_a^b f_{n_0}(x)\,dx - S(f_{n_0}, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) \right| + |S(f_{n_0}, \overset{\circ}{\mathfrak{X}}) - S(f\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}})| < 3\varepsilon.$$

Отсюда, $f \in R^*$ и $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. □

Следствие. $\int\limits_a^b \lim f_n(x)\,dx = \lim \int\limits_a^b f_n(x)\,dx$, т.е. знак предела можно внести под знак интеграла.

6. Почленное дифференцирование функциональных последовательностей

Теорема 6.1. *Пусть 1) $f_n(x) \to f(x)$ на $[a, b]$ поточечно.*
2) $f_n(x)$ дифференцируемы.
3) $f_n'(x) \rightrightarrows F(x)$ и $F(x)$ непрерывна.
Тогда 1) $f(x)$ дифференцируема и 2) $F(x) = f'(x)$.

Доказательство. Так как $f_n'(x) \rightrightarrows F(x)$ то по теореме 5.1 $F \in R^*(a, b)$ и

$$\int\limits_a^x f_n'(t)\,dt \to \int\limits_a^x F(t)\,dt \Rightarrow f_n(x) - f_n(a) \to \int\limits_a^x F(t)\,dt \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} (f_n(x) - f_n(x)) = \int\limits_a^x F(t)\,dt \Rightarrow f(x) - f(a) = \int\limits_a^x F(t)\,dt.$$

Покажем, что $\int\limits_a^x F(t)\,dt$ дифференцируема. В самом деле,

$$\frac{\int\limits_a^{x+\Delta x} F(t)\,dt - \int\limits_a^x F(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{\int\limits_a^{x+\Delta x} F(t)\,dt}{\Delta x} = \frac{F(\xi)\Delta x}{\Delta x} = F(\xi) \to F(x)$$

при $\Delta x \to 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\int\limits_a^x F(t)\,dt = F(x) \Rightarrow$ $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) = \frac{d}{dx}\int\limits_a^x F(t)\,dt = F(x)$. □

7. Функциональные ряды. Поточечная и равномерная сходимость, критерий Коши

Определение 7.1. *Пусть $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – функциональная последовательность, $x \in [a,b]$. Тогда выражение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \tag{7.1}$$

называется функциональным рядом. Выражение $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ называется частичной суммой.

Ряд (7.1) называется сходящимся поточечно на $[a,b]$, если последовательность $S_n(x)$ сходится на $[a,b]$ поточечно. $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ называется суммой ряда. Обозначается $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, т.е. одно и тоже обозначение используется и для ряда и для его суммы.

Ряд (7.1) называется сходящимся на $[a,b]$ равномерно, если последовательность частичных сумм $S_n(x)$ сходится на $[a,b]$ равномерно.

Теорема 7.1. *Если функциональный ряд сходится на X равномерно, то он сходится и поточечно, причем, к той же сумме. Обратное неверно.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится равномерно к сумме $f(x)$ на множестве X. Обозначим $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_n(x)$. Тогда $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на X. Но тогда $S_n(x) \to f(x)$ на множестве X поточечно. Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ сходится к $f(x)$ поточечно на X. $\square$

Покажем, что обратное неверно. Рассмотрим функции $f_n(x)$ на отрезке $[a,b]$, определенные равенством

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2 - x,\ \dots\ f_n(x) = x^n - x^{n-1},\ \dots$$

и образуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Очевидно, что

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n-1}) = x^n.$$

Но x^n сходится поточечно на $[0,1]$ и не сходится равномерно. $\square$

8. Почленное интегрирование и дифференцирование функционального ряда

Теорема 8.1. *Пусть 1) $f_n(x) \in R^*(a,b)$,*
2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится равномерно к $f(x)$, т.е. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$.

Тогда
1) $f(x) \in R^*(a,b)$
2) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_n(x)\,dx.$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $S_n(x)$. Очевидно, что $S_n(x) \in R^*(a,b)$ и $S_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Тогда по теореме 5.1 $f(x) \in R^*(a,b)$ и

$$\int\limits_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b S_n(x)\,dx = \lim \int\limits_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \lim \sum_{k=1}^{n} \int\limits_a^b f_k(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(t)\,dt. \ \square$$

Теорема 8.2. *Пусть 1)* $f_n(x)$ *дифференцируемы и* $f_n'(x)$ *непрерывны.*
2) $\sum f_n'(x)$ *сходится равномерно к F(x), т.е.* $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.
3) $\sum f_k(x)$ *сходится к* $f(x)$*, т.е.* $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$.
Тогда $f(x)$ *дифференцируема и* $f'(x) = F(x)$.

Доказательство. Пусть $S_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$. Тогда
1) $S_n(x)$ дифференцируема, $S_n'(x)$ непрерывна
2) $S_n'(x) \rightrightarrows F(x)$ на $[a,b]$
3) $S_n(x) \to F(x)$.
Тогда по теореме 5.1 $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) = F(x)$. $\square$
Замечание.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \wedge F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x). \ \square$$

9. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости

Теорема 9.1. *Пусть дан ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *такой, что*
1) $|f_k(x)| \le c \cdot a_k$
2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится.*
Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *сходится на* $[a,b]$ *абсолютно и равномерно.*

Доказательство. По критерию Коши для числового ряда

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0, \ \forall n \ge n_0 \, \forall p \ge 1 \quad \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k < \frac{\varepsilon}{c}.$$

Тогда $\forall x \in [a,b]$ $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} |f_k(x)| \le \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} c \cdot a_k < \frac{\varepsilon}{c} \cdot c < \varepsilon \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ сходится равномерно. $\square$

10. Степенной ряд. Теорема Абеля

Определение 10.1. *Ряд*
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{10.1}$$
называется степенным рядом.

Замечание. Очевидно, что степенной ряд (10.1) есть функциональный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, в котором $f_n(x) = c_n x^n$.

Основная задача: при каких x сходится ряд (10.1)и чему равна его сумма?

Теорема 10.1 (теорема Абеля). *Если ряд (10.1) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно и равномерно в отрезке $|x| \leq d$ при любом $d < |x_0|$.*

Доказательство. Пусть сходится ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$. Выберем $0 < d < |x_0|$ и пусть $|x| \leq d$. Тогда
$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{d}{x_0}\right|^n = |a_n x_0^n| \cdot \gamma^n,$$
где $\gamma = \left|\frac{d}{x_0}\right| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \gamma^n < \infty$.

По условию ряд $\sum a_n x_0^n$ сходится, тогда $\lim a_n x_0^n = 0$, значит, последовательность $a_n x_0^n$ ограничена. Отсюда $\exists\, c > 0$, что $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $|a_n x_0^n| \leq c$. Таким образом, $|a_n x^n| \leq c \cdot \gamma^n$. Тогда по признаку Вейерштрасса $\sum a_n x^n$ сходится абсолютно и равномерно в отрезке $|x| \leq d$. $\square$

Следствие 1. *Если ряд (10.1) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится поточечно в интервале $|x| < |x_0|$.*

Доказательство. Выберем x так, что $|x| < |x_0|$ и пусть $d = \frac{|x|+|x_0|}{2}$. Тогда $|x| < d < |x_0|$, значит, ряд сходится в отрезке $[-d, d]$, т.е. в точках $x \in [-d, d]$. $\square$

Следствие 2. *Если ряд (10.1) расходится в точке $x_0 \neq 0$, то он расходится $\forall\, x$, $|x| > |x_0|$.*

Доказательство. От противного. Пусть ряд сходится в точке x_1, $|x_1| > |x_0|$. По следствию 1, он сходится в интервале $(-|x_1|, |x_1|) \ni x_0$ – получили противоречие. $\square$

11. Радиус сходимости, интервал сходимости

Определение 11.1. *Число*
$$R = \sup\left\{|x_0| :\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x_0^n \text{ сходится;}\right\}$$
называется радиусом сходимости. Если $R > 0$, то интервал $(-R, R)$ называется интервалом сходимости.

Замечание. Из определения числа R и следствий 1 и 2 следует,что
1) $\forall\, x$, $|x| < R$ ряд $\sum c_n x^n$ сходится.
2) $\forall\, x$, $|x| > R$ ряд $\sum c_n x^n$ расходится.
Вопрос. Как найти число R?

Теорема 11.1. *Пусть* $L = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. *Тогда число* $R = \frac{1}{L}$ *есть радиус сходимости.*

Доказательство. Надо доказать, что 1) если $|x| < \frac{1}{L}$, то ряд $c_n x^n$ сходится.
2) если $|x| > \frac{1}{L}$, то ряд $c_n x^n$ расходится.
1) Пусть $|x| < \frac{1}{L} \Rightarrow |x| \cdot L < 1$. Рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n| \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| = |x| \cdot L < 1.$$

Значит, ряд $\sum |c_n x^n|$ сходится.
2) Пусть $|x| > \frac{1}{L} \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n x^n|} = |x| \cdot L > 1$. Тогда существует последовательность n_k, такая, что $\sqrt[n_k]{|c_{n_k} x^{n_k}|} > 1 \Rightarrow |c_{n_k} x^{n_k}| > 1 \Rightarrow c_{n_k} x^{n_k} \not\to 0$. Значит, ряд расходится. $\Box$
Замечание. В граничных точках $x = \pm R$ ряд может сходиться, а может и расходиться.

12. Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда

Теорема 12.1. *Пусть ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{12.1}$$

сходится в интервале $(-R, R)$, *и его сумма равна* $f(x)$. *Тогда 1)* $f(x)$ *дифференцируема в* $(-R, R)$, *2)* $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$, *3) радиус продифференцированного ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ *равен* R.

Доказательство. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ и найдем его радиус сходимости. Он сходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^n$, считаем

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot \sqrt[n]{n} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R}.$$

Значит, радиус сходимости его равен R, интервал сходимости есть $(-R, R)$. По теореме Абеля $\forall\, a$, $|a| < R$ ряд $\sum (c_n x^n)' = \sum c_n n x^{n-1}$ сходится равномерно на отрезке $[-a, a]$. Ряд $\sum c_n x^n = f(x)$ сходится равномерно, а, значит, и поточечно. Отсюда функция $f(x)$ дифференцируема и $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ в любом отрезке $[-a, a] \subset (-R, R)$ а значит и в самом интервале $(-R, R)$. $\Box$
Следствие. Степенной ряд (12.1), сходящийся в интервале $(-R, R)$ есть бесконечно дифференцируемая функция в интервале $(-R, R)$.

Теорема 12.2. *Степенной ряд (12.1) в интервале сходимости можно почленно интегрировать, т.е.*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \int_0^x t^n \, dt = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Доказательство. Выбираем $[-a,a] \subset (-R,R)$. По теореме Абеля ряд (12.1) сходится в $[-a,a]$ равномерно, функции $c_n x^n$ интегрируемы на $[-a,a]$, значит,

$$\int\limits_0^a \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{a^{n+1}}{n+1}. \ \square$$

13. Степенной ряд как ряд Тейлора

Теорема 13.1. *Пусть* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *в* $(-R,R)$. *Тогда* $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Доказательство. Записываем

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1}x^{n-1} + c_n x^n + \ldots$$

Полагая $x = 0$, имеем $c_0 = f(0)$. Дифференцируем

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \ldots + (n-1)c_{n-1}x^{n-2} + nc_n x^{n-1} + \ldots$$

Полагаем $x = 0 \Rightarrow f'(0) = c_1$. Дифференцируем 2-й раз

$$f''(x) = 2\cdot 1\cdot c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 3c_3 x^2 + \ldots + n(n-1)c_n x^{n-2} + (n+1)nc_{n+1}x^{n-1} + \ldots$$

Полагаем $x = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(0)}{2\cdot 1} = \frac{f''(0)}{2!}$. Дифференцируем n-й раз

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1c_n + (n+1)n\ldots 2c_{n+1}x + \ldots$$

Полагаем $x = 0 \Rightarrow c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. $\square$

14. Разложение элементарных функций в степенные ряды

Теорема 14.1. *Справедливо равенство* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, *причем ряд сходится* $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Запишем формулу Тейлора для e^x с остатком в форме Лагранжа

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(e^x)^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k + \frac{(e^x)^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},\ \xi \in [0,x]. \qquad (14.1)$$

Покажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} = 0$, $\forall\, x$. В самом деле, пусть $x > 0$, тогда $\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1} \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, значит, $\lim\limits_{n\to\infty} e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} e^{\xi} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в (14.1), получаем утверждение теоремы. $\square$

Теорема 14.2.

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ \ (-\infty < x < +\infty) \qquad (14.2)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ \ (-\infty < x < +\infty) \qquad (14.3)$$

Доказательство. По формуле Тейлора для функции $\sin x$ имеем

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{(\sin\xi)^{(2n+2)} x^{2n+2}}{(2n+2)!}$, где ξ лежит между 0 и x. Тогда $|R_n(x)| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \cdot |x|^{2n+2} \to 0$ при $n \to \infty$ при фиксированном x. Отсюда $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\lim R_n(x) = 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем равенство (14.2).

Равенство (14.3) получается из (14.2) почленным дифференцированием. □

Теорема 14.3.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1.$$

Доказательство. Если $|x| < 1$, то $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n$. Проинтегрируем почленно, получим

$$\ln(1+t)|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}. \ \square$$

Пример. Разложить в ряд функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$.
1) Найдем производную $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2) Найдем сумму ряда

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}.$$

3) Проинтегрируем

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\, dt \Rightarrow$$

$$\operatorname{arctg} x - arctg 0 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - 0 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

15. Приближенные вычисления с помощью степенных рядов

Определение 15.1. *Пусть* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится и* A *его сумма. Приближенным значением суммы ряда с точностью до* ε *называется число* A_ε *такое, что* $|A - A_\varepsilon| < \varepsilon$.

Задача. Вычислить сумму ряда с точностью до ε. Для этого 1) Ищем число n_0, такое, что $\forall\, n > n_0$, $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} |a_n| < \varepsilon$. В этом случае

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n \Rightarrow \left| A - \sum_{k=0}^{n} a_k \right| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

2)Т.о. частные суммы $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ и есть приближенное значение сумм.

Пример. Найти приближенное значение e с точностью до $\varepsilon = 0.001$.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$x = 1 \Rightarrow e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!},\ R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \cdot 2 < \varepsilon$$

т.е. $\frac{1}{(n+1)!} \cdot 2 < \frac{1}{1000} \Rightarrow (n+1)! > 2000$. $R_7 < \frac{1}{2000} \Rightarrow$

$$e \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}.$$

Глава 4

Свойства обобщенного римановского интеграла, связанные с теоремами Сакса-Хенстока и Витали

В этой главе мы рассмотрим свойства интеграла Хенстока, вытекающие из леммы Сакса-Хенстока о частичном разбиении и леммы Витали о покрытиях Витали.

1. Открытые множества на прямой

Определение 1.1. *Точка $x_0 \in E \subset \mathbb{R}$ называется внутренней точкой множества E, если существует окрестность $O_\delta(x_0)$, целиком лежащая в множестве E.*

Определение 1.2. *Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется открытым, если все его точки внутренние, т.е. $\forall x \in G\ \exists O_\delta(x) \subset G$.*

Чисто формально из этого определения следует, что пустое множество тоже открытое.

Теорема 1.1. *Объединение любого семейства открытых множеств снова открытое множество.*

Доказательство. Пусть G_α $(\alpha \in I)$ – открытые множества и $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$. Выберем точку $x_0 \in G$. Тогда $\exists \alpha_0 \in I$, что $x_0 \in G_{\alpha_0}$, и так как G_{α_0} открытое, то $\exists O_{\delta_0}(x_0) \subset G_{\alpha_0} \subset G$, т.е. x_0 – внутренняя точка G.$\square$

Теорема 1.2. *Пересечение конечного числа открытых множеств снова открытое множество.*

Доказательство. Пусть G_n $(n = 1, 2, ..., m)$ открытые множества и $G = \bigcap\limits_{n=1}^{m} G_n$. Выберем точку $x_0 \in G$. По определению пересечения $\forall n = 1, 2, ..., m,\ x_0 \in G_n$. Но G_n открытые, значит $\forall n\ \exists O_{\delta_n}(x_0) \subset G_n$. Обозначим $\delta = \min\limits_{1 \le n \le m} \delta_n$. Тогда $O_\delta(x_0) \subset G_n$ при всех $n = 1, 2, ..., m$ и, значит, $O_\delta(x_0) \subset \bigcap\limits_{n=1}^{m} G_n = G$, т.е. x_0 – внутренняя точка множества G. $\square$

Замечание. Пересечение бесконечного семейства открытых множеств может не быть открытым множеством. Например, если $G_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right)$, то множество

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}\right) = [1, 2]$$

не будет открытым.

2. Замкнутые множества на прямой

Определение 2.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества E, если в любой ее окрестности существуют точки $x \neq x_0$, принадлежащие множеству E.*

Отметим, что предельная точка множества E не обязана принадлежать множеству E. Можно дать другое, эквивалентное, определение предельной точки.

Теорема 2.1. *Точка x_0 будет предельной для множества E тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ такая, что $x_n \to x_0$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$.*

Доказательство. Через $\overset{\circ}{O}_\delta (x_0)$ будем обозначать проколотую окрестность точки x_0.
Необходимость. Пусть x_0 – предельная точка множества E. По определению предельной точки

$$\forall \overset{\circ}{O}_{\frac{1}{n}} (x_0), \ \exists x_n \in \overset{\circ}{O}_{\frac{1}{n}} (x_0), \ x_n \in E.$$

Но тогда $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \to 0$ и необходимость доказана.
Достаточность. Пусть существует последовательность $x_n \to x_0$, $x_n \in E$, $x_n \neq x_0$ и $O_\delta(x_0)$ – произвольная окрестность точки x_0. Так как $x_n \to x_0$, то можно найти такое n_0, что $|x_n - x_0| < \delta$, т.е. $x_n \in \overset{\circ}{O}_\delta (x_0)$ и $x_n \in E$. Это и означает, что x_0 – предельная точка множества E.$\square$

Определение 2.2. *Множество $G \subset \mathbb{R}$ называется замкнутым, если любая его предельная точка ему принадлежит.*

Получим простейшие свойства замкнутых множеств.

Теорема 2.2. *Пересечение любого семейства замкнутых множеств снова замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть F_α $(\alpha \in I)$ – замкнутые множества и $F = \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$. Выберем точку x_0, которая является предельной для множества F. Это означает, что $\forall O_\delta(x_0)$, $\exists x_\delta \neq x_0$, $x_\delta \in F$, $x_\delta \in O_\delta(x_0)$. Но тогда $x_\delta \in F_\alpha$ при всех α и, значит, x_0 есть предельная точка множеств F_α. Так как F_α замкнуто, то $x_0 \in F_\alpha$ при всех α, а значит, и $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$. $\square$

Теорема 2.3. *Объединение конечного семейства замкнутых множеств снова замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть F_n $(n = 1, 2, ..., m)$ замкнутые множества и $F = \bigcup\limits_{n=1}^{m} F_n$. Выберем предельную точку множества F, обозначим ее x_0. Тогда существует последовательность $x_k \to x_0,\ x_k \neq x_0$ и $x_k \in F$. Так как F есть объединение конечного числа множеств F_n, то в каком-то из этих множеств, допустим в F_{n_0}, содержится бесконечное число элементов $(x_{k_i})_{i=1}^{\infty}$ последовательности x_k. Таким образом, $x_{k_i} \to x_0,\ x_{k_i} \in F_{n_0},\ x_{k_i} \neq x_0$. Это означает, что x_0 есть предельная точка множества F_{n_0}, а так как F_{n_0} замкнуто, то $x_0 \in F_{n_0} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{m} F_n = F$. $\square$

Замечание. Объединение бесконечного семейства замкнутых множеств может не быть замкнутым. Например, если

$$F_n = \left[1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right],$$

то множество

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}\right] = (1, 3)$$

не будет замкнутым.

3. Зависимость между открытыми и замкнутыми множествами

Теорема 3.1. *1) Если $G \subset \mathbb{R}$ открыто, то $F = \mathbb{R} \setminus G$ замкнуто.*
2) Если $F \subset \mathbb{R}$ замкнуто, то $G = \mathbb{R} \setminus F$ открыто.

Доказательство. 1) Пусть G открытое множество и $F = \mathbb{R} \setminus G$. Выберем предельную точку x_0 множества F. Тогда существует последовательность $x_n \to x_0,\ x_n \neq x_0$ и $x_n \in F$. Если $x_0 \in G$, то в некоторой окрестности точки x_0 нет точек множества F. Это означает, что $x_0 \notin G$, т.е. $x_0 \in F$ и, значит, F замкнуто.
2) Пусть F замкнуто и $G = \mathbb{R} \setminus F$. Выберем точку $x_0 \in G$. Тогда $x_0 \notin F$, т.е. x_0 не предельная точка F, т.е. $\exists O_\delta(x_0)$, в которой нет точек множества F. Значит, $O_\delta(x_0) \subset G$, т.е. G открыто. $\square$

Теорема 3.2. *1) Если F замкнуто и $F \subset (a, b)$, то множество $(a, b) \setminus F$ открыто. 2) Если $G \subset [a, b]$ открыто, то множество $[a, b] \setminus G$ - замкнуто.*
3) Если F замкнуто, $F \subset [a, b]$ и $\sup F = b,\ \inf F = a$, то $[a, b] \setminus F$ открыто.

Доказательство этой теоремы почти не отличается от доказательства предыдущей. Необходимые изменения предлагается сделать читателю.

4. Структура открытого множества на прямой

Будем рассматривать непустые открытые ограниченные множества.

Определение 4.1. *Интервал (a, b) называется составляющим для множества $E \subset \mathbb{R}$, если 1) $(a, b) \subset E$, 2) $a \notin E,\ b \notin E$.*

Теорема 4.1. *Если G – открытое ограниченное множество, то любая его точка принадлежит множеству G вместе с некоторым составляющим интервалом.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in G$. Тогда существует интервал $(\alpha,\ \beta) \subset G$ содержащий точку x_0. Положим

$$a = \inf\{\alpha :\ x_0 \in (\alpha,\ \beta) \subset G\},$$

$$b = \sup\{\beta :\ x_0 \in (\alpha,\ \beta) \subset G\}.$$

Очевидно, что $(a, b) \subset G$, но $a \notin G$ и $b \notin G$.□

Теорема 4.2. *Два составляющих интервала либо совпадают, либо не пересекаются.*

Доказательство. Пусть $(a_1,\ b_1)$ и $(a_2,\ b_2)$ – два составляющих интервала множества G. Если $(a_1,\ b_1) \cap (a_2,\ b_2) = 0$, то все доказано. Пусть $(a_1,\ b_1) \cap (a_2,\ b_2) \neq 0$. Но тогда интервал

$$(\min(a_1,\ a_2),\ \max(b_1,\ b_2)) \subset G.$$

Это означает, что $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$ т.е. $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$.□

Следствие. *Каждое ограниченное открытое множество G есть объединение конечного или счетного числа дизъюнктных составляющих интервалов.*

Доказательство. По теореме 4.1 G есть объединение составляющих интервалов. Согласно теореме 4.2 G есть объединение дизъюнктных интервалов. Выбирая в каждом составляющем интервале рациональное число, получаем, что этих интервалов не более, чем счетное множество.□

5. Мера открытого множества на прямой

Всюду в дальнейшем символ $\bigsqcup$ будет обозначать объединение дизъюнктных множеств.

Определение 5.1. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Мерой или длиной конечного промежутка $]a, b[$ назовем число $|b - a|$ и будем обозначать символом $|]a, b[|$ или $\mu(]a, b[)$, т.е.*

$$|]a, b[| = \mu(]a, b[) \overset{df}{=} |b - a|.$$

Определение 5.2. *Пусть $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty}(a_n, b_n)$ – открытое ограниченное множество и (a_n, b_n) его составляющие интервалы. Число*

$$\mu G \overset{df}{=} \sum_{n=1}^{\infty} |(a_n, b_n)|$$

будем называть мерой открытого множества G.

Свойства меры.

1) $\mu G \geq 0$ – очевидно.

2) Если множества G_n открыты и $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, то $\mu G = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu G_n$.

Доказательство. Так как G_n – открытые множества, то $G_n = \bigsqcup\limits_{j=1}^{\infty} (a_n^{(j)}, b_n^{(j)})$ и $(a_n^{(j)}, b_n^{(j)})$ – составляющие интервалы для G_n. Но тогда $G = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ открытое множество и

$$G = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{\infty} \left(a_n^{(j)}, b_n^{(j)}\right).$$

Нетрудно проверить, что $\left(a_n^{(j)}, b_n^{(j)}\right)$ – составляющие интервалы для G и поэтому

$$\mu G = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left|(a_n^{(j)}, b_n^{(j)})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu G_n. \ \square$$

3) Если

$$[a, b] \subset \bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k),$$

то

$$|[a, b]| \leq \sum_{k=1}^{n} |(a_k, b_k)|.$$

Доказательство. Будем строить семейство $\mathfrak{N}$ интервалов (a_{n_k}, b_{n_k}) следующим образом.

Выберем (a_{n_1}, b_{n_1}) так, чтобы $(a_{n_1}, b_{n_1}) \ni a$. Если $(a_{n_1}, b_{n_1}) \ni b$, то в $\mathfrak{N}$ включим этот единственный интервал. Если $b \notin (a_{n_1}, b_{n_1})$, то выберем $(a_{n_2}, b_{n_2}) \ni b_{n_1}$ и включим его в $\mathfrak{N}$. Будем продолжать этот процесс, пока не получим $(a_{n_s}, b_{n_s}) \ni b$. Это обязательно произойдет на некотором шаге s, так как в покрытии $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (a_k, b_k)$ конечное число интервалов.

Но тогда $a_{n_1} < b_{n_1} < b_{n_2} < ... < b_{n_s}$ и

$$b - a < b_{n_s} - a_{n_1} = (b_{n_1} - a_{n_1}) + (b_{n_2} - b_{n_1}) + ... + (b_{n_s} - b_{n_{s-1}}) \leq$$

$$\leq (b_{n_1} - a_{n_1}) + (b_{n_2} - a_{n_2}) + ... + (b_{n_s} - a_{n_s}) \leq \sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| = \sum_{k=1}^{n} |(a_k, b_k)|. \ \square$$

4) Если

$$(a, b) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n),$$

то

$$|(a, b)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |(a_n, b_n)|.$$

Доказательство. Выберем отрезок $[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset (a, b)$. Тогда

$$[a + \varepsilon, b - \varepsilon] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$$

и по теореме Гейне-Бореля существует конечное подпокрытие $(a_{n_k}, b_{n_k})_{k=1}^m$ отрезка $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$, т.е.

$$[a+\varepsilon, b-\varepsilon] \subset \bigcup_{k=1}^{m} (a_{n_k}, b_{n_k}).$$

По свойству 3

$$b-a-2\varepsilon = |[a+\varepsilon, b-\varepsilon]| \leq \sum_{k=1}^{m} |(a_{n_k}, b_{n_k})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(a_n, b_n)|.$$

Переходя в левой части к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$|(a,b)| = b-a \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(a_n, b_n)|.\square$$

5) Если

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \quad (G_n \ - \ \text{открытые}),$$

то

$$\mu G \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu G_n.$$

Это свойство меры называют счетной полуаддитивностью.
Доказательство. Так как G_n – открыты, то G – открытое и, значит,

$$G = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k), \quad \mu G = \sum_{k=1}^{\infty} |(a_k, b_k)|,$$

где (a_k, b_k) – составляющие интервалы. Для (a_k, b_k) имеем

$$(a_k, b_k) = (a_k, b_k) \cap G = \bigcup_{n=1}^{\infty} ((a_k, b_k) \cap G_n).$$

Но G_n открыто. Поэтому

$$G_n = \bigsqcup_{j=1}^{\infty} (a_n^{(j)}, b_n^{(j)}), \quad \mu G_n = \sum_{j=1}^{\infty} |(a_n^{(j)}, b_n^{(j)})|. \tag{5.1}$$

Заменяя G_n объединением составляющих интервалов, получаем

$$(a_k, b_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigsqcup_{j=1}^{\infty} ((a_k, b_k) \cap (a_n^{(j)}, b_n^{(j)}))$$

и по свойству 4)

$$|(a_k, b_k)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} |(a_k, b_k) \cap (a_n^{(j)}, b_n^{(j)})|.$$

Тогда для μG имеем

$$\mu G \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |(a_k, b_k) \cap (a_n^{(j)}, b_n^{(j)})| = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} |(a_k, b_k) \cap (a_n^{(j)}, b_n^{(j)})|\right). \tag{5.2}$$

Но

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k) \cap (a_n^{(j)}, b_n^{(j)}) = (a_n^{(j)}, b_n^{(j)})$$

и по свойству 2

$$\sum_{k=1}^{\infty} |(a_k, b_k) \cap (a_n^{(j)}, b_n^{(j)})| = |(a_n^{(j)}, b_n^{(j)})|.$$

Подставляя это равенство в (5.2), получаем окончательно, с учетом (5.1)

$$\mu G \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |(a_n^{(j)}, b_n^{(j)})| = \sum_{n=1}^{\infty} \mu G_n. \ \square$$

6. Внешняя мера множества

Определение 6.1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ – ограниченное множество. Число*

$$\overline{\mu} E \stackrel{df}{=} \inf\{\mu G : \ G \supset E, \ G - \textit{открытое}\}$$

называется внешней мерой множества E.

Свойства внешней меры.
1) $\bar{\mu} E \geq 0$. Это свойство очевидно.
2) $\bar{\mu}\emptyset = 0$.
Доказательство. $\forall n \in \mathbb{N}$ справедливо включение $\emptyset \subset (0, \frac{1}{n})$. Поэтому $\bar{\mu}\emptyset \leq \mu(0, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$. Но $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Переходя в неравенстве $\bar{\mu}\emptyset \leq \frac{1}{n}$ к пределу при $n \to \infty$, получаем $0 \leq \bar{\mu} E \leq 0$, откуда и следует $\bar{\mu} E = 0$.$\square$
3) Если E – счетное множество, то $\bar{\mu} E = 0$.
Доказательство. Пусть $E = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Выберем $\varepsilon > 0$ произвольное и при каждом $n \in \mathbb{N}$ точку x_n окружим интервалом $I_n = \left(x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$ длины $|I_n| = \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n \supset E$ и G – открытое. По свойствам меры открытого множества

$$\mu G \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu I_n = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что

$$\inf\{\mu G : \ G \supset E\} = 0,$$

т.е. $\bar{\mu} E = 0$.$\square$
4) (Счетная полуаддитивность внешней меры.)
Если $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, то

$$\bar{\mu} E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} E_n. \tag{6.1}$$

Доказательство. Если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} E_n = +\infty$, то неравенство (6.1) очевидно. Поэтому будем считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} E_n < \infty \text{ и } \forall n,\ \bar{\mu} E_n < +\infty.$$

Выберем $\varepsilon > 0$ произвольно. По определению внешней меры $\exists G_n \supset E_n,\ G_n$ – открытое, такое, что

$$\bar{\mu} E_n \leq \mu G_n < \bar{\mu} E_n + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{6.2}$$

Тогда множество $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n \supset E$ и, с учетом (6.2), получаем

$$\mu G \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu G_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} E_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} E_n + \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\bar{\mu} E = \inf\{\mu G:\ G \supset E\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu} E_n + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε отсюда получаем (6.1).□

5) (монотонность внешней меры). Если $E_1 \subset E_2$, то $\bar{\mu} E_1 \leq \bar{\mu} E_2$.

Доказательство. Это частный случай предыдущего свойства, когда объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ состоит из одного множества E_2.□

6) Если $E =]a, b[$ – промежуток, то $\bar{\mu} E = |b - a|$.

Доказательство.

1.$\forall \varepsilon > 0\quad]a, b[\subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ и по определению верхней меры $\bar{\mu}(]a, b[) \leq b - a + 2\varepsilon$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем $\bar{\mu}(]a, b[) \leq b - a$.

2. Покажем обратное неравенство. Пусть $G \supset]a, b[$. Тогда $G \supset (a, b)$ и по свойствам меры открытого множества $|(a, b)| \leq \mu G$, т.е. $b - a \leq \mu G$. Поэтому $\bar{\mu}(]a, b[) = \inf \mu G \geq b - a$.□

7) Если $\bigsqcup\limits_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subset]a, b[$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} |(a_k, b_k)| \leq |]a, b[|$.

Доказательство.

Так как интервалов (a_j, b_j) конечное число и они дизъюнктны, то занумеруем их так, чтобы

$$a \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq ... \leq a_{n-1} < b_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b.$$

Тогда $b - a = b - b_n + b_n - a_n + a_n - b_{n-1} + b_{n-1} - a_{n-1} + ... + b_2 - a_2 + a_2 - b_1 + b_1 - a_1 + a_1 - a \geq b_n - a_n + b_{n-1} - a_{n-1} + ... + b_1 - a_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |b_j - a_j| = \sum\limits_{j=1}^{n} |]a_j, b_j[|$.□

8) Если $\bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset]a, b[$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(a_k, b_k)| \leq |]a, b[|$.

Доказательство.

Так как

$$\bigsqcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \subset]a, b[,$$

то при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\bigsqcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k) \subset]a, b[,$$

и по свойству 7 при любом n

$$\sum_{k=1}^{n} |(a_k, b_k)| \le |]a, b[|.$$

Переходя в левой части к пределу при $n \to \infty$, получаем свойство 8.$\square$

7. Нуль-множества, нуль-функции. Интегрируемость нуль-функции

Определение 7.1. *Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется нуль-множеством или множеством меры нуль, если $\bar{\mu}E = 0$.*

Замечание. Из определения внешней меры следует, что E есть нуль-множество тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists G \supset E,\ G$ – открытое, $\mu G < \varepsilon$.

Свойства.

1) Если $E_1 \subset E$ и E – нуль-множество, то E_1 тоже нуль-множество.

Доказательство. Так как E – нуль-множество, то $\bar{\mu}E = 0$. По свойству монотонности внешней меры

$$\bar{\mu}E_1 \le \bar{\mu}E = 0,$$

откуда следует, что $\bar{\mu}E_1 = 0$.$\square$

2) Любое счетное множество есть нуль-множество. Это известное свойство внешней меры.

Определение 7.2. *Будем говорить, что некоторое свойство выполняется почти всюду, если множество точек, где оно не выполняется, есть нуль-множество.*

Определение 7.3. *Функцию $\varphi(x)$, заданную на E, будем называть нуль-функцией, если $\varphi(x) = 0$ почти всюду на E.*

Пример. Функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1], x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

будет нуль-функцией на $[0, 1]$.

Теорема 7.1. *Если $f(x) = 0$ почти всюду на $[a, b]$, то $f \in R^*(a, b)$ и $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$.*

Доказательство. Обозначим через E множество

$$E = \{x \in [a, b] : \ f(x) \ne 0\}.$$

Нам дано, что $\bar{\mu}E = 0$. При каждом $n \in \mathbb{N}$ определим множества

$$E_n = \{x \in [a, b] : \ n - 1 < |f(x)| \le n\}.$$

Очевидно, что $E = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и $\bar{\mu}E = 0$. Пусть

$$\mathring{\mathfrak{X}} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^m$$

произвольное пока отмеченное разбиение. Для интегральной суммы, построенной по этому разбиению, имеем

$$|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) - 0| = \left|\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\Delta x_k\right| = \left|\sum_{\xi_k \notin E} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{\xi_k \in E} f(\xi_k)\Delta x_k\right| =$$

$$= \left|\sum_{\xi_k \in E} f(\xi_k)\Delta x_k\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\xi_k \in E_n} f(\xi_k)\Delta x_k\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} n \sum_{\xi_k \in E_n} |\Delta x_k|. \tag{7.1}$$

Построим теперь масштабирующую функцию $\delta(x)$ по выбранному произвольно $\varepsilon > 0$.

По определению внешней меры $\forall \varepsilon > 0\ \exists G_n \supset E_n,\ G_n$ – открытое так, что

$$\bar{\mu}E_n \le \mu G_n < \bar{\mu}E_n + \frac{\varepsilon}{n2^n}.$$

Учитывая, что $\bar{\mu}E_n = 0$, получаем

$$\mu G_n < \frac{\varepsilon}{n2^n}. \tag{7.2}$$

Так как G_n – открытое, то

$$G_n = \bigsqcup_{j=1}^{\infty}(a_{n,j}, b_{n,j}) \text{ и } \mu G_n = \sum_{n=1}^{\infty}|(a_{n,j}, b_{n,j})|.$$

Определим теперь функцию $\delta(x)$.
Если $x \notin E$, то положим $\delta(x) = |b - a|$. Если $x \in E$, то $\exists!\ n \in \mathbb{N}$ при котором $x \in E_n$ и, значит, $\exists! j \in \mathbb{N}$, что $x \in (a_{n,j}, b_{n,j})$.

Положим

$$\delta(x) = \min(|x - a_{n,j}|, |x - b_{n,j}|). \tag{7.3}$$

Таким образом, $\delta(x)$ определена на всем отрезке $[a, b]$. Пусть теперь $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta(x)$. В этом случае в (7.1) $|\Delta x_k| < \delta(\xi_k)$ и, если $\xi_k \in E_n$, то $\xi_k \in (a_{n,j}, b_{n,j})$ и из (7.3) сразу следует, что

$$[x_{k-1}, x_k] \subset (a_{n,j}, b_{n,j}).$$

Но тогда

$$\sum_{\xi_k \in E_n} |\Delta x_k| \le \sum_{j=1}^{\infty} |(a_{n,j}, b_{n,j})| = \mu G_n \le \frac{\varepsilon}{n2^n}. \tag{7.4}$$

Подставляя (7.4) в (7.1), находим окончательно

$$|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) - 0| < \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{\varepsilon}{n2^n} = \varepsilon.$$

Это и означает, что

$$0 = \int_a^b f(x)dx,$$

и теорема доказана. □

Следствие. *Если $f \in R^*(a,b)$ и $g(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то*

$$g(x) \in R^*(a,b) \quad и \quad \int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство. Обозначим $h(x) = f(x) - g(x)$. Тогда $h(x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$, а по теореме 7.1 $h \in R^*(a,b)$ и $\int_a^b h(x)dx = 0$. Но $g = f - h$. Поэтому $g(x) \in R^*(a,b)$ как разность интегрируемых функций и

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b h(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \square$$

Пример. Для функции Дирихле

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1], x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1], x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

имеем $\int_0^1 \varphi(x)dx = 0$, так как $\varphi(x) = 0$ почти всюду на $[0,1]$.

Замечание. Функция Дирихле неинтегрируема по Риману, так как интегральные суммы Римана

$$S(\mathring{\mathfrak{x}}, f) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\xi_k)\Delta x_k$$

равны нулю, если все ξ_k иррациональны, и равны 1, если все ξ_k выберем рациональными.

8. Классификация первообразных. Общая теорема об интегрируемости функции, имеющей первообразную

Определение 8.1. *Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$ и $F(x)$ непрерывна на $[a,b]$.*
Если $\forall x \in [a,b]$ $F'(x) = f(x)$, то F(x) называют первообразной для $f(x)$.
Если $F'(x) = f(x)$ всюду на $[a,b]$ за исключением конечного числа точек, то $F(x)$ называют f-первообразной.
Если $F'(x) = f(x)$ на $[a,b]$ за исключением счетного множества точек, то $F(x)$ называется с-первообразной.
Если $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то $F(x)$ называется п.в.-первообразной.

Теорема 8.1. *Если $f(x)$ имеет первообразную $F(x)$ на $[a,b]$, то $f(x) \in R^*(a,b)$ и $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*

Эта теорема была доказана ранее в параграфе 1 главы 1. Однако, справедливо более сильное утверждение.

Теорема 8.2. *Если $f(x)$ имеет с-первообразную $F(x)$ на $[a,b]$, то $f \in R^*(a,b)$ и*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть $E = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть множество точек, в которых $f(x) \neq F'(x)$. Так как счетное множество – это нуль-множество, то можно доказывать теорему для случая, когда $f(c_k) = 0$.

Выберем $\varepsilon > 0$ и будем строить масштабирующую функцию $\delta(x)$. Если $x \notin E$, то $F'(x) = f(x)$ и, значит,

$$\exists \delta(x) > 0 \; \forall y \in [a,b], \; y \neq x \; |x-y| < \delta(x) \quad \Longrightarrow \left| \frac{F(x) - f(y)}{x-y} - f(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Умножая обе части последнего неравенства на $|x-y|$, имеем

$$|F(x) - F(y) - f(x)(x-y)| \leq \varepsilon |x-y|. \tag{8.1}$$

Таким образом, масштабирующая функция определена для $x \notin E$.

Если $x \in E$ и $x = c_k$, то $F(x)$ непрерывна в точке c_k и поэтому для выбранного $\varepsilon > 0 \; \exists \delta(x) = \delta(c_k) > 0$ такие, что если $|c_k - y| < \delta(c_k)$, то

$$|F(c_k) - F(y)| < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{8.2}$$

Теперь масштабирующая функция определена на всем отрезке $[a,b]$.
Пусть

$$\mathring{\mathfrak{X}} = ([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^m$$

δ-конечное разбиение. Учитывая (8.1) и (8.2), получаем

$$|S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - (F(b) - F(a))| = \left| \sum_{k=1}^m f(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=1}^m (F(x_k) - F(x_{k-1})) \right| =$$

$$= \left| \sum_{\xi_k \notin E} (f(\xi_k)\Delta x_k - (F(x_k) - F(x_k))) + \sum_{\xi_k \in E} f(\xi_k)\Delta x_k - \right.$$

$$\left. - \sum_{\xi_k \in E} (F(x_k) - F(x_{k-1})) \right| \leq \sum_{\xi_k \notin E} \varepsilon \Delta x_k + \sum_{\xi_k \in E} |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq \varepsilon(b-a) +$$

$$+ \sum_{\xi_k \in E} |F(x_k) - F(\xi_k)| + |F(\xi_k) - F(x_{k-1})| \leq \varepsilon(b-a) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^j} = \varepsilon(b-a) + 2\varepsilon.$$

Это неравенство и доказывает теорему. □

Замечание. Доказанная теорема неверна, если $F(x)$ есть п.в.-первообразная для $f(x)$.

9. Лемма Сакса-Хенстока.

Вначале введем необходимые понятия.

Определение 9.1. *1) Совокупность отрезков* $[\alpha_k, \beta_k] \quad (k = 1, 2, ..., S)$*, лежащих внутри отрезка* $[a, b]$*, будем называть частичным разбиением, если два любых различных отрезка* $[\alpha_k, \beta_k]$ *и* $[\alpha_i, \beta_i]$ *имеют не более одной общей точки.*
2) Если $([\alpha_k, \beta_k])_{k=1}^S$ *частичное разбиение, то совокупность* $([\alpha_k, \beta_k], t_k)_{k=1}^S$*, где* $t_k \in [\alpha_k, \beta_k]$ *будем называть отмеченным частичным разбиением.*
3) Если $\delta(x) > 0$ *на* $\bigcup\limits_{k=1}^{S} [\alpha_k, \beta_k]$ *и* $|[\alpha_k, \beta_k]| < \delta(t_k)$*, то отмеченное частичное разбиение* $([\alpha_k, \beta_k], t_k)_{k=1}^S$ *будем называть* δ*-конечным.*

Замечание. Очевидно, что если $([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n - \delta$-конечное отмеченное разбиение отрезка $[a, b]$, то совокупность $([x_{k_j-1}, x_{k_j}], \xi_{k_j})_j$ будет частичным отмеченным δ-конечным разбиением с той же масштабирующей функцией $\delta(x)$.

Следующее утверждение является основным в большинстве неочевидных теорем об обобщенном интеграле Римана.

Теорема 9.1 (лемма Сакса-Хенстока). *Пусть* $f \quad (R^*)$*-интегрируема на* $[a, b]$, $\varepsilon > 0$ *и* $\delta(x) > 0$*–масштабирующая функция такая, что для любого отмеченного разбиения* $\mathring{\mathfrak{X}} \ll \delta(x)$ *выполняется неравенство*

$$|S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - \int\limits_a^b f| < \varepsilon.$$

Тогда для любого частичного отмеченного разбиения $([\alpha_k, \beta_k], t_k)_{k=1}^S \ll \delta(x)$ *справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^{S} \left(f(t_k)(\beta_k - \alpha_k) - \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} f \right) \right| \leq \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $([\alpha_k, \beta_k], t_k)_{k=1}^S \ll \delta(x)$. Обозначим через $[a_j, b_j]_{j=1}^m$ те попарно непересекающиеся отрезки $[a_j, b_j] \subset [a, b]$, для которых

$$[a, b] = \left(\bigsqcup_{j=1}^{m} [a_j, b_j] \right) \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=1}^{S} (\alpha_k, \beta_k) \right).$$

Так как f (R^*)-интегрируема на $[a, b]$, то f (R^*)-интегрируема на каждом отрезке $[a_j, b_j] \quad (j = 1, 2, ..., m)$. Следовательно, для числа $\frac{\alpha}{m} > 0$ найдется масштабирующая функция $\delta_j(x) > 0$ на $[a_j, b_j]$ такая, что для любого δ_j-конечного разбиения $\mathring{\mathfrak{X}}_{[a_j, b_j]}$ отрезка $[a_j, b_j]$ выполняется неравенство

$$|S(\mathring{\mathfrak{X}}_{[a_j, b_j]}, f) - \int\limits_{a_j}^{b_j} f| < \frac{\alpha}{m}. \tag{9.1}$$

Можно считать, что $\delta_j(x) \leq \delta(x)$ на $[a_j, b_j]$, так как в в противном случае положим $\tilde{\delta}_j(x) = \min(\delta_j(x), \delta(x))$.

Обозначим

$$\mathring{\mathfrak{X}} = ([\alpha_k, \beta_k], t_k)_{k=1}^{S} \bigcup_{j=1}^{m} (\mathring{\mathfrak{X}}_{[a_j, b_j]}).$$

Тогда $\mathring{\mathfrak{X}}$ будет δ-конечным разбиением отрезка $[a, b]$ и поэтому

$$|S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - \int\limits_{a}^{b} f| < \varepsilon,$$

т.е.

$$\left| \sum_{k=1}^{S} f(t_k)|\beta_k - \alpha_k| + \sum_{j=1}^{m} S(\mathring{\mathfrak{X}}_{[a_j,b_j]}, f]) - \sum_{k=1}^{S} \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x)dx - \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{a_j}^{b_j} f(x)dx \right| < \varepsilon. \qquad (9.2)$$

Из (9.2) с учетом (9.1) находим, что

$$\left| \sum_{k=1}^{S} (f(t_k)|\beta_k - \alpha_k| - \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x)dx) \right| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left| S(\mathring{\mathfrak{X}}_{[a_j,b_j]}, f) - \int\limits_{a_j}^{b_j} f(x)dx \right| + \varepsilon < \alpha + \varepsilon.$$

Но последнее неравенство справедливо для любого $\alpha > 0$. Переходя к пределу при $\alpha \to 0$, получаем утверждение теоремы. □

Следствие. *В условиях теоремы справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{S} |f(t_k)(\beta_k - \alpha_k) - \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x)dx| \leq 2\varepsilon.$$

Доказательство. По лемме Сакса-Хенстока

$$\left| \sum_{k=1}^{S}{}^{+} (f(t_k)(\beta_k - \alpha_k) - \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x)dx) \right| \leq \varepsilon$$

и

$$\left| \sum_{k=1}^{S}{}^{-} (f(t_k)(\beta_k - \alpha_k) - \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} f(x)dx) \right| \leq \varepsilon,$$

где $\sum^{+}$ содержит только положительные слагаемые, а $\sum^{-}$- отрицательные. Вносим модуль под знак суммы и, складывая полученные неравенства, получаем утверждение следствия. □

10. Неопределенный интеграл, его непрерывность.

Определение 10.1. *Пусть f (R^*)-интегрируема на $[a,b]$. Функцию*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

называют неопределенным обобщенным римановским интегралом.

Отметим, что иногда неопределенным интегралом называют функцию

$$F(x) = C + \int\limits_a^x f(t)dt,$$

где C – произвольная постоянная.

Теорема 10.1. *Если f (R^*)-интегрируема на $[a,b]$, то неопределенный интеграл $F(x)$ есть непрерывная на $[a,b]$ функция.*

Доказательство.
1) Покажем, что $F(x)$ непрерывна справа на полуинтервале $[a,b)$. Выберем $\varepsilon > 0$. По определению (R^*) интегрируемости функции f

$$\exists\, \delta(x) > 0,\ \forall\ \overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta(x), \quad |S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, f) - \int\limits_a^b f| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.1}$$

Пусть $\delta_1(x) \le \delta(x)$ произвольная пока масштабирующая функция и пусть разбиение $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta_1(x)$. Тогда $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta(x)$ и, значит, выполняется (10.1). Пусть далее $x \in [a,b)$ произвольная точка. Выберем $h > 0$ так, чтобы

$$0 < h < \delta_1(x) \le \delta(x).$$

Тогда разбиение $([x, x+h], x)$, состоящее из одного отрезка $[x, x+h]$ и метки x, будет частичным $\delta(x)$-конечным разбиением и по лемме Сакса-Хенстока

$$\left| f(x)h - \int\limits_x^{x+h} f \right| \le \frac{\varepsilon}{2}$$

или, иначе,

$$|f(x)h - (F(x+h) - F(x))| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Используя неравенство треугольника, находим

$$|F(x+h) - F(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} + |f(x)|h < \frac{\varepsilon}{2} + (|f(x)| + 1)h.$$

Положим теперь

$$\delta_1(x) = \begin{cases} \delta(x), & x = b, \\ \min\left(\delta(x), \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1+|f(x)|}\right), & a \le x < b. \end{cases}$$

Тогда

$$h < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 + |f(x)|}$$

и поэтому

$$|F(x+h) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $F(x)$ непрерывна справа на $[a, b)$.
2) Аналогично доказывается, что $F(x)$ непрерывна слева на $(a, b]$. $\Box$

11. Обобщенный интеграл Римана как несобственный интеграл

Если функция f неограничена, например, в окрестности точки b, то точку b в теории интеграла Римана называют особой точкой, а интеграл Римана

$$(R) \int_a^b f(x)dx \tag{11.1}$$

называют несобственным. Сам интеграл (11.1) может не существовать, но может существовать

$$\lim_{c \to b-0} (R) \int_a^c f(x)dx. \tag{11.2}$$

В этом случае Римановский интеграл (11.1) называют сходящимся, а предел (11.2) – значением интеграла. Оказывается, что для обобщенного интеграла Римана подобное определение бесполезно, ибо для него существование предела (11.2) равносильно (R^*)-интегрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$. Прежде, чем доказывать этот замечательный факт, докажем лемму.

Лемма 11.1. *Пусть f (R^*)-интегрируема на любом отрезке $[a, c] \subset [a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $\delta(x) > 0$ на $[a, b)$ такая, что для любого отмеченного δ-конечного разбиения $\mathring{\mathfrak{X}}$ отрезка $[a, c]$ выполняется неравенство*

$$\left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - \int_a^c f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Выберем строго возрастающую последовательность $(a_k)_{k=0}^{\infty}$ такую, что $a_0 = a$ и $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = b$. Так как f (R^*)-интегрируема на любом отрезке $[a, c] \subset [a, b]$, то $f \in R^*(a_{k-1}, a_k)$ при любом $k \geq 1$. Выберем $\varepsilon > 0$ и при каждом k найдем функцию $\delta_k(x) > 0$ на $[a_{k-1}, a_k]$ такую, что если $\mathring{\mathfrak{X}}_k$ есть $\delta_k(x)$-конечное разбиение отрезка $[a_{k-1}, a_k]$, то

$$\left| S(\mathring{\mathfrak{X}}_k, f) - \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}. \tag{11.3}$$

Построим искомую функцию $\delta(x)$ на $[a,b)$ следующим образом:

$$\delta(x)=\begin{cases}\min(\delta_1(a_0),|a_1-a_0|), & \text{если} \quad x=a_0,\\ \min(\delta_k(x),|x-a_k|,|x-a_{k-1}|), & \text{если} \quad x\in(a_{k-1},a_k),\\ \min(\delta_{k+1}(a_k),\delta_k(a_k),|a_{k-1}-a_k|,|a_{k+1}-a_k|), & \text{если} \quad x=a_k(k>0).\end{cases}$$

Пусть теперь $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]}$ есть $\delta(x)$-конечное разбиение отрезка $[a,c]$. Найдем такое $p\in\mathbb{N}$, при котором

$$a_p\le c<a_{p+1}.$$

Можно считать, что в разбиении $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]}$ все метки совпадают с граничными точками разбиения $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]}$, так как в противном случае отрезок $[x_{j-1},x_j]$, содержащий метку ξ_j можно заменить на два отрезка $[x_{j-1},\xi_j]$ и $[\xi_j,x_j]$ с одной и той же меткой ξ_j.

Покажем теперь, что любая точка a_k $(k=0,1,...,p)$ является меткой в этом разбиении. В самом деле, пусть $a_k\in[x_{j-1},x_j]$ и пусть $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$ – соответствующая метка. Кроме точки a_k отрезок $[x_{j-1},x_j]$ может содержать другие точи a_ν отличные от a_k. Пусть a_l ближайшая из этих точек к точке ξ_j. Тогда $|[x_{j-1},x_j]|<\delta(\xi_j)$ и, если $\xi_j\ne a_l$, то $\delta(\xi_j)\le|\xi_j-a_l|$, т.е. $|x_{j-1}-x_j|<|\xi_j-a_k|$, что невозможно. Таким образом, если в отрезке $[x_{j-1},x_j]$ содержится точка a_k, то она обязательно должна быть меткой. Доказанное означает, что точки $(x_j)_{j=0}^m$, составляющие разбиение $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$, и точки $(a_k)_{k=0}^{p+1}$ расположены следующим образом

$$a_0=x_0<x_1<...<x_{j_1}=a_1<x_{j_1+1}<...<x_{j_2}=a_2<...<x_{j_p}=a_p<$$

$$<x_{j_p+1}<...<x_m=c<a_{p+1}.$$

Обозначим через $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a_{k-1},a_k]}$ отмеченное $\delta(x)$-конечное разбиение, состоящее из отрезков, входящих в $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$ и составляющих отрезок $[a_{k-1},a_k]$ $(k=1,2,...,p)$, а через $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a_p,c]}$ – разбиение, составленное из отрезков, лежащих внутри $[a_p,c]$. Тогда

$$\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a_{k-1},a_k]}\ll\delta_k(x)\quad\text{на}\quad[a_{k-1},a_k]\quad\text{и}\quad\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a_p,c]}\ll\delta_{p+1}(x)\quad\text{на}\quad[a_p,c].$$

Поэтому, с учетом леммы Сакса-Хенстока и неравенства (11.3)

$$\left|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]},f)-\int\limits_a^c f(x)dx\right|=$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{p}S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a_{k-1},a_k]},f)-\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k}f(x)dx+S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a_p,c]},f)-\int\limits_{a_p}^{c}f(x)dx\right|\le$$

$$\le\sum_{k=1}^{p}\left|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a_{k-1},a_k]},f)-\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k}f(x)dx\right|+\left|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a_p,c]},f)-\int\limits_{a_p}^{c}f(x)dx\right|<$$

$$<\sum_{k=1}^{p+1}2\varepsilon\frac{1}{2^{k+1}}<\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\varepsilon,$$

и лемма доказана. $\square$

Теорема 11.2 (теорема Хейка). *Пусть f определена на $[a,b]$ и (R^*)-интегрируема на любом отрезке $[a,c]\subset[a,b)$. Тогда $f(x)\in R^*(a,b)$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел*

$$\lim_{c\to b-0}\int\limits_a^c f(x)dx = I(f). \tag{11.4}$$

При этом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I(f).$$

Доказательство. Д о с т а т о ч н о с т ь. Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Из (11.4) следует, что существует c_ε такое, что, если $c_\varepsilon<c<b$, то

$$\left|\int\limits_a^c f(x)dx - I(f)\right| < \varepsilon. \tag{11.5}$$

По лемме 11.1 для выбранного $\varepsilon>0$ существует функция $\delta_1(x)>0$ на $[a,b)$ такая, что для любого отмеченного разбиения $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}=\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]}\ll\delta_1(x)$ выполняется неравенство

$$\left|S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}_{[a,c]},f) - \int\limits_a^c f(x)dx\right| < \varepsilon. \tag{11.6}$$

Определим теперь масштабирующую функцию $\delta(x)$ равенством

$$\delta(x)=\begin{cases}\min(\delta_1(x),b-x), & \text{если} \quad x\neq b,\\ \min\left(b-c_\varepsilon,\frac{\varepsilon}{1+|f(b)|}\right), & \text{если} \quad x=b\end{cases}$$

на всем отрезке $[a,b]$.

Выберем произвольное разбиение $([x_{k-1},x_k],\xi_k)_{k=1}^n\ll\delta(x)$ и рассмотрим разность

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - I(f).$$

Из определения $\delta(x)$ следует, что метка $\xi_n=x_n$. В самом деле, если $\xi_n\neq x_n$, то $|x_n-x_{n-1}|<\delta(\xi_n)\le b-\xi_n$, что невозможно. Так как $\delta(b)=\delta(x_n)\le b-c_\varepsilon$, то $c_\varepsilon<x_{n-1}<x_n$. Поэтому из (11.5) и (11.6) следует

$$\left|\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - I(f)\right| =$$

$$=\left|\sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k - \int\limits_a^{x_{n-1}} f(x)dx + \int\limits_a^{x_{n-1}} f(x)dx - I(f) + f(x_n)(b-x_{n-1})\right| \le$$

$$\le\left|\sum_{k=1}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k - \int\limits_a^{x_{n-1}} f(x)dx\right| + \left|\int\limits_a^{x_{n-1}} f(x)dx - I(f)\right| + |f(b)|\cdot|b-x_{n-1}| <$$

$$< \varepsilon + \varepsilon + |f(b)| \cdot \delta(b) \le 2\varepsilon + \frac{|f(b)|}{1 + |f(b)|} \cdot \varepsilon < 3\varepsilon,$$

что и доказывает достаточность.

Н е о б х о д и м о с т ь сразу следует из непрерывности неопределенного интеграла. □

12. Покрытия Витали, теорема Витали

В этом параграфе мы докажем теорему, которая используется во всех теоремах о дифференцируемости неопределенного интеграла.

Определение 12.1. *Пусть $E \subset R$ – ограниченное множество. Совокупность $\mathfrak{M}$ отрезков $I_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$ такая, что*

$$\forall\, x \in E \;\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, I_\alpha \ni x, \quad |I_\alpha| < \varepsilon$$

называется покрытием Витали множества E.

Иначе говоря, совокупность $\mathfrak{M}$ образует покрытие Витали, если любая точка $x \in E$ попадет в отрезок $I_\alpha \in \mathfrak{M}$ сколь угодно малой длины. Из определения сразу же следует, что покрытие Витали содержит бесконечно много отрезков.

Теорема 12.1 (лемма Витали). *Пусть $E \subset R$ – ограниченное множество и $\mathfrak{M}$ – покрытие Витали множества E. Тогда из покрытия $\mathfrak{M}$ можно выделить конечное или счетное семейство дизъюнктных отрезков I_k $(k = 1, 2, ...)$ таких, что*

$$\overline{\mu}(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k) = 0.$$

Доказательство. Так как E – ограниченное множество, то существует интервал $(a, b) \supset E$. Пусть $\mathfrak{M}_0 = \{I \in \mathfrak{M} : \; I \subset (a, b)\}$. Очевидно, что $\mathfrak{M}_0$ тоже покрытие Витали.

Будем строить отрезки I_k. Вначале выберем $I_1 \subset (a, b), \; I_1 \in \mathfrak{M}_0$ произвольно. Если $I_1 \supset E$, то все доказано. В противном случае обозначим

$$l_1 = \sup\{|I| : \; I \in \mathfrak{M}_0, \; I \cap I_1 = \emptyset\}.$$

Выберем I_2 так, чтобы $|I_2| > \frac{l_1}{2}, \quad I_2 \in \mathfrak{M}_0, \quad I_2 \cap I_1 = \emptyset$. Если $I_2 \sqcup I_1 \supset E$, то все доказано, в противном случае продолжим построение.

Предположим, что уже построены дизъюнктные отрезки

$$I_1, I_2, ..., I_n \in \mathfrak{M}_0.$$

Если $\bigsqcup_{j=1}^{n} I_j \supset E$, то все доказано, если нет, то обозначаем

$$l_n = \sup\{|I| : \; I \in \mathfrak{M}_0, \; I \cap (I_1 \sqcup I_2 \sqcup ... \sqcup I_n) = \emptyset\}.$$

Выберем отрезок $I_{n+1} \in \mathfrak{M}_0$ так, чтобы $|I_{n+1}| > \frac{l_n}{2}$ и $I_{n+1} \cap (I_1 \sqcup I_2 \sqcup ... \sqcup I_n) = \emptyset$. Если этот процесс выбора отрезков не оборвется, то мы получим бесконечную последовательность дизъюнктных отрезков $(I_k)_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$|I_{k+1}| > \frac{l_k}{2},$$

где
$$l_k = \sup\{|I|:\ I \in \mathfrak{M}_0,\ I \cap (I_1 \sqcup I_2 \sqcup ... \sqcup I_k) = \emptyset\}.$$
Покажем, что это искомая последовательность отрезков, т.е.
$$\overline{\mu}(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k) = 0. \qquad (12.1)$$
Для этого по каждому отрезку I_k построим отрезок
$$\tilde{I}_k = I_k \cup (I_k + |I_k|) \cup (I_k + 2|I_k|) \cup (I_k - |I_k|) \cup (I_k - 2|I_k|).$$
Очевидно, что $|\tilde{I}_k| = 5|I_k|$. Покажем, что $\forall\ j = 1, 2, ...$
$$E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k \subset \bigcup_{k=j}^{\infty} \tilde{I}_k. \qquad (12.2)$$
Тогда из (12.2) будет следовать (12.1). В самом деле, т.к. отрезки I_k дизъюнктны и $I_k \subset (a, b)$, то $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| \leq |(a, b)|$. Но тогда и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\tilde{I}_k| < +\infty$. Значит,
$$\lim_{j \to +\infty} \sum_{k=j}^{\infty} |\tilde{I}_k| = 0.$$
Поэтому
$$\overline{\mu}(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k) \leq \overline{\mu}\left(\bigcup_{k=j}^{\infty} \tilde{I}_k\right) \leq \sum_{k=j}^{\infty} |\tilde{I}_k| \to 0,$$
т.е. $\overline{\mu}(E \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k) = 0$.

Итак, будем доказывать, что $\forall\ j \in \mathbb{N}$ выполнено (12.2). Выберем $x \in E \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ и произвольное $j \in \mathbb{N}$. Очевидно, что $x \in E \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{j} I_k$. Но тогда существует отрезок $I = I(x) \in \mathfrak{M}_0$, содержащий точку x, такой, что $I_k \cap I(x) = \emptyset$ при $k = 1, 2, ..., j$. Покажем, что этот отрезок $I(x)$ не может не пересекаться со всеми отрезками $I_n \quad (n > j)$.

В самом деле, если при некотором $n > j$
$$I(x) \cap I_k \neq \emptyset \quad (k = j + 1, ..., n),$$
то по построению $|I_{n+1}| > \frac{l_n}{2}$ и по определению l_n $|I(x)| \leq l_n$. Значит,
$$|I_{n+1}| > \frac{l_n}{2} \geq \frac{|I(x)|}{2},$$
т.е. $|I(x)| \leq 2|I_{n+1}|$. Но ряд $\sum |I_n|$ сходится, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} |I_{n+1}| = 0$. Таким образом, если $I(x)$ не пересекается со всеми $I_n \quad (n > j)$, то $|I(x)| = 0$, что невозможно.

Обозначим через n наименьшее из таких чисел, для которых $I_n \cap I(x) \neq \emptyset$. Тогда $I(x)$ не пересекается с $I_1, I_2, ..., I_{n-1}$ и пересекается с I_n и по построению множества I_n имеем
$$|I_n| \geq \frac{1}{2}|I(x)| \quad \text{или} \quad |I(x)| \leq 2|I_n|.$$

Т.к. $x \in I(x),\ I(x) \cap I_n \neq \emptyset$ и $|I(x)| \leq 2|I_n|$, то из построения $\tilde{I}_n$ следует, что $\tilde{I}_n \supset I_n$. Но тогда $x \in \tilde{I}_n$ при некотором $n > j$. Поэтому

$$x \in \bigcup_{k=j}^{\infty} \tilde{I}_n,$$

и теорема доказана. □

Следствие. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *существует конечное число отрезков* $I_k \in \mathfrak{M} \quad (k = 1, 2, ...p)$, *что*

$$\overline{\mu}(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{p} I_k) < \varepsilon.$$

Доказательство. Так как

$$\overline{\mu}(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k) = 0,$$

то, обозначая $H = E \setminus \bigsqcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, получаем

$$E \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} I_k \bigsqcup H, \tag{12.3}$$

причем $\overline{\mu}H = 0$. При доказательстве леммы Витали было отмечено, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |I_k| < \infty$. Поэтому существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

Предыдущее включение (12.3) можно записать в виде

$$E \subset \bigsqcup_{k=1}^{p} I_k \bigsqcup \left(H \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=p+1}^{\infty} I_k \right) \right),$$

откуда сразу находим

$$E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{p} I_k \subset \left(H \bigsqcup \left(\bigsqcup_{k=p+1}^{\infty} I_k \right) \right),$$

причем $\overline{\mu}(H \bigsqcup (\bigsqcup\limits_{k=p+1}^{\infty} I_k)) < \varepsilon$. Но тогда

$$\overline{\mu}(E \setminus \bigsqcup_{k=1}^{p} I_k) \leq \overline{\mu}(H \bigsqcup (\bigsqcup_{k=p+1}^{\infty} I_k)) < \varepsilon,$$

и следствие доказано. □

13. Дифференцируемость неопределенного интеграла

Теперь мы используем лемму Витали для доказательства дифференцируемости неопределенного обобщенного интеграла Римана.

Теорема 13.1. *Пусть f (R^*)-интегрируема на $[a,b]$. Тогда функция*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

является п.в.-первообразной для f на $[a,b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$.

Доказательство. Так как функция F непрерывна, то достаточно доказать, что $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b)$.
1) Вначале докажем, что $F'(x+0) = f(x)$ почти всюду на $[a,b)$. Для этого образуем множество

$$E = \{x \in [a,b) : \ F'(x+0) \neq f(x)\}$$

и покажем, что $\overline{\mu}E = 0$.

Если $x \in E$, то $F'(x+0) \neq f(x)$. Это означает, что $\exists \varepsilon(x) > 0$, $\forall \sigma(x) > 0$ существует $h = h(x)$ такое, что $0 < h(x) < \sigma(x)$ и

$$\left| \frac{F(x+h(x)) - F(x)}{h(x)} - f(x) \right| \geq \varepsilon(x). \tag{13.1}$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим множества

$$E_n = \{x \in E : \ \varepsilon(x) \geq \frac{1}{n}\}$$

и покажем, что $\overline{\mu}E_n = 0$. Для этого достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ $\overline{\mu}E_n < \varepsilon$. Выберем $\varepsilon > 0$ произвольно, и так как f (R^*)-интегрируема, то существует функция $\delta(x) > 0$ такая, что для любого отмеченного разбиения $\mathring{\mathfrak{X}} \ll \delta(x)$ выполняется неравенство

$$\left| S(\mathring{\mathfrak{X}}, f) - \int\limits_a^b f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{3n}. \tag{13.2}$$

Обозначим через $\mathcal{F}_n$ совокупность всех отрезков $[x, x+h_x]$ таких, что $0 < h_x < \delta(x), \quad x \in E_n$ (масштабирующая функция $\delta(x)$ определена в (13.2)) и для h_x выполнено неравенство (13.2). Очевидно, что $\mathcal{F}_n$ – покрытие Витали множества E_n. По следствию из леммы Витали из него выберем конечное семейство дизъюнктных отрезков

$$([x_i, x_i + h_i])_{i=1}^m$$

таких, что

$$\overline{\mu}(H) = \overline{\mu}(E_n \setminus \bigsqcup_{i=1}^m [x_i, x_i + h_i]) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Но тогда

$$E_n \subset \bigsqcup_{i=1}^m [x_i, x_i + h_i] \bigcup H, \qquad \overline{\mu}H < \frac{\varepsilon}{3}$$

и поэтому

$$\overline{\mu}E_n < \sum_{i=1}^{m} h_i + \frac{\varepsilon}{3}. \tag{13.3}$$

Рассмотрим частичное разбиение $([x_i, x_i + h_i], x_i)_{i=1}^m$. Оно является δ-конечным, так как $h_i = h_{x_i} < \delta(x_i)$. По лемме Сакса-Хенстока (точнее, по следствию из этой леммы)

$$\sum_{i=1}^{m} \left| f(x_i)h_i - \int\limits_{x_i}^{x_i+h_i} f(x)dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{3n} \cdot 2 = \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{n}. \tag{13.4}$$

Но из (13.1) следует, что если $x_i \in E_n$, то

$$\left| \frac{F(x_i + h_i) - F(x_i)}{h_i} - f(x_i) \right| \geq \varepsilon(x_i)$$

или, иначе,

$$|F(x_i + h_i) - F(x_i) - h_i f(x_i)| \geq h_i \varepsilon(x_i) \geq h_i \cdot \frac{1}{n}.$$

Отсюда, с учетом (13.4), получаем

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} h_i \leq \sum_{i=1}^{m} \left| f(x_i)h_i - \int\limits_{x_i}^{x_i+h_i} f(x)dx \right| < \frac{2}{3}\frac{\varepsilon}{n}$$

и, значит,

$$\sum_{i=1}^{m} h_i < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Подставляя эту оценку в (13.3), находим окончательно

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \overline{\mu}E_n < \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\overline{\mu}E_n = 0$. Но

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n,$$

поэтому

$$\overline{\mu}E \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}E_n = 0.$$

Это означает, что $F'(x + 0) = f(x)$ почти всюду.
2) Аналогично доказывается, что почти всюду

$$F'(x - 0) = f(x),$$

и теорема доказана. $\square$

Теорема 13.2. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда функция*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

является первообразной для f на $[a, b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$ всюду на $[a, b]$.

Доказательство. Будем доказывать, что $F'(x+0) = f(x)$ всюду на $[a, b)$. Используя теорему о среднем имеем

$$F'(x+0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0+0} \frac{1}{h} f(\xi)h = \lim_{h\to 0+0} f(\xi) = f(x).$$

Аналогично доказываем, что $F'(x-0) = f(x)$ всюду на $(a, b]$. $\square$

Задачи и упражнения к главе 2.

1. Докажите, что любой ограниченный интервал не будет замкнутым множеством.
2. Докажите, что любой ограниченный отрезок не будет открытым множеством.
3. Приведите пример множества, которое не будет ни открытым ни замкнутым.
4. Будет ли счетное множество открытым?
5. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{|x|}$ (R^*)-интегрируема на отрезке $[-1, 1]$
6. Отрезок $[0, 1]$ разделим на три равных отрезка и включим в мн-во K_1 любые два из них. Каждый из этих отрезков разобъем на три равных отрезка, выберем любые два из них и включим полученные четыре отрезка в множество K_2. Продолжая этот процесс получим последовательность множеств K_n. Докажите, что пересечение множеств K_n есть замкнутое нуль-множество.

Глава 5

Абсолютно интегрируемые функции

Эта глава посвящена изучению абсолютно интегрируемых функций, т.е. функций интегрируемых вместе со своим модулем. Такие функции называют также интегрируемыми по Лебегу. Мы приводим критерий абсолютной интегрируемости в терминах вариации, приводим удобные достаточные условия абсолютной интегрируемости и подробно обсуждаем вопрос о сходимости в среднем. Для функций, абсолютно интегрируемых, доказывается стремление к нулю коэффициентов Фурье. Изучение сходимости в среднем требует использования теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла. Поэтому в этой главе мы продолжаем рассмотрение вопроса о предельном переходе и доказываем теоремы Леви, Фату и Лебега. В свою очередь доказательство этих теорем использует методы, связанные с абсолютной интегрируемостью.

1. Абсолютно и условно интегрируемые функции

Определение 1.1. *Функция f, определенная на отрезке $[a,b]$, называется абсолютно (R^*)-интегрируемой на $[a,b]$, если $f \in R^*(a,b)$ и $|f| \in R^*(a,b)$.*

Абсолютно интегрируемые функции называют также интегрируемыми по Лебегу или (L)-интегрируемыми. Причина такого названия станет понятной позже после знакомства с теорией абсолютного интегрирования, разработанной А.Лебегом. Принципиальным является следующий результат.

Теорема 1.1. *Существуют интегрируемые, но не интегрируемые абсолютно функции.*

Доказательство. Будем строить такую функцию на отрезке $[0,1]$. Выберем последовательность $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ такую, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. Обозначим $x_n = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, ...)$ и определим функцию f на отрезке $[0,1]$ равенствами

$$f(x) = \begin{cases} a_n \cdot 2^n; & \text{если} \quad x \in (\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}], \\ 0; & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что f есть искомая функция.
1) На каждом отрезке $[a,1]$ $(0 < a < 1)$ функция f ступенчатая, а значит, f интегрируема на $[a,1]$. Из построения f находим

$$\int\limits_{x_n}^{1} f(x)dx = \sum_{k=n}^{1} \int\limits_{x_k}^{x_{k-1}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_k}^{x_{k-1}} a_k \cdot 2^k dx = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

По выбору (a_n) существует предел
$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{x_n}^{1} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$
2) Если $x \in (x_k, x_{k-1})$, то
$$\int\limits_{x_k}^{1} f(t)dt - \int\limits_{x}^{1} f(t)dt = \int\limits_{x_k}^{x} f(t)dt = a_k 2^k\left(x - \frac{1}{2^k}\right) < a_k.$$
Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а значит, $\lim a_k = 0$. Поэтому существует
$\lim\limits_{x\to 0+0}\int\limits_{x}^{1} f(t)dt = \lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{x_k}^{1} f(t)dt = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. По теореме 11.2 главы 2 отсюда следует, что $f \in R^*(0,1)$.
3) Покажем, что $|f| \notin R^*(0,1)$. В самом деле,
$$\int\limits_{x_n}^{1} |f(t)|dt = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_k}^{x_{k-1}} |f(t)|dt = \sum_{k=1}^{n}|a_k|\cdot 2^k\cdot\frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n}|a_k| \to +\infty.$$
По той же теореме 11.2 функция $|f|$ не интегрируема на $[0,1]$. $\square$

Замечание. В общем случае из абсолютной интегрируемости не следует интегрируемость. Однако, если f абсолютно интегрируема и измерима, то она будет и интегрируемой.

Определение 1.2. *Совокупность функций $f \in R^*(a,b)$, абсолютно интегрируемых на $[a,b]$, будем обозначать $L(a,b)$. Функцию интегрируемую, но не абсолютно будем называть условно интегрируемой.*

2. Функции ограниченной вариации. Критерий абсолютной интегрируемости

Определение 2.1. *Функция $F(x)$, определенная на $[a,b]$, называется функцией с ограниченной вариацией, если существует постоянная $M > 0$ такая, что для любого разбиения*
$$\mathfrak{X} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$$
отрезка $[a,b]$ справедливо неравенство
$$\sum_{k=1}^{n}|F(x_k) - F(x_{k-1})| \le M.$$
Число
$$\bigvee_a^b F \overset{df}{=} \sup_{\mathfrak{X}}\sum_{k=1}^{n}|F(x_k) - F(x_{k-1})|$$
называют вариацией функции F на отрезке $[a,b]$. Совокупность всех функций, имеющих на $[a,b]$ конечную вариацию, будем обозначать
$BV(a,b)$.

В терминах вариации можно дать необходимое и достаточное условие абсолютной интегрируемости.

Свойства вариации

1) $\bigvee_a^b F \geq 0$. Это очевидно.

2) Для любой точки $c \in (a,b)$ справедливо равенство $\bigvee_a^b F = \bigvee_a^c F + \bigvee_c^b F$.

Доказательство. Покажем что

$$\bigvee_a^b F \leq \bigvee_a^c F + \bigvee_c^b F.$$

Выберем разбиение

$$\mathfrak{X} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b\}$$

и пусть точка $c \in (x_{k-1}, x_k)$. По неравенству треугольника $|F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq |F(c) - F(x_{k-1})| + |F(x_k) - F(c)|$. Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^{k-1} |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(x_k) - F(x_{k-1})| + \sum_{j=k+1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \leq$$

$$\sum_{j=1}^{k-1} |F(x_j) - F(x_{j-1})| + |F(c) - F(x_{k-1})| + |F(x_k) - F(c)| + \sum_{j=k+1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \leq$$

$$\leq \bigvee_a^c F + \bigvee_c^b F.$$

Переходя к sup в левой части этого неравенства, получаем $\bigvee_a^b F \leq \bigvee_a^c F + \bigvee_c^b F$. Покажем противоположное неравенство. Выберем два разбиения: $\mathfrak{X}_{(a,c)} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = c\}$ – разбиение отрезка $[a,c]$ и $\mathfrak{X}_{(c,b)} = \{b = x_n < x_1 < x_2 < ... < x_m = c\}$ – разбиение отрезка $[c,b]$. Обозначим $\mathfrak{X}_{(a,b)} = \mathfrak{X}_{(a,c)} + \mathfrak{X}_{(c,b)}$, это разбиение отрезка $[a,b]$. По определению вариации

$$\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| + \sum_{j=n+1}^{m} |F(x_j) - F(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^{n+m} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \leq \bigvee_a^b F.$$

Переходя в левой части этого неравенства к sup по разбиениям $\mathfrak{X}_{(a,b)}$ при фиксированном разбиении $\mathfrak{X}_{(c,b)}$ получаем неравенство

$$\bigvee_a^c F + \sum_{j=n+1}^{m} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \leq \bigvee_a^b F.$$

Переходя в левой части последнего неравенства к sup по разбиениям $\mathfrak{X}_{(c,b)}$ получаем противоположное неравенство $\bigvee_a^c F + \bigvee_c^b F \leq \bigvee_a^b F$.

3) Для любой точки $c \in (a,b)$ справедливо неравенство $\bigvee_a^c \leq \bigvee_a^b F$. Это очевидно вытекает из свойства 2.

Теорема 2.1. *Пусть* $f \in R^*(a,b)$ *и* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. *Функция* f *абсолютно интегрируема на* $[a,b]$ *тогда и только тогда, когда* F *имеет ограниченную вариацию. При этом*

$$\int\limits_a^b |f| = \bigvee_a^b F.$$

Доказательство. Необходимость. Пусть f и $|f|$ интегрируемы. Тогда для любого разбиения $\mathfrak{X} = (x_k)_{k=0}^n$ имеем

$$\sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| = \sum_{k=1}^n \left| \int\limits_a^{x_k} f dt - \int\limits_a^{x_{k-1}} f dt \right| = \sum_{k=1}^n \left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f| dt = \int\limits_a^b |f| dt.$$

Так как правая часть не зависит от разбиения $\mathfrak{X}$, то

$$\bigvee_a^b F = \sup_{\mathfrak{X}} \sum_{k=1}^n |F(x_k) - F(x_{k-1})| \leq \int\limits_a^b |f| dt,$$

и необходимость доказана.

Достаточность. Пусть теперь F имеет ограниченную вариацию и $\bigvee_a^b F$ – вариация функции F. По определению верхней грани $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \tilde{\mathfrak{X}} = ([\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k-1}])_{k=1}^n$ так, что

$$\bigvee_a^b F - \varepsilon < \sum_{k=1}^n |F(\tilde{x}_k) - F(\tilde{x}_{k-1})| \leq \bigvee_a^b F. \tag{2.1}$$

Применяя неравенство треугольника убеждаемся, что для любого разбиения $\mathfrak{X}$, которое получено из $\tilde{\mathfrak{X}}$ добавлением новых точек деления, неравенство (2.1) остается справедливым.

Воспользуемся теперь интегрируемостью функции f. Для $\varepsilon > 0$ из (2.1) существует $\delta^*(x) > 0$ на $[a,b]$ такая, что $\forall \; \mathring{\mathfrak{X}}^* = ([x_{k-1}^*, x_k^*], \xi_k^*)_{k=1}^m \ll \delta^*(x)$ выполняется неравенство

$$\left| S(\mathring{\mathfrak{X}}^*, f) - \int\limits_a^b f(t) dt \right| < \varepsilon.$$

Так как разбиение $\mathring{\mathfrak{X}}^*$ можно рассматривать как частичное разбиение, то по следствию из леммы Сакса-Хенстока

$$\sum_{j=1}^m \left| f(\xi_j^*) \Delta x_j^* - \int_{x_{j-1}^*}^{x_j^*} f(t) dt \right| \leq 2\varepsilon.$$

Используя неравенство треугольника, отсюда имеем

$$\left|\sum_{j=1}^{m}|f(\xi_j^*)|\Delta x_j^* - \sum_{j=1}^{m}\left|\int_{x_{j-1}^*}^{x_j^*} f(t)dt\right|\right| \leq 2\varepsilon. \tag{2.2}$$

Отметим, что (2.2) выполняется для любого δ^*-конечного разбиения.

Определим теперь масштабирующую функцию $\delta(x)$ равенством

$$\delta(x) = \min(\delta^*(x), \operatorname{dist}(x, \{\tilde{x}_k\}_{k=0}^{n} \setminus \{x\})) \tag{2.3}$$

и рассмотрим разбиение $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}^{**} \ll \delta(x)$. Тогда каждая точка $\tilde{x}_k$ $(k = 0, 1, ..., n)$ совпадает с меткой разбиения $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}^{**}$, и если теперь к разбиению $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}^{**}$ добавить все метки $\tilde{x}_k$, то получим новое разбиение $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$ такое, что

1) $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$ содержит все точки $\tilde{x}_k$,
2) $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta(x)$, а значит и $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} \ll \delta^*(x)$.
3) $S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}, |f|) = S(\overset{\circ}{\mathfrak{X}}{}^{**}, |f|)$.

Обозначим $\overset{\circ}{\mathfrak{X}} = ([u_{j-1}, u_j], t_j)_{j=1}^{S}$. Тогда для $\overset{\circ}{\mathfrak{X}}$ выполняются неравенства (2.1) и (2.2). Запишем их

$$\bigvee_a^b F - \varepsilon < \sum_{j=1}^{S}|F(u_j) - F(u_{j-1})| \leq \bigvee_a^b F + \varepsilon$$

или

$$\left|\bigvee_a^b F - \sum_{j=1}^{S}\left|\int_{u_{j-1}}^{u_j} f(t)dt\right|\right| \leq \varepsilon \tag{2.4}$$

и

$$\left|\sum_{j=1}^{S}|f(t_j)|\Delta u_j - \sum_{j=1}^{S}\left|\int_{u_{j-1}}^{u_j} f(t)dt\right|\right| \leq 2\varepsilon. \tag{2.5}$$

Соединяя (2.5) и (2.4), получаем

$$\left|\sum_{j=1}^{S}|f(t_j)|\Delta u_j - \bigvee_a^b F\right| \leq 3\varepsilon,$$

и теорема доказана. □

3. Признак сравнения абсолютной интегрируемости

Теорема 3.1. *Пусть $f, g \in R^*(a, b)$ и $|f(x)| \leq g(x)$ на $[a, b]$. Тогда $|f| \in R^*(a, b)$ и справедливо неравенство*

$$\int_a^b |f| \leq \int_a^b g.$$

Доказательство. Так как $f \in R^*(a, b)$, то существует неопределенный интеграл

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Выберем разбиение $(x_j)_{j=0}^n$ отрезка $[a, b]$. По условию $-g(x) \le f(x) \le g(x)$. Интегрируя это неравенство на отрезке $[x_{j-1}, x_j]$, получаем

$$-\int_{x_{j-1}}^{x_j} g \le \int_{x_{j-1}}^{x_j} f \le \int_{x_{j-1}}^{x_j} g,$$

откуда

$$|\int_{x_{j-1}}^{x_j} f| \le \int_{x_{j-1}}^{x_j} g.$$

Учитывая определение $F(x)$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$|F(x_j) - F(x_{j-1}| \le \int_{x_{j-1}}^{x_j} g.$$

Складывая полученные неравенства, находим

$$\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1}| \le \int_a^b g.$$

Но тогда

$$\bigvee_a^b F = \sup \sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1}| \le \int_a^b g < +\infty.$$

По критерию абсолютной интегрируемости это означает, что $|f| \in R^*(a, b)$, и теорема доказана. □

4. Пространство $L(a, b)$ как линейное нормированное пространство

Напомним, что через $L(a, b)$ мы обозначили совокупность всех функций $f \in R^*(a, b)$, для которых $|f| \in R^*(a, b)$.

Теорема 4.1. *$L(a, b)$ есть линейное пространство, в котором роль нулевого элемента играет функция, равная нулю почти всюду.*

Доказательство. Проверим, что $L(a, b)$ замкнуто относительно операций сложения и умножения на число.

Пусть $f, g \in L(a, b)$. Тогда $f, |f| \in R^*(a, b)$ и $g, |g| \in R^*(a, b)$. Так как $|f+g| \le |f|+|g|$, то по признаку сравнения абсолютной интегрируемости $|f + g| \in R^*(a, b)$ а значит и $f + g \in L(a, b)$.

Если $f \in L(a, b)$, то $f, |f| \in R^*(a, b)$ и поэтому $\lambda f, |\lambda f| \in R^*(a, b)$, т.е. $\lambda f \in L(a, b)$. Аксиомы линейного пространства проверяются непосредственно. □

Определение 4.1. *Линейное пространство X называется нормированным, если каждому элементу $f \in X$ поставлено в соответствие действительное число, обозначаемое через $\|f\|$, для которого выполняются следующие свойства*
1)$\|f\| \ge 0$, причем $\|f\| = 0$ т.и т.т., когда f совпадает с нулевым элементом пространства X,
2)$\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$,
3)$\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$.
Число $\|f\|$ называют нормой элемента f.

Последнее неравенство называют неравенством треугольника.

Теорема 4.2. *$L(a,b)$ есть линейное нормированное пространство с нормой*

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx.$$

Роль нулевого элемента играет функция $\Theta(x) = 0$ почти всюду на $[a,b]$.

Доказательство. Проверим выполнение всех свойств нормы. Во-первых, очевидно, что $\|f\| = \int_a^b |f| \geq 0$.

Во-вторых, если $f(x) = 0$ п.вс., то $\|f\| = \int_a^b |f| = 0$. Обратно, если $\|f\| = \int_a^b |f| = 0$, то при всех $x \in [a,b]$ $\int_a^x |f| = 0$. Согласно теореме о дифференцируемости неопределенного интеграла

$$\frac{d}{dx}\int_a^x |f| = |f(x)| = 0$$

почти всюду на $[a,b]$.

Равенство

$$\|\lambda f\| = \int_a^b |\lambda f| = |\lambda| \int_a^b |f| = |\lambda| \|f\|$$

очевидно.

Наконец, из неравенства $|f+g| \leq |f| + |g|$ следует

$$\int_a^b |f+g| \leq \int_a^b |f| + \int_a^b |g|,$$

а это и есть неравенство треугольника. □

5. Предельный переход под знаком интеграла. Случай равномерной сходимости

В следующих параграфах мы будем обсуждать возможность предельного перехода под знаком интеграла. Начнем с простейшего случая равномерно сходящейся последовательности.

Теорема 5.1. *Пусть $f_n \in R^*(a,b)$ и последовательность (f_n) равномерно сходится к f на $[a,b]$. Тогда f (R^*)-интегрируема и*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Доказательство. Так как последовательность (f_n) равномерно сходится к f на $[a,b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $m, n > n_0$ и для всех $x \in [a,b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $|f_n(x) - f_m(x)| < 2\varepsilon$ или

$$-2\varepsilon < f_n(x) - f_m(x) < 2\varepsilon.$$

Интегрируя это неравенство почленно, получаем

$$-2\varepsilon(b-a) < \int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f_m(x)dx < 2\varepsilon(b-a)$$

или

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f_m(x)dx\right| < 2\varepsilon \cdot (b-a).$$

Это означает, что числовая последовательность

$$\left(\int\limits_a^b f_n(x)dx\right)_{n=1}^{\infty}$$

фундаментальна. Поэтому существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = I(f).$$

Покажем, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I(f).$$

Выберем $\varepsilon > 0$ и пусть n_0 такое натуральное число, для которого

$$\left|\int_a^b f_{n_0}(x)dx - I(f)\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

и для всех $x \in [a,b]$

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

Но $f_{n_0} \in R^*(a,b)$, поэтому существует масштабирующая функция $\delta(x) > 0$ такая, что для любого отмеченного разбиения $([x_{k-1}, x_k], \xi_k) \ll \delta(x)$ выполняется неравенство

$$\left|\int_a^b f_{n_0}(x)dx - \sum_{k=1}^n f_{n_0}(\xi_k)\Delta x_k\right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для этого разбиения

$$|I(f) - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k| =$$

$$= \left|I(f) - \int_a^b f_{n_0}(x)dx + \int_a^b f_{n_0}(x)dx - \sum_{k=1}^n f_{n_0}(\xi_k)\Delta x_k + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^n (f_{n_0}(\xi_k) - f(\xi_k))\Delta x_k\right| \le \left|I(f) - \int_a^b f_{n_0}\right| + \left|\int_a^b f_{n_0} - \sum_{k=1}^n f_{n_0}(\xi_k)\Delta x_k\right| +$$

$$+ \sum_{k=1}^n |f_{n_0}(\xi_k) - f(\xi_k)|\Delta x_k < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему. □

6. Предельный переход под знаком интеграла. Теорема Леви

Приводимая ниже теорема является аналогом известной теоремы Леви для интеграла Лебега.

Теорема 6.1. *Пусть (f_n) – монотонная последовательность (R^*)-интегрируемых на $[a,b]$ функций и всюду на $[a,b]$*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Тогда $f(x)$ (R^*)-интегрируема на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда последовательность $(\int_a^b f_n)$ ограничена. При этом

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

Доказательство. Будем доказывать теорему для случая, когда (f_n) – возрастающая последовательность.

Необходимость. Пусть $f(x) \in R^*(a,b)$. Так как

$$f_n(x) \le f_{n+1}(x) \le f(x),$$

то

$$\int\limits_a^b f_n(x)dx \le \int\limits_a^b f_{n+1}(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)dx,$$

т.е. $(\int_a^b f_n)$ – возрастающая ограниченная последовательность.

Достаточность. Пусть $(\int_a^b f_n)$ – ограниченная последовательность. Так как $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$, то

$$\int\limits_a^b f_n(x)dx \le \int\limits_a^b f_{n+1}(x)dx,$$

то есть $(\int_a^b f_n)$ – возрастающая ограниченная последовательность, а значит существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = I(f).$$

Покажем, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = I(f).$$

Дальнейшее доказательство разобьем на несколько этапов.

1)Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = I(f),$$

то существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что

$$I(f) - \varepsilon \leq \int\limits_a^b f_m(x)dx \leq I(f). \tag{6.1}$$

2)Выберем произвольное пока отмеченное разбиение $([x_{k-1}, x_k], \xi_k)_{k=1}^n$ и рассмотрим разность

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k - I(f). \tag{6.2}$$

Так как $f_k \to f$, то для любого $x \in [a, b]$ существует $k = k(x)$, что

$$|f_{k(x)}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Можно считать, что $k(x) > m$, где m выбрано в (6.1).

3)Для оценки разности в (6.2) имеем

$$\left|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x_j - I(f)\right| = \left|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x_j - \sum_{j=1}^n f_{k(\xi_j)}(\xi_j)\Delta x_j + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^n f_{k(\xi_j)}(\xi_j)\Delta x_j - \sum_{j=1}^n \int_{\Delta x_j} f_{k(\xi_j)}(x)dx + \sum_{j=1}^n \int_{\Delta x_j} f_{k(\xi_j)}(x)dx - I(f)\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{j=1}^n f(\xi_j)\Delta x_j - \sum_{j=1}^n f_{k(\xi_j)}(\xi_j)\Delta x_j\right| + \left|\sum_{j=1}^n f_{k(\xi_j)}(\xi_j)\Delta x_j - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^n \int_{\Delta x_j} f_{k(\xi_j)}(x)dx\right| + \left|\sum_{j=1}^n \int_{\Delta x_j} f_{k(\xi_j)}(x)dx - I(f)\right| = S_1 + S_2 + S_3. \tag{6.3}$$

Будем оценивать S_1, S_2 и S_3.

4)По построению функции $k(x)$

$$\left|f(\xi_j) - f_{k(\xi_j)}(\xi_j)\right| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Поэтому

$$S_1 \leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j) - f_{k(\xi_j)}(\xi_j)|\Delta x_j \leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{j=1}^n \Delta x_j = \varepsilon. \tag{6.4}$$

5)Для оценки S_2 и S_3 построим масштабирующую функцию. Известно, что при любом k $f_k \in R^*(a, b)$. Это означает, что существует $\delta_k(x) > 0$ такая, что для любого отмеченного разбиения $\mathring{\mathfrak{X}} \ll \delta_k$ выполняется неравенство

$$\left|S(\mathring{\mathfrak{X}}, f_k) - \int_a^b f_k\right| < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Положим $\delta(x) = \delta_{k(x)}(x)$ и пусть $([x_{k-1}, x_k], \xi_k) \ll \delta(x)$.

6)Запишем S_2 в виде

$$\left| \sum_{p\geq 1} \left(\sum_{k(\xi_j)=p} f_p(\xi_j)\Delta x_j - \int_{[x_{j-1},x_j]} f_p(x)dx \right) \right|.$$

Так как разбиение δ-конечное, то $|\Delta x_j| \leq \delta(\xi_j)$ и если j такое, что $k(\xi_j) = p$, то $\delta(\xi_j) = \delta_{k(\xi_j)}(\xi_j) = \delta_p(\xi_j)$. Это означает, что разбиение

$$([x_{j-1}, x_j], \xi_j)_{k(\xi_j)=p}$$

является δ_p-конечным, и по следствию из леммы Сакса-Хенстока

$$\sum_{k(\xi_j)=p} \left| f_p(\xi_j)\Delta x_j - \int_{[x_{j-1},x_j]} f_p(x) \right| dx \leq 2\frac{\varepsilon}{2^{p+1}}.$$

Отсюда сразу находим

$$S_2 \leq \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{p+1}} 2 = \varepsilon. \tag{6.5}$$

7)Пусть $\max k(\xi_j) = M$. Так как по построению $k(x) > m$, то

$$f_m(x) \leq f_{k(\xi_j)}(x) \leq f_M(x).$$

Интегрируя почленно, имеем неравенства

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f_m(x)dx \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_{k(\xi_j)}(x)dx \leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_M(x)dx.$$

Складывая почленно последние неравенства по j от 1 до n, получаем, с учетом (6.1),

$$I(f) - \varepsilon \leq \int_a^b f_m(x)dx \leq \sum_{j=1}^{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f_{k(\xi_j)}(x)dx \leq \int_a^b f_M(x)dx \leq I(f).$$

Отсюда следует, что

$$S_3 < \varepsilon. \tag{6.6}$$

Соединяя (6.3)–(6.6), получаем, что если $([x_{k-1}, x_k], \xi_k) \ll \delta(x)$, то

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j - I(f) \right| < 3\varepsilon$$

и теорема доказана. □

Следствие. Теорема Леви остается справедливой, если $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на $[a, b]$. Для доказательства этого достаточно заменить значения функции $f_n(x)$ на 0 в тех точках, где $f_n(x)$ не сходится к $f(x)$.

7. Предельный переход под знаком интеграла. Теорема Фату

В этом параграфе мы рассмотрим возможность предельного перехода без требования монотонности последовательности (f_n).

Лемма 7.1. *Справедливы равенства*

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|),$$

$$\min(a,b) = \frac{1}{2}(a+b-|a-b|).$$

Доказательство. Если $a \geq b$, то $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = a$. Если $a < b$, то $\frac{1}{2}(a+b+|a-b|) = b$. Отсюда следует первое равенство. Второе доказывается аналогично. $\square$

Лемма 7.2. *Пусть функции $f(x), g(x)$ и $\alpha(x)$ (R^*)-интегрируемы и $f(x) \geq \alpha(x)$, $g(x) \geq \alpha(x)$. Тогда $\min(f(x), g(x))$ и $\max(f(x), g(x))$ также (R^*)-интегрируемы.*

Доказательство. По лемме 7.1

$$\min(f(x), g(x)) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|). \tag{7.1}$$

Следовательно,

$$0 \leq |f(x)-g(x)| = f(x)+g(x)-2\min(f(x),g(x)) \leq f(x)+g(x)-2\alpha(x). \tag{7.2}$$

Но $f(x)+g(x)-2\alpha(x) \geq 0$ и (R^*)-интегрируема, значит, $f(x)+g(x)-2\alpha(x)$ (L)-интегрируема. Поэтому из неравенства (7.2) следует (L)- интегрируемость функции $|f(x)-g(x)|$, а из (7.1) (L)-интегрируемость функции $\min(f(x), g(x))$. Таким образом, $\min(f(x), g(x)) \in R^*(a,b)$. (R^*)-интегрируемость функции $\max(f(x), g(x))$ следует из равенства

$$\min(f(x), g(x)) + \max(f(x), g(x)) = f(x) + g(x) \square.$$

Следствие. *Если $\alpha(x)$, $f_i(x)$ $\quad (i = 1, 2, ..., m)$ (R^*)-интегрируемы, $f_i(x) \geq \alpha(x)$, то функции $\min\limits_{i\leq m} f_i(x)$ и $\max\limits_{i\leq m} f_i(x)$ (R^*)-интегрируемы.*

Лемма 7.3. *Пусть*
1) $f_n(x) \geq \alpha(x) \quad (n = 1, 2, ..., \ x \in [a,b])$;
2) $\alpha(x)$ и $f_n(x)$ (R^*)-интегрируемы на $[a,b]$;
Тогда $f(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ (R^*)-интегрируема на $[a,b]$.

Доказательство. Обозначим $\varphi_n(x) = \min\limits_{k\leq n} f_k(x)$. Тогда

1) $\varphi_n(x) \geq \alpha(x)$,
2) $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность,
3) $\varphi_n(x)$ (R^*)-интегрируемы по лемме 7.2.
4) $\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx \geq \int\limits_a^b \alpha(x)dx, \quad \int\limits_a^b \varphi_{n+1}(x)dx \leq \int\limits_a^b \varphi_n(x)dx$

т.е. $\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx$ – ограниченная убывающая последовательность. Согласно теореме Леви, функция

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$$

(R^*)-интегрируема. А так как

$$\inf_{n\geq 1} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x),$$

то $\inf\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ (R^*)-интегрируема.□

Следующая теорема является аналогом теоремы Фату о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

Теорема 7.4 (теорема Фату). *Пусть*
1) $\alpha(x),\ f_n(x) \in R^*(a,b)$,
2) $f_n(x) \geq \alpha(x)$ *на* $[a,b]$,
3) $\liminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx < +\infty$.
Тогда
1) функция $f(x) = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ (R^*)-*интегрируема,*
2) $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx$.

Доказательство. Обозначим $\psi_n(x) = \inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$. Тогда
1) по лемме 7.3 функции $\psi_k(x) \in R^*(a,b)$,
2) $\psi_k(x)$ образуют возрастающую последовательность,
3) $\psi_n(x) \leq f_n(x)$,
4) $\int\limits_a^b \psi_n(x)dx \leq \int\limits_a^b f_n(x)dx$.
Из последнего неравенства по свойствам нижнего предела

$$\liminf_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx < +\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n dx < +\infty,$$

а, значит, последовательность $\int\limits_a^b \psi_n(x)dx$ ограничена. По теореме Леви получаем, что, во-первых,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) \in R^*(a,b),$$

и, во-вторых,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx = \liminf_{n\to\infty} \int_a^b \psi_n(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

и теорема доказана. □

Следствие. Теорема 7.4 остается справедливой, если $f_n(x) \geq \alpha(x)$ почти всюду на $[a, b]$.

8. Предельный переход под знаком интеграла. Теорема Лебега

Чаще всего при доказательстве возможности предельного перехода используется следующая теорема.

Теорема 8.1 (теорема Лебега). *Пусть*
1) $\alpha(x), \beta(x), f_n(x) \in R^*(a, b)$,
2) $\forall\, x \in [a, b],\ \alpha(x) \leq f_n(x) \leq \beta(x)$,
3) существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Тогда $f(x) \in R^*(a, b)$ *и*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

Доказательство. Из неравенства $f_n(x) \leq \beta(x)$ следует

$$\int\limits_a^b f_n(x)dx \leq \int\limits_a^b \beta(x)dx.$$

Поэтому

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx < +\infty.$$

Отсюда по теореме Фату $f \in R^*(a, b)$ и

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx. \tag{8.1}$$

Из условия $\alpha(x) \leq f_n(x)$ следует

$$-f_n(x) \leq -\alpha(x)$$

и, по уже доказанному,

$$-\int\limits_a^b f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} -\int\limits_a^b f_n(x)dx = -\limsup_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx. \tag{8.2}$$

Из (8.1) и (8.2) находим

$$\limsup_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx.$$

Полученное неравенство означает, что

$$\limsup_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \liminf_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx,$$

и теорема доказана.□

Замечание. Доказанную теорему можно сформулировать в виде.

Теорема 8.2. *Пусть*
1) $\alpha(x), \beta(x), f_n(x) \in R^*(a,b)$,
2)$\alpha(x) \le f_n(x) \le \beta(x)$ *почти всюду на* $[a,b]$,
3) почти всюду на $[a,b]$ *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Тогда $f(x) \in R^*(a,b)$ *и*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Доказательство. Обозначим через E_n $(n = 1, 2, ...)$ множество тех $x \in [a,b]$, в которых не выполняется неравенство $\alpha(x) \le f_n(x) \le \beta(x)$, а через E_0 множество тех $x \in [a,b]$, в которых $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \ne f(x)$. По условию теоремы $\bar{\mu}E_n = 0$. Обозначим $E = E_0 \cup (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$. Так как верхняя мера счетно-полуаддитивна, то $\bar{\mu}E = 0$.

Обозначим через $\tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(x), \tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)$ функции, которые получены из соответствующих функций $\alpha(x), \beta(x), f_n(x), f(x)$ заменой их значений на ноль в точках множества E. Тогда функции $\tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(x), \tilde{f}_n(x), \tilde{f}(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Лебега. Поэтому $\tilde{f}(x) \in R^*(a,b)$ и

$$\int_a^b \tilde{f}(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \tilde{f}_n(x)dx.$$

Так как различие на нуль-множестве не влияет на интегрируемость и величину интеграла, то $f(x) \in R^*(a,b)$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx,$$

и теорема доказана.□

Следует отметить, что мы в основном будем использовать именно этот последний вариант теоремы Лебега.

9. Сходимость в среднем. Теорема Лебега

Определение 9.1. *Пусть* $f_n, f \in R^*(a,b)$. *Последовательность* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *называется сходящейся к* f *в среднем, если*

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0.$$

Теорема 9.1 (теорема Лебега). *Пусть*
1) $\alpha(x), \beta(x), f_n(x) \in R^*(a,b)$
2) $\alpha(x) \le f_n(x) \le \beta(x)$ *почти всюду на* $[a,b]$,
3) почти всюду на $[a,b]$ *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
Тогда $f \in R^*(a,b)$, $|f - f_n| \in R^*(a,b)$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Доказательство. По теореме Лебега о предельном переходе $f \in R^*(a,b)$. Переходя в неравенстве

$$\alpha(x) \le f_n(x) \le \beta(x)$$

к пределу, получаем

$$\alpha(x) \le f(x) \le \beta(x).$$

Вычитая второе неравенство из первого, находим, что почти всюду

$$\alpha(x) - \beta(x) \le f_n(x) - f(x) \le \beta(x) - \alpha(x)$$

и по свойствам модуля

$$|f_n(x) - f(x)| \le \beta(x) - \alpha(x).$$

Отсюда по признаку сравнения абсолютной интегрируемости $|f - f_n| \in R^*(a,b)$. Но $|f(x) - f_n(x)| \to 0$ п.вс. на $[a,b]$ и по теореме Лебега о предельном переходе

$$0 = \int_a^b 0 = \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f_n - f|,$$

что и доказывает теорему. $\square$

10. Приближение интегрируемых функций почти всюду непрерывными и ступенчатыми функциями

Теорема 10.1. *Если* $f \in R^*(a,b)$, *то существует последовательность непрерывных функций* $F_n(x)$ *сходящаяся к* $f(x)$ *почти всюду.*

Доказательство. Пусть $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ неопределенный интеграл. Известно, что F непрерывна на $[a,b]$ и $F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Доопределим F на $[b, b+1]$ по непрерывности линейной функцией. При $x \in [a,b]$ положим

$$F_n(x) = \frac{F(x + \frac{1}{n}) - F(x)}{\frac{1}{n}}.$$

Ясно, что $F_n(x) \to F'(x) = f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. $\square$

Теорема 10.2. *Если* $f \in R^*(a,b)$, *то существует последовательность ступенчатых функций* $h_n(x) \to f(x)$ *почти всюду.*

Доказательство. По теореме 10.1 существует последовательность непрерывных функций $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду. Так как $f_n(x)$ непрерывные на $[a,b]$, то $f_n(x)$ равномерно непрерывны. Следовательно, для $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $\exists \delta > 0$, что

$$\forall x', x'' \in [a,b], \quad |x' - x''| < \delta \Longrightarrow |f_n(x') - f_n(x'')| < \frac{1}{n}.$$

Выберем разбиение

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_m = b$$

так, что $|x_j - x_{j-1}| < \delta$ и определим функции h_n равенством

$$h_n(x) = \begin{cases} f_n(x_{j-1}), & x \in [x_{j-1}, x_j), \quad j = 1, 2, ..., m-1, \\ f_n(x_{n-1}), & x \in [x_{n-1}, x_n], \quad j = m. \end{cases}$$

Тогда для $x \in [x_{j-1}, x_j)$ имеем

$$|f_n(x) - h_n(x)| \leq |f_n(x) - f_n(x_{j-1})| + |f_n(x_{j-1}) - h_n(x_{j-1})| \leq$$

$$\leq \frac{1}{n} + |f_n(x_{j-1}) - f_n(x_{j-1})| = \frac{1}{n}.$$

Поэтому

$$|f(x) - h_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - h_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + \frac{1}{n} \to 0$$

почти всюду. □

11. Измеримые функции

Определение 11.1. *Функция f, определенная на $[a,b]$, называется измеримой на $[a,b]$, если существует последовательность ступенчатых функций $h_n(x)$, сходящаяся к $f(x)$ почти всюду на $[a,b]$.*

Свойства измеримых функций.
1) Если $f(x) \in R^*(a,b)$, то $f(x)$ – измерима. Это следует из теоремы 10.2.
2) Существуют функции измеримые, но неинтегрируемые.
Доказательство. Построим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2^k}{k}, & x \in \left(\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right], \quad k = 1, 2, ... \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Покажем, что $f(x)$ измерима. В самом деле,

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2^n} \\ f(x), & \frac{1}{2^n} < x \leq 1 \end{cases}$$

есть ступенчатая функция и $h_n(x) \to f(x)$ всюду, следовательно, $f(x)$ измерима. Покажем, что $f(x) \notin R^*(a,b)$. В самом деле,

$$\int\limits_{\frac{1}{2^n}}^{1} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}} f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^n}}^{1} f(x)dx = +\infty,$$

т.е. $\int\limits_0^1 f(x)dx$ не существует.□

Свойство 3. Если функции f и g измеримы, то функции $f \pm g,\ \lambda \cdot f,\ f \cdot g,\ |f|$ тоже измеримы.

Доказательство. Пусть f измерима. Существует последовательность ступенчатых функций $h_n(x) \to f(x)$ почти всюду. Тогда $|h_n(x)|$ тоже ступенчатые функции и

$$||h_n(x)| - |f(x)|| \leq |h_n(x) - f(x)|,$$

т.е. $|h_n(x)| \to |f(x)|$ почти всюду. Следовательно, $|f(x)|$ измерима. Измеримость остальных функций доказываются аналогично.□

Свойство 4. Если функции f и g измеримы и $g(x) \neq 0$, то $\frac{f(x)}{g(x)}$ измерима.

Доказательство. Дано, что $f_n(x) \to f(x)$ и $g_n(x) \to g(x)$ почти всюду и $f_n(x)$ и $g_n(x)$ – ступенчатые функции. Но тогда $\frac{f_n(x)g_n(x)}{1/n+g_n^2(x)}$ тоже ступенчатая функция и $\frac{f_n(x)g_n(x)}{1/n+g_n^2(x)} \to \frac{f(x)}{g(x)}$ почти всюду, т.е.$\frac{f(x)}{g(x)}$ измерима.□

Свойство 5. Если $f(x)$ измерима на $[a,b]$ и $\varphi(y)$ непрерывна в интервале, содержащем область значений функции f, то $\varphi(f(x))$ измерима.

Доказательство. Так как f измерима на $[a,b]$, то существует последовательность ступенчатых функций $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Но тогда $\varphi(f_n(x))$ тоже ступенчатые и ввиду непрерывности функции φ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(f_n(x)) = \varphi(f(x))$$

почти всюду. Это и означает, что $\varphi(f(x))$ измерима на $[a,b]$.□

Свойство 6. (Критерий интегрируемости измеримой функции.)Пусть f измерима. Тогда $f \in R^*(a,b)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $\omega,\ \Theta \in R^*(a,b)$ такие, что почти всюду на $[a,b]$

$$\omega(x) \leq f(x) \leq \Theta(x).$$

Доказательство. Необходимость очевидна, так как можно взять $\omega(x) = \Theta(x) = f(x)$.

Достаточность. Пусть вначале $\omega(x) = 0$. Так как f измерима, то существует последовательность ступенчатых функции $h_n(x) \to f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Можно считать, что $h_n(x) \geq 0$. Образуем новые функции

$$f_n(x) = \min(h_n(x), \Theta(x)).$$

По лемме 7.1

$$f_n(x) = \frac{1}{2}(h_n(x) + \Theta(x) - |h_n(x) - \Theta(x)|)$$

Поэтому $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду и

$$0 \leq f_n(x) \leq \Theta(x).$$

По теореме Лебега о предельном переходе $f(x) \in R^*(a,b)$. В общем случае вместо $f(x)$ надо рассмотреть функцию $f(x) - \omega(x)$. □

Свойство 7. Если $f_n(x)$ измеримы и $f_n(x) \to f(x)$ почти всюду на $[a,b]$, то $f(x)$ измерима на $[a,b]$.
Доказательство. Так как функция $\varphi(y) = \mathrm{arctg} y$ непрерывны на $(-\infty, +\infty)$, то по свойству 5 $h_n(x) = \mathrm{arctg} f_n(x)$ измеримые функции, причем

$$\frac{\pi}{2} \leq h_n(x) \leq \frac{\pi}{2}.$$

По свойству 6 (критерий интегрируемости для измеримой функции) функции $h_n(x)$ интегрируемы. Причем $h_n(x) = \mathrm{arctg} f_n(x) \to \mathrm{arctg} f(x)$ почти всюду на $[a,b]$. Тогда по теореме Лебега о предельном переходе $\mathrm{arctg} f(x) \in R^*(a,b)$, а значит, и измерима. Но $f(x) = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg} f(x))$ измерима по свойству 5.□

12. Приближение абсолютно интегрируемых функций по норме пространства $L(a,b)$

Определение 12.1. *Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$. Функция*

$$f_{(n)}(x) = \begin{cases} f(x), & \textit{если } |f(x)| \leq n \\ n, & \textit{если } f(x) > n \\ -n, & \textit{если } f(x) < -n \end{cases}$$

называется срезкой функции f.

Теорема 12.1. *Если $f \in L(a,b)$, то при любом n $f_{(n)} \in L(a,b)$ и $||f_{(n)} - f|| \to 0$.*

Доказательство. Покажем вначале, что $f_{(n)} \in R^*(a,b)$. Из определения $f_{(n)}$ следует, что

$$f_{(n)}(x) = \max(\min(f(x), n), -n).$$

Используя лемму 7.1 из этого равенства находим, что срезки $f_{(n)}$ измеримы. Из неравенства $-|f(x)| \leq f_{(n)} \leq |f(x)|$ и критерия интегрируемости измеримой функции следует (R^*)-интегрируемость $f_{(n)}$. Далее, из определения $f_{(n)}$ следует также неравенство

$$|f_{(n)}(x)| \leq |f(x)| \tag{12.1}$$

и сходимость $f_{(n)}(x) \to f(x)$ почти всюду. Из (12.1) по признаку абсолютной интегрируемости $f_{(n)} \in L(a,b)$. Из теоремы Лебега о сходимости в среднем получаем $||f_{(n)} - f|| \to 0$.
□

Теорема 12.2. *Если $f \in L(a,b)$, то существует последовательность $h_n(x)$ ступенчатых функций таких, что $||f - h_n|| \to 0$.*

Доказательство. Так как $f \in L(a,b)$, то по теореме 12.1

$$||f - f_{(n)}|| \to 0.$$

Обозначим $||f - f_{(n)}|| = \varepsilon_n \to 0$. Так как $f_{(n)} \in R^*(a,b)$, то существует последовательность ступенчатых функций $h_{n,k}(x) \to f_{(n)}(x)$ почти всюду при $k \to \infty$. Можно считать, что

$$|h_{n,k}(x)| \leq n \quad (k = 1, 2, ...),$$

в противном случае в качестве $h_{n,k}(x)$ надо взять ступенчатую функцию

$$\max(\min(h_{n,k}(x), n), -n).$$

Но тогда по теореме Лебега о сходимости в среднем

$$||h_{n,k} - f_{(n)}|| \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Поэтому существует $k_n \in \mathbb{N}$ такое, что

$$||h_{n,k_n} - f_{(n)}|| < \varepsilon_n.$$

Используя неравенство треугольника, получаем окончательно

$$||h_{n,k_n} - f|| \le ||h_{n,k_n} - f_{(n)}|| + ||f_{(n)} - f|| < 2\varepsilon_n \to 0,$$

и теорема доказана. □

13. Теорема Римана-Лебега.

Следующая теорема, известная как теорема Римана-Лебега, чрезвычайно важна при изучении тригонометрических рядов.

Теорема 13.1. *Если $f \in L(a,b)$, то*

$$\lim_{\alpha_n \to \infty} \int\limits_a^b f(x)\cos(\alpha_n x + \beta_n)dx = 0 \tag{13.1}$$

Доказательство. 1) Так как $f \in L(a,b)$ и

$$|f(x)\cos(\alpha_n x + \beta_n)| \le |f(x)| \in R^*(a,b),$$

то по признаку сравнения абсолютной интегрируемости $f(x)\cos(\alpha_n x + \beta_n) \in L(a,b)$ и интеграл в (13.1) существует.
2) Пусть вначале $f(x)$ ступенчатая функция и пусть $f(x) = \lambda_k$ при $x \in (x_{k-1}, x_k) \quad (k = 1, 2, ...m,\ x_0 = a,\ x_m = b)$.
Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)\cos(\alpha_n x + \beta_n)dx = \sum_{k=1}^m \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \lambda_k \cos(\alpha_n x + \beta_n)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^m \lambda_k \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \cos(\alpha_n x + \beta_n)dx = \sum_{k=1}^m \frac{\lambda_k}{\alpha_n}(\sin(\alpha_n x_k + \beta_n) - \sin(\alpha_n x_{k-1} + \beta_n)) \to 0$$

при $\alpha_n \to \infty$.
3) Пусть теперь $f \in L(a,b)$ – произвольная функция. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем ступенчатую функцию $h(x)$ такую, что

$$||f - h|| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.2}$$

Так как h – ступенчатая, то существует n_0 такое, что $\forall\, n > n_0$

$$\left|\int_a^b h(x)\cos(\alpha_n x + \beta_n)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{13.3}$$

Используя (13.2) и (13.3), получаем при $n > n_0$

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(\alpha_n x + \beta_n)dx\right| \le \left|\int_a^b (f(x) - h(x))\cos(\alpha_n x + \beta_n)dx\right| +$$

$$+\left|\int_a^b h(x)\cos(\alpha_n x + \beta_n)dx\right| < \int_a^b |f(x) - h(x)|dx + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и теорема доказана. □

Задачи к главе 5.

1. Доказать следствие из теоремы Леви.
2. Доказать, что если $a_n \le b_n$ то $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n \le \liminf\limits_{n\to\infty} b_n$
3. Пусть $a_n \ge A \in \mathbb{R}, b_n = \min(a_1, a_2, ..., a_n)$. Доказать, что

$$\inf_{n\ge1} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

4. Доказать следствие из теоремы Фату.