С.Ф.ЛУКОМСКИЙ

БЫСТРЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО КЛАССИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

2013

УДК 517
ББК 22.19;
Л84 **Лукомский С.Ф.** Быстрые дискретные преобразования Фурье по классическим ортогональным системам. Саратов, 2013, 13с.

Рассмотрен единый подход к построению быстрых дискретных преобразований Фурье. Предназначено студентам, обучающимся в магистратуре.

Рецензент: профессор Терехин П.А.

Учебное издание
Лукомский Сергей Федорович
Быстрые дискретные преобразования Фурье по классическим ортогональным системам.

УДК 517

Содержание

Введение

Пусть $(e_k)_{k=1}^N$ – ортонормированная система ступенчатых функций, постоянных на интервалах $(\Delta_k)_{k=1}^N$, $\left(\bigsqcup\limits_{k=1}^N \Delta_k = [0,1]\right)$ такая, что любая ступенчатая функция f с участками постоянства Δ_k представима в виде

$$f(t) = \sum_{k=1}^N \hat{f}(k) e_k(t).$$

Последовательность $(\hat{f}(k))_{k=1}^N$ называется преобразованием Фурье по системе (e_k). Для нахождения $\hat{f}(k)$ можно использовать равенства

$$\hat{f}(k) = \int\limits_0^1 f(t) e_k(t) dt = \sum_{j=1}^N f(\Delta_j)\cdot \mu\Delta_j e_k(\Delta_j) (k=\overline{1,N}). \qquad (1)$$

Равенство (1) можно записать в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \hat{f}(1) \\ \hat{f}(2) \\ \dots \\ \hat{f}(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1,1} & e_{1,2} & \dots & e_{1,N} \\ e_{2,1} & e_{2,2} & \dots & e_{2,N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{N,1} & e_{N,2} & \dots & e_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\Delta_1)|\Delta_1| \\ f(\Delta_2)|\Delta_2| \\ \dots \\ f(\Delta_N)|\Delta_N| \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где $e_{k,j} = e_k(\Delta_j)$. Вычисление $\hat{f}(k)$ с использованием равенства (2) требует $2N\cdot N = 2N^2$ операций, а это число велико при больших N. Для дискретного преобразования по тригонометрической системе в 1965г. Кули и Таки в случае, когда $N = 2^n$, предложили представлять матрицу $E_N = (e_{k,j})$ в виде произведения

$$E_N = E_n \cdot E_{n-1} \cdot \ldots \cdot E_2 \cdot E_1$$

слабо заполненных матриц размерности $N\times N$. Например,

$$E_n = \begin{pmatrix} E & D_1 \\ E & -D_1 \end{pmatrix} \left(q = e^{\frac{2\pi i}{N}}\right),$$

где E – единичная матрица размерности $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$, D_1 – диагональная матрица с элементами $1, q, q^2, \ldots, q^{\frac{N}{2}-1}$ на диагонали. Подобным образом устроены и остальные матрицы E_k. Используя такое представление, удается для вычисления вектора $(\hat{f}(k))_{k=1}^N$ использовать $\approx N \log N$ операций. После этого аналогичные алгоритмы были разработаны и для других дискретных преобразований (Уолша, Виленкина).

Мы рассмотрим иной путь получения быстрых дискретных преобразований без использования факторизации, который основан на рекурентном способе доказательства замкнутости системы в пространстве ступенчатых функций.

1. Быстрое преобразование Хаара

Пусть

$$\chi_0(t) \equiv 1,\ \chi_{2^N+j}(t) = \begin{cases} 2^{\frac{N}{2}}, & t \in \left[\frac{j}{2^N}, \frac{j+\frac{1}{2}}{2^N}\right) \\ -2^{\frac{N}{2}}, & t \in \left[\frac{j+\frac{1}{2}}{2^N}, \frac{j+1}{2^N}\right) \\ 0, & t \notin \left[\frac{j}{2^N}, \frac{j+1}{2^N}\right) \end{cases}$$

функции Хаара на $[0,1)$ ($N = 0, 1, \ldots;\ j = 0, 1, \ldots, 2^N - 1$).
Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и представим $[0,1)$ в виде объединения двоичных полуинтервалов

$$[0,1) = \bigsqcup_{j=0}^{2^N-1} \Delta_j^{(N)} \quad (\Delta_j^{(N)} = [j2^{-N}, (j+1)2^{-N})).$$

Любая двоично ступенчатая функция $f^{(N)}(t)$, постоянная на $\Delta_j^{(N)}$, есть полином по системе Хаара

$$f^{(N)}(t) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j)\chi_j(t). \tag{1.1}$$

Вектор $(\hat{f}(j))_{j=0}^{2^N-1}$ называют дискретным преобразованием Фурье – Хаара функции $f^{(N)}$. Для краткости будем обозначать $f_j^{(N)} = f(\Delta_j^{(N)})$, т.е. функцию f можно рассматривать как вектор $(f_j^{(N)})_{j=0}^{2^N-1}$.

Получим быстрый алгоритм нахождения $\hat{f}$. Запишем равенство (1.1) в виде

$$f^{(N)}(t) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)\chi_n(t) + \sum_{n=2^{N-1}}^{2^N-1} \hat{f}(n)\chi_n(t) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(n)\chi_n(t) +$$

$$+r_{N-1}(t)\sum_{j=0}^{2^{N-1}}\hat f(2^{N-1}+j)h_j^{(N-1)}(t)=f^{(N-1)}(t)+r_{N-1}(t)g^{(N-1)}(t), \quad (1.2)$$

где $h_j^{(N-1)}(t)=\chi_{\Delta_j^{(N-1)}}(t)$, $f^{(N-1)}(t)$ – двоично-ступенчатая функция, постоянная на $\Delta^{(N-1)}$, $g^{(N-1)}(t)$ – двоично ступенчатая, значения которой на $\Delta_j^{(N-1)}$ равно $\hat f(2^{N-1}+j)$. Записывая равенство (1.2) на полуинтервале $\Delta_j^{(N-1)}=\Delta_{2j}^{(N)}\sqcup\Delta_{2j+1}^{(N)}$, имеем систему

$$\left\{\begin{array}{l} f_{2j}^{(N)}=f_j^{(N-1)}+g_j^{(N-1)} \\ f_{2j+1}^{(N)}=f_j^{(N-1)}-g_j^{(N-1)} \end{array}\right. .$$

Решая эту систему, находим

$$\left\{\begin{array}{l} f_j^{(N-1)}=\frac{1}{2}(f_{2j}^{(N)}+f_{2j+1}^{(N)}) \\ g_j^{(N-1)}=\frac{1}{2}(f_{2j}^{(N)}-f_{2j+1}^{(N)}) \quad (j=0,1,\ldots,2^{N-1}-1) \end{array}\right. . \quad (1.3)$$

Таким образом, мы нашли значения $f_j^{(N-1)}$ функции $f^{(N-1)}$ и значения $g_j^{(N-1)}$ функции $g^{(N-1)}$, причем $g_j^{(N-1)}=\hat f(2^{N-1}+j)$, т.е. мы нашли компоненты $\hat f$ с номерами $\geq 2^{N-1}$. Сделанный шаг удобно записать в следующем виде.

Пусть

$$(\lambda_n)=(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{2^{N-1}-1},\lambda_{2^{N-1}},\ldots,\lambda_{2^N-1})$$

вектор значений функции $f^{(N)}$. Равенства (1.3) для вектора (λ_n) запишем в виде

$$\begin{array}{ll} \lambda_j:=\frac{1}{2}(\lambda_{2j}+\lambda_{2j+1}) & (j=0,1,\ldots,2^{N-1}-1) \\ \lambda_{2^{N-1}+j}:=\frac{1}{2}(\lambda_{2j}-\lambda_{2j+1}) & (j=0,1,\ldots,2^{N-1}) \end{array} \quad (1.4)$$

Таким образом, проведя преобразования (1.4), мы получим новый вектор $(\lambda_n)_{n=0}^{2^N-1}$, в котором последние компоненты $\lambda_{2^{N-1}+j}=\hat f(2^{N-1}+j)$, а первые компоненты $(\lambda_n)_{n=0}^{2^{N-1}-1}$ есть значения функции

$$f^{(N-1)}=\sum_{n=0}^{2^{N-1}-1}\hat f(n)\chi_n(t)$$

кусочно постоянной на полуинтервалах ранга $N-1$, причем коэффициенты Фурье – Хаара функции $f^{(N-1)}$ есть первые 2^{N-1} коэффициентов исходной функции $f^{(N)}$. Применяя к функции $f^{(N-1)}$, т.е. к вектору

$$(\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_{2^{N-1}-1})$$

преобразования (1.4), получим вектор

$$(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^{N-2}-1}, \lambda_{2^{N-2}}, \ldots, \lambda_{2^{N-1}-1}),$$

в котором последние 2^{N-2} компонент есть компоненты вектора $\hat{f}$.

Продолжая последовательное применение формул (1.4), получаем после N-го шага последовательность $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^N-1})$, которая совпадает с $\hat{f}$. Нетрудно посчитать, что число операций равно

$$2 \cdot 2^N + 2 \cdot 2^{N-1} + \ldots + 2 \cdot 2^1 \approx 2^{N+2}.$$

2. Быстрое преобразование Фурье-Уолша

Задача ставится аналогично дискретному преобразованию Хаара. Пусть $N \in \mathbb{N}$ фиксировано, $f^{(N)}(x)$ – двоично-постоянна на $[0,1)$ и $f_j = f^{(N)}(\Delta_j^{(N)})$. Пусть $w_j(x)$ – функции Уолша на $[0,1)$. Тогда

$$f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j) w_j(x). \tag{2.1}$$

Требуется найти коэффициенты $\hat{f}(j)$. Записываем (2.1) в виде

$$f^{(N)}(x) = \sum_{j=0}^{2^N-1} \hat{f}(j) w_j(x) + r_{N-1}(x) \sum_{j=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2^{N-1}+j) w_j(x) =$$

$$= f^{(N-1)} + r_{N-1}(x) g^{(N-1)}(x), \tag{2.2}$$

где $f^{(N-1)}$ и $g^{(N-1)}$ двоично-ступенчатые на интервалах ранга $N-1$. Записывая (2.2) в точках полуинтервала $\Delta_j^{(N-1)} = \Delta_{2j}^{(N)} \sqcup \Delta_{2j+1}^{(N)}$, снова получаем равенства

$$\begin{cases} f_{2j}^{(N)} = f_j^{(N-1)} + g_j^{(N-1)} \\ f_{2j+1}^{(N)} = f_j^{(N-1)} - g_j^{(N-1)} \end{cases}, \tag{2.3}$$

из которых находим

$$\begin{cases} f_j^{(N-1)} = \frac{1}{2}(f_{2j}^{(N)} + f_{2j+1}^{(N)}) \\ g_j^{(N-1)} = \frac{1}{2}(f_{2j}^{(N)} - f_{2j+1}^{(N)}) \end{cases}. \tag{2.4}$$

Если значения функции $f^{(N)}(x)$ обозначим через λ_j $(j = 0, \ldots, 2^N - 1)$, то дискретное преобразование для вектора

$$(\lambda_j) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, \ldots, \lambda_{2^N-1})$$

задается формулами

$$\lambda_j := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}),$$

$$\lambda_{2^{N-1}+j} := \frac{1}{2}(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}).$$

Это те же преобразования Хаара, и после их применения мы, как и в §1, получаем вектор

$$(\lambda_n) = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2^{N-1}-1}, \lambda_{2^{N-1}}, \ldots, \lambda_{2^N-1}),$$

в котором первые 2^{N-1} компонент есть значения функции $f^{(N-1)}$, а последние 2^{N-1} компонент – значения функции $g^{(N-1)}$. Но в отличие от преобразования Хаара, значения $\lambda_{2^{N-1}}, \ldots, \lambda_{2^N-1}$ не будут коэффициентами Фурье–Уолша функции $g^{(N-1)}$, и поэтому нужно применять преобразование (2.4) и к левой половине вектора (λ_n), и к правой половине. Повторяя эту процедуру N раз, получаем последовательность коэффициентов Фурье–Уолша. Непосредственный подсчет дает число операций

$$2^{N+1} + 2^{N+1} + \ldots + 2^{N+1} = N2^{N+1}.$$

3. Быстрые дискретные преобразования Фурье

Пусть $N \in \mathbb{N}$ фиксировано. Определяем функции

$$e_n(x) = e^{2\pi i n \frac{j}{2^N}}, \text{ если } x \in \Delta_j^{(N)},\ j = \overline{0, 2^N - 1},\ n = \overline{0, 2^N - 1}. \tag{3.1}$$

Они образуют ортонормированную систему на $[0, 1)$, состоящую из двоично-ступенчатых функций.

Можно определить функции $e_n(x)$ на дискретном множестве $E = \{0, 1, 2, \ldots, 2^N - 1\}$, но в этом случае равенства (3.1) принимают вид

$$e_n(j) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi i n \frac{j}{2^N}}. \tag{3.2}$$

Любая функция, определенная на E, с комплексными значениями $\lambda_j^{(N)} = f(j)$ есть полином

$$f(j) = \sum_{n=0}^{2^N-1} \hat{f}(n) e_n(j). \tag{3.3}$$

Требуется найти коэффициенты $\hat{f}(n)$. Записываем (3.3) в виде

$$\sum_{n=0}^{2^N-1} \hat{f}(n) e_n(j) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n) e_{2n}(j) + \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n+1) e_{2n+1}(j).$$

Если $j = 2^{N-1} + \nu$ $(\nu = 0, 1, \dots, 2^{N-1} - 1)$, то

$$e_{2n}(j) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi i \cdot 2n \cdot \frac{j}{2^N}} = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi i n \frac{2^{N-1}+\nu}{2^{N-1}}} = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi i n \frac{\nu}{2^{N-1}}} = e_n(\nu),$$

$$e_{2n+1}(j) = \frac{1}{2^{\frac{N}{2}}} e^{2\pi i \frac{j}{2^N}} \cdot e^{2\pi i n \frac{\nu}{2^{N-1}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e_n(\nu).$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{2^N-1} \hat{f}(n) e_n(j) = \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n) \frac{e_n(j \bmod 2^{\mathrm{N-1}})}{\sqrt{2}} +$$

$$+ e^{\frac{2\pi i j}{2^N}} \sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n+1) \frac{e_n(j \bmod 2^{\mathrm{N-1}})}{\sqrt{2}}. \qquad (3.4)$$

Обозначим

$$\sum_{n=0}^{2^{N-1}-1} \hat{f}(2n) e_n(j \bmod 2^{\mathrm{N-1}}) = \lambda_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{N-1})},$$

$$\sum_{n=0}^{2^{N-1}} \hat{f}(2n+1) e_n(j \bmod 2^{\mathrm{N-1}}) = \mu_{\mathrm{j}}^{(\mathrm{N-1})}.$$

Тогда при $0 \le j \le 2^{N-1} - 1$ равенства (3.4) примут вид

$$\lambda_j^{(N)} = \frac{\lambda_j^{(N-1)}}{\sqrt{2}} + e^{\frac{2\pi i}{2^N} j} \frac{\mu_j^{(N-1)}}{\sqrt{2}},$$

а при $2^{N-1} \le j < 2^N - 1$, т.е. при $j = 2^{N-1} + \nu$

$$\lambda_{2^{N-1}+\nu}^{(N)} = \frac{\lambda_\nu^{(N-1)}}{\sqrt{2}} - e^{\frac{2\pi i \nu}{2N}} \cdot \frac{\mu_\nu^{(N-1)}}{\sqrt{2}}.$$

Из этих равенств находим

$$\begin{cases} \lambda_j^{(N-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_j^{(N)} + \lambda_{j+2^{N-1}}^{(N)}) \\ \mu_j^{(N-1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_j^{(N)} - \lambda_{2^{N-1}+j}^{(N)}) e^{-\frac{2\pi i j}{2^N}} \end{cases} \qquad (3.5)$$

при $j = 0, 1, 2, \dots, 2^{N-1} - 1$.

Если числа $\lambda_j^{(N-1)}$ расположить в исходной строке на местах $0, 1, \dots, 2^{N-1} - 1$, а числа $\mu_j^{(N-1)}$ – на местах $2^{N-1}, 2^{N-1}+1, \dots, 2^N - 1$, то получим преобразование исходной строки (λ_j) по формулам

$$\begin{cases} \lambda_j := \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_j + \lambda_{j+2^{N-1}}) \\ \lambda_{j+2^{N-1}} := \frac{1}{\sqrt{2}} (\lambda_j - \lambda_{2^{N-1}+j}) e^{-\frac{2\pi i j}{2^N}} \end{cases} \qquad (3.6)$$

После применения преобразования (3.6) в строке $(\lambda_j)_{j=0}^{2^N-1}$ начало строки $\lambda_0, \dots, \lambda_{2^{N-1}-1}$ определяет функцию, коэффициенты Фурье которой есть $\hat{f}(2j)$ $(j = 0, 1, \dots, 2^{N-1} - 1)$, а конец строки $\lambda_{2^{N-1}}, \dots, \lambda_{2^N-1}$ определяет функцию, коэффициенты Фурье которой есть $\hat{f}(2j+1)$. Применяя преобразования (3.6) N раз, получаем переставленную последовательность коэффициентов Фурье. Если мы хотим получить ее в естественном порядке, то нужно λ_j располагать на местах $2j$, а числа λ_{2j+1} – на местах $2j+1$. Т.е. формулы (3.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\lambda_{2j} := \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_j + \lambda_{j+2^{N-1}}) \\ &\lambda_{2j+1} := \tfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{2\pi i j}{2^N}}(\lambda_j - \lambda_{j+2^{N-1}}). \end{aligned}$$

Количество операций несколько больше, чем $2^N \cdot N$, т.к. присутствует комплексная арифметика.

4. Быстрое дискретное преобразование Виленкина

Пусть $P = (p_j)_{j=0}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел, такая, что $p_j \geq 2$. Обозначим $m_0 = 1, m_k = m_{k-1} p_{k-1}$ $(k = 1, 2, \dots)$
Любое натуральное число n единственным образом представимо в виде

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k m_k \ \ (\varepsilon_k = \overline{0, p_k - 1})$$

Пусть $n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k m_k$ $(a_k = \overline{0, p_k - 1})$, $x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{m_{k+1}} \in [0, 1)$ $(x_k = \overline{0, p_k - 1})$.

Определение 4.1. *Функции*

$$r_k(x) \overset{df}{=} e^{2\pi i \frac{x_k}{p_k}} \ \ (k = 0, 1, \dots)$$

назовем функциями Радемахера–Виленкина.

Лемма 4.2. *Функция $r_k(x)$ постоянна на каждом полуинтервале вида*

$$\left[\frac{j}{m_{k+1}}, \frac{j+1}{m_{k+1}}\right) \quad (j = 0, 1, \dots, m_{k+1} - 1).$$

Лемма 4.3. *Если $x \in \left[\frac{lp_k+j}{m_{k+1}}, \frac{lp_k+j+1}{m_{k+1}}\right) = \Delta_{lp_k+j}^{(k+1)}$ $l = \overline{0, m_k - 1}$; $j = \overline{0, p_k - 1}$, то*

$$r_k(x) = \left(e^{\frac{2\pi i}{p_k}}\right)^j = (\varepsilon_{p_k})^j.$$

Теорема 4.4. *Если f – ступенчатая функция, постоянная на полуинтервалах ранга k, то*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m_k-1} c_n v_n(x). \tag{4.1}$$

Доказательство проведем индукцией по числу k.
1) При $k = 0$ $f(x) = \text{const}$. При этом

$$\sum_{n=0}^{m_0-1} c_n v_n(x) = c_0 \cdot v_0(x) = c_0,$$

т.е. утверждение верно.
2) Пусть теорема верна для функции, постоянной на полуинтервалах ранга k. Выберем функцию $f^{(k+1)}(x)$, постоянную на полуинтервалах ранга $k+1$, и пусть

$$f_k^{(k+1)}(x) = \lambda_{l,p_k+j}^{(k+1)} \text{ при } x \in \left[\frac{lp_k+j}{m_{k+1}}, \frac{lp_k+j+1}{m_{k+1}}\right), (l = \overline{0, m_k-1};\ j = \overline{0, p_k-1}).$$

Покажем, что существуют ступенчатые функции $f_q^{(k)}$ $(q = \overline{0, p_k-1})$, постоянные на полуинтервалах ранга k и такие, что

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{q=0}^{p_k-1} (r_k(x))^q f_q^{(k)}(x). \tag{4.2}$$

Пусть

$$f_q^{(k)}(x) = \lambda_{l,q}^{(k)} \text{ при } x \in \left[\frac{l}{m_k}, \frac{l+1}{m_k}\right), (l = \overline{0, m_k-1};\ q = \overline{0, p_k-1}).$$

Тогда при

$$x \in \left[\frac{lp_k+j}{m_{k+1}}, \frac{lp_k+j+1}{m_{k+1}}\right) \subset \left[\frac{l}{m_k}, \frac{l+1}{m_k}\right)$$

равенство (5.2), с учетом леммы 5.2, принимает вид

$$\lambda_{l,p_k+j}^{(k+1)} = \sum_{q=0}^{p_k-1} (r_k(x))^q \lambda_{l,q}^{(k)} = \sum_{q=0}^{p_k-1} (\varepsilon_{p_k})^{jq} \lambda_{l,q}^{(k)}. \tag{4.3}$$

При каждом фиксированном $l \in [0, m_k-1]$ (4.3) есть система линейных уравнений относительно неизвестных

$$\lambda_{l,0}^{(k)}, \lambda_{l,1}^{(k)}, \lambda_{l,2}^{(k)}, \ldots, \lambda_{l,p_k-1}^{(k)}.$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{p_k}^{0\cdot 0} & \varepsilon_{p_k}^{0\cdot 1} & \varepsilon_{p_k}^{0\cdot 2} & \dots & \varepsilon_{p_k}^{0\cdot(p_k-1)} \\ \varepsilon_{p_k}^{1\cdot 0} & \varepsilon_{p_k}^{1\cdot 1} & \varepsilon_{p_k}^{1\cdot 2} & \dots & \varepsilon_{p_k}^{1\cdot(p_k-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{p_k}^{(p_k-1)\cdot 0} & \varepsilon_{p_k}^{(p_k-1)\cdot 1} & \varepsilon_{p_k}^{(p_k-1)\cdot 2} & \dots & \varepsilon_{p_k}^{(p_k-1)\cdot(p_k-1)} \end{vmatrix} \neq 0,$$

т.к. он есть определитель Вандермонда. Поэтому при каждом $l \in \overline{0, m_k - 1}$ система (4.3) имеет единственное решение и, значит, функции $f_q^{(k)}(x)$ существуют. По предположению индукции

$$f_q^{(k)}(x) = \sum_{\nu=0}^{m_k-1} c_{m_k q+\nu} v_\nu(x),$$

и, значит,

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{q=0}^{p_k-1} (r_k(x))^q \sum_{\nu=0}^{m_k} c_{m_k q+\nu} v_\nu(x). \tag{4.4}$$

Но

$$\sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} c_n v_n(x) = \sum_{n=0}^{m_k-1} c_n v_n(x) + \sum_{q=1}^{p_k-1} (r_k(x))^q \sum_{\nu=0}^{m_k-1} c_{m_k q+\nu} v_\nu(x). \tag{4.5}$$

Так как правые части в (4.4) и (4.5) равны, то равны и левые, т.е.

$$f^{(k+1)}(x) = \sum_{n=0}^{m_{k+1}-1} c_n v_n(x),$$

и теорема доказана. □

Следствие. Доказанная теорема означает, что если $f^{(k+1)}(x)$ имеет коэффициенты Фурье – Виленкина c_n $(0 \leq n < m_{k+1} - 1)$, то каждая из функций $f_q^{(k)}(x)$ $(q = \overline{0, p_k - 1})$ имеет коэффициенты Фурье – Виленкина c_n $(q m_k \leq n < (q+1) m_k)$. Поэтому вычисляя последовательно функции $f_q^{(k-1)}, \dots, f_q^{(0)}$, мы получаем на последнем шаге вместо вектора значений функции $f^{(k+1)}(x)$ вектор значений ее коэффициентов Фурье – Виленкина. Нетрудно посчитать, что количество операций с комплексными числами, необходимое для преобразования вектора значений функции $f^{(k+1)}$ в вектор коэффициентов Фурье – Виленкина равно $(p_1 + p_2 + \dots + p_k) \cdot 2m_{k+1}$.

5. Быстрое диадическое преобразование

Пусть $\mathbb{Z}_2$– диадическая группа, элементами которой являются бесконечные последовательности $t=(t_k)_{k=1}^{\infty}$ ($t_k=0$ или 1). Топология в $\mathbb{Z}_2$ определяется системой окрестностей

$$V_n(t)=\{(t_0,\ldots,t_{n-1},\xi_n,\xi_{n+1},\ldots)\}=\{\Delta_i^{(n)}\},$$

где $t_0,\ldots,t_{n-1}$ – фиксированы, а ξ_k $(k\geq n)$ принимают все возможные значения, т.е. топология в $\mathbb{Z}_2$ совпадает с топологией в двоичной группе D. Операция сложения определена иначе, а именно, если $t=(t_0,t_1,\ldots,t_n,0,0,\ldots)$, $\tau=(\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_m,0,\ldots)\in\mathbb{Z}_2$ финитные последовательности, то

$$t\dot{+}\tau=q=(q_0,q_1,\ldots,q_s,0,0\ldots),$$

где q_j – коэффициенты в двоичном разложении числа

$$\sum_{\nu=0}^{n}t_\nu 2^\nu+\sum_{\nu=0}^{m}\tau_\nu 2^\nu=\sum_{\nu=0}^{S}q_\nu 2^\nu.$$

Если же t и $\tau\in\mathbb{Z}$ – произвольные последовательности, то вначале определим срезки $t_{(N)}=(t_0,t_1,\ldots,t_N,0,\ldots)$, $\tau_{(N)}=(\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_N,0,0,\ldots)$ и затем полагаем

$$t\dot{+}\tau=\lim_{N\to\infty}(t_{(N)}\dot{+}\tau_{(N)}).$$

Иными словами, если при двоичном сложении $t\oplus\tau$ происходит поразрядное сложение по $\bmod 2$, то при диадическом сложении происходит перенос в следующий разряд.

Характерами группы $\mathbb{Z}_2$ являются функции

$$\chi_{0,0}(t)=1;\ \chi_{a,n}(t)=\exp\left(2\pi i\frac{a}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}t_k2^k\right),\ n\geq 1,\ a=1,3,\ldots,2^n-1.$$

Отметим, что 1) $\chi_{a,n}$ постоянны на окрестностях $V_n=\Delta_j^{(n)}$,
2) если $\Delta_j^{(n)}=\Delta_{2j}^{(n+1)}\bigsqcup\Delta_{2j+1}^{(n+1)}$, то $\chi_{a,n+1}(\Delta_{2j}^{(n+1)})=-\chi_{a,n+1}(\Delta_{2j+1}^{(n+1)})$.

Снова рассматриваем дискретную задачу. Пусть $N\in\mathbb{N}$ фиксировано, $f^{(N)}(t)$ – двоично-постоянная функция на интервалах $\Delta_j^{(N)}$. Ее можно представить в виде

$$f^{(N)}(t)=\sum_{l=0}^{2^N-1}C_l\chi_{l,N}(t),$$

так как

$$\sum_{l=0}^{2^N-1}C_l\chi_{l,N}(t)=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{2^{N-1-k}-1}C_{2^k(2l+1)}\chi_{2l+1,N-k}(t)+C_0\chi_{0,1}(t).$$

Но $f^{(N)}(t)$ можно представить в виде

$$f^{(N)}(t) = \sum_{l=0}^{2^N-1} C_l \chi_{l,N}(t) = \sum_{l=0}^{2^{N-1}-1} C_{2l}\chi_{l,N-1}(t) + \chi_{1,N} \sum_{l=0}^{2^{N-1}-1} C_{2l+1}\chi_{l,N-1}(t) =$$

$$= A^{(N-1)}(t) + \chi_{1,N}(t) B^{(N-1)}(t). \tag{5.1}$$

Пусть $f^{(N)}(t) = \lambda_j$ при $t \in \Delta_j^{(N)}$ – значения функции $f^{(N)}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2^N - 1)$
a_j – значения функции $A^{(N-1)}(t)$ на $\Delta_j^{(N-1)}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2^{N-1} - 1)$,
b_j – значения функции $B^{(N-1)}(t)$ на $\Delta_j^{(N-1)}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2^{N-1} - 1)$.
Выбирая $t \in \Delta_{2j}^{(N)}$ и $t \in \Delta_{2j+1}^{(N)}$ $(j = 0, 1, \ldots, 2^{N-1} - 1)$, из равенства (5.1) получаем

$$\begin{cases} a_j = \frac{1}{2}(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}), \\ b_j = \frac{1}{2\chi_{1,N}(\Delta_{2j}^{(N)})}(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}). \end{cases}$$

Откуда получаем формулы быстрого дискретного диадического преобразования

$$\begin{aligned} \lambda_{2j} &:= \tfrac{1}{2}(\lambda_{2j} + \lambda_{2j+1}) \\ \lambda_{2j+1} &:= \tfrac{1}{2\chi_{1,N}(\Delta_{2j}^{(N)})}(\lambda_{2j} - \lambda_{2j+1}) \end{aligned} \tag{5.2}$$

После этого на втором шаге применяем формулы (5.2) для последовательностей $(\lambda_{2j})_{j=0}^{2^{N-1}-1}$ и $(\lambda_{2j+1})_{j=0}^{2^{N-1}-1}$. После N-го шага получаем последовательность коэффициентов Фурье.

Литература

1) Г.Н. Агаев, Н.Я. Виленкин, Г.М. Джафарли, А.И. Рубинштейн. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах.// ИзО "Элм", Баку, 1981.
2) Э.И. Дагман, Г.А. Кухарев. Быстрые дискретные ортогональные преобразования. Новосибирск, Наука, 1983.
3) В.А. Власенко, Ю.М. Лаппа, Л.П. Ярославский. Методы анализа быстрых алгоритмов свертки и спектрального анализа сигналов. М.: Наука, 1990.