На правах рукописи

Быков Сергей Валентинович

ФАКТОРИЗАЦИОННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И СВОЙСТВА КОРНЕВЫХ МНОЖЕСТВ ВЕСОВЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Саратов 2010

Работа выполнена на кафедре математического анализа Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Шамоян Файзо Агитович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Коточигов Александр Михайлович

кандидат физико-математических наук, доцент Шубабко Елена Николаевна

Ведущая организация: Казанский государственный энергетический университет

Защита состоится «17» июня 2010 года в 17 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета ДМ 212.243.15 при Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, СГУ, механико-математический факультет.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.

Автореферат разослан «___» _________ 2010 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
кандидат физико-математических наук,
доцент В.В. Корнев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Хорошо известно, что исследование свойств корневых множеств и построение факторизационных представлений различных классов аналитических функций играют важнейшую роль в общей теории функций комплексного переменного и её приложениях. Исследование этих вопросов привлекало внимание классиков комплексного анализа ещё в начале прошлого столетия. В этой связи отметим классические работы К. Вейерштрасса, Ж. Адамара, Ф. Бореля, Е. Линделёфа, О. Пикара и др. о нулях целых функций, имеющих заданный рост вблизи бесконечно удалённой точки, а также работы Р. Неванлинна и В.Н. Смирнова о внешне-внутренней факторизации классов Харди и классов функций ограниченного вида в единичном круге. Эти вопросы остаются в центре внимания и современных авторов, для этого достаточно отметить работы М.М. Джрбашяна, Б.И. Левина, Н.В. Говорова, Б.А. Тейлора, Л.А. Рубеля, А.А. Гольдберга, И.В. Островского, А.М. Седлецкого, Ф.А. Шамояна, Н.А. Широкого, Б.И. Коренблюма, К. Сейпа, Б.Н. Хабибуллина и других математиков, посвящённые исследованиям свойств корневых множеств и построению факторизационных представлений ряда важнейших классов голоморфных функций.

Приведём обзор некоторых результатов, тесно связанных с тематикой диссертационной работы, для этого введём необходимые обозначения и определения.

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $H(\mathbb{C})$ – множество всех целых функций, λ – монотонно возрастающая, положительная функция на $\mathbb{R}_+$. Введём в рассмотрение классы функций

$$H(\lambda,+\infty)=\left\{ f\in H(\mathbb{C}): \ln|f(z)|\le C_f\cdot\lambda(|z|),\ z\in\mathbb{C}\right\}$$

и

$$\tilde{H}(\lambda,+\infty)=\left\{ f\in H(\mathbb{C}): \ln|f(z)|\le A_f\cdot\lambda(B_f\cdot|z|),\ z\in\mathbb{C}\right\},$$

где A_f, B_f, C_f – здесь и в дальнейшем произвольные постоянные, зависящие только от функции f. Пусть $\lambda\in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$ и существует предел

$$\alpha_\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda'(x)\cdot x}{\lambda(x)},$$

тогда назовём его степенным порядком роста функции λ. Нетрудно заметить, что если $\alpha_\lambda < +\infty$, то рассматриваемые классы функций $H(\lambda,+\infty)$ и $\tilde{H}(\lambda,+\infty)$ совпадают, а если $\lambda(x) = x^\rho,\ x\in\mathbb{R}_+$, то они совпадают с классом целых функций конечного порядка ρ и нормального типа. Однако при $\alpha_\lambda = +\infty$ это уже не так, например, в случаях, когда

$$\lambda(t) = \underbrace{\exp\exp...\exp}_{n}\left(t^\rho\right),\ t\in\mathbb{R}_+,\ \rho\in\mathbb{R}_+ \text{ или } \lambda(t) = \exp\left(\ln t\right)^\rho,\ t\in\mathbb{R}_+,\ \rho>1.$$

Если $\lambda(t) = t^\rho,\ t\in\mathbb{R}_+,\ \rho\in\mathbb{R}_+$, то класс $H(\lambda,+\infty)$ обозначим через $H(\rho,+\infty)$.

В дальнейшем будем считать, что если $f\in H(\mathbb{C})$, то Z_f будет обозначать множество всех нулей функции f, то есть $\mathrm{Z}_f \overset{def}{=} \left\{z\in\mathbb{C} : f(z)=0\right\}$.

Хорошо известно следующее свойство корней функции из класса $H(\rho,+\infty)$: *последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *можно представить в виде* $\mathrm{Z}=\mathrm{Z}_f,\ \rho\notin\mathbb{N},\ \rho>0$ *тогда и только тогда, когда*

$$n(r) = \left\{card\ z_k : |z_k|\le r\right\} \le C_f\cdot r^\rho\ . \tag{1}$$

Но при $\rho\in\mathbb{N}$ наряду с условием (1) возникает еще условие Е. Линделёфа[1,2]: *существует* $M>0$*, такое что*

$$\left|\sum_{|z_k|\le r}\frac{1}{z_k^\rho}\right| \le M,\ r\in\mathbb{R}_+.$$

Используя последнее условие, нетрудно построить последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, причём $Z_f = \{z_k\}_{k=1}^{+\infty},\ f\not\equiv 0,\ f\in H(\rho,+\infty),\ \rho\in\mathbb{N}$, такую, что для любой функции $g\in H(\rho,+\infty)$ из условия $Z_g = \tilde{Z}_f$, где $\tilde{Z}_f = \left\{|z_k|\right\}_{k=1}^{+\infty}$ следует, что

[1] Гольдберг А.А. Распределение значений мероморфных функций / А.А. Гольдберг, И.В. Островский – М.: Наука. – 1970. – 457 с.
[2] Левин Б.Я. Распределение корней целых функций / Б.Я. Левин – М.: Гостехиздат. –1956. –632 с.

$g(z)=0,\ z\in\mathbb{C}$, то есть множество $\tilde{Z}_f$ не представимо в виде Z_g ни при каких $g\in H(\rho,+\infty)$, $\rho\in\mathbb{N}$, $g(z)\not\equiv 0$. Примером такой последовательности может быть последовательность $\left\{k^{\frac{1}{\rho}}e^{\frac{ik\pi}{\rho}}\right\}_{k=1}^{+\infty}$.

Иными словами, для представления последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}=\mathrm{Z}=Z_g$ важен не только рост функции $n(r)$, но и расположение $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ по аргументам.

Определение. *Скажем, что некоторое множество* X *целых функций удовлетворяет условию Линделёфа, если существует функция* $f\in X$, $f\not\equiv 0$, $Z_f=\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, *такая, что из условия* $g\in X$, $Z_g=\tilde{Z}_f$, *где* $\tilde{Z}_f=\{|z_k|\}_{k=1}^{+\infty}$, *следует, что* $g(z)=0$ *при всех* $z\in\mathbb{C}$.

Из вышеизложенного следует, что класс $H(\rho,+\infty)$ при $\rho\in\mathbb{N}$ удовлетворяет условию Линделёфа, а при $\rho\notin\mathbb{N}$ не удовлетворяет ему. Естественно, возникает вопрос, а что происходит при остальных λ, например, при

$$\lambda(t)=\underbrace{\exp\exp\ldots\exp}_{n}\left(t^{\rho}\right),\ t\in\mathbb{R}_+,\ \rho\in\mathbb{R}_+ \text{ или } \lambda(t)=\exp\left(\ln t\right)^{\rho},\ t\in\mathbb{R}_+,\ \rho>1?$$

Исследованию свойств корневых множеств функций из класса $\tilde{H}(\lambda,+\infty)$ посвящено множество работ. В работах Л.А. Рубеля[3] и Б.А. Тейлора[4], применяя методы теории рядов Фурье, получено описание корневых множеств функций класса $\tilde{H}(\lambda,+\infty)$. Приведём этот результат.

Пусть $Z=\{a_\nu\}_{\nu=1}^{+\infty}$ – последовательность отличных от нуля комплексных чисел, $a_\nu\to\infty$ при $\nu\to+\infty$, λ – функция вышеуказанного типа. Для чисел $k\in\mathbb{N}$ и $r>0$ определим функцию

$$S(r,k,Z)=\frac{1}{k}\sum_{|a_\nu|\le r}\left(\frac{1}{a_\nu}\right)^k.$$

[3] Rubel L.A. / L. A. Rubel // Lect. Notes in Math. –1973. – V. 336. – P. 51–62.
[4] Rubel L.A A Fourier series method for meromorphic and entire functions / L.A. Rubel, B.A. Taylor – Bull. Math. France. – 1968. – V. 96. – P. 56–96

Если $r_1 \geq r_2$, то $S(r_1, r_2, k, Z) = S(r_1, k, Z) - S(r_2, k, Z)$.

Положим также $n(r, Z) = \{card\ a_k : |a_k| \leq r\}$ и $N(r, Z) = \int\limits_0^r \frac{n(t, Z)}{t} dt$.

Основной результат в вышеуказанных работах Л.А. Рубеля и Б.А. Тейлора формулируется следующим образом: *для того чтобы последовательность* $\{a_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *можно было представить в виде* Z_f, $f \in \tilde{H}(\lambda, +\infty)$, $f \not\equiv 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные числа* A, B *и* C, *такие что при всех* r_1 *и* r_2 *выполнялись оценки*

$$S(r_1, r_2, k, Z) \leq A \frac{\lambda(Br_1)}{r_1^k} + A \frac{\lambda(Br_2)}{r_2^k}, \ r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \ r_1 \geq r_2, \ k = 1, 2, \ldots$$

и

$$N(r, Z) \leq C \cdot \lambda(Br), \ r \in \mathbb{R}_+.$$

Исследования корневых множеств классов аналитических в круге функций, имеющих конечный порядок роста вблизи единичной окружности, были начаты в работах В.В. Голубева[5,6]. Отметим, что результаты В.В. Голубева почти через десять лет были переоткрыты немецким математиком Ф. Беурманом[7].

В работах Н.В. Говорова[8,9] получена полная характеризация корневых множеств и построено факторизационное представление классов аналитических в полуплоскости функций конечного порядка ρ. В последние десятилетия довольно интенсивно развивалось исследование свойств корневых множеств и построение факторизационных представлений классов аналитических в круге функций, принадлежащих классам С. Бергмана или имеющих степенной рост при приближении к единичной окружности. Эти результаты подытожены в монографиях[10,11].

---

[5] Голубев В.В. Исследование по теории особых точек однозначных функций / В.В. Голубев // Учёные записки государственного Саратовского университета. – 1924. – Т. 1, вып. 3, т. 2, вып.1.
[6] Голубев В.В. Однозначные аналитический функции. Автоморфные функции / В.В. Голубев – М.: Изд. физматлит. – 1961. – 455 с.
[7] Beuermann F. Wachtumsordnung, Koezientenwachstum und Nullstellendichte bei Potenzreihen mit endlichem Konvergenzkreis / F. Beuermann. // Math. Zeitschrift. – 1931. – B. 33. – S. 98–108.
[8] Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н.В. Говоров. – М.: Наука, Главная редакция физматлит. – 1986. – С. 29–41.
[9] Говоров Н.В. Об индикаторе функций, аналитических и вполне регулярного роста в полуплоскости / Н.В.Говоров // Тезисы кратких научных сообщений Международного конгресса математиков, секция 4.–М.–1966, С.45–46.
[10] Djrbashian A.E. Topics in the theory of A_α^p spaces / A.E. Djrbashian, F.A. Shamoyan // Leipzig: Teubner-Texte zur Math. – 1988. – V. 105. – 200 P.

М.М. Джрбашяном[12,13] были получены формулы типа формул Пуассона–Иенсена, на этой основе исследовались корневые свойства и факторизационные представления функций, мероморфных в круге, имеющих заданную T_ω - характеристику.

В работах Ф.А. Шамояна[10,14] получено полное описание корневых множеств и построено факторизационное представление классов аналитических в круге функций с заданной мажорантой вблизи единичной окружности при условии, что степенной порядок роста мажоранты строго больше единицы.

Цель работы.

1) Изучить свойства корневых множеств целых функций с мажорантой бесконечного порядка.

2) Получить полное описание корневых множеств весовых классов целых функций и построить их факторизационное представление при условии, что вес имеет бесконечный степенной порядок.

3) Охарактеризовать корневые множества классов голоморфных в полуплоскости функций с мажорантой конечного порядка.

4) Оценить в среднем производную голоморфной в круге функции посредством средних самой функции.

Методика исследования. В диссертационной работе используются общие методы линейного и комплексного анализа, а также более специальные методы геометрической теории функций комплексного переменного. В диссертации важную роль сыграли теоремы типа теоремы Л.В. Альфорса и С.Е. Варшавского об оценках конформно отображающих функций криволинейных полос на стандартные области.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

---

[11] Hedenmalm H. Theory of Bergman spaces / H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu // New York: Springer, 2000. – 277 P.

[12] Джрбашян М.М. К проблеме представимости аналитических функций / М.М. Джрбашян // Сообщения института математики и механики АН АрмССР. – 1948. – Вып. 2. – С. 3-35.

[13] Джрбашян М.М. Теория факторизации функций, мероморфных в круге / М.М. Джрбашян // Матем. сборник. – 1969. – 79(121): 4(8) . – С. 517–615.

[14] Шамоян Ф.А. Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций / Ф.А. Шамоян // Сибирский математический журнал. –1999. – Т. 40, №6. – С. 20–41.

1) Установлено, что корневые множества класса целых функций с мажорантой бесконечного порядка удовлетворяют условию Е. Линделёфа.

2) В терминах лишь одной считающей функции получено полное описание корневых множеств и построено факторизационное представление весовых классов целых функций, когда вес имеет бесконечный степенной порядок.

3) Введена серия новых бесконечных произведений, посредством которых охарактеризованы корневые множества классов аналитических в полуплоскости функций с мажорантой конечного порядка.

4) Построено новое факторизационное представление аналитических в круге функций с мажорантой конечного порядка вблизи граничной окружности.

5) Получены L^p - оценки производной аналитической в круге функций через L^p - средние самой функции.

Практическая и теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть применены в последующем к задачам аппроксимации рациональными функциями с фиксированными полюсами, изучения классов целых функций с мажорантой бесконечного порядка, а также при чтении спецкурсов для студентов математических специальностей университетов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты данной работы неоднократно докладывались автором на семинарах по комплексному и функциональному анализу при кафедре математического анализа и на апрельских научных конференциях преподавателей физико–математического факультета Брянского государственного университета имени академика И.Г. Петровского в 2005 – 2010 гг., а также на Смоленской международной конференции «Системы компьютерной математики и их приложения» (Смоленск, 2005 г.), на Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории краевых задач» (Воронеж, 2006 г., 2008 г.) и «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования» (Воронеж, 2009 г.), на Всероссийской конференции по математике и механике (Томск, 2008 г.), на Саратовской зимней математической школе «Современные проблемы теории функций и их приложения» (Саратов, 2010 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликованы работы [1] – [11], список которых приведен в конце автореферата. Работа [8] входит в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий ВАК РФ.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, разбитых в общей сложности на 9 параграфов, и списка используемой литературы в алфавитном порядке. Объем диссертации – 130 страниц. Библиография содержит 56 наименований.

Содержание работы

Во **введении** приводится история вопроса, обосновывается актуальность темы и кратко излагается содержание работы.

Первая глава диссертационной работы посвящена исследованию свойств корневых множеств и построению факторизационных представлений классов целых функций с мажорантой бесконечного порядка.

В **§1 главы 1** рассматриваются вопросы, связанные с нулями целых функций, имеющих мажоранту бесконечного порядка. Здесь мы рассматриваем класс целых функций $H(\lambda,+\infty)$. Для изложения основных результатов данного параграфа приведём следующее определение.

Определение. *Монотонно возрастающую положительную функцию из класса* $C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$ *назовём весовой, если* $\alpha_\lambda = +\infty$.

Установлено следующее утверждение.

Теорема 1.1. *Пусть* λ *– весовая функция, причём* $\lambda \in C^{(2)}(\mathbb{R}_+)$, *функция* $\psi(x) = \ln\lambda(e^x)$ *выпукла вниз на множестве* $\mathbb{R}_+$, *причём*

$$\frac{\psi''(x)}{\psi^{2-\delta}(x)} = O(1),\ x \to +\infty$$

при некотором $0 < \delta < 1$.

Тогда класс функций $H(\lambda,+\infty)$ *обладает условием Линделёфа.*

Заметим, что из теоремы 1.1 следует, что характеризацию корневых множеств функций из класса $H(\lambda,+\infty)$ в терминах $\{|z_k|\}_{k=1}^{+\infty}$ получить нельзя, здесь важно расположение корневых множеств по аргументам.

В §2 главы 1 мы рассматриваем класс целых функций $\tilde{H}(\lambda,+\infty)$. В случае $\alpha_\lambda=+\infty$ нами получено полное описание корневых множеств функций из рассматриваемого класса. Оказывается, что указанное описание имеет модульный характер и его можно получить лишь в терминах $\{|z_k|\}_{k=1}^{+\infty}$, то есть в терминах функции $n(r)$.

Теорема 1.2. *Пусть* λ *– весовая функция, функция* $\varphi(x)=\ln\lambda(x)$ *выпукла вниз на множестве* $\mathbb{R}_+$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *можно представить в виде* Z_f *для некоторой ненулевой функции* $f\in\tilde{H}(\lambda,+\infty)$;

2) существует такое положительное число C, *для которого*

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\exp\left(-\varphi\left(C|z_k|\right)\right)<+\infty .$$

Интересно сравнить утверждение теоремы 1.2 с вышеуказанным результатом Л.А. Рубеля и Б.А. Тейлора.

Установленное свойство корневых множеств класса $\tilde{H}(\lambda,+\infty)$ позволяет построить факторизационное представление рассматриваемого класса функций.

Теорема 1.3. *Пусть, как и прежде,* λ *– весовая функция,* $\varphi(x)=\ln\lambda(x)$, $x\in\mathbb{R}_+$ *выпукла вниз на множестве* $\mathbb{R}_+$.

Тогда класс функций $\tilde{H}(\lambda,+\infty)$ *совпадает с классом целых функций* f, *допускающих представление в виде*

$$f(z)=z^m\cdot e^{g(z)}\cdot\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z}{z_n}\right)\cdot\exp\left(\sum_{j=1}^{p_n}\frac{1}{j}\left(\frac{z}{z_n}\right)^j\right),\ z\in\mathbb{C},$$

где m *– неотрицательное целое число,* $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *– последовательность комплексных чисел, таких, что* $z_n \to \infty$ *при* $n \to +\infty$ *и* $|z_n| \le |z_{n+1}| \le \ldots$*, удовлетворяющих условию*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \exp\left(-\varphi\left(C|z_n|\right)\right) < +\infty$$

при некотором $C > 0$, $p_n = \left[\dfrac{\ln\varphi\left(C|z_n|\right)}{\ln 2}\right]$, $n = 1, 2, \ldots$*, а* $g(z)$ *– целая функция, удовлетворяющая оценке*

$$\left|g(z)\right| \le C_1 \cdot \varphi\left(C_2|z|\right),\ z \in \mathbb{C}$$

при некоторых положительных C_1 *и* C_2.

В **§3 главы 1** рассматривается класс аналитических функций в правой полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\right\}$:

$$X_\varphi^\infty\left(\mathbb{C}_+\right) = \left\{ f \in H\left(\mathbb{C}_+\right) : \ln\left|f(z)\right| \le C_f \cdot \varphi\left(|z|\right),\ z \in \mathbb{C}_+ \right\}.$$

В работах Н.В. Говорова[8,9] получено полное описание корневых множеств аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций, имеющих там конечный порядок, меньший или равный $\rho > 0$.

Основным результатом этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 1.4. *Пусть* φ *– монотонно возрастающая функция из* $C^{(1)}\left(\mathbb{R}_+\right)$*, при этом существует предел*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\varphi'(r)\cdot r}{\varphi(r)} = \alpha_\varphi . \qquad (2)$$

Если $\alpha_\varphi = +\infty$*, то дополнительно предположим, что* $\varphi \in C^{(2)}\left(\mathbb{R}_+\right)$*,* φ *– выпуклая вниз функция, и, кроме того, существует такое число* $0 < \delta < 1$*, что*

$$\frac{\varphi''(r)}{\varphi^{2-\delta}(r)} = O(1) \quad \text{при } r \to +\infty .$$

Тогда:

1) если $f \in X_\varphi^\infty\left(\mathbb{C}_+\right)$, $f\left(r_k\right) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, $r_k > 0$, $f(z) \not\equiv 0$, $z \in \mathbb{C}_+$*, то для произ-*

вольного $\varepsilon > 0$*:* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(r_k)\cdot(\ln\varphi(r_k))^{1+\varepsilon}} < +\infty$*;*

2) обратно: существует функция $f \in X_\varphi(\mathbb{C}_+)$*, такая, что*

$f(r_k) = 0,\ k = 1, 2, \ldots,\ r_k > 0,\ \ f(z) \not\equiv 0,\ z \in \mathbb{C}_+$*, для которой* $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(r_k)} = +\infty$.

В **§4 главы 1** рассматривается класс функций $X_\varphi^\infty(\mathbb{C}^+)$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.5. *Пусть* $f \in X_\varphi^\infty(\mathbb{C}^+)$*, при этом* $\varphi \in C^{(1)}(1; +\infty)$ *и существует предел* (2)*. Тогда для того чтобы из условия*

$$f \in X_\varphi^\infty(\mathbb{C}^+),\ \ f(iy_k) = 0,\ y_k > \delta > 0,\ k = 1, 2, \ldots,\ \ f \not\equiv 0,$$

следовала сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{y_k}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx < +\infty.$$

В **§5 главы 1** описываются корневые множества функций, аналитических в полуплоскости $\mathbb{C}^+$ класса $X_\varphi(\mathbb{C}^+)$. В этом параграфе получены результаты, которые являются уточнением соответствующих результатов Н.В. Говорова.

В случае нецелых α_φ справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6. *Пусть* φ *– монотонно возрастающая положительная функция на* $\mathbb{R}_+$*, причём* $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$*. Предположим, что существует предел* (2), $\alpha_\varphi \notin \mathbb{Z}_+$, $1 < \alpha_\varphi < +\infty$*. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) последовательность $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $r_n \ge \lambda,\ \lambda > 0,\ n = 1, 2, \ldots$ *точек из верхней полуплоскости является корневым множеством некоторой ненулевой функции из класса* $X_\varphi^\infty(\mathbb{C}^+)$*;*

2) существует положительное число C *такое, что* $\forall R > 1$ *справедливо*

$$\sum_{0<\lambda<r_n\le R}\frac{\sin\theta_n}{r_n}\le C\cdot\frac{\varphi(R)}{R}, \tag{3}$$

где C зависит только от последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

В случае натуральных α_φ справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.7. *Пусть* $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность точек из верхней полуплоскости, причём* $|z_n|\ge\lambda>0$. *Если последовательность* $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *является корневым множеством некоторой ненулевой функции из класса* $X_\varphi^\infty(\mathbb{C}^+)$, $\alpha_\varphi\in\mathbb{N},\ \alpha_\varphi>1,$ *то выполняется оценка* (3) .

И обратно: *если* $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность, для которой наряду с оценкой* (3) *выполняется оценка* $\left|\sum_{|z_n|\le R}\frac{1}{z_n^{\alpha_\varphi}}\right|\le M,\ 0<R<+\infty,$ *при этом* $\sup_{x>1}\frac{x^{\alpha_\varphi}}{\varphi(x)}<+\infty,$ *то можно построить ненулевую функцию* $f\in X_\varphi^\infty(\mathbb{C}^+)$, *множество нулей которой совпадает с множеством точек последовательности* $\{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$.

В **§6 главы 1** рассматривается бесконечное произведение типа Вейерштрасса

$$B_p(\zeta,\zeta_k)=\prod_{k=1}^{+\infty}A_p(\zeta,\zeta_k)=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{2y_k(i+\zeta)}{i(\zeta_k+i)\left(\overline{\zeta_k}-\zeta\right)}\right)\cdot\exp\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j}\left(\frac{2y_k(i+\zeta)}{i(\zeta_k+i)\left(\overline{\zeta_k}-\zeta\right)}\right)^j,$$

где $\{\zeta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ – произвольная последовательность точек из $\mathbb{C}^+$, для которой

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\operatorname{Im}\zeta_k)^{p+1}}{|\zeta_k+i|^{2(p+1)}}<+\infty.$$

Порядок роста произведения $B_p(\zeta,\zeta_k)$, в отличие от произведения, построенного Р. Неванлинна в работе[15] и многократно используемого различными авторами, не зависит от p.

В случае, когда корневые множества находятся в угле справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.8. *Пусть задана последовательность* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$, *такая, что* $z_k \in \Delta_\alpha$, $k=1,2...$, *где* $\Delta_\alpha = \{z \in \mathbb{C}^+ : \alpha < \arg z < \pi - \alpha\}$, $0<\alpha<\pi$, *существует функция* $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$, *удовлетворяющая условиям (2) и* $1<\alpha_\varphi<+\infty$, *тогда при любом фиксированном* $p: p>\alpha_\varphi - 1$, *следующие условия эквивалентны:*

1) $B_p(\zeta,\zeta_k) \in X_\varphi^\infty(\mathbb{C}^+)$, $B_p \not\equiv 0$;

2) $n(r) \le C\cdot\varphi(r)$ *при* $r>0$.

Вторая глава диссертационной работы посвящена построению факторизационного представления и оценкам в среднем классов голоморфных в круге функций, допускающих рост вблизи граничной окружности.

§1 главы 2 посвящен факторизации аналитических в круге функций с мажорантой конечного порядка.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(\mathbb{D})$ – множество всех голоморфных в $\mathbb{D}$ функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах $\mathbb{D}$. Пусть φ – монотонно возрастающая положительная функция на R_+. В этом параграфе исследуется свойство факторизационного представления функций из класса

$$X_\varphi^\infty(\mathbb{D}) = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \ln|f(z)| \le C_f \cdot \varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right),\ z \in \mathbb{D} \right\}.$$

[15] Nevanlinna R. Uber die Eigenschaften meromorpher Functionen in einen Winkelraum / R. Nevanlinna // Acta Sol. Sci. Fenn. – 1925. – V.50, №12. – P.1–45.

Как и ранее, пусть $\varphi \in C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$ и существует предел (2). Обозначим через Ω класс монотонно возрастающих функций φ из класса $C^{(1)}(\mathbb{R}_+)$, для которых справедливо представление

$$\varphi(x) = x^{\rho} \cdot \omega\left(\frac{1}{x}\right), \ x \in \mathbb{R}_+,$$

где ω – функция типа модуля непрерывности из класса Зигмунда.

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi \in \Omega$*, при этом* $\alpha_\varphi > 1$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

1) $f \in X_\varphi^\infty(\mathbb{D})$*;*

2) f *допускает представление в виде:*

$$f(z) = z^{\lambda} \cdot \pi_\alpha(z, z_k) \cdot \exp \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\psi(e^{i\theta})}{(1 - e^{-i\theta} z)^{\alpha+1}} d\theta, \ z \in \mathbb{D},$$

где $\lambda \in \mathbb{Z}_+, \ \alpha > \alpha_\varphi - 1, \ \{z_n\}_{n=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность точек из единичного круга* $\mathbb{D}$*, удовлетворяющая условию*

$$n_{k,l} = \{card \ z_n : z_n \in \Delta_{k,l}\} \le C_0 \cdot \varphi(2^k), \ k \in \mathbb{N}, \ -2^{k-1} \le l \le 2^k - 1, \text{ где}$$

$$\Delta_{k,l} = \left\{ z \in \mathbb{D} : \ \frac{\pi l}{2^k} \le \arg z < \frac{\pi \cdot (l+1)}{2^k}, \ 1 - \frac{1}{2^k} \le |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, \ k \in \mathbb{N}, \ l = -2^{k-1}, \dots, 2^k - 1 \right\},$$

$\pi_\alpha(z, z_k)$ *– произведение М.М. Джрбашяна с нулями* $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$*:*

$$\pi_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \cdot \exp \frac{\alpha+1}{\pi} \cdot \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)^\alpha \cdot \ln\left|1 - \frac{\rho e^{i\theta}}{z_k}\right|}{(1 - z\rho e^{-i\theta})^{\alpha+2}} \rho \, d\rho \, d\theta,$$

которое сходится равномерно в единичном круге $\mathbb{D}$ *и при* $\alpha > \alpha_\varphi + 1$ *удовлетворяет оценке*

$$\ln|\pi_\alpha(z, z_k)| \le C \cdot \varphi\left(\frac{1}{1 - |z|}\right), \ z \in \mathbb{D},$$

функция $\psi(e^{i\theta})$ *имеет непрерывную производную до порядка* $n = [\alpha] - [\alpha_\varphi]$ *вклю-*

чительно, при этом справедлива оценка

$$\left|\psi^{(n)}\left(e^{i(\theta+t)}\right)-2\psi^{(n)}\left(e^{i\theta}\right)+\psi^{(n)}\left(e^{i(\theta-t)}\right)\right|\le C\cdot\omega\left(|t|\right),\ \theta,\ t\in\left(-\pi;\pi\right].$$

Отметим, что в работах[7,16] Ф.А. Шамояном получено другое представление.

В **§2 главы 2** мы исследуем свойства корневых множеств классов голоморфных в круге функций с заданной мажорантой вблизи единичной окружности. Если $1<\alpha_\varphi<+\infty$, то характеризация корневых множеств получена в работе[16]. Как установлено в этой работе, применяемый метод при $1<\alpha_\varphi<+\infty$ не проходит в случае $\alpha_\varphi\le 1$. Здесь мы предполагаем, что $\alpha_\varphi=1$ и получено необходимое условие на корневые множества, которое близко к достаточному условию.

В **§3 главы 2** получены несколько приложений факторизационных представлений для оценок в среднем производной функции через значения самой функции.

Пусть H^p – класс Харди в $\mathbb{D}$, причём $0<p<+\infty$. Применяя факторизационные представления класса H^p, мы устанавливаем следующее утверждение:

Теорема 2.8. *Пусть* $f\in H\left(\mathbb{D}\right)$ *и* $0<p<q\le+\infty$. *Тогда если*

$$M_p\left(r,f\right)\le C\cdot\varphi\left(r\right)$$

и при этом $0\le\alpha_\varphi<+\infty$, то $M_q\left(r,f\right)\le C\cdot\dfrac{\varphi\left(r\right)}{(1-r)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}},\ 0<p\le q<+\infty.$

Если же $\alpha_\varphi=+\infty$, то $M_q\left(r,f\right)\le C\cdot\left[\varphi\left(r\right)\right]^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\cdot\left(\varphi'\left(r\right)\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$

В диссертации получена точность теоремы 2.8. В частном случае, когда $\varphi\left(r\right)=\dfrac{1}{\left(1-r\right)^{\beta}},\ \beta>0$ указанное утверждение установлено в работе[17].

---

[16] Шамоян Ф.А. Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеризация нулей аналитических функций с мажорантой конечного роста / Ф.А. Шамоян // Известия АН Арм. ССР. Математика. – 1978. – Т. 13, №5. – С. 405–422.

[17] Hardy G.H. Some properties of fractional II integrals / G. H. Hardy, I. E. Littlewood // Math. Zeitschrift. – 1928. – V. 28. – P. 612 – 634.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Ф.А. Шамояну за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Список работ автора по теме диссертации

[1] Быков С.В. Характеризация корневых множеств и факторизационное представление весовых классов аналитических в полуплоскости функций [Текст] / С.В. Быков, О.В. Охлупина // Системы компьютерной математики и их приложения: материалы международной конференции / Смоленский гос. университет. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2006. – Вып. 7. – С. 119-120. (Быкову С.В. принадлежит характеризация корневых множеств весовых классов аналитических в полуплоскости функций, а построение факторизационного представления принадлежит Охлупиной О.В.)

[2] Быков С.В. Характеризация корневых множеств и факторизационное представление весовых классов аналитических в полуплоскости функций [Текст] / С.В. Быков // Вестник Брянского государственного университета: Естественные и точные науки. – Брянск: Изд-во БГУ, 2005. – № 4.– С. 159-166.

[3] Быков С.В. О нулях аналитических в полуплоскости функций с заданным ростом на бесконечности [Текст] / С.В. Быков // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы Воронежской зимней математической школы / Воронежский гос. университет [и др.]. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2006. – С. 31–32.

[4] Быков С.В. О нулях аналитических в полуплоскости функций, имеющих заданную мажоранту бесконечного порядка [Текст] / С.В. Быков // Вестник Брянского государственного университета: Естественные и точные науки. – Брянск: Изд-во БГУ, 2006. – № 4. – С. 106–110.

[5] Быков С.В. О нулях аналитических в полуплоскости функций с заданной мажорантой в бесконечности [Текст] / С.В. Быков // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения -XIX» / Воронежский гос. университет

[и др.]. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 2008. – С. 61–62.

[6] Быков С.В. О нулях аналитических в полуплоскости функций с мажорантой бесконечного порядка [Текст] / С.В. Быков // Вестник Томского государственного университета: Математика и механика. / Томский гос. университет [и др.]. – Томск: Изд–во Томского университета. – 2008. – С. 72–73.

[7] Быков С.В. О параметрическом представлении классов голоморфных в круге функций с мажорантой конечного порядка [Текст] / С.В. Быков, Ф.А. Шамоян // Вестник Брянского государственного университета: Естественные и точные науки. – Брянск: Изд-во БГУ. – 2008. – Вып.4. – С. 19–27. (Шамояну Ф.А. принадлежит постановка задачи, основные результаты принадлежат Быкову С.В.)

[8] Быков С.В. О нулях целых функций с мажорантой бесконечного порядка [Текст] / С.В. Быков, Ф.А. Шамоян // Алгебра и Анализ / Санкт–Петербургское отделение Института математики РАН. – СПб: – Наука. – 2009. – Т. 21:6.– С. 66–79. (Шамояну Ф.А. принадлежит постановка задачи, основные результаты принадлежат Быкову С.В.)

[9] Быков С.В. Об одном свойстве корней целых функций с мажорантой бесконечного порядка [Текст] / С.В. Быков // Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования / Воронежский гос. университет [и др.]. – Воронеж: Изд-во ВГУ. –2009. – С. 166–167.

[10] Быков С.В. Об условии Бляшке в полуплоскости [Текст] / С.В. Быков // Вестник Брянского государственного университета: Естественные и точные науки. – Брянск: Изд-во БГУ. – 2009. – Вып.4. – С. 17–27.

[11] Быков С.В. О корневых множеств весовых классов целых функций [Текст] / С.В. Быков, Ф.А. Шамоян // Современные проблемы теории функций и их приложения. / Саратовский гос. университет [и др.]. – Саратов: Изд–во Саратовского гос. университета. – 2010. – С. 42–43. (Шамояну Ф.А. принадлежит постановка задачи, основные результаты принадлежат Быкову С.В.)