С.Ф.ЛУКОМСКИЙ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В $\mathbb{R}^m$

2013

УДК 517
ББК 22.19;
Л84 **Лукомский С.Ф.** Математический анализ. Дифференциальное исчисление в $\mathbb{R}^m$. Саратов, 2013, 63с.

Излагаются основы дифференциального исчисления функций многих переменных. Предназначено студентам математических специальностей университетов.

Рецензент: профессор Терехин П.А.

Учебное издание
Лукомский Сергей Федорович
Математический анализ.
Дифференциальное исчисление в $\mathbb{R}^m$.

УДК 517
©Лукомский С.Ф.,2013

Глава 1

Функции многих переменных. Предел и непрерывность

1. Метрические пространства. Множества в метрических пространствах

Определение 1.1. *Пусть $X \neq \emptyset$ – произвольное множество. Отображение $\rho : \ X \times X \to \mathbb{R}$ называется расстоянием, если оно удовлетворяет следующим условиям*
1) $\forall\, x, y \in X \ \rho(x, y) \geq 0,$
2) $\rho(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y,$
3) $\rho(x, y) = \rho(y, x),$
4) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *– неравенство треугольника.*
Число $\rho(x, y)$ называется расстоянием между точками x и y. Множество X, в котором определено расстояние ρ называют метрическим пространством и обозначают (X, ρ).

Пример. $X = \mathbb{R}, \ \ \rho(x, y) \stackrel{df}{=} |x - y|.$
1) $\rho(x, y) = |x - y| \geq 0$ – очевидно.
2) $\rho(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Leftrightarrow x = y.$
3) $\rho(x, y) = |x - y| = |y - x| = \rho(y, x).$
4) $\rho(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = \rho(x, y) + \rho(y, z).$

Определение 1.2. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $x_0 \in X$, $r > 0$.*
1) Множество $B_r(x_0) = \{x \in X : \ \rho(x_0, x) \leq r\}$ называется замкнутым шаром, x_0 – центр, r – радиус.
2) Множество $O_r(x_0) = \{x \in X : \ \rho(x_0, x) < r\}$ называется открытым шаром в пространстве X или окрестностью. x_0 – центр, r – радиус.

Определение 1.3. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$.*

Точка $x_0 \in X$ называется предельной точкой множества A, если в любой $O_\delta(x_0)$ содержится точка $x \in A,\ x \neq x_0$.

Предложение 1.1. *x_0 будет предельной точкой множества A тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки x_0 содержится бесконечное число точек множества A.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть x_0 – предельная точка множества A, $O_{r_0}(x_0)$ – произвольная окрестность точки x_0. Тогда $\exists\, x_1 \in O_{r_0}(x_0),\ x_1 \neq x_0$. Выбираем число r_1 так, чтобы $0 < r_1 < \frac{|x_0 - x_1|}{2} < \frac{r_0}{2}$. В $O_{r_1}(x_0)$ существует точка $x_2 \neq x_0$. Выбираем число r_2 так, чтобы $0 < r_2 < \frac{|x_0 - x_2|}{2} < \frac{r_1}{2} < \frac{r_0}{2^2}$. Продолжая этот процесс, получаем последовательность точек $(x_k)_{k=1}^\infty$ таких, что $x_{k+1} \in O_{r_k}(x_0),\ r_k < \frac{r_0}{2^k},\ x_k \neq x_0$, т.е.в $O_{r_0}(x_0)$ содержится бесконечное число элементов множества A.
Д о с т а т о ч н о с т ь очевидна. $\square$

Определение 1.4. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $(x_n)_{n=1}^\infty$ – последовательность элементов пространства X. Последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ называется сходящейся к элементу $x_0 \in X$ в пространстве X, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.*

Для обозначения предела последовательности в метрическом пространстве (X, ρ) используются стандартные обозначения:$x_n \to x_0$ или $\lim x_n = x_0$.

Предложение 1.2. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$. x_0 – предельная точка множества A тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$, $x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть x_0 – предельная точка A. При доказательстве предложения 1.1 была построена последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ такая, что $x_n \neq x_0$, $x_{n+1} \in O_{r_n}(x_0)$ и $r_n \leq \frac{r_0}{2^n}$, следовательно, $\rho(x_{n+1}, x_0) < \frac{r_0}{2^n} \to 0$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть существует последовательность (x_n) такая, что $x_n \in A,\ \rho(x_n, x_0) \to 0$ и пусть $O_\delta(x_0)$ – произвольная окрестность точки x_0. Значит, $\exists\, n_0,\ \forall\, n \geq n_0,\ \rho(x_n, x_0) < \delta$. Следовательно, $x_n \in O_\delta(x_0)\ \forall\, n \geq n_0$, т.е. в $O_\delta(x_0)$ существует бесконечно много элементов множества A. $\square$

Определение 1.5. *Множество $F \subset X$ называется замкнутым, если любая предельная точка множества F ему же и принадлежит.*

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}, F = \left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^\infty$, $x = 0$ – предельная точка, но $x_0 \notin F$, следовательно, F не является замкнутым.

Теорема 1.3. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство.*
1) Пересечение любого семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.
2) Объединение конечного семейства замкнутых множеств есть замкнутое множество.

Доказательство. 1) Пусть $(F_\alpha)_{\alpha \in I}$ – семейство замкнутых множеств, $F = \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$, x_0 – предельная точка множества F, $O_\delta(x_0)$ – произвольная окрестность точки x_0. Так как x_0 – предельная точка множества F, то в $O_\delta(x_0)$ существует точка $x \in F$. Отсюда $x \in F_\alpha$ для $\forall\, \alpha \in I$. Следовательно, x_0 есть предельная точка множества F_α $\forall\, \alpha \in I$. Но F_α – замкнутое, значит, $x_0 \in F_\alpha$ $\forall\, \alpha \in I$. Поэтому $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha$. Следовательно, $\cap F_\alpha$ – замкнуто.
2) Пусть $(F_k)_{k=1}^n$ – конечное семейство замкнутых множеств и пусть $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$. Пусть x_0 предельная точка множества F. Тогда x_0 является предельной точкой по крайней мере для одного из множеств F_k $(k = \overline{1, n})$. Покажем это от противного. Предположим, что x_0 не является предельной точкой ни для одного множества F_k $(k = \overline{1, n})$. Значит, $\forall\, k = \overline{1, n}$ $\exists\, O_{r_k}(x_0)$, в которой нет точек множества F_k. Пусть $r_0 = \min\limits_{k=\overline{1,n}} r_k$. Тогда в $O_{r_0}(x_0)$ нет точек множеств F_k при любом k. Значит, в $O_{r_0}(x_0)$ нет точек множества $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$, следовательно, x_0 не является предельной точкой, что противоречит выбору точки x_0. Т.е $\exists k_0$, что x_0 – предельная точка множества F_{k_0}. Так как F_{k_0} замкнуто, то $x_0 \in F_{k_0} \Rightarrow x_0 \in \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k \Rightarrow \bigcup\limits_{k=1}^{n} F_k$ – замкнуто. $\square$

Определение 1.6. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $A \subset X$. Точка $x_0 \in A$ называется внутренней точкой множества A, если существует окрестность точки x_0, целиком лежащая внутри A.*

Определение 1.7. *Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Множество $G \subset X$ называется открытым, если любая точка множества G является его внутренней точкой.*

Теорема 1.4. *1) Объединение любого семейства открытых множеств есть открытое множество.*
2) Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество.

Доказательство. 1) Пусть $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$ – семейство открытых множеств, $G = \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$. Выберем $x_0 \in G \Rightarrow \exists\,\alpha_0, x_0 \in G_{\alpha_0}$. Так как G_{α_0} – открытое, то $\exists\, O_{r_0}(x_0) \subset G_{\alpha_\alpha} \subset \bigcup\limits_{\alpha\in I} G_\alpha$.

2) Пусть $(G_k)_{k=1}^n$ – открытые множества, $G = \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$. Пусть $x_0 \in G \Rightarrow x_0 \in G_k \;\;\forall\, k = \overline{1,n}$. Т.к. G_k – открытое, то $\exists\, O_{r_k}(x_0) \subset G_k$. Пусть $r_0 = \min\limits_{k=\overline{1,n}} r_k$. Тогда $O_{r_0}(x_0) \subset O_{r_k}(x_0) \subset G_k. \Rightarrow O_{r_0}(x_0) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$. Следовательно, x_0 – внутренняя точка. $\square$

2. Полные метрические пространства. Принцип вложенных шаров

Определение 2.1. *Последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ метрического пространства (X,ρ) называется фундаментальной, если*

$$\forall\,\varepsilon > 0\;\exists\, n_0,\;\forall\, m,n \geq n_0\;\;\rho(x_n,x_m) < \varepsilon.$$

Определение 2.2. *Метрическое пространство (X,ρ) называется полным, если любая фундаментальная последовательность (x_n) сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$, т.е.*

$$\exists\, x_0 \in X,\;\; \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x_0) = 0.$$

Лемма 2.1. *Расстояние ρ в метрическом пространстве (X,ρ) есть функция непрерывная в следующем смысле:*
если $x_n \to x_0$, то $\forall\, y \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y,x_n) = \rho(y,x_0)$.

Доказательство. По неравенству треугольника $\rho(y,x_0) \leq \rho(y,x_n) + \rho(x_n,x_0)$. Следовательно

$$\rho(y,x_0) - \rho(y,x_n) \leq \rho(x_n,x_0).$$

С другой стороны: $\rho(y,x_n) \leq \rho(y,x_0) + \rho(x_0,x_n)$, следовательно

$$\rho(y,x_n) - \rho(y,x_0) \leq \rho(x_0,x_n).$$

Соединяя эти неравенства получаем

$$|\rho(y,x_0) - \rho(y,x_n)| \leq \rho(x_0,x_n) \to 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(y,x_n) = \rho(y,x_0).\;\; \square$$

Теорема 2.2. *Пусть* (X, ρ) *– полное метрическое пространство,*

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$$

последовательность замкнутых вложенных шаров, радиусы которых стремятся к 0. Тогда $\exists!\, x_0 \in X$*, принадлежащая всем этим шарам, т.е.* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \{x_0\}$.

Доказательство. 1) Пусть $B_n = B_{r_n}(x_n)$ – шар радиуса r_n с центром в точке x_n. Рассмотрим последовательность центров $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Покажем, что эта последовательность фундаментальна. Пусть $m > n$. Тогда $B_{r_m}(x_m) \subset B_{r_n}(x_n)$. Значит, $\rho(x_m, x_n) \leq r_n$ для $\forall\, m > n$. Но $r_n \to 0$, следовательно, последовательность (x_n) фундаментальна. В самом деле, т.к. $r_n \to 0$, то $\forall\, \varepsilon\ \exists\, n_0\ \forall\, n \geq n_0,\ \ r_n < \varepsilon \Rightarrow \forall\, m, n, (m > n \geq n_0)\ \rho(x_m, x_n) \leq r_n < \varepsilon$. Так как (X, ρ) – полное, то существует элемент $x_0 \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_0, x_n) = 0$.
2) Покажем, что $x_0 \in B_{r_n}(x_n)\ \ \forall\, n$. В самом деле, при $m > n\ \ \rho(x_m, x_n) \leq r_n$. Перейдем в последнем неравенстве к пределу по $m \to \infty$ при фиксированном n. По свойству непрерывности расстояния отсюда находим $\rho(x_0, x_n) \leq r_n$, т.е. $x_0 \in B_{r_n}(x_n)$.
3) Покажем, что общая точка единственная. Пусть $x_0, y_0 \in B_n\ \ \forall\, n \Rightarrow \rho(x_0, y_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y_0) \leq 2r_n \to 0 \Rightarrow \rho(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow x_0 = y_0$. □

3. Линейное нормированное пространство. Связь нормы с расстоянием

Определение 3.1. *Пусть* $(X, +, \cdot\lambda)$ *– линейное пространство, т.е. пространство с операцией сложения и умножения на число* λ*, удовлетворяющее аксиомам:*
A1. $(x + y) + z = x + (y + z)$,
A2. $x + y = y + x$,
A3. $\exists\, \Theta \in X,\ \forall\, x\ \ x + \Theta = x$,
A4. $\forall\, x \in X\ \exists - x \in X,\ \ x + (-x) = 0$,
A5. $(x + y) \cdot \lambda = \lambda x + \lambda y$,
A6. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
A7. $1 \cdot x = 1$,
A8. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) \cdot x$,
Отображение $||\cdot|| :\ X \to \mathbb{R}$ *называется нормой в* X*, если оно удовлетворяет условиям*

1) $||x|| \geq 0,\ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$.
2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$.
3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.
Для нормированного пр-ва будем использовать обозначение $(X, ||\cdot||)$.

Пример. $\mathbb{R}$ – есть линейное нормированное пространство с нормой $||x|| \stackrel{df}{=} |x|$.

Предложение 3.1. *Если* $(X, ||\cdot||)$ *– линейное нормированное пространство, то равенство*

$$\rho(x, y) \stackrel{df}{=} ||x - y|| = ||x + (-1) \cdot y||$$

определяет расстояние в X.

Доказательство. 1) $\rho(x, y) \geq 0$ – очевидно.
2) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = \Theta \Leftrightarrow x = y$.
3) $\rho(x, y) = ||x - y|| = ||(y - x) \cdot (-1)|| = |-1| \cdot ||y - x|| = \rho(y, x)$.
4) $\rho(x, y) = ||x - z|| = ||x - y + y - z|| \leq ||x - y|| + ||y - z|| = \rho(x, y) + \rho(y, z)$.
$\square$
Так как в линейном нормированном пространстве есть расстояние, то можно говорить о сходящихся и фундаментальных последовательностях и о полных линейных нормированных пространствах. В частности:
1) Последовательность (x_n) сходится к элементу x по норме пространства X тогда и только тогда, когда $\rho(x_n, x) = ||x_n - x|| \to 0$.
2) Последовательность (x_n) – фундаментальна, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0\ \forall\, m, n \geq n_0,\ \ ||x_n - x_m|| < \varepsilon$

4. Линейное пространство со скалярным произведением. Неравенство Коши–Буняковского

Определение 4.1. *Пусть* $(X, +, \cdot\lambda)$ *– линейное пространство. Отображение пространства* $X \times X$ *в* $\mathbb{R}$*, которое каждой паре* (x, y) *элементов из* X *ставит в соответствие действительное число, которое обозначается символом* (x, y)*, называется скалярным произведением, если выполняются следующие аксиомы*
A1. $(x, x) \geq 0$ *и* $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$
A2. $(x, y) = (y, x)$
A3. $\forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ \ (\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y)$
A4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Предложение 4.1. *Справедливо неравенство*

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}. \tag{4.1}$$

Неравенство (4.1) называется неравенством Коши–Буняковского.

Доказательство. $(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0$ – по определению скалярного произведения. Отсюда $0 \leq (x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y)\cdot\lambda^2$. Относительно λ правая часть есть квадратный трехчлен, и он сохраняет знак, значит, дискриминант $D \leq 0 \Rightarrow (2(x,y))^2 - 4(x,x)(y,y) \leq 0 \Rightarrow (x,y)^2 \leq (x,x)(y,y) \Rightarrow |(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)}$. $\square$

Предложение 4.2. *Равенство* $||x|| \overset{df}{=} \sqrt{(x,x)}$ *определяет в пространстве со скалярным произведением норму.*

Доказательство. 1) $||x|| \geq 0$ – очевидно.
2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(x,x)} = 0 \Leftrightarrow (x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$.
3) $||\lambda x|| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2(x,x)} = |\lambda|\sqrt{(x,x)} = |\lambda| \cdot ||x||$.
4) $||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \leq (x,x) + 2\sqrt{(x,x)} \cdot \sqrt{(y,y)} + (y,y) = ||x||^2 + 2||x|| \cdot ||y|| + ||y||^2 = (||x|| + ||y||)^2$. $\square$

5. Пространство $\mathbb{R}^m$ как линейное нормированное пространство. Эквивалентные нормы в $\mathbb{R}^m$

Определение 5.1. *Положим по определению* $\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$, *т.е. элементами* $\mathbb{R}^m$ *являются кортежи длины* m, *состоящие из действительных чисел:*

$$\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}).$$

При $m = 2$ $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)})$ *– т.е. упорядоченная пара. Числа* $x^{(j)}$ *называются координатами или компонентами точки* $\mathbf{x}$

Определение 5.2. *Определим в* $\mathbb{R}^m$ *операции* $+$ *и умножения на число:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x^{(1)} + y^{(1)}, x^{(2)} + y^{(2)}, \ldots, x^{(m)} + y^{(m)})$$

$$\lambda\mathbf{x} = (\lambda x^{(1)}, \lambda x^{(2)}, \ldots, \lambda x^{(m)}).$$

С такими операциями $\mathbb{R}^m$ есть линейное пространство. Роль нулевого элемента играет роль вектор $\mathbf{\Theta} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Предложение 5.1. *Равенство*

$$(\mathbf{x},\mathbf{y}) \stackrel{df}{=} \sum_{j=1}^{m}(x^{(j)},y^{(j)})$$

определяет в $\mathbb{R}^m$ *скалярное произведение.*

Доказательство. 1) $(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} x^{(j)}x^{(j)} = \sum_{j=1}^{m}(x^{(j)})^2 \geq 0.$

$$(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m}(x^{(j)})^2 = 0 \Leftrightarrow \forall\, j,\ x^{(j)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = (0,0,\ldots,0).$$

2) $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{y},\mathbf{x})$ – очевидно.
3) $(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – очевидно.
4) $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) = \sum\limits_{j=1}^{m}(x^{(j)}+y^{(j)})\cdot z^{(j)} = \sum\limits_{j=1}^{m} x^{(j)}z^{(j)} + \sum\limits_{j=1}^{m} y^{(j)}z^{(j)} = (\mathbf{x},\mathbf{z}) + (\mathbf{y},\mathbf{z}).$

$\square$

Следствие 1. $\left|\sum\limits_{j=1}^{m} x^{(j)}y^{(j)}\right| \leq \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} |x^{(j)}|^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} |y^{(j)}|^2}.$
Это неравенство Коши-Буняковского в пространстве $\mathbb{R}^m$.
Следствие 2. Равенство

$$||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}|^2}$$

определяет норму в $\mathbb{R}^m$. Эту норму называют Евклидовой.

6. Другие нормы в $\mathbb{R}^m$

Определение 6.1. *Две нормы* $|||\cdot|||$ *и* $||\cdot||$ *в* $\mathbb{R}^m$ *называются эквивалентными, если* $\exists\, c_1 > 0$ *и* $c_2 > 0$ *такие, что*

$$c_1||\mathbf{x}|| \leq |||\mathbf{x}||| \leq c_2||\mathbf{x}||.$$

Теорема 6.1. *Равенство*

$$||\mathbf{x}||_1 = \sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}|$$

определяет в $\mathbb{R}^m$ *норму, эквивалентную норме* $||x||_2$.

Доказательство. 1) $||\mathbf{x}||_1 \geq 0$ – очевидно.
2) $||\mathbf{x}||_1 = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{m} |x^{(j)}| = 0 \Leftrightarrow \forall\, j,\ x^{(j)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{\Theta}$.
3) $||\lambda\mathbf{x}||_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} |\lambda x^{(j)}| = |\lambda| \cdot \sum\limits_{j=1}^{m} |x^{(j)}| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||_1$.
4) $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} |x^{(j)} + y^{(j)}| \leq \sum\limits_{j=1}^{m} (|x^{(j)}| + |y^{(j)}|) = \sum\limits_{j=1}^{m} |x^{(j)}| + \sum\limits_{j=1}^{m} |y^{(j)}| = ||\mathbf{x}||_1 + ||\mathbf{y}||_1$.
Покажем, что нормы $||\cdot||_1$ и $||\cdot||_2$ эквивалентны.

$$||\mathbf{x}||_1 = \sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}| \cdot 1 \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} 1^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{m} \cdot ||\mathbf{x}||_2.$$

Обратное неравенство:

$$||\mathbf{x}||_2^2 = \sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}|\right)^2 = (||\mathbf{x}||_1)^2 \Rightarrow ||\mathbf{x}||_2 \leq ||\mathbf{x}||_1. \ \Box$$

Замечание. Выясним, что является единичным шаром относительно нормы $||\cdot||_1$.

$$B_1(\mathbf{0}) = \left\{\mathbf{x} : \ \sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}| \leq 1\right\}.$$

Если $m = 2$, то $B_2(\mathbf{0}) = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) : \ |x^{(1)}| + |x^{(2)}| \leq 1\}$. Так как равенство $|x^{(1)}| + |x^{(2)}| = 1$ определяет на плоскости квадрат с вершинами в точках $(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)$, то единичный шар – это квадрат с указанными вершинами.

Теорема 6.2. *Равенство*

$$||\mathbf{x}||_\infty \overset{df}{=} \max_{j=\overline{1,m}} |x^{(j)}|$$

определяет в $\mathbb{R}^m$ *норму, эквивалентную норме* $||\cdot||_2$.

Доказательство. 1) $||\mathbf{x}||_\infty \geq 0$ – очевидно.
2) $||\mathbf{x}||_\infty = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$ – очевидно.
3) $||\lambda\mathbf{x}||_\infty = \max\limits_{j=\overline{1,m}} |\lambda| \cdot |x^{(j)}| = |\lambda| \cdot \max\limits_{j=\overline{1,m}} |x^{(j)}| = |\lambda| \cdot ||\mathbf{x}||_\infty$.
4) Неравенство треугольника: $|x^{(j)} + y^{(j)}| \leq |x^{(j)}| + |y^{(j)}| \leq ||\mathbf{x}||_\infty + ||\mathbf{y}||_\infty$.
Отсюда $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| = \max\limits_{j=\overline{1,m}} |x^{(j)} + y^{(j)}| \leq ||\mathbf{x}||_\infty + ||\mathbf{y}||_\infty$. $\frac{1}{2}\Box$

Покажем, что норма $||\mathbf{x}||_\infty$ эквивалентна норме $||\cdot||_2$

$$|x^{(j)}| = \sqrt{|x^{(j)}|^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}|^2} = ||\mathbf{x}||_2 \Rightarrow ||\mathbf{x}||_\infty = \max_{j=\overline{1,m}} |x^{(j)}| \le ||\mathbf{x}||_2.$$

Противоположное неравенство

$$||\mathbf{x}||_2 = \left(\sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{j=1}^{m} (\max_{k=\overline{1,m}} |x^{(k)}|)^2\right)^{\frac{1}{2}} = ||\mathbf{x}||_\infty \cdot \sqrt{m}. \ \Box$$

Теорема 6.3. *Нормы* $||\mathbf{x}||_1$ *и* $||\mathbf{x}||_\infty$ *эквивалентны.*

Доказательство. 1) $||\mathbf{x}||_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} |x^{(j)}| \le \sum\limits_{j=1}^{m} ||\mathbf{x}||_\infty = m \cdot ||\mathbf{x}||_\infty$.

2) $|x^{(j)}| \le \sum\limits_{j=1}^{m} |x^{(j)}| = ||\mathbf{x}||_1 \Rightarrow \max\limits_{j=\overline{1,m}} |x^{(j)}| \le ||\mathbf{x}||_1 \Rightarrow ||\mathbf{x}||_\infty \le ||\mathbf{x}||_1$. $\Box$

Замечание. Выясним, как выглядит единичный шар в норме $||\cdot||_\infty$. При $m = 2$ $B_1(0) = \{(x^{(1)}, (x^{(2)}) : \max\limits_{j=1,2} |x^{(j)}| \le 1\}$. Равенство $\max(|x^{(1)}|, |x^{(2)}|) = 1$ определяет на плоскости квадрат, вершины которого находятся в точках (1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1). Таким образом единичный шар в норме $||\cdot||_\infty$ тоже квадрат (точнее квадрат вместе с его внутренностью) как и в случае нормы $||\cdot||_1$, но со сторонами, параллельными осям координат.

7. Предел последовательности точек в $\mathbb{R}^m$

В соответствии с тем, что мы определили в $\mathbb{R}^m$ три нормы, мы можем говорить о трех видах сходимости. Пусть $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$ есть последовательность точек в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_n = (x_n^{(j)})_{j=1}^\infty$.
$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ по норме $||\cdot||_1$, если $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_1 = 0$.
$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ по норме $||\cdot||_\infty$, если $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_\infty = 0$.
$\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ по норме $||\cdot||_2$, если $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_2 = 0$.

Теорема 7.1. *Если* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ *по одной из норм* $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$, *то* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ *и по остальным двум нормам.*

Доказательство. Из эквивалентности норм получаем
$||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_\infty \le ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_1 \to 0 \ \ (n \to \infty)$,
$||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_2 \le ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_1 \to 0 \ \ (n \to \infty)$,
т.е. из сходимости по норме $||\cdot||_1$ следует сходимость по нормам $||\cdot||_2$ и $||\cdot||_\infty$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. $\Box$

Теорема 7.2. *Последовательность* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ *в* $\mathbb{R}^m$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\mathbf{x}_n$ *сходится к* $\mathbf{x}_0$ *покоординатно, т.е.*

$$\forall\, j = \overline{1,m}\ \ x_n^{(j)} \to x_0^{(j)}\ (n \to \infty).$$

Доказательство.Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_\infty = 0$. Но

$$|x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| \le \max_{j=\overline{1,m}} |x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| = ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_\infty \to 0,$$

т.е. $\forall\, j$, последовательность $x_n^{(j)} \to x_0^{(j)}$ $(n \to \infty)$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $x_n^{(j)} \to x_0^{(j)}$ $(j = \overline{1,m})$. Отсюда $|x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| \to 0$. Но $||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0||_1 = \sum\limits_{j=1}^{m} |x_n^{(j)} - x_0^{(j)}| \to 0$, т.к. предел суммы равен сумме пределов. □

8. Полнота пространства $\mathbb{R}^m$

Замечание. Так как нормы $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$, $||\cdot||_\infty$ эквивалентны, то последовательность $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$, фундаментальная по одной норме, будет фундаментальна и по двум другим.

Теорема 8.1. *Если последовательность* $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^\infty$ *фундаментальна в* $\mathbb{R}_m$*, то она сходится к некоторому элементу* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}_m$ *по норме пространства* $\mathbb{R}^m$*, т.е.* $\mathbb{R}^m$ *– полное нормированное пространство.*

Доказательство. Выберем в $\mathbb{R}^m$ фундаментальную последовательность $(\mathbf{x}_n)$ по норме $||\cdot||_\infty$, т.е.

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, n_0,\ \forall\, n,k \ge n_0\ \ ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_k||_\infty < \varepsilon.$$

Но для любого вектора $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n_0)},)\ :\ \ x^{(j)} \le \max\limits_{j=\overline{1,m}} |x^{(j)}| = ||\mathbf{x}||_\infty$, следовательно

$$\forall\, n,k \ge n_0\ |x_n^{(j)} - x_k^{(j)}| < \varepsilon,$$

и это верно при всех $j = \overline{1,m}$. Это означает, что последовательности $(x_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ при каждом $j = \overline{1,m}$ фундаментальны. Но $(x_n^{(j)})_{n=1}^\infty$ – числовая последовательность, и по критерию Коши для любого $j = \overline{1,m}$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{(j)} = x_0^{(j)}$. Таким образом определены числа $x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(m)}$, т.е. вектор $\mathbf{x}_0$. Так как последовательность $x_n^{(j)} \to x_0^{(j)}$, то по теореме 7.2 $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$. □

9. Компактные множества в $\mathbb{R}^m$. Замкнутый куб – компактное множество

Определение 9.1. *Пусть* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$*, причем* $\forall\, j,\ a^{(j)} \le b^{(j)}$*. Множество*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}) \stackrel{df}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m :\ a^{(j)} \le x^{(j)} < b^{(j)}\}$$

будем называть замкнутым прямоугольником в $\mathbb{R}^m$*. Если* $\forall\, j = \overline{1, m}\ \ b^{(j)} - a^{(j)} = d$*, то такой прямоугольник называется замкнутым кубом.*

Замечание. Если $\mathbf{d}$ – вектор, все компоненты которого равны числу $d > 0$, то каждый куб $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$ есть замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ с центом в точке $\mathbf{x}_0 = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{d}}{2}$ и радиуса $\frac{d}{2}$ по норме $||\cdot||_\infty$.

Определение 9.2. *Множество* $K \subset \mathbb{R}^m$ *называется компактным в* $\mathbb{R}^m$*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.*

Теорема 9.1. *Замкнутый куб* $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$ *в* $\mathbb{R}^m$ *есть полное множество.*

Доказательство. От противного. Пусть существует покрытие $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha \supset [\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$, где $\mathbf{d} = (d, d, \dots, d)$, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. Разобьем куб $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}]$ на 2^m замкнутых кубов вида $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{d}}{2}]$, где $a_1^{(j)} = a^{(j)}$ или $a_1^{(j)} = a^{(j)} + \frac{d}{2}$. Тогда среди этих кубов найдется по крайней мере один, из покрытия которого множествами G_α $(\alpha \in I)$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Обозначим его через $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{d}}{2}]$. Очевидно, что это замкнутый шар радиуса $\frac{\mathbf{d}}{2^2}$, лежащий внутри $\bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$. Этот куб $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{d}}{2}]$ разделим на 2^m кубов $[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{d}}{2^2}]$, где $a_2^{(j)} = a_1^{(j)}$ или $a_1^{(j)} + \frac{d}{2^2}$. Тогда среди них есть по крайней мере один куб, из покрытия которого множествами G_α $(\alpha \in I)$ нельзя выделить конечное подпокрытие. Обозначим его $[\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{d}}{2^2}]$. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных кубов

$$[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{d}] \supset [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1 + \frac{\mathbf{d}}{2}] \supset [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2 + \frac{\mathbf{d}}{2^2}] \supset \dots,$$

которые являются замкнутыми шарами радиусов $\frac{\mathbf{d}}{2^{n+1}} \to 0$. Так как $\mathbb{R}^m$ полное пространство, то существует точка $\mathbf{x}_0$, принадлежащая всем кубам $[\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_n + \frac{\mathbf{d}}{2^n}]$ одновременно. Очевидно, что $\mathbf{x}_0$ принадлежит некоторому открытому множеству G_{α_0}. Так как G_{α_0} открытое, то существует шар

$B_{\varepsilon_0}(\mathbf{x}_0) \subset G_{\alpha_0}$. Но тогда $\mathbf{x}_0$ принадлежит замкнутому кубу с длиной стороны $< \varepsilon_0$. Пусть это куб $[\mathbf{a}_{n_0}, \mathbf{a}_{n_0} + \frac{\mathbf{d}}{2^{n_0}}]$. Тогда G_{α_0} есть открытое покрытие этого куба, что противоречит построению кубов. □

10. Структура компактного множества в $\mathbb{R}^m$

Определение 10.1. *Множество $X \subset \mathbb{R}^m$ ограничено, если оно лежит внутри некоторого шара.*

Теорема 10.1. *Всякое компактное множество в $\mathbb{R}^m$ ограничено.*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ – компактно. При каждом натуральном n выберем окрестность $O_n(0)$. Объединение этих окрестностей есть все $\mathbb{R}^m$, и значит совокупность окрестностей $O_n(0)$ образует открытое покрытие множества K. Так как K компактно, то из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $(O_n(0))_{n=1}^N$. Тогда множество K лежит в шаре $O_N(0))$ с центром в точке $\mathbf{x}_0 = 0$ радиуса $R = N$. Это означает, что K – ограниченное множество. □

Теорема 10.2. *Всякое компактное множество в $\mathbb{R}^m$ замкнуто.*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ компактно. Покажем, что оно замкнуто. Выберем точку $\mathbf{a}$ – предельную точку множества K. Покажем, что $\mathbf{a} \in K$. Рассуждаем от противного. Пусть это не так, т.е. $\mathbf{a} \notin K$. Выберем произвольную точку $\mathbf{x} \in K$. Так как $\mathbf{a} \notin K$, то существует $O(\mathbf{x})$, которая не пересекается с некоторой $O_{r_x}(\mathbf{a})$. Совокупность всех таких окрестностей $O(\mathbf{x})$ образует покрытие множества K. Но K – компактное множество. Следовательно, можно выбрать конечное число окрестностей

$$O_{r_1}(\mathbf{x}_1), O_{r_2}(\mathbf{x}_2), \dots O_{r_n}(\mathbf{x}_n),$$

которые покрывают множество K. Каждая окрестность $O_{r_j}(\mathbf{x}_j)$ не пересекается с окрестностью $O_{r_{x_j}}(\mathbf{a})$ (по построению). Пусть

$$r = \min(r_{x_1}, r_{x_2}, \dots, r_{x_m}) > 0.$$

В окрестности $O_r(\mathbf{a})$ нет точек множества K, т.е. $\mathbf{a}$ не является предельной точкой, что противоречит выбору $\mathbf{a}$. □

Теорема 10.3. *Если K – компактное множество и $F \subset K$ – замкнутое множество, то F – компактно.*

Доказательство. Выберем покрытие множества F открытыми множествами $(G_\alpha)_{\alpha\in I}$. Если $\cup G_\alpha \supset K$, то все доказано.

Пусть неверно, что $\cup G_\alpha \supset K$. Для каждой точки $\mathbf{x} \in K \setminus (\cup G_\alpha)$ выберем окрестность $O(\mathbf{x})$, которая не содержит точек множества F, что возможно, ибо F замкнутое множество. Тогда множества G_α и $O(\mathbf{x})$ образуют открытое покрытие множества K. Но K – компактно, следовательно, можно выделить конечное подпокрытие множества K

$$G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \ldots \cup G_{\alpha_n} \cup O(\mathbf{x}_1) \cup \ldots \cup O(\mathbf{x}_s).$$

Но множество $O(\mathbf{x}_1) \cup \ldots \cup O(\mathbf{x}_s)$ не содержит точек из F, тогда множества $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \ldots, G_{\alpha_m}$ образуют конечное покрытие F. Т.е. F – компактно. $\square$

Теорема 10.4. *В пространстве $\mathbb{R}^m$ множество K компактно тогда и только тогда, когда K ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь – это теорема 10.1 и теорема 10.2.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть K ограничено и замкнуто. Так как K замкнуто, то существует замкнутый куб $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{d}] \supset K$. Но куб $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{d}]$ – компактное множество по теореме 9.1, K – замкнутое и $K \subset [\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{d}]$, следовательно, по теореме 10.3 K – компактно. $\square$
Замечание. В общем случае (т.е. не в пространстве $\mathbb{R}^m$) теорема 10.4 неверна. Этот факт будет доказан в курсе топологии.

Теорема 10.5. *$K \subset \mathbb{R}^m$ компактно тогда и только тогда, когда из любой последовательности $(\mathbf{x})_{n=1}^{\infty}$ элементов из K можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к элементу $\mathbf{x}_0 \in K$.*

11. Структура открытого множества в $\mathbb{R}^m$

Определение 11.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbf{i} = (i^{(1)}, i^{(2)}, \ldots, i^{(m)}) \in \mathbb{Z}^m$. Прямоугольник*

$$\Delta_{\mathbf{i}}^{(n)} = \left[\frac{i^{(1)}}{2^n}, \frac{i^{(1)}+1}{2^n}\right) \times \left[\frac{i^{(2)}}{2^n}, \frac{i^{(2)}+1}{2^n}\right) \times \ldots \times \left[\frac{i^{(n)}}{2^n}, \frac{i^{(n)}+1}{2^n}\right)$$

будем называть двоичным кубом ранга n.

Замечание. Если на плоскости $\mathbb{R}^2$ провести прямые $x^{(1)} = \frac{i}{2^n}$, $x^{(2)} = \frac{j}{2^n}$, то вся плоскость $\mathbb{R}^2$ будет разбита на счетное семейство дизъюнктных двоичных кубов ранга n.

Теорема 11.1. *Всякое открытое множество в* $\mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$ *есть объединение счетного семейства дизъюнктных двоичных кубов.*

Доказательство. Пусть $G \subset \mathbb{R}^m$ – открытое множество. Из всех двоичных кубов $\Delta_{\mathbf{i}}^{(0)}$ ранга $n = 0$ выберем те кубы, которые лежат внутри G. Обозначим через $\mathcal{N}_0$ – семейство этих кубов и через E_0 их объединение. Рассмотрим кубы ранга $n = 1$. Обозначим через $\mathcal{N}_1$ совокупность кубов ранга $n = 1$, которые лежат внутри $G \setminus E_0$ и пусть E_1 их объединение. Продолжим этот процесс до бесконечности. Получим семейство множеств $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ таких, что
1) E_n – объединение дизъюнктных кубов ранга n,
2) E_n – лежит внутри множества $G \setminus E_0 \setminus E_1 \setminus \ldots \setminus E_{n-1}$. Очевидно, что $\bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n \subset G$, так как любое $E_n \subset G$. Покажем, что $\bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n \supset G$. Выберем $\mathbf{x}_0 \in G$ и покажем, что $\mathbf{x}_0 \in \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$. Так как G – открытое, то существует окрестность $O_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset G$. Если n такое, что $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$, то внутри $O_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ есть двоичный куб ранга n, содержащий $\mathbf{x}_0$ и лежащий внутри $O_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ и, следовательно, внутри G. Пусть n_0 есть наименьший из тех n, для которых $\Delta_{\mathbf{i}}^{(n)} \subset G$ и содержащих точку $\mathbf{x}_0$. Тогда этот куб $\Delta_{\mathbf{i}}^{(n_0)}$ есть один из кубов семейства $\mathcal{N}_{n_0}$. Отсюда

$$\Delta_{\mathbf{i}}^{(n_0)} \subset \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n \Rightarrow \mathbf{x}_0 \in \bigsqcup_{n=0}^{\infty} E_n.$$

Т.е. $G \subset \bigsqcup\limits_{n=0}^{\infty} E_n$. $\square$

12. Функции m переменных. Различные определения предела в точке

Определение 12.1. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 2)$. *Отображение* $f : X \to \mathbb{R}$ *называется функцией* m *переменных. Если* $f : \mathbf{x} \to y$, *то* y *называют значением функции в точке* $\mathbf{x}$ *и пишут* $y = f(\mathbf{x})$. *Так как* $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$, *то вместо* $y = f(\mathbf{x})$ *можно писать* $y = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)})$. *Множество* $f(X) = \{y \in \mathbb{R} : \exists \mathbf{x} \in \mathbf{X},\ y = f(\mathbf{x})\}$ *– это множество всех значений* $f(\mathbf{x})$ *для* $\mathbf{x} \in X$. $f(X)$ *называется образом множества* X.

Определение 12.2. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0$ *– предельная точка на* X. *Число*

f_0 называется пределом функции f в точке $\mathbf{x}_0$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0\, \forall\, \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,\ ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta\ \Rightarrow\ |f(\mathbf{x}_0) - f_0| < \varepsilon.$$

Обозначаем

$$f_0 = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}).$$

Замечание 1. Так как нормы $||\cdot||_1,\ ||\cdot||_2$ и $||\cdot||_\infty$ эквивалентны, то определение предела не зависит от того, какая норма используется в определении.
Замечание 2. Определение 1.2 можно записать в виде

$$\forall\, O_\varepsilon(f_0)\, \exists\, O_\delta(\mathbf{x}_0)\, \forall\, \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap X,\ \ f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f_0).$$

Это определение на языке окрестностей.

Теорема 12.1. *Пусть $\mathbf{x}_0$ – предельная точка множества X, f определена на X. $f_0 = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ тогда и только тогда, когда для любой последовательности $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0,\ (\mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_n \in X)\ \ \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f_0$.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f_0 = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. Выбираем последовательность $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$, тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0,\ \ ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f_0| < \varepsilon.$$

Так как $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$, то $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0\ \ ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|| < \delta$, значит $\forall\, n \geq n_0,\ \ |f(\mathbf{x}_n) - f_0| < \varepsilon$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\forall\, \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0,\ \lim f(\mathbf{x}_n) = f_0$. Покажем, что $f_0 = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. Предположим, что это не верно. Тогда

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0,\ \forall\, \delta = \frac{1}{n},\ \exists\, \mathbf{x}_n \neq \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_n \in X\ \ ||\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_0|| < \frac{1}{n},\ \ |f(\mathbf{x}_n) - f_0| \geq \varepsilon_0,$$

т.е. $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$, но $f(\mathbf{x}_n) \not\to f_0$. Получили противоречие. □
Замечание. Таким образом, определение предела можно задать в виде:

Определение 12.3.

$$f_0 = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \overset{df}{=} \forall\, \mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0,\ (\mathbf{x}_n \in X,\ \mathbf{x}_n \neq x_0)\ \ f(\mathbf{x}_n) \to f_0.$$

Это определение предела на языке на языке последовательностей или по Гейне.

13. Свойства предела функции в точке

1) Если $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ существует, то он единственный.

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \wedge B = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. По определению предела

$$\forall\,\varepsilon > 0,\ \exists\,\delta_1 > 0,\ \forall\,\mathbf{x} \in X, \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0,\ \mathbf{x} \in X,\ \ |f(\mathbf{x}) - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и

$$\exists\,\delta_2 > 0,\ \forall\,\mathbf{x} \in X, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta_2\ \ |f(\mathbf{x}) - B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Тогда $\forall\,\mathbf{x},\ |\mathbf{x}-\mathbf{x}_0| < \delta\ \ |B-A| \leq |B-f(\mathbf{x})|+|f(\mathbf{x})-A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Отсюда $|B - A| = 0$, следовательно, $A = B$. $\square$

2) Если $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A \neq 0$, то $\exists\ \overset{\circ}{O}_\delta (\mathbf{x}_0)$, в которой $\mathrm{sign} f(\mathbf{x}) = \mathrm{sign} A$.

3) Если $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A \wedge \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = B$, то

3.1. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$.

3.2. $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} (f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x})) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \cdot \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$.

3.3. $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}\ \ \exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \lambda f(\mathbf{x}) = \lambda \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$.

3.4. Если $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = B \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{1}{g(\mathbf{x})} = \frac{1}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}$.

3.5. Если $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = B \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})}{\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}$.

4) Если в $\overset{\circ}{O} (\mathbf{x}_0) \cap X,\ h_1(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}) \leq h_2(\mathbf{x})$ и $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h_1(\mathbf{x}) = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} h_2(\mathbf{x}) = A$, то $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = A$.

5) Если в $\overset{\circ}{O} (\mathbf{x}_0) \cap X,\ f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x})$, то $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \leq \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$.

6) Если $f(\mathbf{x})$ ограничена на множестве X, т.е. $\exists\, c > 0\ \forall\,\mathbf{x} \in X,\ \ |f(\mathbf{x})| \leq c$ и $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = 0$, то $\exists \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{x}) = 0$.

7) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty \overset{df}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{1}{f(\mathbf{x})} = 0$.

8) $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty \Leftrightarrow \forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall\,\mathbf{x} \in \overset{\circ}{O}_\delta (\mathbf{x}_0) \cap X\ \ |f(\mathbf{x})| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Все свойства 2)–8) доказываются аналогично одномерному случаю. Доказать самостоятельно.

14. Предел по направлению

Определение 14.1. *Пусть* $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{e}_0$ *– единичный вектор в* $\mathbb{R}^m$, *т.е.* $||\mathbf{e}_0||_2 = 1$. *Множество* $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{e}\}$ *называют прямой в* $\mathbb{R}^m$.

Определение 14.2. *Пусть* f *определена в* $\overset{\circ}{O}_\delta (\mathbf{x}_0)$ *и пусть* $l : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ *– прямая, проходящая через точку* $\mathbf{x}_0$. *Рассмотрим функцию* $F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})$, *которая есть функция одной переменной* t. *Число* $\lim\limits_{t\to 0} F(t) = \lim\limits_{t\to 0} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})$ *называется пределом по направлению* l *или по направлению вектора* $\mathbf{e}$. *Обозначается* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0, \mathbf{x}\in l} f(\mathbf{x})$.

Теорема 14.1. *Если* f *определена в* $\overset{\circ}{O}_\delta (\mathbf{x}_0)$ *и в точке* $\mathbf{x}_0$ *существует предел, равный* A, *то в точке* $\mathbf{x}_0$ *существует предел по любому направлению* l, *равный этому числу* A.

Доказательство. Пусть $A = \lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$. Тогда $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0, \ \forall\, \mathbf{x} \ \ ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2 < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$. Пусть теперь $|t| < \delta$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$. Тогда $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2 = |t| \cdot ||\mathbf{e}||_2 = |t| < \delta$. Отсюда $\forall\, t \neq 0, \ |t| < \delta, \ \ |f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}) - A| < \varepsilon$, следовательно, предел по направлению l равен A. $\square$
Замечание. Обратное неверно. Для примера рассмотрим функцию $f(x, y) = 0$ на плоскости XOY кроме точек (x, y), лежащих на параболе $y = x^2$, в которых $f(x, y) = 1$. Тогда по любому направлению l $\lim f(x, y) = 0$. Но $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ не существует, т.к. в любой $O(0, 0)$ есть точки, в которых $f(x, y) = 0$ и $f(x, y) = 1$.

15. Повторные пределы

Рассмотрим для простоты случай размерности $m = 2$.

Определение 15.1. *Пусть* $f(x, y)$ *определена в прямоугольной окрестности точки* (x_0, y_0) *за исключением быть может точки* (x_0, y_0). *Предел* $\lim\limits_{y\to y_0} \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) \right)$ *называется повторным пределом.*

Вопрос: когда $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ равен повторному?

Теорема 15.1. *Пусть* $f(x, y)$ *определена в прямоугольной окрестности точки* (x_0, y_0) *за исключением быть может точки* (x_0, y_0), *и пусть*
1) $\forall\, y \ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$.

2) $\exists \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$.
Тогда существует повторный предел $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

Доказательство. Запишем разность

$$|\varphi(y) - A| \leq |\varphi(y) - f(x,y)| + |f(x,y) - A|.$$

По определению предела в точке

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta_1 > 0\ \forall\, (x,y),\ \ |x - x_0| < \delta_1,\ |y - y_0| < \delta,\ \ |f(x,y) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть теперь y такое, что $|y - y_0| < \delta$. Так как $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y)$, то $\exists\, \delta_2 < \delta$, такое, что $\forall\, x,\ |x - x_0| < \delta_2\ \ |f(x,y) - \varphi(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\square$

16. Непрерывность функции в точке

Определение 16.1. *Пусть f определена на $X \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in X$. f называется непрерывной в точке $\mathbf{x}_0$, если*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall\, \mathbf{x} \in X,\ \ ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

Это определение на языке $\varepsilon - \delta$ (по Коши).

Определение 16.2. *Функция f непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, если*

$$\forall\, O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0)) \exists O_\delta(\mathbf{x}_0)\ \forall\, \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap X\ \ f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0)).$$

Это определение на языке окрестностей.

Определение 16.3. *Функция f непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, если*

$$\forall\, O(f(\mathbf{x}_0)) \exists O_\delta(\mathbf{x}_0)\ \ f(O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap X) \subset O_\varepsilon(f(\mathbf{x}_0)).$$

Это топологическое определение.

Теорема 16.1. *Если $\mathbf{x}_0$ – предельная точка множества X, то f непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$ тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Доказательство повторяет одномерный случай.

17. Свойства непрерывных функций

Теорема 17.1. *Пусть f, g непрерывны в точке $\mathbf{x}_0 \in X$, f, g определены на X. Тогда*
1) $f \pm g$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.
2) $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$ функция λf непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.
3) $f \cdot g$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.
4) Если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то $\exists\, O(\mathbf{x}_0)$, в которой $|g(\mathbf{x})| \geq \frac{|g(\mathbf{x}_0)|}{2}$.
5) Если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то $\exists\, O(\mathbf{x}_0)$, в которой $sign\, g(\mathbf{x}) = sign\, g(\mathbf{x}_0)$.
6) Если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то $\frac{1}{g(\mathbf{x})}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.
7) Если $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, то $\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.
8) Если $f(\mathbf{x})$ непрерывна, то $|f(\mathbf{x})|$ – непрерывная функция.

Эти свойства доказываются так же, как в одномерном случае. Доказать самостоятельно.
Примеры. 1) $f(\mathbf{x}) = x^{(j)}$ – непрерывная функция в любой точке $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$. В самом деле, $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| = |x^{(j)} - x_0^{(j)}| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_\infty$, и, если $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_\infty < \varepsilon$, то в определении надо взять $\delta = \varepsilon$.
2) Функция $P_n(\mathbf{x}) = \sum\limits_{n_1+\ldots+n_m \leq n} a_{n_1 n_2 \ldots n_m} (x^{(1)})^{n_1} (x^{(2)})^{n_2} \ldots (x^{(m)})^{n_m}$ – называется многочленом степени n от m переменных. Так как он выражается через функции $f_j(\mathbf{x}) = x^{(j)}$ с помощью конечного числа операций сложения и умножения, то многочлен $P_n(\mathbf{x})$ есть непрерывная функция.

18. Свойства функций непрерывных на компактных множествах

Определение 18.1. *Функция f, определенная на $X \subset \mathbb{R}^m$, называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке множества X. Функция f называется ограниченной на X, если $\exists\, c > 0$, $\forall\, \mathbf{x} \in X$ $|f(\mathbf{x})| \leq c$.*

Теорема 18.1. *Если f непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то f ограничена на K.*

Доказательство. От противного. Пусть f не является ограниченной на K. Тогда

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\; \exists\, \mathbf{x}_n \in K, \;\; |f(\mathbf{x}_n)| \geq n. \tag{18.1}$$

Последовательность $(\mathbf{x}_n)_{n=1}^{\infty}$ принадлежит компакту K, значит, из нее можно выделить подпоследовательность $\mathbf{x}_{n_k} \to \mathbf{x}_0 \in K$. Но f непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, следовательно, $f(\mathbf{x}_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_{n_k})$. Отсюда последовательность $f(\mathbf{x}_{n_k})$ – ограничена, что противоречит предположению (18.1). $\square$

Теорема 18.2. *Если функция f непрерывна на компакте K, то она достигает на компакте K своего наибольшего и наименьшего значения.*

Доказательство. Так как f непрерывна на компакте K, то по теореме 18.1 f ограничена на K. Значит множество $f(K)$ – ограничено. Следовательно,

$$\exists \sup_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x}) = M, \qquad \exists \inf_{\mathbf{x}\in K} f(\mathbf{x}) = m.$$

По определению sup существует последовательность $\mathbf{x}_n \in K$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = M \quad \text{и} \quad f(\mathbf{x}_n) \le M.$$

Из последовательности $\mathbf{x}_n$ выделяем сходящуюся подпоследовательность $\mathbf{x}_{n_k} \to \mathbf{x}_0 \in K$. Так как f непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, то $f(\mathbf{x}_0) = \lim f(\mathbf{x}_{n_k}) = M$, т.е. существует точка $\mathbf{x}_0$, в которой f принимает наибольшее значение.

Аналогично доказывается, что в некоторой точке $\mathbf{y}_0$ функция f принимает наименьшее значение. $\square$

Определение 18.2. *Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X, если*

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists \delta > 0 \,\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in X \ \ ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon.$$

Очевидно, что если f равномерно непрерывна на X, то она непрерывна.

Теорема 18.3. *Если функция f непрерывна на компакте $K \subset \mathbb{R}^m$, то f равномерно непрерывна на K.*

Доказательство. От противного. Пусть f не равномерно непрерывна. Тогда

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta = \frac{1}{n}, \exists \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n, ||\mathbf{x}_n - \mathbf{y}_n|| < \frac{1}{n}, \ \text{но} \ |f(\mathbf{x}_n) - f(\mathbf{y}_n)| \ge \varepsilon_0. \quad (18.2)$$

Так как K компактно, то из $\mathbf{x}_n$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\mathbf{x}_{n_k} \to \mathbf{x}_0 \in K$. Тогда и $\mathbf{y}_{n_k} \to \mathbf{x}_0$. Так как f непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, то $f(\mathbf{x}_0) = \lim f(\mathbf{x}_{n_k}) = \lim f(\mathbf{y}_{n_k})$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} |f(\mathbf{x}_{n_k}) - f(\mathbf{y}_{n_k})| = 0$, что противоречит (18.2). $\square$

19. Отображение из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, непрерывные отображения

Определение 19.1. *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^m$ *и* $\mathbf{f}: \ X \to \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, *тогда отображение* $\mathbf{f}$ *называется отображением из* $\mathbb{R}^m$ *в* $\mathbb{R}^n$. *Таким образом* $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ *есть вектор в* $\mathbb{R}^n$, *т.е.*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(n)}).$$

Замечание. Так как $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, то при каждом $j = 1, \ldots, n$ значение $y^{(j)}$ есть функция переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, обозначим ее $f^{(j)}(\mathbf{x})$. Тогда $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ есть вектор $(f^{(1)})(\mathbf{x}), f^{(2)})(\mathbf{x}), \ldots, f^{(n)})(\mathbf{x})$. Таким образом, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ можно рассматривать как совокупность из n скалярных векторов $f^{(j)}(\mathbf{x})$, $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Определение 19.2. *Вектор* $\mathbf{A} = (A^{(j)})_{j=1}^n$ *называется пределом отображения* $\mathbf{f}$ *в точке* $\mathbf{x}_0$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \ \forall \mathbf{x} \in X, \ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0, \ \ ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \Rightarrow ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}|| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\mathbf{A} = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$.

Теорема 19.1. $\mathbf{A} = \lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\forall j = \overline{1, n} \ \ A^{(j)} = \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f^{(j)}(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Так как $|A^{(j)} - f^{(j)}(\mathbf{x})| \leq ||\mathbf{A} - \mathbf{f}(\mathbf{x})||_\infty$, то необходимость очевидна.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \, \delta_j$ $(j = \overline{1, n})$, что $\forall \mathbf{x} \in \overset{\circ}{O}_{\delta_j}(\mathbf{x}_0)$ $|f^{(j)}(\mathbf{x}) - A^{(j)}| < \varepsilon$. Пусть $\delta = \min \delta_j$. Тогда

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{O}_\delta(\mathbf{x}_0) \ \ ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}||_\infty < \varepsilon. \ \square$$

Определение 19.3. *Пусть* $\mathbf{f}: \ X \to \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in X$. $\mathbf{f}$ *называется непрерывной в точке* $\mathbf{x}_0$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \mathbf{x} \in X, \ \ ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \Rightarrow ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|| < \varepsilon.$$

Замечание. Из определения 19.2 и 19.1 следует, что если $\mathbf{x}_0$ есть предельная точка X, то $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, если $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$.

Теорема 19.2. *Вектор-функция* $\mathbf{f}$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}_0$ *тогда и только тогда, когда функции* $f^{(k)}(\mathbf{x})$ $(k = \overline{1, n})$ *непрерывны в точке* $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь очевидно следует из неравенства

$$|f^{(k)}(\mathbf{x}) - f^{(k)}(\mathbf{x}_0)| \leq ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)||_\infty.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f^{(k)}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$ ($k = \overline{1,n}$). Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta_k > 0\, \forall \mathbf{x} \in X, \;\; ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta_k \Rightarrow |f^{(k)}(\mathbf{x}) - f^{(k)}(\mathbf{x}_0)| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = \min \delta_k$, имеем

$$\forall \mathbf{x} \in X, \;\; ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \Rightarrow \max_{k=\overline{1,n}} |f^{(k)}(\mathbf{x}) - f^{(k)}(\mathbf{x}_0)| = ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)||_\infty < \varepsilon. \;\; \Box$$

Задача. Доказать теорему 19.2, используя 19.1.

Теорема 19.3. *Пусть 1) вектор-функция* $\mathbf{f}$ *определена в* $X \subset \mathbb{R}^m$, $\mathbf{x}_0 \in X$, $\mathbf{f}$ *непрерывна в точке* $\mathbf{x}_0$*;*
2) вектор-функция $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ *определена на множестве* $T \subset \mathbb{R}^l$, $\mathbf{t}_0 \in T$, $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ *непрерывна в точке* $\mathbf{t}_0$, $\mathbf{x}(\mathbf{t}_0) = \mathbf{x}_0$*;*
3) значения $\mathbf{x}(\mathbf{t}) \subset X$*, если* $\mathbf{t} \in T$*, т.е.* $\mathbf{x}(T) \subset X$*.*
Тогда композиция $\mathbf{f} \circ \mathbf{x}$ *непрерывна в точке* $\mathbf{t}_0$*.*

Доказательство. По определению $(\mathbf{f} \circ \mathbf{x})(\mathbf{t}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$. Так как $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, то

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \mathbf{x} \in X, \;\; ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|| < \delta \Rightarrow ||\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)|| < \varepsilon.$$

Так как $\mathbf{x}(\mathbf{t})$ непрерывна в точке $\mathbf{t}_0$, то для выбранного $\delta > 0$ $\exists \sigma > 0\, \forall \mathbf{t}$, $||\mathbf{t} - \mathbf{t}_0|| < \sigma \Rightarrow ||\mathbf{x}(\mathbf{t}) - \mathbf{x}(\mathbf{t}_0)|| < \delta$, значит, $||\mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t})) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(\mathbf{t}_0))|| < \varepsilon$. Следовательно, $\mathbf{f}$ непрерывна в точке $\mathbf{t}_0$. $\Box$

Т.е. композиция двух непрерывных вектор-функций есть непрерывная вектор-функция.

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций многих переменных

1. Частные производные. Дифференцируемость функции в точке

Определение 1.1. *Пусть f определена в $O(\mathbf{x}_0)$, $\;f : O(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}$. Если существует конечный предел*

$$\lim_{x^{(j)} \to x_0^{(j)}} \frac{f(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(j-1)}, x^{(j)}, x_0^{(j+1)}, \ldots, x_0^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(j-1)}, x_0^{(j)}, \ldots, x_0^{(m)})}{x^{(j)} - x_0^{(j)}},$$

то он называется частной производной функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0$ по переменной $x^{(j)}$. Обозначение: $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}$ или $\left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$. Таким образом, в точке $\mathbf{x}_0$ может существовать m частных производных

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(1)}}, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(2)}}, \ldots, \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(m)}}.$$

Замечание. Из определения следует, что для нахождения производной $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$ нужно зафиксировать все переменные, кроме $x^{(j)}$, и искать производную по этой переменной $x^{(j)}$ как от функции одной переменной. Поэтому при нахождении частной производной $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$ остаются справедливы формулы нахождения производных суммы, произведения, частного.

Определение 1.2. *Пусть f определена в $O(\mathbf{x}_0)$. f называется дифференцируемой в точке $\mathbf{x}_0$, если существуют числа $A_1, A_2, \ldots, A_m$, зависящие от точки $\mathbf{x}_0$, такие, что приращение $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ можно представить в виде*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} A_j \cdot (x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x}) \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||, \tag{1.1}$$

где $\alpha(\mathbf{x})$ *определена в* $O(\mathbf{x}_0)$ *и* $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\alpha(\mathbf{x}) = 0$.

Теорема 1.1. *Если* f *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}_0$, *то в точке* $\mathbf{x}_0$ *существуют все частные производные* $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}$ *и справедливы равенства* $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} = A_j$.

Доказательство. Пусть f дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$. Положим в (1.1)

$$x^{(1)} = x_0^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)} = x_0^{(j-1)}, x^{(j+1)} = x_0^{(j+1)}, \ldots, x^{(m)} = x_0^{(m)}.$$

Тогда (1.1) примет вид

$$f(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(j-1)}, x^{(j)}, x_0^{(j+1)}, \ldots, x_0^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(m)}) =$$
$$= A_j(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x}) \cdot |x^{(j)} - x_0^{(j)}|.$$

Отсюда

$$\frac{f(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(j-1)}, x^{(j)}, x_0^{(j+1)}, \ldots, x_0^{(m)}) - f(\mathbf{x}_0)}{x^{(j)} - x_0^{(j)}} = A_j + \alpha(\mathbf{x}) \cdot \operatorname{sign}(x^{(j)} - x_0^{(j)}).$$

Перейдем к пределу при $x^{(j)} \to x_0^{(j)}$. Тогда $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, значит, $\alpha(\mathbf{x}) \to 0$. Следовательно, предел правой части существует и равен A_j. Но тогда существует предел и левой части, который и есть частная производная по $x^{(j)}$. $\square$

Замечание. Обратное утверждение неверно, т.е. из существования частной производной не следует дифференцируемость. Например,

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \wedge y \neq 0. \\ 0, & x = 0 \vee y = 0. \end{cases}$$

Тогда обе частные производные в точке $(x, y) = (0, 0)$ равны нулю, т.е. равенство (1.1) принимает вид

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \alpha(x, y)||(x, y) - (x_0, y_0)||. \qquad (1.2)$$

Но если $x = y$, причем $x \neq 0$, то $f(x, y) - f(x_0, y_0) = 1 - 0 = 1 \not\to 0$, и равенство (1.2) невозможно.

2. Дифференцируемость функции, имеющей непрерывные частные производные

Вопрос: в каком случае из существования частных производных следует дифференцируемость?

Теорема 2.1. *Пусть f имеет в $O(\mathbf{x}_0)$ частные производные, которые непрерывны в точке $\mathbf{x}_0$. Тогда*
1) f непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$.
2) f дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$.

Доказательство. Рассмотрим разность

$$\begin{gathered}
f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(m)}) = \\
= f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x^{(m)}) + \\
+ f(x_0^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(m)}) + \\
+ f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x^{(3)}, \dots, x^{(m)}) - \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \dots, x_0^{(m-1)}, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(m-1)}, x_0^{(m)}) =
\end{gathered}$$

по теореме Лагранжа для функции одной переменной

$$= \frac{\partial f(\xi_1)}{\partial x^{(1)}}(x^{(1)} - x_0^{(1)}) + \frac{\partial f(\xi_2)}{\partial x^{(2)}}(x^{(2)} - x_0^{(2)}) + \dots + \frac{\partial f(\xi_m)}{\partial x^{(m)}}(x^{(m)} - x_0^{(m)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right)(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) \qquad (2.1)$$

Обозначим $\sum\limits_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right)(x^{(j)} - x_0^{(j)}) = \alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2$. Тогда (2.2) примет вид

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2. \qquad (2.2)$$

Покажем, что $\alpha(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. По неравенству Гельдера

$$\left| \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right)(x^{(j)} - x_0^{(j)}) \right| \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right)^2 \right)^{1/2} \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2.$$

Отсюда

$$|\alpha(\mathbf{x})| \le \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f(\xi_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \right)^2 \right)^{1/2} \to 0$$

при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, т.к. в этом случае $\xi_j \to \mathbf{x}_0$. $\square$

3. Производная сложной функции

Теорема 3.1. *Пусть 1)* $f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)})$ *дифференцируема в точке* $\mathbf{x}_0$*;*
2) функции $x^{(j)} = x^{(j)}(t)$ *дифференцируемы в точке* $t = t_0$*;*
3) $x^{(j)}(t_0) = x_0^{(j)}$*.*
Тогда 1) функция $F(t) = f(x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), \dots, x^{(m)}(t))$ *дифференцируема в точке* $t = t_0$*;*
2) справедливо равенство

$$\frac{d\,F(t_0)}{d\,t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{d\,x^{(j)}(t_0)}{d\,t}. \tag{3.1}$$

Доказательство. Так как f дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, то

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2. \tag{3.2}$$

где $\alpha(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Будем считать, что $\alpha(\mathbf{t}_0) = 0$, тогда $\alpha(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$. Так как функции $x^{(j)}(t)$ дифференцируемы в точке $t = t_0$, то

$$x^{(j)}(t) - x^{(j)}(t_0) = \frac{d\,x^{(j)}(t_0)}{d\,t}(t - t_0) + \alpha_j(t)|t - t_0| \quad (j = \overline{1, m}), \tag{3.3}$$

где $\alpha_j(t) \to 0$ при $t \to t_0$. Будем считать, что $\alpha_j(t_0) = 0$. В этом случае $\alpha_j(t)$ непрерывны в точке $t = t_0$. По условию $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Подставляя значения $x^{(j)}(t) - x^{(j)}(t_0) = x^{(j)}(t) - x_0^{(j)}$ из (3.3) в (3.2), получим

$$F(t) - F(t_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \left(\frac{d\,x_0^{(j)}}{d\,t}(t - t_0) + \alpha_j(t)|t - t_0| \right) +$$

$$+\alpha(\mathbf{x}(t))||\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)||_2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \frac{d\,x^{(j)}(t_0)}{d\,t}(t - t_0) +$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \alpha_j(t) \right) |t - t_0| + \alpha(\mathbf{x}(t)) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}(t) - x^{(j)}(t_0)|^2 \right)^{1/2} \tag{3.4}$$

Учитывая (3.3), имеем

$$\left(\sum_{j=1}^{m} |x^{(j)}(t) - x^{(j)}(t_0)|^2 \right)^{1/2} = |t - t_0| \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d\,x^{(j)}(t_0)}{d\,t} + \alpha_j(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.5}$$

Подставим (3.5) в (3.4). Обозначим

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \alpha_j(t) + \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d\,x^{(j)}(t_0)}{d\,t} + \alpha_j(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \alpha(\mathbf{x}(t)) = \beta(t).$$

Покажем, что $\lim\limits_{t\to t_0} \beta(t) = 0$.

1) Так как $\alpha_j(t) \to 0$ при $t \to t_0$, то $\sum\limits_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \alpha_j(t) \to 0$.

2) Так как $\lim \alpha_j(t) \to 0$, то

$$\lim_{t\to t_0} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(\frac{d\,x^{(j)}(t_0)}{d\,t} + \alpha_j(t) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

3) Так как $\mathbf{x}(t)$ непрерывна в точке t_0 и $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, функция $\alpha(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$ и $\alpha(\mathbf{x}_0) = 0$, но функция $\alpha(\mathbf{x}(t))$ непрерывна в точке $t = t_0$ и $\alpha(\mathbf{x}(t_0)) = 0$. Отсюда $\lim\limits_{t\to t_0} \alpha(\mathbf{x}(t)) = 0$. Это означает, что $\beta(t) \to 0$ при $t \to t_0$. Запишем (3.4) в виде

$$F(t) - F(t_0) = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \frac{d\,x^{(j)}(t_0)}{d\,t} \right) (t - t_0) + \beta(t) \cdot |t - t_0|.$$

Это означает, что F дифференцируема в точке $t = t_0$, и справедливо (3.1). $\square$

Пример. $f(x, y) = xy^2,\ x = \sin^2 t,\ y = \cos t$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d\,x}{d\,t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d\,y}{d\,t} = y^2 \cdot 2 \sin t \cdot \cos t + 2xy \cdot (-\sin t).$$

4. Производная по направлению. Вектор-градиент

Определение 4.1. *Пусть $f(\mathbf{x})$ определена в $O(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{e}$ – единичный вектор, $l:\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ – прямая, проходящая через точку $\mathbf{x}_0$. Тогда функция $F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e})$ есть функция переменной t, при этом точка $\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ пробегает прямую l. Производная $F'(0)$ называется производной функции f в точке $\mathbf{x}_0$ по направлению l (или по направлению вектора $\mathbf{e}$) и обозначают*

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial l} \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}}.$$

Теорема 4.1. *Пусть f дифференцируема в точке $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{e}$ – единичный вектор с координатами*

$$\mathbf{e} = (e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(m)}).$$

Тогда в точке $\mathbf{x}_0$ существует производная по направлению $\mathbf{e}$, и справедливо равенство

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot e^{(j)}.$$

Доказательство. Функция $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}$ имеет координаты $x^{(j)}(t) = x_0^{(j)} + te^{(j)}$, которые есть дифференциал функции в точке $t = 0$ и $x^{(j)}(0) = x_0^{(j)}$. По теореме о дифференцируемости сложной функции функция $F(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{e})$ дифференцируема в точке $t = 0$ и

$$F'(0) = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{d\, x^{(j)}(t)}{d\, t}\ \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot e^{(j)}. \ \square$$

Определение 4.2. *Вектор с координатами $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}$ называется вектором-градиентом и обозначается $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$. Таким образом, по определению*

$$\mathrm{grad\, f}(\mathbf{x}_0) = \sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{m}} \frac{\partial \mathrm{f}(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathrm{x}^{(\mathrm{j})}} \cdot \mathbf{e}_{\mathrm{j}},$$

где $\mathbf{e}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Следствие 1. Из определения вектора $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ и теоремы 4.1 следует, что

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}} = (\operatorname{grad} f(\mathbf{x}), \mathbf{e}),$$

т.е. $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}}$ есть скалярное произведение вектора $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ на вектор $\mathbf{e}$.

Следствие 2. По неравенству Коши – Буняковского

$$||(\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0), \mathbf{e})||_2 \leq ||\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)||_2 \cdot ||\mathbf{e}||_2 = ||\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)||_2.$$

Но в неравенстве Коши – Буняковского

$$\left| \sum_{k=1}^{m} a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

равенство достигается в случае, когда $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$, т.е. векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны. Поэтому в неравенстве

$$\left| \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \mathbf{e}} \right| \leq ||\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)||_2$$

равенство достигается , когда $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \lambda\mathbf{e}$, т.е. вектор-градиент указывает направление наибольшего изменения функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0$.

5. Дифференциал функции. Касательная плоскости, уравнение касательной плоскости

Определение 5.1. *Пусть $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в $O(\mathbf{x}_0)$, т.е. справедливо равенство*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||.$$

Линейная часть приращения, т.е. сумма

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)})$$

называется дифференциалом функции f в точке $\mathbf{x}_0$ и обозначается $d\,f(\mathbf{x}_0)$. Таким образом,

$$d\,f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}). \tag{5.1}$$

Замечание 1. Равенство (5.1) можно записать в виде

$$d\,f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}\Delta x^{(j)_0}, \quad \text{где} \;\; \Delta x_0^{(j)} = x^{(j)} - x_0^{(j)}.$$

Заменяя в нем $\mathbf{x}_0$ на произвольную точку $\mathbf{x}$, получаем

$$d\,f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}\Delta x^{(j)}. \tag{5.2}$$

Замечание 2. Так как для функции одной переменной $f(x^{(j)}) = x^{(j)}$ приращение $\Delta x^{(j)}$ совпадает с дифференциалом, то равенство (5.2) можно записать в виде

$$d\,f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}d\,x^{(j)}. \tag{5.3}$$

Замечание 3. Равенство (5.3) сохранится, если $\mathbf{x}$ есть функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, но в этом случае $d\,x^{(j)}$ есть вектор не независимой переменной, а функции $x^{(j)}(t)$. Т.е, если $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, то

$$d\,f(\mathbf{x}(t)) = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) \cdot d\,t = \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \frac{dx^{(j)}}{dt} \right) dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \left(\frac{dx^{(j)}}{dt} \cdot d\,t \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} d\,x^{(j)}(t),$$

т.е. внешний вид дифференциала не изменился. Это свойство называют инвариантностью формы 1-го дифференциала.

Замечание 4. Для дифференциала справедливы свойства:

1) $d(f \pm g) = d\,f \pm d\,g$.

2) $d(fg) = f d\,g + g d\,f$.

3) $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{(d\,f)\cdot g - (d\,g)\cdot f}{g^2}$.

Эти свойства проверяются непосредственно.

Определение 5.2. *Пусть $f = f(x, y)$ определена в $O(x_0, y_0)$. Множество*

$$S = \{M(x, y, z) : \ z = f(x, y)\} \tag{5.4}$$

называют поверхностью в пространстве $\mathbb{R}^3$. (5.4) называют записью поверхности S в явном виде.

Определение 5.3. *Пусть f определена в $O(x_0, y_0)$, $\quad S : \quad z = f(x, y)$ – поверхность, $M_0 = M_0(x_0, y_0, f(x_0))$. Плоскость* Π*, проходящую через точку M_0 и такую, что*

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in S}} \frac{d(M, \pi)}{d(M, M_0)} = 0, \tag{5.5}$$

называют касательной плоскостью.

Теорема 5.1. *Если $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то в точке $M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(x_0, y_0, f(x_0))$ существует касательная плоскость и ее уравнение*

$$z - z_0 = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0). \tag{5.6}$$

Доказательство. 1) Очевидно, что (5.6) есть уравнение плоскости, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0). Поэтому достаточно проверить, что эта плоскость удовлетворяет условию (5.5). Выбираем точку $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Pi$, т.е. $z_1 = f(x_1, y_1)$. Тогда

$$d(M_1, \Pi) = \frac{\left|\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x_1 - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0)\right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)^2 + (-1)^2}}.$$

Так как f дифференцируема в точке (x_0, y_0), то

$$\left|\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x_1 - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y_1 - y_0) - (z_1 - z_0)\right| =$$

$$= |\alpha(x, y)| \cdot ||(x_1, y_1) - (x_0, y_0)|| = |\alpha(x_1, y_1)| \cdot \sqrt{|x_1 - x_0|^2 + |y_1 - y_0|^2}.$$

Отсюда

$$d(N_1, \pi) \leq \frac{|\alpha(x_1, y_1)| \cdot \sqrt{|x_1 - x_0|^2 + |y_1 - y_0|^2}}{1}.$$

Кроме того,

$$d(M_1, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (f(x_1, y_1) - z_0)^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{|x_1 - x_0|^2 + |y_1 - y_0|^2}.$$

Тогда

$$\frac{d(M_1, \Pi)}{d(M_1, M_0)} \leq |\alpha(x_1, y_1)| \to 0$$

при $(x_1, y_1) \to (x_0, y_0)$, т.е. при $M_1 \to M_0$, т.е. S есть касательная плоскость.

□

6. Производные высших порядков. Независимость от порядка дифференцирования

Определение 6.1. *Частная производная по переменной $x^{(i)}$ от частной производной $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$ называется частной производной 2-го порядка. Обозначается*

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}}.$$

Таким образом, по определению

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}} \stackrel{df}{=} \frac{\partial}{\partial x^{(j)}} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i)}}\right).$$

Аналогично определяется производная любого порядка, а именно:

$$\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1}(\partial x^{(2)})^{n_2}\ldots(\partial x^{(m)})^{n_m}} = \frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\left(\frac{\partial^{n-1} f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1-1}\ldots(\partial x^{(m)})^{n_m-1}}\right) \quad (6.1)$$

$(n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m)$.

Вопрос: зависит ли производная от того, в каком порядке выполнено дифференцирование?

Теорема 6.1. *Пусть $f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, x^{(2)})$ имеет в точке $(x^{(1)}, x^{(2)})$ обе смешанные производные $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(1)}\partial x^{(2)}}$ и $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(2)}\partial x^{(1)}}$. Если эти производные непрерывны в точке $\mathbf{x}$, то в этой точке они равны.*

Доказательство. Обозначим

$$\Delta_{h^{(1)}} f(x^{(1)}, x^{(2)}) = f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)})$$

и назовем приращением по переменной $x^{(1)}$. Образуем два приращения $\Delta_{h^{(1)}}(\Delta_{h^{(2)}} f(x^{(1)}, x^{(2)}))$ и $\Delta_{h^{(2)}}(\Delta_{h^{(1)}} f(x^{(1)}, x^{(2)}))$. Покажем, что эти приращения равны. В самом деле:

$$\Delta_{h^{(1)}}(\Delta_{h^{(2)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})) = \Delta_{h^{(1)}}(f(x^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)})) - f(x^{(1)}, x^{(2)}) =$$

$$= f(x^{(1)}+h^{(1)}, x^{(2)}+h^{(2)}) - f(x^{(1)}+h^{(1)}, x^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)}+h^{(2)}) + f(x^{(1)}, x^{(2)}).$$

$$\Delta_{h^{(2)}}(\Delta_{h^{(1)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})) = \Delta_{h^{(2)}}(f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)})) - f(x^{(1)}, x^{(2)}) =$$

$$= f(x^{(1)}+h^{(1)}, x^{(2)}+h^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)}+h^{(2)}) - f(x^{(1)}+h^{(1)}, x^{(2)}) + f(x^{(1)}, x^{(2)}).$$

Видим, что эти приращения равны, т.е.

$$\Delta_{h^{(1)}}(\Delta_{h^{(2)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})) = \Delta_{h^{(2)}}(\Delta_{h^{(1)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})). \quad (6.2)$$

По теореме о среднем имеем:

$$\Delta_{h^{(1)}}(\Delta_{h^{(2)}} f(x^{(1)}, x^{(2)})) = (f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) -$$

$$- f(x^{(1)} + h^{(1)}, x^{(2)})) - (f(x^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) - f(x^{(1)}, x^{(2)})) =$$

по теореме Лагранжа

$$= \frac{\partial}{\partial x^{(1)}}(f(x^{(1)} + \Theta_1 h^{(1)}, x^{(2)} + h^{(2)}) - f(x^{(1)} + \Theta_1 h^{(1)}, x^{(2)}))h^{(1)} =$$

снова по теореме Лагранжа

$$= \frac{\partial}{\partial x^{(1)}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{(2)}} f(x^{(1)} + \Theta_1 h^{(1)}, x^{(2)} + \Theta_2 h^{(2)})\right) \cdot h^{(1)} h^{(2)}.$$

Аналогично,

$$\Delta_{h^{(2)}}(\Delta_{h^{(1)}}f(x^{(1)},x^{(2)})) = (f(x^{(1)}+h^{(1)},x^{(2)}+h^{(2)})-$$

$$-f(x^{(1)},x^{(2)}+h^{(2)})) - (f(x^{(1)}+h^{(1)},x^{(2)}) - f(x^{(1)},x^{(2)})) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}(f(x^{(1)}+h^{(1)},x^{(2)}+\tilde\Theta_2 h^{(2)}) - f(x^{(1)},x^{(2)}+\tilde\Theta_2 h^{(2)}))h^{(2)} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^{(2)}}\left(\frac{\partial}{\partial x^{(1)}}f(x^{(1)}+\tilde\Theta_1 h^{(1)},x^{(2)}+\tilde\Theta_2 h^{(2)})\right)\cdot h^{(2)}h^{(1)}.$$

Подставляя в (6.2), получаем

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}+\Theta\mathbf{h})}{\partial x^{(1)}\partial x^{(2)}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}+\tilde\Theta\mathbf{h})}{\partial x^{(2)}\partial x^{(1)}}.$$

Переходя к пределу при $(h^{(1)},h^{(2)}) \to 0$, получаем ввиду непрерывности смешанных производных:

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(1)}\partial x^{(2)}} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x^{(2)}\partial x^{(1)}}. \ \square$$

7. Дифференциалы высших порядков

Определение 7.1. *Пусть* $d\,f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}d\,x^{(j)}$ *– дифференциал функции* f*. Он есть функция переменной* $\mathbf{x}$ *и приращений* $\Delta x^{(j)} = d\,x^{(j)}$*. Поэтому можно говорить о дифференциале от* $d\,f(\mathbf{x})$*. Дифференциал от 1-го дифференциала (т.е. от* $d\,f(\mathbf{x})$*) называется дифференциалом 2-го порядка. Обозначается* $d^2 f(\mathbf{x})$*. В общем случае:* $d^n f(\mathbf{x}) \overset{df}{=} d(d^{n-1}f(\mathbf{x}))$*.*

Замечание. Так как приращения $\Delta x^{(j)} = d\,x^{(j)}$ не зависят от $\mathbf{x}$, то при нахождении 2-го и прочих дифференциалов надо *** $\Delta x^{(j)}$ понятным.??

Теорема 7.1. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *имеет в* $O(\mathbf{x})$ *непрерывные частные производные до порядка* n *включительно. Тогда*

$$d^n f(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m}\dots\sum_{i_n=1}^{m}\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)}\partial x^{(i_2)}\dots\partial x^{(i_n)}}d\,x^{(i_1)}d\,x^{(i_2)}\dots d\,x^{(i_n)}.$$

Доказательство проведем индукцией по n.
1) $n=1$. $df(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^{m}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)}}d\,x^{(i_1)}$ – справедливое равенство.

2) Пусть $d^{n-1}f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{i_1=1}^{m}\sum\limits_{i_2=1}^{m}\dots\sum\limits_{i_{n-1}=1}^{m} \frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)}\partial x^{(i_2)}\dots\partial x^{(i_{n-1})}} d\,x^{(i_1)} d\,x^{(i_2)}\dots d\,x^{(i_{n-1})}$.
Тогда

$$d^n f(\mathbf{x}) = d(d^{n-1}f(\mathbf{x})) = \sum_{i_1=1}^{m}\dots\sum_{i_{n-1}=1}^{m} d\,x^{(i_1)}\dots d\,x^{(i_{n-1})} d\left(\frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)}\dots\partial x^{(i_{n-1})}}\right) =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m}\dots\sum_{i_{n-1}=1}^{m} d\,x^{(i_1)}\dots d\,x^{(i_{n-1})}\sum_{i_n=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^{(i_n)}}\left(\frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)}\dots\partial x^{(i_{n-1})}}\right) d\,x^{(i_n)}. \ \square$$

Теорема 7.2. *Пусть $f(\mathbf{x})$ имеет в $O(\mathbf{x})$ непрерывные частные производные до порядка n включительно. Тогда*

$$d^n f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_m\ge 0\\ n_1+\dots+n_m=n}} \frac{(n_1+\dots+n_m)!}{n_1!\dots n_m!}\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1}\dots(\partial x^{(n)})^{n_m}}(d\,x^{(1)})^{n_1}\dots(d\,x^{(n)})^{n_m} \qquad (7.1)$$

Доказательство проведем индукцией по n.
1) $n = 1$. В правой части будут слагаемые, которые соответствуют кортежам $(1,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,0,1)$. Поэтому

$$df(\mathbf{x}) = \frac{1!}{1!0!\dots0!}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(1)}}d\,x^{(1)} + \frac{1!}{0!1!0!\dots0!}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(2)}}d\,x^{(2)} + \dots +$$
$$+\frac{1!}{0!0!\dots1!}\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(m)}}d\,x^{(m)}$$

– справедливое равенство.
2) Пусть

$$d^{n-1}f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_m\ge 0\\ n_1+\dots+n_m=n-1}} \frac{(n-1)!}{n_1!\dots n_m!}\frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1}\dots(\partial x^{(m)})^{n_m}}(d\,x^{(1)})^{n_1}\dots(d\,x^{(m)})^{n_m}.$$

Тогда

$$d^n f(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_m\ge 0\\ n_1+\dots+n_m=n-1}} \frac{(n-1)!}{n_1!\dots n_m!}(d\,x^{(1)})^{n_1}\dots(d\,x^{(m)})^{n_m}\cdot$$

$$\cdot d\left(\frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1}\dots(\partial x^{(m)})^{n_m}}\right) = \sum_{\substack{n_1,\dots,n_m\ge 0\\ n_1+\dots+n_m=n-1}} \frac{(n-1)!}{n_1!\dots n_m!}(d\,x^{(1)})^{n_1}\dots(d\,x^{(m)})^{n_m}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1+1}(\partial x^{(2)})^{n_2}\dots(\partial x^{(m)})^{n_m}}d\,x^{(1)}+\right.$$

$$+\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1}(\partial x^{(2)})^{n_2+1}(\partial x^{(3)})^{n_3}\dots(\partial x^{(m)})^{n_m}}d\,x^{(2)} + \dots +$$

$$+\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1}\dots(\partial x^{(m-1)})^{n_m}(\partial x^{(m)})^{n_m+1}}d\,x^{(m)}\Bigg). \tag{7.2}$$

Таким образом правая часть в (7.2) состоит из слагаемых вида

$$c_{n_1,\dots,n_m}\cdot\frac{\partial^n}{(\partial x^{(1)})^{n_1}\dots(\partial x^{(m)})^{n_m}}(d\,x^{(1)})^{n_1}\dots(d\,x^{(m)})^{n_m}. \tag{7.3}$$

где $n_1+n_2+\ldots+n_m=n$ (а не $n-1$). Но каждое такое слагаемое в (7.2) присутствует несколько раз, а именно: слагаемое

$$c_{n_1,\dots,n_m}\cdot\frac{\partial^n}{(\partial x^{(1)})^{n_1}\dots(\partial x^{(m)})^{n_m}}(d\,x^{(1)})^{n_1}\dots(d\,x^{(m)})^{n_m}$$

получается от дифференцирования выражений вида

$$\frac{(n-1)!}{(n_1-1)!n_2!\dots n_m!}\frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1-1}(\partial x^{(2)})^{n_2}\dots(\partial x^{(m)})^{n_m}},\quad (\text{по}\ \ x^{(1)})$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{(n-1)!}{n_1!\dots n_{m-1}!(n_m-1)!}\frac{\partial^{n-1}f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1}\dots(\partial x^{(m-1)})^{n_{m-1}}(\partial x^{(m)})^{n_m-1}}\quad (\text{по}\ \ x^{(m)}).$$

Поэтому слагаемое (7.3) равно сумме

$$\left(\frac{(n-1)!}{(n_1-1!)n_2!\dots n_m!}+\frac{(n-1)!}{n_1!(n_2-1)!n_3!\dots n_m!}+\ldots+\frac{(n-1)!}{n_1!\dots n_{m-1}!(n_m-1)!}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{(\partial x^{(1)})^{n_1}\dots(\partial x^{(m)})^{n_m}}(d\,x^{(1)})^{n_1}\dots(d\,x^{(m)})^{n_m}.$$

Но

$$c_{n_1,\dots,n_m}=\frac{(n-1)!}{n_1!n_2!\dots n_m!}(n_1+n_2+\ldots+n_m)=\frac{(n-1)!\cdot n}{n_1!n_2!\dots n_m!}=\frac{(n)!}{n_1!n_2!\dots n_m!}.\ \square$$

8. Формула Тейлора для функций m переменных

Теорема 8.1. *Пусть $f(\mathbf{x})$ имеет в окрестности $O(\mathbf{x}_0)$ непрерывные частные производные до порядка $(n+1)$ включительно. Тогда*

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)+\frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!}+\frac{d^2f(\mathbf{x}_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^nf(\mathbf{x}_0)}{n!}+\frac{d^{n+1}f(\mathbf{x}_0+\Theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{(n+1)!} \tag{8.1}$$

Равенство (8.1) называют формулой Тейлора с остатком в форме Лагранжа, т.к. при $m = 1$ она превращается в обычную формулу Тейлора:

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{f'(\mathbf{x}_0)}{1!}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) + \frac{f''(\mathbf{x}_0)}{2!}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\mathbf{x}_0)}{n!}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^n +$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{(n+1)!}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^{n+1}.$$

Доказательство. Зафиксируем $\mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0)$ и рассмотрим функцию $F(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))$ на отрезке $[0,1]$. Запишем для нее формулу Тейлора в точке $t_0 = 0$, получим

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n + \frac{F^{(n+1)}(\Theta t)}{(n+1)!}t^{n+1} \qquad (8.2)$$

Вычислим производные, входящие в (8.2). По правилу дифференцирования сложной функции:

$$F'(t) = \sum_{i_1=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{(\partial x^{(i_1)})}\frac{dx^{(i_1)}}{dt} = \sum_{i_1=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{(\partial x^{(i_1)})} \cdot \Delta x_0^{(i_1)} \Rightarrow$$

$$F'(0) = df(\mathbf{x}_0).$$

$$F''(t) = \sum_{i_1=1}^{m} \Delta x_0^{(i_1)} \cdot \sum_{i_2=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x^{(i_2)}}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_2)}}\right) \cdot \Delta x_0^{(i_2)} =$$

$$= \sum_{i_1=1}^{m}\sum_{i_2=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)}\partial x^{(i_2)}}\Delta x_0^{(i_1)}\Delta x_0^{(i_2)} \Rightarrow$$

$$F''(0) = d^2 f(\mathbf{x}_0).$$

. . . .

$$F^{(n)}(t) = \sum_{i_1=1}^{m}\ldots\sum_{i_n=1}^{m} \frac{\partial^n f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)}\ldots\partial x^{(i_n)}}\Delta x_0^{(i_1)}\ldots\Delta x_0^{(i_n)} \Rightarrow$$

$$F^{(n)}(0) = d^n f(\mathbf{x}_0).$$

$$F^{(n+1)}(\Theta t) = \sum_{i_1=1}^{m}\ldots\sum_{i_n=1}^{m}\sum_{i_{n+1}=1}^{m} \frac{\partial^{n+1} f(\mathbf{x}_0 + \Theta t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)}\ldots\partial x^{(i_n)}\partial x^{(i_{n+1})}}\Delta x_0^{(i_1)}\ldots\Delta x_0^{(i_{n+1})} \Rightarrow$$

$$F^{(n+1)}(0) = d^{n+1} f(\mathbf{x}_0 + \Theta t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)).$$

Подставим эти выражения для производных в (8.2), получим

$$F(t) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!}t + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!}t^n +$$

$$+\frac{d^{n+1} f(\mathbf{x}_0 + \Theta t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{(n+1)!}t^{n+1}.$$

Положим в этом равенстве $t = 1$. Так как $F(1) = f(\mathbf{x})$, то получаем

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{(n+1)!}.$$

□

Глава 3

Приложения дифференциального исчисления

1. Экстремум функции в точке. Необходимое условие

Снова рассматриваем функции, определенные в $\mathbb{R}^m$ $(m > 1)$.

Определение 1.1. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *определена в* $O(\mathbf{x}_0)$. *Если существует* $O_\delta(\mathbf{x}_0) \subset O(\mathbf{x}_0)$, *в которой* $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$, *то говорят, что в точке* $\mathbf{x}_0$ $f(\mathbf{x})$ *имеет* $\min$.

Если $\forall\, \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$, $\quad f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$, *то говорят, что в точке* $\mathbf{x}_0$ $f(\mathbf{x})$ *имеет* $\max$. *Если в точке* $\mathbf{x}_0$ *имеется* $\min$ *или* $\max$, *то говорят, что в точке* $\mathbf{x}_0$ $f(\mathbf{x})$ *имеет экстремум.*

Замечание. Понятие экстремума имеет локальный характер, т.е. при определении экстремума используются значения только в некоторой (возможно, очень малой) окрестности точки $\mathbf{x}_0$.

Теорема 1.1 (Необходимое условие экстремума). *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *имеет экстремум в точке* $\mathbf{x}_0$, *и в этой точке существуют все частные производные* $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство. Так как $f(\mathbf{x})$ имеет в точке $\mathbf{x}_0$ экстремум, то функция

$$\tilde{f}(x^{(j)}) = f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(j-1)}, x^{(j)}, x_0^{(j+1)}, \ldots, x_0^{(m-1)}, x_0^{(m)})$$

имеет экстремум в точке $x_0^{(j)}$, тогда по необходимому условию экстремума для функции одной переменной,

$$\frac{d}{d\,x^{(j)}}\tilde{f}(x_0^{(j)}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} = 0. \;\square$$

2. Формула Тейлора с остатком в форме Пеано

Теорема 2.1. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *имеет в* $O(\mathbf{x}_0)$ *непрерывные частные производные до порядка* n *включительно. Тогда*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!} + \alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2^n, \quad (2.1)$$

где $\alpha(\mathbf{x}_0) \to 0$ *при* $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$.

Доказательство. Записываем формулу Тейлора с остатком в форме Лагранжа

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^{n-1} f(\mathbf{x}_0)}{(n-1)!} + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{n!}. \quad (2.2)$$

Запишем остаток в виде

$$R_n(\mathbf{x}) = \frac{d^n f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{n!} + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!} = A(\mathbf{x}) + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!}.$$

Для $A(\mathbf{x})$ имеем

$$|A(\mathbf{x})| = \frac{1}{n!}\left|\sum_{i_1=1}^{m}\ldots\sum_{i_n=1}^{m}\left(\frac{\partial^n f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)}\ldots\partial x^{(i_n)}}\right)\cdot(x^{(i_1)} - x_0^{(i_1)})\ldots(x^{(i_n)} - x_0^{(i_n)})\right| \leq$$

по неравенству Гельдера

$$\leq \frac{1}{n!}\left(\sum_{i_1=1}^{m}\ldots\sum_{i_n=1}^{m}\left(\frac{\partial^n f(\mathbf{x}_0 + \Theta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))}{\partial x^{(i_1)}\ldots\partial x^{(i_n)}} - \frac{\partial^n f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i_1)}\ldots\partial x^{(i_n)}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{i_1=1}^{m}\ldots\sum_{i_n=1}^{m}(x^{(i_1)} - x_0^{(i_1)})^2\ldots(x^{(i_n)} - x_0^{(i_n)})^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{n!}\alpha(\mathbf{x})\cdot\left(\sum_{i_1=1}^{m}(x^{(i_1)} - x_0^{(i_1)})^2\right)^{\frac{1}{2}}\ldots\left(\sum_{i_n=1}^{m}(x^{(i_n)} - x_0^{(i_n)})^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n!}\alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||_2^n.$$

Так как производная $\frac{\partial^n f(\mathbf{x})}{\partial x^{(i_1)}\ldots\partial x^{(i_n)}}$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$, то $\alpha(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$. Таким образом,

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{df(\mathbf{x}_0)}{1!} + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(\mathbf{x}_0)}{n!} + \frac{1}{n!}\alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2^n. \ \square$$

3. Достаточные условия экстремума в точке

Теорема 3.1. *Пусть 1) $f(\mathbf{x})$ имеет в точке $\mathbf{x}_0$ непрерывную производную до 2-го порядка включительно.*
2) $d\,f(\mathbf{x}_0) = 0$ (т.е. в точке $\mathbf{x}_0$ выполнено необходимое условие экстремума). Тогда
1) если $d^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$, то в точке $\mathbf{x}_0$ – $\min$;
2) если $d^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$, то в точке $\mathbf{x}_0$ – $\max$;
3) если в любой окрестности точки $\mathbf{x}_0$ существуют точки, в которых $d^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ и $d^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$, то экстремума нет.

Доказательство. Запишем для $f(\mathbf{x})$ формулу Тейлора с остатком в форме Пеано.

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2^2 = \frac{1}{2} d^2 f(\mathbf{x}_0) + \alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} (x^{(i)} - x_0^{(i)})(x^{(j)} - x_0^{(i)}) + \alpha(\mathbf{x})||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2^2 =$$

$$= \frac{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2^2}{2} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} \frac{x^{(i)} - x_0^{(i)}}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2} \cdot \frac{x^{(j)} - x_0^{(j)}}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2} + \alpha(\mathbf{x}) \right). \qquad (3.1)$$

Обозначим: $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)} \partial x^{(j)}} = a_{i,j}$, $\xi_i = \frac{x^{(i)} - x_0^{(i)}}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2}$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\xi = (\xi^{(1)}, \ldots, \xi^{(m)})$. Очевидно, что

$$||\xi||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\xi^{(i)}|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{|x^{(i)} - x_0^{(i)}|^2}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2^2}} = \frac{1}{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2} \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2 = 1.$$

2) Отображение, которое каждой точке $\mathbf{x}$, для которой $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2 = R$ ставит в соответствие точку $\xi = (\xi^{(i)})_{i=1}^m$ по формуле? $\xi = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{R}$, является взаимно-однозначным.

Запишем равенство (3.1) в виде

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2^2}{2} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \xi^{(i)} \xi^{(j)} + \alpha(\mathbf{x}) \right).$$

Функция

$$p(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} \xi^{(i)} \xi^{(j)}$$

определена на единичной сфере $||\xi||_2 = 1$. Но сфера является ограниченным, замкнутым множеством, значит, компактным множеством. На этом множестве непрерывная функция $p(\xi)$ достигает как наибольшего, так и наименьшего значений. Рассмотрим возможные случаи:
1) $d^2 f(\mathbf{x}_0) > 0$ при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Тогда $p(\xi) > 0$ на сфере S, следовательно, $p(\xi)$ достигает наименьшего значения, тогда существует точка ξ_0, $||\xi_0||_2 = 1$, в которой $p(\xi_0) = m_0$ – наименьшее значение. Очевидно, что $m_0 > 0$. Но тогда $\exists\, O(\mathbf{x}_0)$, в которой $|\alpha(\mathbf{x}_0)| < \frac{m_0}{2}$. Отсюда $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$ в $O(\mathbf{x}_0)$, значит, $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x})$, следовательно, в точке $\mathbf{x}_0$ – min.
2) $d^2 f(\mathbf{x}_0) < 0$ при всех $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. $\Rightarrow p(\xi) < 0$ на сфере $S \Rightarrow p(\xi)$ достигается наибольшее значения $M_0 > 0$ в точке $\xi_0 \in S$. Тогда $\exists\, O(\mathbf{x}_0)$, в которой $|\alpha(\mathbf{x}_0)| < \frac{M_0}{2} = 1$. $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) < 0 \Rightarrow f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}) \Rightarrow$ в точке $\mathbf{x}_0$ – max.
3) Пусть $\exists\, \mathbf{x}_1$, в которой $df(\mathbf{x}_0) > 0$. Обозначим $\xi_1 = \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0||_2}$ и рассмотрим прямую $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\xi_1$. Тогда при $t \neq 0$

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\xi_i\xi_j \cdot t^2 + \varphi(\mathbf{x})t^2 \cdot ||\xi_1||_2 = \frac{1}{2}t^2 \left(\sum_{i,j=1}^{m} a_{i,j}\xi_i\xi_j + \varphi(\mathbf{x} \right)$$

и т.к. $\varphi(\mathbf{x}) \to 0$ при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$, то на прямой $l:\ \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\xi_1$ в некоторой $O_\delta(\mathbf{x}_0)$, $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$.
Пусть $\exists\, \mathbf{x}_2$, в которой $df(\mathbf{x}_0) < 0$. Аналогично убеждаемся, что $\exists\, O_\delta(\mathbf{x}_0)$, в которой на прямой $l:\ \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\xi_2$, имеем $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) < 0$, т.е. в точке $\mathbf{x}_0$ экстремума нет. □

Определение 3.1. *Функция*

$$p(\xi) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\xi_i\xi_j$$

называется квадратичной формой.

Замечание 1. Если обозначить $dx_0^{(i)} = \xi^{(i)}$, то дифференциал можно записать в виде

$$d^2 f(\mathbf{x}_0) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j}\xi^{(i)}\xi^{(j)} \right) \frac{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_2^2}{2}.$$

Поэтому достаточное условие можно записать в виде:
1) если квадратичная форма $p(\xi)$ положительно определена (т.е. $\forall\, \xi \neq 0,\ p(\xi) > 0$), то в точке $\mathbf{x}_0$ – min.
2) если квадратичная форма $p(\xi)$ отрицательно определена (т.е. $\forall\, \xi \neq$

0, $p(\xi) < 0$), то в точке $\mathbf{x}_0$ – max.
3) если квадратичная форма не определена, т.е. $p(\xi)$ принимает значения разных знаков, то в точке $\mathbf{x}_0$ нет экстремума.
Замечание 2. Для выяснения, является ли квадратичная форма определенной или нет, можно воспользоваться теоремой Сильвестра:
а) если

$$\Delta_1 = a_{1,1} > 0, \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} > 0,$$

то квадратичная форма $p(\xi)$ положительно определена;
б) если

$$\Delta_1 = a_{1,1} < 0, \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{3,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} > 0, \dots,$$

$$\dots, \Delta_m(-1)^m > 0,$$

то квадратичная форма $p(\xi)$ отрицательно определена;
в) если $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} < 0$, то квадратичная форма $p(\xi)$ не определена.
Замечание 3. Если размерность $m = 2$, то, с учетом теоремы Сильвестра, получаем достаточное условие экстремума.

Пусть $\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = 0$,

$$B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \ \ A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \ \ C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

1) Если $AC - B^2 > 0$ и $A > 0$, то в точке (x_0, y_0) – min.
2) Если $AC - B^2 > 0$ и $A < 0$, то в точке (x_0, y_0) – max.
3) Если $AC - B^2 < 0$, то экстремума нет.

4. Неявные функции. 1-я теорема о неявных функциях

Постановка задачи: $\mathbf{x} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}) \in \mathbb{R}^m, \ y \in \mathbb{R}$. Возможно ли уравнение $F(\mathbf{x}, y) = 0 \Leftrightarrow F(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(m)}, y) = 0$ разрешить относительно y?

Определение 4.1. *Пусть* $F(\mathbf{x}, y)$ *определена в прямоугольнике* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [c, d]$. *Если* $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \ \exists! \, y = y(\mathbf{x}) \in [c, d]$ *такое, что* $F(\mathbf{x}, y(x)) = 0$, *то говорят, что равенство* $F(\mathbf{x}, y) = 0$ *в прямоугольнике* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [c, d]$ *определяет неявно функцию* $y = y(\mathbf{x})$

Теорема 4.1 (1-я теорема о неявных функциях). *Пусть $F(\mathbf{x}, y)$ определена в прямоугольнике*

$$\Pi = [\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta}] \times [y_0 - \Delta^{(m+1)}, y_0 + \Delta^{(m+1)}]$$

$$(\boldsymbol{\Delta} = (\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots, \Delta^{(m)}), \Delta^{(j)} > 0)$$

и пусть выполнены условия
1) $F(\mathbf{x}, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π.
2) $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$.
3) $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta}]$ функция $F(\mathbf{x}, y)$, как функция переменной y строго монотонна на $[y_0 - \Delta^{(m+1)}, y_0 + \Delta^{(m+1)}]$. Тогда $\forall\, \delta^{(m+1)} > 0$ такого, что $0 < \delta^{(m+1)} < \Delta^{(m+1)}$ существует $\delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \ldots, \delta^{(m)})$, $\delta^{(j)} > 0$, $0 < \delta^{(j)} < \Delta^{(j)}$ так, что
1) в прямоугольнике $\tilde{\Pi} = [\mathbf{x}_0 - \delta, \mathbf{x_0} + \delta] \times [y_0 - \delta^{(m+1)}, y_0 + \delta^{(m+1)}]$ равенство $F(\mathbf{x}, y) = 0$ определяет неявно функцию $y = y(\mathbf{x})$;
2) $y(\mathbf{x}_0) = y_0$;
3) $y(\mathbf{x})$ непрерывна в $\tilde{\Pi}$.

Доказательство. Пусть для определенности $F(\mathbf{x}, y)$ строго возрастает по y. Выберем произвольные $\delta^{(m+1)}$; $0 < \delta^{(m+1)} < \Delta^{(m+1)}$. Рассмотрим функцию $F(\mathbf{x}_0, y)$ на отрезке $[y_0 - \Delta^{(m+1)}, y_0 + \Delta^{(m+1)}]$. По условию

$$F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0 \Rightarrow F(\mathbf{x}_0, y_0 - \Delta^{(m+1)}) < 0 \ \wedge \ F(\mathbf{x}_0, y_0 + \Delta^{(m+1)}) > 0.$$

Следовательно, ввиду непрерывности функции $F(\mathbf{x}, y)$ в точке $(\mathbf{x}_0, y_0 - \Delta^{(m+1)})$ существует окрестность этой точки, в которой $F(\mathbf{x}, y)$ сохраняет знак, т.е. $F(\mathbf{x}, y) < 0$.

Аналогично, $\exists\, O(\mathbf{x}_0, y_0 + \Delta^{(m+1)})$, в которой $F(\mathbf{x}, y) > 0$. Поэтому $\exists\, \delta = (\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \ldots, \delta^{(m)})$ $(\delta^{(j)} > 0)$ так, что $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0 - \delta, \mathbf{x}_0 + \delta]$, $\quad F(\mathbf{x}, y_0 - \Delta^{(m+1)}) < 0$, $F(\mathbf{x}, y_0 + \Delta^{(m+1)}) > 0$. Но $F(\mathbf{x}, y)$ строго возрастает, тогда $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0 - \delta, \mathbf{x}_0 + \delta]$, $\exists!\, y = y(\mathbf{x})$ так, что $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Очевидно, что $y(\mathbf{x}_0) = y_0$. Условие $y(\mathbf{x}) \in [y_0 - \delta^{(m+1)}, y_0 + \delta^{(m+1)}]$ можно записать в виде $|y(\mathbf{x}) - y_0| < \delta^{(m+1)}$ при $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$. Это означает, что функция $y(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_0$. Покажем, что $y(\mathbf{x})$ непрерывна в любой точке $\mathbf{x}_1 \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$. Выберем $\mathbf{x}_1 \in O_\delta(\mathbf{x}_0)$, положим $y_1 = y(\mathbf{x}_1)$. Применяя доказанную теорему в точке $(\mathbf{x}_1, y_1)$, получаем непрерывность функции $y(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_1$. $\square$

5. Неявные функции. 2-я теорема о неявных функциях

Лемма 5.1. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *имеет в* $O(\mathbf{x}_0)$ *частные производные* $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$ $(j = 1,\ldots,m)$*, которые непрерывны в точке* $\mathbf{x}_0$*. Тогда*

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \sum_{j+1}^{m} \alpha_j(\mathbf{x})(x^{(j)} - x_0^{(j)}),$$

где $\alpha_j(\mathbf{x}) \to 0$ *при* $\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0$ *и* $\alpha_j(\mathbf{x}_0) = 0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}) + \\
&+ f(x_0^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(m)}) + \\
&+ f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x^{(3)}, \ldots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x_0^{(3)}, \ldots, x^{(m)}) + \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ f(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(m-1)}, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, x_0^{(3)}, \ldots, x_0^{(m-1)}, x_0^{(m)}).
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Обозначим $\mathbf{x}_j = (x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(j)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(m)})$ $j = 1, 2, \ldots, m$ $(\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_0)$. Тогда равенства (5.1) можно записать в виде

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_1)) + \sum_{j=1}^{m-1} (f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_{j+1})). \tag{5.2}$$

Так как для всех j существует производная $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$, то функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема по переменной $x^{(j)}$, следовательно,

$$\begin{gathered}
f(\mathbf{x}_j) - f(\mathbf{x}_{j+1}) = \\
= f(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(j)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(m)}) - f(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(j)}, x_0^{(j+1)}, \ldots, x^{(m)}) = \\
= \frac{f(x_0^{(1)}, \ldots, x_0^{(j)}, x_0^{(j+1)}, x^{(j+2)}, \ldots, x^{(m)})}{\partial x^{(j+1)}}(x^{(j+1)} - x_0^{(j+1)}) + \\
+ \alpha_{j+1}(x^{(j+1)})(x^{(j+1)} - x_0^{(j+1)}).
\end{gathered}$$

Подставляя эти равенства в (5.2), получаем, что

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(x^{(j)})(x^{(j)} - x_0^{(j)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} + \alpha_j(x^{(j)}) \right)(x^{(j)} - x_0^{(j)}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}}(x^{(j)} - x_0^{(j)}) + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\mathbf{x})(x^{(j)} - x_0^{(j)}),$$

где $\varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x}_j)}{\partial x^{(j)}} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} + \alpha_j(x^{(j)})$ и ввиду непрерывности производных $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}}$ в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \varphi_j(\mathbf{x}) = 0$. $\square$

Теорема 5.2 (2-я теорема о неявных функциях). *Пусть* $F(\mathbf{x}, y)$ *определена в прямоугольнике*

$$\Pi^{m+1} = [\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\Delta}, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta}] \times [y_0 - \Delta^{(m+1)}, y_0 + \Delta^{(m+1)}]$$

и выполнены условия
1) в прямоугольнике Π^{m+1} *существуют все частные производные 1-го порядка, которые непрерывны;*
2) $F(\mathbf{x}, y) = 0$*;*
3) частная производная $\frac{\partial F(\mathbf{x}_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.
Тогда существует прямоугольник

$$\tilde{\Pi}^{m+1} = [\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}] \times [y_0 - \tilde{\delta}^{(m+1)}, y_0 + \tilde{\delta}^{(m+1)}] \subset \Pi^{m+1}$$

такой, что
1) в прямоугольнике $\tilde{\Pi}^{m+1}$ *равенство* $F(\mathbf{x}, y) = 0$ *определяет неявно функцию* $y = y(\mathbf{x})$*;*
2) $y(\mathbf{x}_0) = y_0$*;*
3) функция $y(\mathbf{x})$ *имеет непрерывные частные производные в* $[\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}]$*;*
4) справедливо равенство

$$\frac{\partial y(\mathbf{x})}{\partial x^{(1)}} = -\frac{\frac{\partial F(\mathbf{x}, y)}{\partial x^{(1)}}}{\frac{\partial F(\mathbf{x}, y)}{\partial y}}.$$

Доказательство. Пусть для определенности $\frac{\partial F(\mathbf{x}_0, y_0)}{\partial y} > 0$. Тогда ввиду непрерывности этой производной $\exists\, O(\mathbf{x}_0, y_0)$, в которой $\frac{\partial F(\mathbf{x}, y)}{\partial y} > 0$. Тогда существует прямоугольник $[\mathbf{x}_0 - \tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{\Delta}}]$ такой, что $\forall\, \mathbf{x} \in [\mathbf{x}_0 - \tilde{\boldsymbol{\Delta}}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\boldsymbol{\Delta}}]$ функция $F(\mathbf{x}, y)$ строго возрастает как функция переменной y. Значит, по первой теореме о неявных функциях $\exists\, \tilde{\Pi}^{m+1}$, в котором равенство? $F(\mathbf{x}, y)$ определяет неявно функцию $y = y(\mathbf{x})$, такую, что $y = y(\mathbf{x}_0) = y_0$. Покажем, что $y(\mathbf{x})$ имеет частные производные в прямоугольнике $[\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}]$. Рассмотрим разность

$$F(\mathbf{x} + \Delta x, y + \Delta y) - F(\mathbf{x}, y),$$

где $y+\Delta y = y(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x})$. Тогда $F(\mathbf{x}+\Delta x, y+\Delta y) = 0$, $F(\mathbf{x}, y) = 0$. Следовательно, $y = y(x)$.

$$0 = F(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}, y+\Delta y) - F(\mathbf{x}, y) =$$

по лемме 4.1

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x^{(j)}}\Delta x^{(j)} + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(\mathbf{x}, y)\Delta x^{(j)} + \varphi_{m+1}(\mathbf{x}, y)\Delta y.$$

Положим в этом равенстве $\Delta x^{(1)} = \ldots = \Delta x^{(j-1)} = \Delta x^{(j+1)} = \ldots = = \Delta x^{(m)}{=}0$. Тогда

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x^{(j)}}\Delta x^{(j)} + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y + \varphi_j\Delta x^{(j)} + \varphi_{m+1}\Delta y.$$

Отсюда

$$\Delta y\left(\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_{m+1}\right) = -\Delta x^{(j)}\left(\frac{\partial F}{\partial x^{(j)}} + \varphi_j\right).$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x^{(j)}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^{(j)}} + \varphi_j}{\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi_{m+1}}$$

Перейдем к пределу при $\Delta x^{(j)} \to 0$, получим

$$\exists\, \frac{\partial y}{\partial x^{(j)}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x^{(j)}}}{\frac{\partial F}{\partial y}}. \tag{5.3}$$

Так как по условию частные производные в правой части (5.3) непрерывны, то $\frac{\partial y}{\partial x^{(j)}}$ непрерывны. $\square$

6. Матрицы Якоби. Якобиан

Определение 6.1. *Пусть* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *– вектор-функция, т.е.* $\mathbf{F} = (F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(n)})$ *и* $F^{(j)}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *– компоненты вектор-функции* $\mathbf{F}$. *Матрица*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x^{(2)}} & \ldots & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial x^{(m)}} \\ \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x^{(2)}} & \ldots & \frac{\partial F^{(2)}}{\partial x^{(m)}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x^{(2)}} & \ldots & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial x^{(m)}} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби. Обозначение: $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ *или* $\frac{D(F^{(1)},\ldots,F^{(n)})}{D(x^{(1)},\ldots,x^{(m)})}$*. Таким образом,* $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ *– это матрица размерности* $n \times m$*.*

Если $n = m$*, то матрица Якоби* $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ *– квадратная, ее определитель называется Якобианом вектор-функции* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$*, обозначается* $\frac{D\mathbf{F}}{D\mathbf{x}}$*. Таким образом,*

$$\frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x})}{D\mathbf{x}} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right).$$

Теорема 6.1. *Пусть* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ *имеет непрерывные частные производные в* $\Pi^m = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *и пусть* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{t}) : \ [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \to [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *вектор-функция от* n *переменных, т.е.* $\mathbf{t} \in [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \subset \mathbb{R}^n$*. Тогда для сложной функции* $\mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))$ *справедливо равенство*

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{t}} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{t})}{\partial \mathbf{t}} \tag{6.1}$$

Отметим, что в (6.1) $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{t}}$ *– матрица размерности* $n \times n$*,* $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{\partial \mathbf{x}}$ *– размерности* $n \times m$*,* $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{t}}$ *– размерности* $m \times n$*.*

Доказательство. 1) Элемент $a_{i,j}$ произведения матриц $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ и $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{t}}$ имеет вид

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}} \cdot \frac{\partial x^{(k)}}{\partial t^{(j)}} \tag{6.2}$$

2) По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial F^{(i)}}{\partial t^{(j)}} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(k)}} \cdot \frac{\partial x^{(k)}}{\partial t^{(j)}} \tag{6.3}$$

Сравнивая (6.2) и (6.3), убеждаемся в справедливости равенства (6.1). □
Следствие. Если $m = n$, то все матрицы в равенстве (6.1) – квадратные матрицы размерности $m \times m$. Поэтому при $m = n$

$$\frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x}(\mathbf{t}))}{D\mathbf{t}} = \frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x})}{D\mathbf{x}} \cdot \frac{D\mathbf{x}}{D\mathbf{t}}$$

– очевидно. □

7. Общая теорема о неявных функциях

Определение 7.1. *Пусть* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *– вектор-функция,* $\mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset \mathbb{R}^m$*,* $\mathbf{y} \in [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \subset \mathbb{R}^n$*,* $\mathbf{F} : \ \Pi = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \to \mathbb{R}^n$*, т.е.* $\mathbf{F} = (F^{(1)}, F^{(2)}, \ldots, F^{(n)})$*.*

Если $\forall \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad \exists!\, \mathbf{y} \in [\mathbf{c}, \mathbf{d}] \quad (\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}))$ *так, что* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}(\mathbf{x})) = 0$, *то говорят, что равенство* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ *определяет неявно в* Π *функцию* $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$.

Замечание. Векторное равенство $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ можно записать как систему

$$\begin{cases} F^{(1)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ F^{(2)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(n)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(m)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

т.е. в системе (7.1) столько равенств, сколько неизвестных $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$.

Теорема 7.1 (Общая теорема о неявных функциях). *Пусть вектор-функция* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *определена в прямоугольнике*

$$\Pi^{m+n} = [\mathbf{x}_0 - \boldsymbol{\Delta}_m, \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Delta}_m] \times [\mathbf{y}_0 - \boldsymbol{\Delta}_n, \mathbf{y}_0 + \boldsymbol{\Delta}_n]$$

где $\boldsymbol{\Delta}_m = (\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots \Delta^{(m)})$, $\boldsymbol{\Delta}_n = (\Delta^{(m+1)}, \Delta^{(m+2)}, \ldots \Delta^{(m+n)})$, $\Delta^{(j)} > 0$ *и удовлетворяет условиям*
1) в прямоугольнике Π^{m+n} $\mathbf{F}$ *имеет непрерывные частные производные по всем переменным* $x^{(j)}, y^{(k)}$;
2) $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = 0 = (0, 0, \ldots, 0)$;
3) $\frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)}{D\mathbf{y}} \neq 0$.
Тогда существует прямоугольник $\tilde{\Pi}^{m+n} \subset \Pi^{m+n}$,

$$\tilde{\Pi}^{m+n} = [\mathbf{x}_0 - \delta_m, \mathbf{x}_0 + \delta_m] \times [\mathbf{y}_0 - \delta_n, \mathbf{y}_0 + \delta_n] \quad (0 < \delta^{(j)} < \Delta^{(j)}, j = 1, 2, \ldots, n+m)$$

такой, что
1) в прямоугольнике $\tilde{\Pi}^{m+n}$ *система* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ *определяет неявно функцию* $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$;
2) $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$;
3) функция $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ *имеет непрерывные частные производные* $\frac{\partial y^{(i)}}{\partial x^{(j)}}$;
4) справедливо равенство

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Доказательство проведем индукцией по размерности n.
1) При $n = 1$ – это 2-я теорема о неявных функциях.
2) Пусть теорема верна для размерности $n-1$. Покажем, что она верна для

размерности n. Для удобства вектор $(y^{(1)},\dots,y^{(n-1)},y^{(n)})$ будем записывать в виде $(\mathbf{y},y^{(n)})$, где $\mathbf{y}=(y^{(1)},\dots,y^{(n-1)})$. По условию

$$\frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,y_0^{(n)})}{D(\mathbf{y},y^{(n)})}\neq 0\Rightarrow \left|\begin{array}{l}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(1)}},\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(2)}},\dots,\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n)}}\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(1)}},\frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(2)}},\dots,\frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n)}}\end{array}\right|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0\\ \mathbf{y}=\mathbf{y}_0\\ y^{(n)}=y_0^{(n)}}}\neq 0.$$

Но тогда в последней строке по крайней мере один элемент $\neq 0$. Пусть для определенности $\frac{\partial F^{(n)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,y_0^{(n)})}{\partial y^{(n)}}\neq 0$. Этого можно добиться изменением нумерации. Поэтому по 2-й теореме о неявных функциях существует прямоугольник

$$\tilde{\Pi}^{m+n}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,y_0^{(n)})=$$
$$=[\mathbf{x}_0-\tilde{\delta}_m,\mathbf{x}_0+\tilde{\delta}_m]\times[\mathbf{y}_0-\tilde{\delta}_{n-1},\mathbf{y}_0+\tilde{\delta}_{n-1}]\times[y_0^{(n)}-\tilde{\delta}^{(m+n)},y_0^{(n)}+\tilde{\delta}^{(m+n)}],$$

в котором равенство $F^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},y^{(n)})=0$ определяет неявно функцию

$$y^{(n)}=y^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y})\ \ (\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m,\ \mathbf{y}\in\mathbb{R}^{n-1}),$$

которая в $\tilde{\Pi}^m(\mathbf{x}_0)\times\tilde{\Pi}^{n-1}(\mathbf{y}_0)$ имеет непрерывные частные производные, $y^{(n)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=y_0^{(n)}$, и, следовательно, $F^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},y^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y}))\equiv 0\ \forall\,\mathbf{x},\mathbf{y}\in\tilde{\Pi}^m\times\tilde{\Pi}^{n-1}$. Подставляя функцию $y^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в первые $n-1$ уравнения (7.1), получим систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l}\Phi^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y})=F^{(1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},y^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y}))=0,\\ \Phi^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y})=F^{(2)}(\mathbf{x},\mathbf{y},y^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y}))=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Phi^{(n-1)}(\mathbf{x},\mathbf{y})=F^{(n-1)}(\mathbf{x},\mathbf{y},y^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y}))=0.\end{array}\right.\tag{7.2}$$

(7.2) есть система из $(n-1)$ уравнений с $(n-1)$ неизвестными $y^{(1)},y^{(2)},\dots$ $y^{(n-1)}$. Покажем, что в прямоугольнике $\tilde{\Pi}^m(\mathbf{x}_0)\times\tilde{\Pi}^{n-1}(\mathbf{y}_0)$ эта система удовлетворяет условиям теоремы 7.1 (с заменой n на $n-1$). Во-первых, каждая функция $\Phi^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ имеет непрерывные частные производные по $x^{(j)},y^{(k)}$ как суперпозиция функций, имеющих непрерывные частные производные. Во-вторых

$$\Phi^{(i)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)=F^{(i)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,y^{(n)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0))=F^{(i)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,y_0^{(n)})=0.$$

В-третьих, $\frac{D\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)}{D\mathbf{y}}\neq 0$. Покажем это. Запишем этот определитель

$$\frac{D\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{y})}{D\mathbf{y}}=\left|\begin{array}{ccc}\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(1)}}+\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n)}}\cdot\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}, & \dots & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n-1)}}+\frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n)}}\cdot\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(1)}}+\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n)}}\cdot\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}, & \dots & \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}}+\frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n)}}\cdot\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}}\end{array}\right|\tag{7.3}$$

Преобразуем определитель $\frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y},y^{(n)})}{D(\mathbf{y},y^{(n)})}$ следующим образом:

1) к 1-у столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}$

2) ко 2-у столбцу прибавим n-й столбец, умноженный на $\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(2)}}$

. . . .

$n-1$) к $n-1$-у столбцу прибавим последний столбец, умноженный на $\frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}}$

Получим определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(1)}} + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}, & \dots & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}}, & \frac{\partial F^{(1)}}{\partial y^{(n)}} \\ \dots & \dots & \dots & \\ \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(1)}} + \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}, & \dots & \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} & \frac{\partial F^{(n-1)}}{\partial y^{(n-1)}} \\ \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(1)}} + \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(1)}}, & \dots & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} + \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{\partial y^{(n)}}{\partial y^{(n-1)}} & \frac{\partial F^{(n)}}{\partial y^{(n)}} \end{vmatrix}$$

Положим в этом определителе $y^{(n)} = y^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0, \mathbf{y} = \mathbf{y}_0$. Так как $F^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y},y^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y})) \equiv 0$, то в последней строке все элементы, кроме последнего, равны нулю. Разложим этот определитель по элементам последней строки, получаем

$$0 \neq \frac{D\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0,y_0^{(n)})}{D(\mathbf{y},y^{(n)})} = \frac{\partial F^{(n)}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)}{\partial y^{(n)}} \cdot \frac{D\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)}{D\mathbf{y}} \Rightarrow \frac{D\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)}{D\mathbf{y}} \neq 0$$

и в силу непрерывности этот определитель неравен нулю в некоторой окрестности точки $(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0)$. Таким образом, по предположению индукции существует прямоугольник $\Pi^{m+n-1}(\mathbf{x}_0,\mathbf{y}_0) \subset [\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}_m, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}_m] \times [\mathbf{y}_0 - \tilde{\delta}_{n-1}, \mathbf{y}_0 + \tilde{\delta}_{n-1}]$ такой, что равенство $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ определяет неявно функцию $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, т.е. $\forall \mathbf{x} \in \Pi^m(\mathbf{x}_0) = [\mathbf{x}_0 - \tilde{\delta}_m, \mathbf{x}_0 + \tilde{\delta}_m]$ $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})) = 0$, $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$, функции $y^{(i)}(\mathbf{x})$ $(i = 1,\dots,n-1)$ имеют в $\tilde{\Pi}^m(\mathbf{x}_0)$ непрерывные частные производные по переменным $x^{(1)},\dots,x^{(m)}$. Но из условия $\Phi^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})) = 0$ следует $F^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}),y^{(n)}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x}))) = 0$ $(i = 1,\dots,n-1)$ и такое же равенство справедливо при $i = n$. Таким образом, вектор-функция $(\mathbf{y}(\mathbf{x}), y^{(n)}(\mathbf{x}))$ определяется неявно равенством $\mathbf{F}(\mathbf{x},\mathbf{y},y^{(n)}) = 0$.

Очевидно также, что $\mathbf{y}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$, $y^{(n)}(\mathbf{x}_0) = y_0^{(n)}$.

Осталось проверить равенство для производных. Для этого продифференцируем тождества $F^{(i)}(\mathbf{x},\mathbf{y}(\mathbf{x})) \equiv 0$ $(i = 1,\dots,n)$ по переменным $x^{(j)}$ $(j = 1,\dots,m)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial F^{(i)}}{\partial x^{(j)}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F^{(i)}}{\partial y^{(k)}} \cdot \frac{\partial y^{(k)}}{\partial x^{(j)}} = 0 \quad (i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}).$$

В матричной форме эти равенства можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{n\times m} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}\right)_{n\times n} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{n\times m} = 0 \tag{7.4}$$

Так как $\left|\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}\right| \neq 0$, то существует обратная матрица $\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}\right)^{-1}$. Умножая на нее слева обе части равенства (7.4), получаем

$$\left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{y}}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{x}}\right) + \frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}} = 0. \ \square$$

8. Условный экстремум, необходимое условие. Стационарные точки. Критерий стационарной точки

Пусть функция $f(\mathbf{x}) = f(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, x^{(n+1)}, \ldots, x^{(m)})$ определена в $O(\mathbf{x}_0)$. Для краткости обозначим: $\mathbf{x}^{(n)} = (x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)})$, $\mathbf{x}^{(m-n)} = (x^{(n+1)}, \ldots, x^{(m)})$. Тогда $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)})$.

Пусть кроме этого функции $\varphi_j(\mathbf{x})$ $(j = \overline{1,n})$ определены тоже в $O(\mathbf{x}_0)$. Через $\overline{\varphi}(\mathbf{x})$ обозначим вектор-функцию $(\varphi^{(j)}(\mathbf{x}))_{j=1}^{n}$. Пусть $E = \{\mathbf{x} \in O(\mathbf{x}_0) :\ \varphi^{(j)}(\mathbf{x}) = 0 \ \forall\, j = \overline{1,n}\}$.

Определение 8.1. *Будем говорить, что функция $f(\mathbf{x})$ имеет в точке $\mathbf{x}_0$* $\min(\max)$ *при условии $\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ если $\exists\, O_\delta(\mathbf{x}_0)$ такая, что $\forall\,\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{x}_0) \cap E$, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ $(f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0))$. Точку $\mathbf{x}_0$ называют точкой условного экстремума, а задачу нахождения точки условного экстремума – задачей на условный экстремум. Коротко записывают:*
$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) \to \min(\max) \\ \quad\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0 \end{cases}$$

Пусть $\mathbf{x}_0$ – точка условного экстремума при условии $\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$. Будем предполагать, что $\overline{\varphi}(\mathbf{x})$ имеет непрерывные частные производные в $O(\mathbf{x}_0)$, $\overline{\varphi}(\mathbf{x}_0) = 0$, и $\frac{D\overline{\varphi}(\mathbf{x}_0)}{D\mathbf{x}^{(n)}} \neq 0$. В этом случае по теореме о неявных функциях система уравнений $\overline{\varphi}(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)} = 0$ определяет в некоторой $O_\delta(\mathbf{x}_0)$ неявно вектор-функцию $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}) = \mathbf{x}^{(n)}(x^{(n+1)}, x^{(n+2)}, \ldots, x^{(m)})$, т.е.
$\overline{\varphi}(\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}), \mathbf{x}^{(m-n)}) \equiv 0$ и $\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = \mathbf{x}_0^{(n)}$. Подставляя
$\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)})$ в $f(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)})$, получим функцию

$$\Phi(\mathbf{x}^{(m-n)}) = f(\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}), \mathbf{x}^{(m-n)}).$$

Из определения условного экстремума следует, что $\mathbf{x}_0$ является точкой условного экстремума $f(\mathbf{x})$ при условии $\overline{\varphi}(\mathbf{x})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x}_0^{(m-n)}$ является точкой абсолютного локального экстремума для функции $\Phi(\mathbf{x}^{(m-n)})$. По необходимому условию экстремума $d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$, т.е.

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(j)}} = 0 \quad \forall\, j = \overline{n+1, \ldots, m}. \tag{8.1}$$

Условия (8.1) есть необходимые условия экстремума.

Определение 8.2. *Точка* $\mathbf{x}_0 \in E$, *в которой* $d\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$, *называется стационарной точкой функции* $f(\mathbf{x})$ *при условии* $\overline{\varphi}(\mathbf{x}_0) = 0$.

Замечание. Для нахождения точки $\mathbf{x}_0^{(m-n)}$, в которой $\frac{\partial\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(j)}} = 0$, надо решать систему

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(n+1)}} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(m)}} = 0 \end{cases}$$

или иначе

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(n+1)}} + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(n+1)}} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(m)}} + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x^{(m)}} = 0 \end{cases} \tag{8.2}$$

В этой системе $(m-n)$ уравнений и $(m-n)$ неизвестных $x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)}$. Производные $\frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(k)}}$ могут быть найдены по теореме о неявной функции из соотношения

$$\frac{\partial \mathbf{x}^{(n)}}{\partial \mathbf{x}^{(m-n)}} = -\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^{(n)}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial \mathbf{x}^{(m-n)}}\right).$$

Подставляя эти значения частных производных $\frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(k)}}$ в (8.2) и решая систему (8.2) относительно $x^{(n+1)}, \dots, x^{(m)}$, найдем стационарную точку $\mathbf{x}_0$.

Однако, подобный метод нахождения стационарной точки далеко не всегда удобен, т.к. он требует явного знания функции $\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-1)})$. Поэтому нам нужен критерий стационарной точки.

Лемма 8.1. *Пусть* $\mathbf{x}_0$ *такая точка, в которой* $\frac{D\overline{\varphi}(\mathbf{x}_0)}{D\mathbf{x}^{(n)}} \neq 0$ *и* $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)})$ *та функция, которая определена неявно равенством* $\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$. *Тогда* $(\mathit{grad}\ \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0\ \forall\, j = \overline{1,n}$ *тогда и только тогда, когда для всех* $j = \overline{1,n}$

$$dx^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^k} d\,x^{(k)}.$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\forall\, j = \overline{1,n}$ $(\mathrm{grad}\ \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\mathbf{x}) = 0$. Запишем это равенство в координатах:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \cdot d\,x^{(k)} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial\varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \cdot d\,x^{(k)} = 0. \tag{8.3}$$

Подставляя $\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(n-m)})$ в функции $\varphi^{(j)}(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)})$, получаем равенство $\varphi^{(j)}(\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}), \mathbf{x}^{(m-n)}) \equiv 0$ из которого при каждом $j = \overline{1, n}$

$$\frac{\partial\, \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(i)}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \cdot \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x^{(i)}} + \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} = 0.$$

Умножим эти равенства на $d\,x^{(i)}$ и сложим почленно

$$\sum_{i=n+1}^{m} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \cdot \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x^{(i)}} d\,x^{(i)} + \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} d\,x^{(i)} = 0.$$

Изменим порядок суммирования

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \left(\sum_{i=n+1}^{m} \frac{\partial x^{(k)}}{\partial x^{(i)}} d\,x^{(i)} \right) + \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} d\,x^{(i)} = 0 \tag{8.4}$$

Вычитая из (8.4) – (8.3), получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \left(d\,x^{(k)} - \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\partial x^{(k)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(i)}} d\,x^{(i)} \right) = 0.$$

Это система относительно разностей $d\,x^{(k)} - \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\partial x^{(k)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(i)}} d\,x^{(i)}$. Определитель этой системы $\frac{D\overline{\varphi}(\mathbf{x}_0)}{D\mathbf{x}^{(n)}} \neq 0$, следовательно, система имеет единственное решение, это решение нулевое, отсюда

$$d\,x^{(k)} = \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\partial x^{(k)}(x_0^{(m-n)})}{\partial x^{(i)}} d\,x^{(i)}. \tag{8.5}$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнено равенство (8.5). Подставляя в (8.4), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} + \sum_{i=n+1}^{m} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} d\,x^{(i)} = 0.$$

Откуда $d\,\varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0) = (\mathrm{grad}\ \varphi^{(\mathrm{j})}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}) = 0.$ □

Теорема 8.2. *Точка* $\mathbf{x}_0 \in E$ *будет стационарной точкой функции* $f(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)})$ *при условии* $\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ *тогда и только тогда, когда из условий* $(\mathrm{grad}\ \varphi^{(\mathrm{j})}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}) = 0$ *следует*

$$d\,f(\mathbf{x}_0) = (\mathrm{grad\ f}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}) = 0.$$

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\mathbf{x}_0 \in E$ стационарная точка. Тогда $d\,\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$. Значит $\sum\limits_{k=n+1}^{m} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} = 0$. Следовательно,

$$\sum_{k=n+1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \cdot \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(k)}} \right) d\,x^{(k)} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} = 0.$$

Меняем порядок суммирования

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial x^{(j)}}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} \right) + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} = 0 \tag{8.6}$$

Пусть $(\mathrm{grad}\ \varphi^{(\mathrm{j})}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}) = 0$, тогда по лемме

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} = d\,x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)}).$$

Подставляя в (8.6), получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} d\,x^{(j)} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} = 0.$$

Отсюда $d\,f(\mathbf{x}_0) = (\mathrm{grad\ f}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}) = 0$.
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть из равенств $(\mathrm{grad}\ \varphi^{(\mathrm{j})}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}) = 0$ следует $d\,f(\mathbf{x}_0) = 0$. Надо доказать, что $d\,\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$. Имеем для $d\,\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})$:

$$d\,\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \frac{\partial x^{(j)}(x_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} + \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} \right) d\,x^{(k)}.$$

Меняем порядок суммирования

$$d\,\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)}. \tag{8.7}$$

На множестве E переменные $x^{(1)}, ..., x^{(m)}$ связаны соотношениями $x^{(j)} = x^{(j)}(x^{(n+1)}, ..., x^{(m)})$ $j = \overline{1, n}$. Поэтому, если $\mathbf{x}_0 \in E$, то

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)})}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} = d\,x^{(j)}(\mathbf{x}_0^{(m-n)}). \tag{8.8}$$

Тогда по лемме 8.1 $(\mathrm{grad}\,\varphi^{(\mathrm{j})}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}) = 0$. Подставляя (8.8) в (8.7), получаем

$$d\,\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(j)}} d\,x^{(j)} + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(k)}} d\,x^{(k)} = (\mathrm{grad}\,\mathrm{f}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}).$$

Но по условию из $(\mathrm{grad}\ \varphi^{(\mathrm{j})}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}) = 0$ следует $(\mathrm{grad}\ \mathrm{f}(\mathbf{x}_0), \mathrm{d}\,\mathbf{x}) = 0$. Значит $d\,\Phi(\mathbf{x}_0^{(m-n)}) = 0$. □

9. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Необходимое условие

Снова рассматриваем задачу на условный экстремум:

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(n)}, \mathbf{x}^{(m-n)}) \to \min(\max) \\ \overline{\varphi}(\mathbf{x}) = (\varphi^{(j)}(\mathbf{x}))_{j=1}^{n} = 0. \end{cases}$$

Предполагаем, что $\frac{D\overline{\varphi}(\mathbf{x})}{D\mathbf{x}^{(n)}} \neq 0$ в некоторой $O(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R}^m$.

Определение 9.1. *Функцию*

$$F(\mathbf{x}, \overline{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} \varphi^{(j)}(\mathbf{x})$$

называют функцией Лагранжа, числа $\lambda^{(j)}$ *– множителями Лагранжа.*

Задача нахождения стационарных точек функции $f(\mathbf{x})$ при условии $\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ сводится к нахождению стационарных точек функции Лагранжа.

Теорема 9.1. *Точка* $\mathbf{x}_0$ *является стационарной точкой функции* $f(\mathbf{x})$ *при условии* $\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\exists\, \overline{\lambda}_0 = (\lambda_0^{(1)}, \ldots, \lambda_0^{(n)}), \ \ \textit{что} \ \ d\,F(\mathbf{x}_0, \overline{\lambda}_0) = 0,$$

где $d\,F(\mathbf{x}_0, \overline{\lambda}_0)$ *вычисляется по переменным* $x^{(1)}, \ldots, x^{m)}$ *при фиксированном* $\overline{\lambda}_0$*.*

Для доказательства потребуется лемма.

Лемма 9.2. *Пусть даны векторы* $\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^m)$*. Вектор* $\mathbf{a}$ *есть линейная комбинация векторов* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *тогда и только тогда, когда из условия, что вектор* $\mathbf{c}$ *ортогонален всем векторам* $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ *следует, что вектор* $\mathbf{c}$ *ортогонален* $\mathbf{a}$*.*

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь очевидна. В самом деле, пусть $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{b}_j$. Если $\mathbf{c}$ ортогонален всем $\mathbf{b}_j$, то $(\mathbf{c}, \mathbf{b}_j) = 0 \; \forall\, j = 1, 2, \ldots, n$, значит,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\mathbf{a}, \mathbf{b}_j) = \sum 0 = 0.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. Можно считать, что векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ – линейно независимы. Тогда из курса линейной алгебры известно, что существуют векторы $\mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+2}, \ldots, \mathbf{b}_m$, ортогональные между собой, и ортогональны векторам $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$. Но тогда векторы $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, \ldots, \mathbf{b}_m$ – линейно независимы, следовательно, образуют базис в $\mathbb{R}^m$, значит,

$$\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m, \;\text{ что }\; \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{b}_j + \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_j \mathbf{b}_j. \tag{9.1}$$

Покажем, что все λ_j при $j > n + 1$ равны нулю. По выбору $\mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+2}, \ldots, \mathbf{b}_m$: $(\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) = 0$ при $j \le n, \; k > n$. Умножим обе части равенства (9.1) на $\mathbf{b}_k$ $(k > n)$. Получим

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}_k) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) + \sum_{j=n+1}^{m} \lambda_j (\mathbf{b}_j, \mathbf{b}_k) = 0 + \lambda_k ||\mathbf{b}_k||_2^2.$$

Но по предположению необходимости $\mathbf{b}_k$ ортогональны вектору $\mathbf{a}$, следовательно, $\lambda_k = 0$ $(k > n)$. Подставляя эти значения в (9.1), получим $\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{b}_j$. $\square$

Доказательство теоремы 9.1. Точка $\mathbf{x}_0$ является стационарной точкой $f(\mathbf{x})$ при условии $\overline{\varphi}(\mathbf{x}) = 0$ тогда и только тогда, когда из того, что $\forall\, j = 1, \ldots, n$ $(\mathrm{grad}\varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0), d\,\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow (\mathrm{grad}f(\mathbf{x}_0), d\,\mathbf{x}) = 0$. Рассмотрим векторы $\mathrm{grad}f(\mathbf{x}_0)$, $\mathrm{grad}\varphi^{(1)}(\mathbf{x}_0), \ldots, \mathrm{grad}\varphi^{(n)}(\mathbf{x}_0)$. По лемме 9.2 из ортогональности вектора $d\,\mathbf{x}$ ко всем векторам $\mathrm{grad}\varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)$ следует ортогональность к вектору $\mathrm{grad}f(\mathbf{x}_0)$ тогда и только тогда, когда вектор $\mathrm{grad}f(\mathbf{x}_0)$ есть линейная комбинация векторов $(\mathrm{grad}\varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0))_{j=1}^{n}$, т.е.

$$\exists\, \lambda_0^{(1)}, \lambda_0^{(2)} \ldots, \lambda_0^{(n)}, \;\text{ что }\; \mathrm{grad}f(\mathbf{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_0^{(j)} \mathrm{grad}\varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0). \tag{9.2}$$

Запишем (9.2) в координатной форме:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_0^{(j)} \frac{\partial \varphi^{(j)}(\mathbf{x}_0)}{\partial x^{(i)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{9.3}$$

(9.3) равносильно системе

$$\frac{\partial}{\partial x^{(i)}}\left(f(\mathbf{x})-\sum_{j=1}^{n}\lambda_0^{(j)}\varphi^{(j)}(\mathbf{x})\right)\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}=0,$$

т.е.

$$\forall\, i=\overline{1,m}\quad \frac{\partial F(\mathbf{x},\overline{\lambda}_0)}{\partial x^{(i)}}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}=0 \Leftrightarrow\ d\,F(\mathbf{x}_0,\overline{\lambda}_0)=0.\ \square$$

10. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Достаточное условие

Теорема 10.1. *Пусть $\mathbf{x}_0$ является стационарной точкой функции $f(\mathbf{x})$ при условии $\varphi(\mathbf{x})=0$ и пусть $\overline{\lambda}_0$ тот вектор, для которого $d\,F(\mathbf{x}_0,\overline{\lambda}_0)=0$. Тогда*

$$d^2f(\mathbf{x}_0)=d^2F(\mathbf{x}_0,\overline{\lambda}_0),$$

где $d^2f(\mathbf{x}_0)$ вычислен в предположении связей $\varphi(\mathbf{x})=0$, $d^2F(\mathbf{x}_0,\overline{\lambda}_0)$ вычислен формально по переменным $x^{(1)},\ldots,x^{(m)}$ при фиксированном $\overline{\lambda}_0$.

Доказательство. Так как $\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}^{(n)}}\neq 0$ в $O(\mathbf{x}_0)$, то $\mathbf{x}^{(n)}=\mathbf{x}^{(n)}(x^{(n+1)},\ldots,x^{(m)})$, т.е. переменные $x^{(1)},\ldots,x^{(n)}$ есть функции переменных $x^{(n+1)},\ldots,x^{(m)}$. Но и переменные $x^{(n+1)},\ldots,x^{(m)}$ есть функции от $x^{(n+1)},\ldots,x^{(m)}$, следовательно, можно сразу считать, что все $x^{(1)},\ldots,x^{(n)},x^{(n+1)},\ldots,x^{(m)}$ есть функции переменных $x^{(n+1)},\ldots,x^{(m)}$.

Так как $\mathbf{x}^{(n)}$ неявно задана равенствами, то $\varphi(\mathbf{x}^{(n)}(\mathbf{x}^{(m-n)}),\mathbf{x}^{(m-n)})=0$. Поэтому при $\mathbf{x}\in O(\mathbf{x}_0)$

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})-\sum_{j=1}^{n}\lambda_0^{(j)}\varphi^{(j)}(\mathbf{x})=F(\mathbf{x},\lambda_0),$$

где $\mathbf{x}$ удовлетворяет условиям связи $\varphi(\mathbf{x})=0$. Но тогда

$$d\,f(\mathbf{x})=d\,F(\mathbf{x},\lambda_0)$$

в предположении, что $\mathbf{x}$ связаны соотношениями $\varphi(\mathbf{x})=0$. Но тогда и

$$d^2f(\mathbf{x})=d(d\,F(\mathbf{x},\lambda_0))=d\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_0)}{\partial x^{(j)}}\cdot d\,x^{(j)}\right)=$$

$$=\sum_{j=1}^{m}d\left(\frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_0)}{\partial x^{(j)}}\cdot d\,x^{(j)}\right)=\sum_{j=1}^{m}d\left(\frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_0)}{\partial x^{(j)}}\right)d\,x^{(j)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_0)}{\partial x^{(j)}}d^2(x^{(j)})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 F(\mathbf{x},\lambda_0)}{\partial x^{(i)}\partial x^{(j)}}d\,x^{(i)}d\,x^{(j)}+$$

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_0)}{\partial x^{(j)}}d^2(x^{(j)}).$$

Так как $\mathbf{x}_0$ – стационарная точка, то полагая $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0$, получаем $d^2f(\mathbf{x}_0)=d^2F(\mathbf{x}_0,\lambda_0)$. $\square$

Замечание. Из доказанных теорем 9.1 и 10.1 вытекает следующий алгоритм решения задачи на условный экстремум.

1) Составляем функцию Лагранжа $F(\mathbf{x},\lambda)=f(\mathbf{x})-\sum_{j=1}^{n}\lambda^{(j)}\varphi^{(j)}(\mathbf{x})$.

2) Составляем систему $\begin{cases}\frac{\partial F(\mathbf{x},\lambda_0)}{\partial x^{(i)}}=0 & (i=1,\ldots,m)\\ \varphi^{(j)}(\mathbf{x})=0 & (j=1,\ldots,n).\end{cases}$ Это система относительно неизвестных $x^{(1)},\ldots,x^{(m)},\lambda^{(1)},\ldots,\lambda^{(n)}$, в которой $m+n$ уравнений и $m+n$ неизвестных.

3) Пусть $x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(m)},\lambda_0^{(1)},\ldots,\lambda_0^{(n)}$ – решение этой системы. По теореме 9.1 $x_0^{(1)},\ldots,x_0^{(m)}$ – стационарная точка функции $f(\mathbf{x})$ при условии $\varphi(\mathbf{x})$.

4) При найденном $\lambda_0=(\lambda_0^{(1)},\ldots,\lambda_0^{(n)})$ записываем в точке $\mathbf{x}_0$ $d^2F(\mathbf{x}_0,\lambda_0)$.

Если $d^2F(\mathbf{x}_0,\lambda_0)$ есть положительно определенная квадратичная форма, то в точке $\mathbf{x}_0$ – min.

Если $d^2F(\mathbf{x}_0,\lambda_0)$ есть отрицательно определенная квадратичная форма, то в точке $\mathbf{x}_0$ – max.

Если $d^2F(\mathbf{x}_0,\lambda_0)$ неопределена, то экстремума нет.

Оглавление