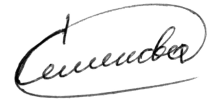


На правах рукописи



**СЕМЕНОВА Надежда Игоревна**

**ВОЗВРАТЫ ПУАНКАРЕ В ЭРГОДИЧЕСКИХ  
СИСТЕМАХ**

Специальность 01.04.03 — Радиофизика

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2017

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского»

Научный руководитель: **Заслуженный деятель науки РФ,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
**Анищенко Вадим Семенович**

Официальные оппоненты: **Нейман Александр Борисович,**  
доктор физико-математических наук,  
Университет Огайо, г. Атенс, штат Огайо, США  
(Ohio University, Athens, USA),  
профессор факультета физики и астрономии  
**Купцов Павел Владимирович,**  
доктор физико-математических наук, доцент,  
ФГБОУ ВО «Саратовский государственный  
технический университет имени Гагарина Ю.А.»,  
профессор кафедры «Приборостроение»

Ведущая организация: **ФГБУН Институт радиотехники и электроники име-**  
**ни В.А. Котельникова РАН, Саратовский филиал**

Защита состоится «29» июня 2017 г. в 14 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 на базе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, Большая физическая аудитория.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Автореферат разослан «\_\_\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2017 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 212.243.01, д.ф.-м.н.



**Аникин Валерий  
Михайлович**

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

Для описания поведения динамической системы со сложным характером траекторий можно использовать геометрию предельных множеств в фазовом пространстве или эволюцию фазовых траекторий во времени. Одной из фундаментально важных особенностей динамических систем с ограниченным в фазовом пространстве типом установившихся движений является возврат Пуанкаре. Возвращаемость по Пуанкаре означает, что в системах с заданной мерой практически любая фазовая траектория, исходящая из заданной начальной точки, бесконечное число раз во времени пройдет в сколь угодно малой окрестности исходного состояния. Основной характеристикой, необходимой для оценки состояния динамической системы, а также прогнозирования ее поведения во времени является время возврата Пуанкаре. Движения в динамических системах, для которых существуют возвраты, Пуанкаре назвал устойчивыми по Пуассону.

Анализ систем, устойчивых по Пуассону, является одной из классических проблем теории динамических систем. Самая первая работа Пуанкаре в этом направлении была опубликована еще в XIX веке, где была сформулирована теорема Пуанкаре о возвращаемости. Работы XX века были в основном посвящены исследованию теоретических особенностей выполнения теоремы Пуанкаре и возвратов Пуанкаре для различных типов множеств. Тем не менее, несмотря на множество исследований и многолетнюю историю, идея возвращаемости сложных систем в окрестность некоторого состояния остается одной из фундаментальных концепций современной науки. С укреплением компьютерных технологий появился новый метод исследования статистики возвратов Пуанкаре, основанный на численном моделировании. Последние работы в основном посвящены исследованию особенностей в согласовании уже проведенных теоретических исследований и результатов численного моделирования.

Идея возвратов Пуанкаре позволяет с единых позиций рассматривать такие процессы как изменение климата, солнечной активности, динамики популяций, изменения на финансовых рынках, распространение эпидемий, поведение ДНК, нахождение полезного сигнала из зашумленного и многие другие. Многолетними наблюдениями установлено, что многие эволюционные процессы в природе и обществе характеризуются свойством возвращаемости. Исследование статистики подобных возвратов направлено на решение задачи прогнозирования.

Теория возвратов может быть применена для решения ряда прикладных задач диагностики. Недавние работы показывают, что на основе статистических характеристик последовательности времен возврата может быть найдена фрактальная размерность хаотических систем, старший ляпуновский показа-

тель. Кроме того, недавние исследования показали, что на основе локальной и глобальной теории возвратов может быть диагностирован эффект хаотической синхронизации.

К настоящему времени создана математическая теория возвратов Пуанкаре, описывающая статистику последовательностей времен возвратов как в окрестность заданного состояния (локальная теория или локальный подход), так и во все рассматриваемое множество фазовых траекторий системы (глобальная теория). При локальном подходе возвраты Пуанкаре рассчитываются в окрестности некоторого выбранного начального состояния. При глобальном подходе исследования проводятся для всего рассматриваемого множества, которое разбивается на ячейки одинакового размера, для каждой рассчитывается статистика возвратов Пуанкаре и затем проводится усреднение.

Эргодические системы имеют особенную динамику поведения, характеризующуюся тем, что почти каждое состояние с определенной вероятностью находится вблизи любого другого состояния системы. На данный момент исследование статистики возвратов Пуанкаре в системах *с перемешиванием* (в хаотических системах) является проблемой достаточно хорошо изученной как теоретически, так и численно. Применительно к эргодическим системам *без перемешивания* известен ряд теоретических результатов<sup>1</sup>, полученных для отображения линейного сдвига на окружности. Линейный сдвиг на окружности отвечает динамике квазипериодических колебаний в сечении гладкого двумерного тора. Простейшим примером является динамика генератора Ван дер Поля с внешним периодическим воздействием. Если параметр возбуждения генератора достаточно мал ( $\alpha \ll 1$ ) и амплитуда внешнего воздействия так же является малой, то образом возникающих двухчастотных квазипериодических колебаний в трехмерном фазовом пространстве системы будет гладкий двумерный тор. В сечении двумерного тора мы получим инвариантную замкнутую кривую, близкую к окружности, которая формируется точками пересечения фазовой траектории с секущей Пуанкаре. Таким образом, отображение линейного сдвига на окружности является простейшей дискретной моделью, описывающей двухчастотные квазипериодические колебания в предположении, что нелинейными эффектами пренебрегается. С учетом нелинейности, когда, к примеру, параметр возбуждения и амплитуда внешней силы не являются малыми, отображение Пуанкаре двумерного тора становится нелинейным. Возникает вопрос о применимости теоретических результатов, полученных для линейного сдвига на окружности, в общем случае, когда отображение окружности является нелинейным. Основным

---

<sup>1</sup> В. Афраимович, Э. Угальде, Х. Уриас. Фрактальные размерности для времен возвращений Пуанкаре // М.-Ижевск: РХД, 2011. – С. 290. V. Afraimovich, E. Ugalde, J. Urias. Fractal Dimension for Poincaré Recurrences // Elsevier, 2006. – P. 258.

выводом линейной теории является то, что размерность Афраймовича–Песина для возвратов Пуанкаре равна единице. *Что произойдет в случае, когда отображение окружности будет принципиально нелинейным? Как повлияет на статистику возвратов Пуанкаре учет шумовых возмущений? Эти вопросы до настоящего времени являлись открытыми, и в представленной диссертации на них дается ответ.*

Все вышесказанное подтверждает актуальность исследований в выбранной области и служит основанием для формулировки цели и задач диссертационного исследования.

**Целью** диссертационной работы является расширение области применимости теории времен возврата Пуанкаре, разработанной для отображения линейного сдвига на окружности, к эргодическим системам без перемешивания. В качестве примеров рассмотрены линейное и нелинейное отображения окружности, стробоскопическое сечение неавтономного генератора Ван дер Поля при различных амплитудах внешней силы, а также странный нехаотический аттрактор. Кроме того, представляет интерес рассмотреть особенности статистики времен возврата Пуанкаре в одном из примеров гамильтоновых систем – неавтономном консервативном осцилляторе. Для всех рассматриваемых множеств планируется исследование мультифрактальных характеристик последовательности времен возврата путем расчета размерности Афраймовича–Песина.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать применимость разработанной теории времен возврата Пуанкаре к нелинейному отображению окружности. Выявить возможные несоответствия.
2. Изучить влияние числа вращения на статистику времен возврата Пуанкаре в отображении окружности как в линейном, так и в нелинейном случаях.
3. Разработать метод нахождения калибровочной функции и вычисления размерности Афраймовича–Песина в отображении окружности для различных чисел вращения, линейного и нелинейного случаев, а также при добавлении белого гауссовского шума.
4. На основе полученных результатов для отображения окружности выявить условия применимости полученных результатов к множеству, полученном в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван дер Поля.
5. Провести анализ изменений статистики возвратов Пуанкаре в неавтономном генераторе Ван дер Поля в зависимости от амплитуды внешнего воздействия.
6. Провести анализ возвратов в множества, полученные в стробоскопическом сечении гамильтоновой системы – консервативного математического маят-

ника под внешним гармоническим воздействием. Установить тип калибровочных функций и размерностей Афраймовича–Песина для этих множеств.

7. Провести расчеты статистических характеристик возвратов Пуанкаре и вычислить размерность Афраймовича–Песина на странном не хаотическом аттракторе в логистическом отображении вблизи критической точки рождения динамического хаоса.

#### **Основные положения и результаты, выносимые на защиту:**

1. В эргодических множествах без перемешивания, порождаемых отображением окружности, зависимость минимального времени возврата от размеров области возврата при иррациональных числах вращения представляет собой ступенчатую функцию, которая для чисел вращения, отвечающих золотому и серебряному сечениям, была названа «Лестницей Фибоначчи». Численно установлены и аналитически доказаны универсальные свойства «Лестницы Фибоначчи»: ширина и высота ступенек лестницы соответствуют величине  $|\ln \rho|$ , где  $\rho$  – число вращения.
2. Влияние нелинейности и добавление аддитивного шума в системы, порождающие эргодические множества без перемешивания, ведет к разрушению ступенчатого характера «Лестницы Фибоначчи». Эта зависимость стремится к линейной, но величина размерности Афраймовича–Песина остается по величине близкой к единице.
3. Для эргодических множеств без перемешивания, реализуемых в отображении окружности, в стробоскопических сечениях неавтономного генератора Ван дер Поля и консервативного осциллятора, а также на странном нехаотическом аттракторе Фейгенбаума статистика возвратов Пуанкаре характеризуется величиной размерности Афраймовича–Песина, равной единице.

**Научная новизна:** результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые установлено, что в эргодических множествах без перемешивания зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата является ступенчатой функцией, названной «Лестницей Фибоначчи». Количественные свойства этой функции зависят от числа вращения и подходящих к числу вращения дробей.
2. Сформулированы основные свойства «Лестницы Фибоначчи». Приведена аналитическая аппроксимация зависимости ступенчатой функции от размера области возврата для различных типов числа вращения.
3. Рассмотрено влияние типа числа вращения (диофантово или лиувиллево, алгебраическое или трансцендентное) на зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера области возврата, а также на возможность вычисления размерности Афраймовича–Песина.

4. Для отображения окружности показано влияние нелинейности и шума на «Лестницу Фибоначчи».
5. Рассмотрены условия получения «Лестницы Фибоначчи» для множеств, полученных в стробоскопических сечениях неавтономного генератора Ван дер Поля и неавтономного консервативного осциллятора (примера гамильтоновой системы).
6. При помощи численного моделирования подтвержден теоретически доказанный для линейного сдвига на окружности факт, что в общем случае эргодических множеств без перемешивания размерность Афраймовича–Песина имеет значение, равное единице.

**Научная и практическая значимость.** Диссертационная работа расширяет возможности применения статистики времен возврата Пуанкаре при исследовании характеристик динамических систем. В ходе исследования впервые показано, что зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата является ступенчатой функцией, названной «Лестницей Фибоначчи». Установлено влияние числа вращения на характер этой зависимости, представлена ее аналитическая аппроксимация. Аналогичная зависимость может быть получена в стробоскопических сечениях неавтономного генератора Ван дер Поля и неавтономного консервативного осциллятора. Установлено, что для эргодических множеств размерность Афраймовича–Песина имеет значение, равное единице. Материалы диссертации используются в курсах лекций по теории колебаний.

Научные результаты получены в рамках выполнения грантов РФФИ № 13-02-00216 и 14-52-12002.

**Достоверность научных выводов** работы подтверждается соответствием результатов, полученных в численном эксперименте, с данными строгой теории, когда таковые существуют. Разработанное программное обеспечение тестировалось на ранее полученных и опубликованных результатах. Все полученные результаты численных экспериментов воспроизводимы и не зависят от конкретных схем численного анализа.

**Апробация работы.** Основные результаты научных исследований были представлены на международных конференциях:

- Международная конференция, посвященная памяти Л.П. Шильникова, 1–5 июля 2013, Нижний Новгород
- Международная конференция “Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic systems: Unraveling Complexity”, 19–21 мая 2014, Саратов
- Международная конференция “International Symposium Topical Problems of Nonlinear Wave Physics (NWP-2014)”, 17–23 июля 2014, Нижний Новгород

- Международная конференция “Saratov Fall Meeting”, 23–26 сентября 2014, Саратов

**Личный вклад.** Все результаты, представленные в данной работе, были получены лично автором. Все численные эксперименты проводились при помощи программного обеспечения, разработанного автором. Также автор принимал активное участие в постановке задач и интерпретации полученных экспериментальных данных.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 10 печатных изданиях (7 статей в журналах, рекомендованных ВАК [1–7] и 3 работы в сборниках тезисов конференций [8–10]).

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, приложения и списка цитируемой литературы. Полный объем диссертации 132 страницы текста с 55 рисунками. Список литературы содержит 130 наименований.

## Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится краткий обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме проводимого исследования, определяются цели и задачи исследования, формулируются положения и результаты, выносимые на защиту.

**Первая глава** диссертационной работы посвящена исследованию возвратов Пуанкаре в отображении окружности при глобальном подходе, нахождению размерности Афраймовича–Песина для исследуемых множеств и выявлению возможных несоответствий с теорией, полученной для отображения линейного сдвига на окружности.

Для отображения линейного сдвига на окружности разработана теория возвратов Пуанкаре, основным выводом которой является то, что для среднего минимального времени возврата Пуанкаре справедливо выражение<sup>2</sup>:

$$\ln \langle \tau_{\text{inf}} \rangle \sim -\frac{d}{\alpha_C} \ln \varepsilon, \quad (1)$$

где  $d$  – емкостная размерность исследуемого множества,  $\alpha_C$  – размерность Афраймовича–Песина,  $\varepsilon$  – размер окрестностей, на которые разбивается множество,  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  – это среднее минимальное время возврата Пуанкаре, которое вычисляется следующим образом. Все рассматриваемое множество покрывается ячейками элементарного объема размера  $\varepsilon$  (глобальный подход), для каждого

<sup>2</sup>В. Афраймович, Э. Угальде, Х. Уриас. Фрактальные размерности для времен возвратов Пуанкаре // М.-Ижевск: РХД, 2011. – С. 290.



элемента покрытия вычисляется минимальное время возврата. Полученные данные усредняются по всем элементам покрытия. Формула (1) была получена для отображения линейного сдвига на окружности (простейшего примера эргодической системы без перемешивания). В общем случае эта зависимость имеет вид:

$$\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle \sim \phi^{-1}\left(\varepsilon^{\frac{d}{\alpha_C}}\right), \quad (2)$$

где  $\alpha_C$  – размерность последовательности времен возврата, введенная Афраймовичем и Песиним,  $d$  – размерность рассматриваемого множества. Функция  $\phi$  может иметь вид:  $\phi(t) \sim \frac{1}{t}$ ,  $\phi(t) \sim e^{-t}$ ,  $\phi(t) \sim e^{-t^2}$ , и т.д. В эргодических множествах без перемешивания функция  $\phi$  выбирается в виде  $\phi(t) \sim 1/t$ . Из (2) следует, что для среднего времени возврата Пуанкаре в этом случае будет справедливо выражение (1). Таким образом для отображения линейного сдвига на окружности зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата может быть аппроксимирована линейной функцией (1) с коэффициентом угла наклона  $-d/\alpha_C$ . Для этого отображения  $d = 1$ .

В общем случае отображение окружности записывается в виде:

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Delta + K \sin \Theta_n \quad \text{mod } 2\pi, \quad (3)$$

где  $\Delta$  – параметр линейного сдвига на окружности,  $K$  – параметр нелинейности,  $\Theta_n$  – переменная, задающая угол на окружности. При  $K = 0$  система (3) трансформируется в отображение линейного сдвига на окружности:

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Delta \quad \text{mod } 2\pi. \quad (4)$$

Одной из основных характеристик, позволяющих различить периодические движения и квазипериодические является число вращения. Оно определяется как среднее приращение угла за одну итерацию.

Периодическим движениям отвечает рациональное число вращения, то есть число, представимое в виде отношения двух натуральных чисел  $p/q$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{N}$ . Квазипериодическим движениям отвечают иррациональные числа вращения. Существует две классификации иррациональных чисел, одна из которых заключается в делении на алгебраические (числа, которые являются корнями многочлена, тождественно равного нулю) и трансцендентные (все остальные). Вторая классификация основана на скорости сходимости приближения иррационального числа  $\rho$  рациональными  $\nu(\rho)$ . В рамках этой классификации числа делятся на диофантовы и лиувиллевы. При этом любое алгебраическое число является диофантовым, любое лиувиллево – трансцендентным, но обратное в общем случае не верно. Подробное описание классификаций иррациональных чисел, подходящих и цепных дробей приведено в п. 1.3 первой главы.

Таким образом, одним из основных направлений первой главы является исследование влияния типа числа вращения на зависимость среднего минимального времени возврата от размера области возврата (пп. 1.5–1.8).

В пп. 1.5–1.8 показано, что независимо от типа числа вращения для отображения линейного сдвига на окружности зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  является ступенчатой функцией. В отображении линейного сдвига на окружности параметр нелинейности равен нулю, а плотность распределения  $p(\Theta)$  системы (4) является равномерной функцией, поэтому расчеты возвратов Пуанкаре с последующим усреднением по количеству элементов покрытия можно заменить расчетами минимального времени возврата в окрестности одной точки.

Одним из особых примеров алгебраических чисел вращения является золотое сечение, которому соответствует число вращения, равное  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Особенность этого числа вращения заключается в том, что подходящей к нему дробью является отношение двух чисел из ряда Фибоначчи:  $F_i/F_{i+1}$ .

Для золотого сечения было показано (п. 1.5), что зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  является ступенчатой функцией (Рис. 1), которая была названа «Лестницей Фибоначчи». Было установлено, что она характеризуется рядом свойств:

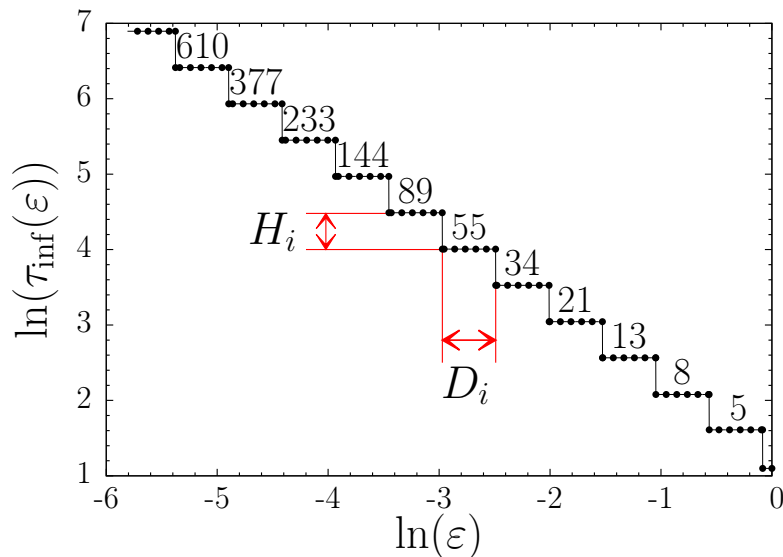


Рис. 1: Зависимость минимального времени возврата  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  для золотого сечения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  в отображении (3) при  $K = 0$  и  $\Delta = 2\pi\rho$ . Коэффициент угла наклона зависимости, равен минус единице

1. Возрастающая с уменьшением  $\ln \varepsilon$  последовательность значений  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  строго отвечает последовательности чисел основного ряда Фибоначчи (... , 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...). Каждое последующее число определяется суммой двух предыдущих. Значения  $\{\tau_{\text{inf}i}\}$  соответствующие ступенькам «Лестницы Фибоначчи» указаны на рисунке 1.

2. При изменении величины  $\varepsilon$  в пределах любой из ступенек «Лестницы Фибоначчи» регистрируются три времени возврата  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$ . Причем  $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$  и  $\tau_1 = \tau_{\text{inf}}$ . Отмеченное свойство следует из теоремы Слейтера<sup>3</sup>. Все три времени возврата отвечают числам основного ряда Фибоначчи.
3. Установлено, что при золотом сечении длины  $D_i$  и высоты  $H_i$  ступенек «Лестницы Фибоначчи» обладают универсальными свойствами, то есть не зависят от номера ступеньки, а определяются только числом вращения:  $D_i = H_i = |\ln \rho|$ ,  $i \gg 1$ . Аналитическое обоснование этого феномена приведено в пп. 1.9.2–1.9.4.

Аппроксимация «Лестницы Фибоначчи» (1) дает прямую с коэффициентом угла наклона, равным минус единице. Отсюда следует, что размерность Афраймовича–Песина для «Лестницы Фибоначчи» равна  $\alpha_C = 1$ .

Аналогичная зависимость была получена и для серебряного сечения ( $\rho = \sqrt{2} - 1$ ), но последовательность значений  $\tau_{\text{inf}i}$ , соответствующих  $i$ -м ступенькам «Лестницы Фибоначчи», совпадает с последовательностью чисел Пелля. Золотое и серебряное сечения являются особыми алгебраическими диофантовыми числами, у которых числители и знаменателями подходящих дробей являются числами одной и той же последовательности. Для золотого сечения это последовательность Фибоначчи, а в случае серебряного сечения – Пелля. Свойство универсальности высот и длин «Лестницы Фибоначчи» имеет место только для этих чисел.

Для других диофантовых чисел вращения было показано, что зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  является ступенчатой функцией, но свойства универсальности длин и высот «ступенек» не выполняется, а значения  $\tau_{\text{inf}i}$  соответствуют знаменателями  $i$ -ых подходящих к числу вращения дробей.

На основе последнего свойства и ступенчатого вида зависимости была предложена аппроксимация зависимостей  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  исходя из числителей и знаменателей подходящих дробей (п. 1.9). В частности, была предложена аппроксимация значений  $\varepsilon$ :  $\varepsilon_i$ , которые соответствуют левым границам  $i$ -ых ступенек:

$$\varepsilon_i = 2\pi|\rho q_i - p_i|, \quad \tau_{\text{inf}i} = q_i, \quad (5)$$

где  $\rho$  – число вращения,  $p_i$  и  $q_i$  – числитель и знаменатель  $i$ -ой подходящей к числу вращения  $\rho$  дроби. Учитывая ступенчатый характер зависимости, значение  $\varepsilon_i$  одновременно соответствует и правой границе  $(i + 1)$ -ой ступеньки.

В качестве примеров алгебраических диофантовых чисел были рассмотрены числа вращения  $\sqrt[3]{2}$  и  $\sqrt[3]{7}$  (Рис. 2,а,б), а в качестве трансцендентных ди-

<sup>3</sup>N.B. Slater. Gaps and steps for the sequence  $n\theta \pmod{1}$  // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1967. – Vol. 63, no. 4. – Pp. 1115–1123

офантовых – числа  $e$ ,  $\lg 5$  (Рис. 2, в, г). На рис. 2 приведены не только зависимости  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ , но и их аппроксимации при помощи выражения (5). Проведенные численные эксперименты показали, что для всех рассмотренных диофантовых чисел в выражении (2) справедлива калибровочная функция  $\phi \sim 1/t$ , а размерность Афраймовича–Песина близка к единице.

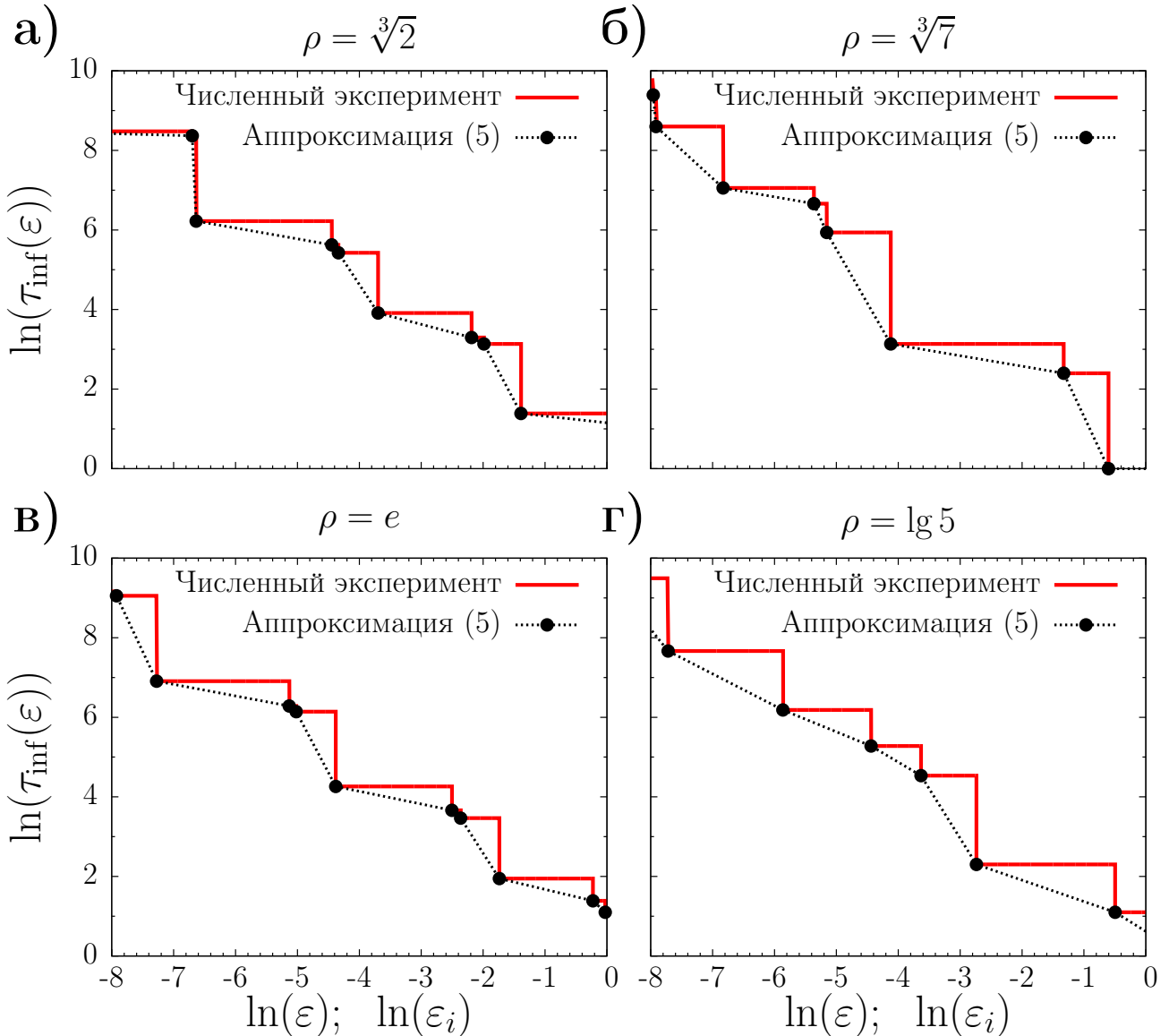


Рис. 2: Сплошные линии – зависимости  $\ln \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon)$  для (а) числа вращения  $\rho = \sqrt[3]{2}$ , (б) числа вращения  $\rho = \sqrt[3]{7}$ , (в) числа вращения  $\rho = e$ , (г) числа вращения  $\rho = \lg 5$ , пунктирная линия с точками – соответствующая аппроксимация при помощи выражений (5)

Для лиувиллевых чисел вращения было показано, что зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата также является ступенчатой функцией. Однако быстрый рост элементов последовательности  $\{\tau_{\text{inf}i}\}$  делает невозможным расчет размерности Афраймовича–Песина для лиувиллевых чисел вращения в численном эксперименте. Это говорит о неприменимости калибровочной функции  $\phi \sim 1/t$  для этих чисел.

В разделах 1.10 и 1.11 проводится исследование влияние нелинейности и белого гауссового шума на «Лестницу Фибоначчи». Показано, что и нелинейность, и шум приводят к разрушению «Лестницы Фибоначчи», но по-разному. Оба воздействия приводят к неравномерности вероятностных распределений, поэтому в разделах 1.10 и 1.11 рассматривается статистика возвратов Пуанкаре для всего множества в целом (значение  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  нельзя заменить расчетами возвратов в окрестности одной точки  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ ). В разделе 1.10 исследуется отображение окружности (3) при  $K > 0$ . Данные расчетов для трех значений  $K = 0, 0.1$  и  $0.6$  представлены на рис. 3,а.

Анализ данных рисунка 3,а свидетельствует о том, что с ростом величины  $K$  «Лестница Фибоначчи» постепенно сглаживается, и при  $K \rightarrow 1$  стремится к прямой. Расчеты среднего наклона графиков рисунка 3,а показали, что для значений  $K = 0, 0.1$  и  $0.6$  он равен минус единице. То есть и в нелинейном случае размерность Афраймовича–Песина равна единице  $\alpha_C = 1$ .

В Разделе 1.11 рассматривается влияние шумового воздействия на отображение линейного сдвига на окружности:

$$\Theta_{n+1} = \Theta_n + \Delta + \sqrt{2D}\xi(n) \quad \text{mod } 2\pi, \quad (6)$$

где  $\xi(n)$  – источник гауссова шума,  $D$  – интенсивность шума. При наличии шумового воздействия число вращения задается с некоторой погрешностью, которая возрастает при увеличении интенсивности шума  $D$ . На Рис. 3,б показано влияние шума с интенсивностью  $D = 10^{-5}$  на «Лестницу Фибоначчи».

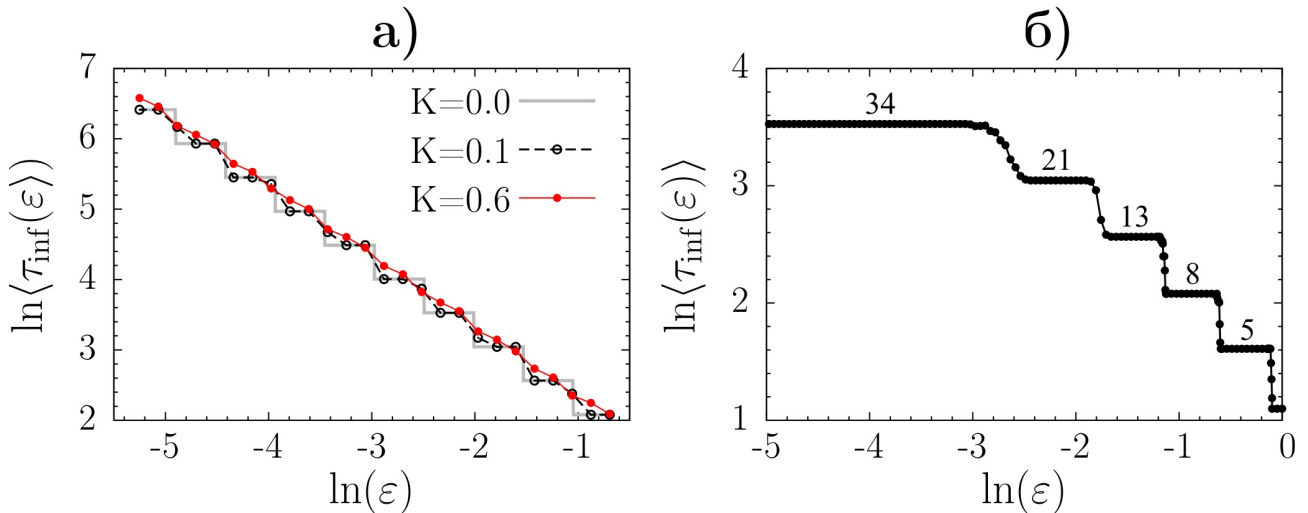


Рис. 3: Влияние нелинейности (а) и белого шума (б) на «Лестницу Фибоначчи». Результаты расчетов  $\langle \ln \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  для отображения (3) при  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  и различных значениях  $K$ :  $K = 0, K = 0.1, K = 0.6$  (а) и для отображения (6) при  $\Delta = \pi/(\sqrt{5} - 1), D = 10^{-5}$  (б).

Возвраты рассчитывались для всего множества с последующим усреднением

Основной эффект, к которому приводит шумовое воздействие, – это возникновение порогового значения  $\varepsilon$ , начиная с которого происходит разрушение

«Лестницы Фибоначчи». Это можно объяснить тем, что шум добавляет ошибку в задание числа вращения. Еще один эффект – это появление промежуточных точек между ступеньками «Лестницы Фибоначчи». Этот эффект аналогичен воздействию нелинейности, и объясняется ростом нелинейности при возрастании интенсивности шума.

Результаты, представленные в первой главе, отражены в публикациях [2–4, 7–9].

Во **второй главе** рассматривается множество, полученное в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван дер Поля. Интерес представляло рассмотреть реальную динамическую систему, которая позволила бы получить эргодическое множество типа (3) и проверить экспериментально закономерности, установленные для отображения окружности. В Главе 2 рассматривается генератор Ван дер Поля с внешним гармоническим воздействием. Множество типа отображения окружности (3) в данной системе можно реализовать путем расчета стробоскопического сечения фазовых траекторий системы через период внешнего воздействия. Решается задача построения «Лестницы Фибоначчи», расчета размерности Афраймовича–Песина для различных значений иррациональных чисел вращения и различных значений амплитуды внешнего воздействия. Проводится сравнение теоретических результатов, полученных для линейного сдвига на окружности (4) и представленных в Главе 1, с данными численных экспериментов с неавтономным генератором Ван дер Поля:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\alpha - x^2)y - \omega_0^2 x + A \sin \Theta \\ \dot{\Theta} &= \Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\alpha$  – параметр возбуждения генератора,  $\omega_0$  – частота автоколебаний автономного генератора,  $A$  – амплитуда внешнего воздействия,  $\Theta = \Omega t$  – фаза,  $\Omega$  – частота внешнего воздействия.

В случае достаточно малых значений амплитуды внешнего воздействия в системе (7) при  $\alpha \ll 1$  множество в стробоскопическом сечении на плоскости переменных  $(x_s, y_s)$  является окружностью радиуса  $a$ . При значении параметра  $\alpha = 0.01$  радиус этой окружности  $a \approx 0.2$  постоянен, что позволяет анализировать не последовательность координат  $\{x_{sn}\}$  и  $\{y_{sn}\}$ , полученных в стробоскопическом сечении, а последовательность сдвигов фазы  $\{\psi_n\}$  в полярной системе координат.

В разделе 2.3 описываются особенности влияния параметров системы (7) на число вращения. Показывается, что при  $A \ll 1$  число вращения можно определить следующим образом:

$$\rho = \omega_0 / \Omega. \quad (8)$$

Из выражения (8) видно, что золотому сечению  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$  при  $\omega_0 = 1$  соответствует частота  $\Omega_{gold} = 2/(\sqrt{5} - 1)$ .

Результаты численного моделирования показали, что при  $A \ll 0.01$  число вращения можно задать с точностью до 6 или 8 знака после запятой. Увеличение амплитуды  $A$  приводит к росту погрешности, невыполнению выражения (8) и сложностям, связанным с точностью задания числа вращения. По этой причине имело смысл рассмотреть статистику возвратов Пуанкаре для малых значений амплитуды внешнего воздействия ( $10^{-8} \leq A \leq 10^{-3}$ ) и больших ( $A > 10^{-3}$ ).

В разделе 2.4 рассматриваются особенности получения «Лестницы Фибоначчи» для значений амплитуды внешнего воздействия  $10^{-8} \leq A \leq 10^{-3}$ . Для этих значений  $A$  распределение вероятности близко к равномерному. На Рис. 4,а приведены зависимости минимального времени возврата Пуанкаре от размера окрестности возврата, рассчитанные для окрестностей точек  $\psi_0 = 5\pi/4$  и  $\psi_0 = \pi/3$ . Результаты вычислений среднего минимального времени возврата Пуанкаре с применением глобального подхода приведены на Рис. 4,б.

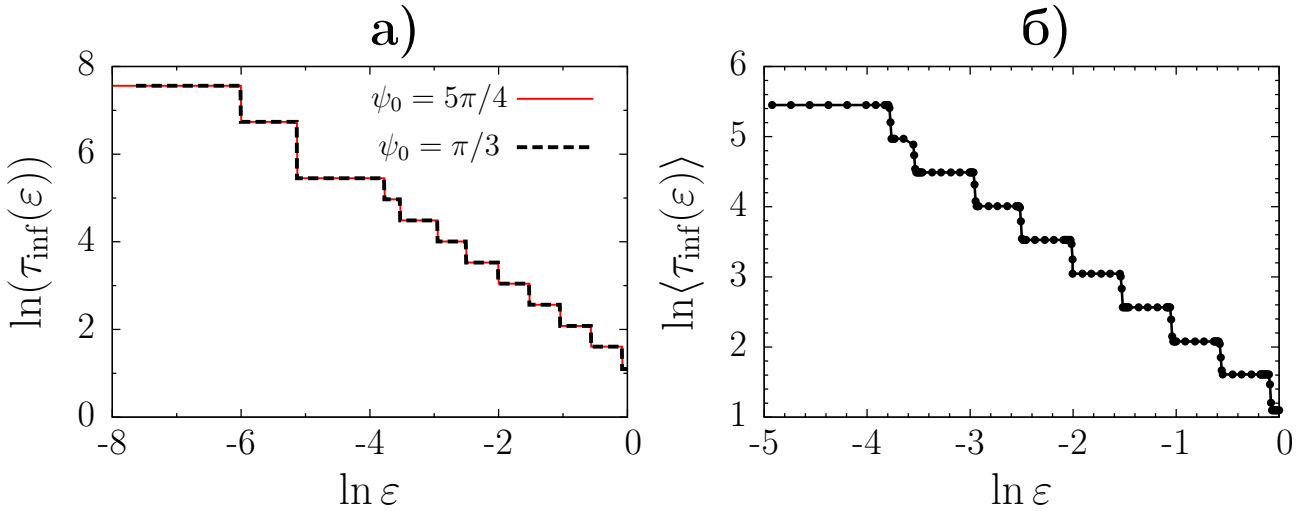


Рис. 4: «Лестницы Фибоначчи» для стробоскопического сечения фазовых траекторий системы (7) при значениях параметров  $\alpha = 0.01$ ,  $\omega_0 = 1$ ,  $A = 10^{-3}$ ,

$\Omega = \Omega_{gold} - 1.02646 \cdot 10^{-8}$ , что отвечает случаю золотого сечения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ . Возвраты  $\tau_{inf}(\epsilon)$  были рассчитаны в точки  $\psi_0 = \pi/3$  и  $\psi_0 = 5\pi/4$  (а) и во все множество в целом  $\langle \tau_{inf}(\epsilon) \rangle$  (б). Размерность Афраймовича–Песина в интервале  $-4 < \ln \epsilon < 0$  равна  $\alpha_C = 1$

Из сравнения графиков рис. 1 и рис. 4 можно заключить, что при больших  $\epsilon$  (до ступеньки с числом  $\tau_{inf} = 89$ ) зависимости демонстрируют не только качественное, но и количественное сходство. Последовательность значений  $\tau_{inf}$  на ступеньках «Лестницы Фибоначчи» рис. 4 строго соответствуют числам основного ряда Фибоначчи. Высота и ширина ступенек в интервале  $-4 \leq \ln \epsilon \leq 0$  составляет  $|\ln \rho|$ . Размерность Афраймовича–Песина равна  $\alpha_C = 1$ . С уменьшением  $\epsilon$  ( $\ln \epsilon < -4$ ) «Лестница Фибоначчи» постепенно разрушается, что можно

объяснить неточностью задания числа вращения. При  $A = 10^{-3}$  отклонение составляет примерно  $10^{-7} - 10^{-8}$ . Предположительно этот эффект аналогичен зашумленному отображению окружности (6). Наличие шума приводит к неточности в задании числа вращения, а «Лестница Фибоначчи» при малых  $\varepsilon$  разрушается и теряет универсальность геометрии. При этом влияние отклонения в задании числа вращения в системе (7) аналогично влиянию белого гауссовского шума в отображении (6) с интенсивностью, близкой к этому отклонению.

Если в отображении окружности (рис. 1) точки принадлежали только одной из ступенек, то в случае множества, полученного в стробоскопическом сечении неавтономного генератора Ван дер Поля, появляются промежуточные точки (Рис.4,б). Увеличение амплитуды внешнего воздействия приводит к увеличению числа промежуточных точек. Разрушение «Лестницы Фибоначчи» при малых  $\varepsilon$  ( $\ln \varepsilon < -4$ ) происходит начиная с той же ступеньки  $\tau_{\text{inf}} = 89$ . Этот результат подтверждает тот факт, что на разрушение ступенчатой функции в интервале малых  $\varepsilon$  влияет точность задания числа вращения  $\rho = (\sqrt{5} - 1)/2$ , которая для  $10^{-8} \leq A \leq 10^{-3}$  примерно одинаковая. Аналогичные результаты были получены для  $A = 10^{-8}$ ,  $10^{-5}$  и  $10^{-3}$ .

В разделе 2.5 рассматриваются случаи относительно больших значений амплитуды внешнего воздействия  $A = 0.01$  и  $A = 0.1$ . Из-за влияния нелинейности возвраты  $\tau_{\text{inf}}$  должны рассчитываться во все множество с последующим усреднением. Наличие нелинейности приводит к разрушению «Лестницы Фибоначчи» и увеличению числа точек между «ступеньками». Этот эффект аналогичен влиянию нелинейности в отображении окружности (3) (см. Рис. 3,а).

Увеличение амплитуды внешнего воздействия  $A = 0.1$  приводит к увеличению погрешности задания точного числа вращения и полному разрушению «Лестницы Фибоначчи». Значение амплитуды внешнего воздействия, равное 0.1, соизмеримо с амплитудой собственных колебаний автономного генератора Ван дер Поля, что говорит о присутствии сильной нелинейности в системе. Аппроксимация зависимости дает прямую с коэффициентом угла наклона, отличным от  $-1$ , что можно объяснить наличием сильной нелинейности в системе.

В разделе 2.6 были построены ступенчатые зависимости для других чисел вращения. Было установлено, что зависимости  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$ , рассчитанные для стробоскопического сечения неавтономного генератора Ван дер Поля, и аналогичные зависимости, полученные для отображения линейного сдвига, имеют не только качественное, но и количественное соответствие. Кроме золотого сечения были рассмотрены числа вращения  $\rho = \sqrt{2} - 1$ ,  $\rho = \sqrt[3]{2}$  и  $\rho = e$ . Для них были установлены все те же закономерности.

Результаты, представленные в второй главе, отражены в публикациях [1, 2, 4, 5, 8–10].



В третьей главе исследуются множества, которые могут быть получены в стробоскопическом сечении неавтономного консервативного осциллятора (гамильтоновой системы):

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 \sin x + b \sin \Theta \\ \dot{\Theta} &= \Omega,\end{aligned}\tag{9}$$

где  $\omega_0 = 1$  – частота автономного маятника. Внешнее воздействие имеет амплитуду  $b$  и частоту  $\Omega$ .

В разделе 3.2 приводится описание исследуемой системы и особенностей фазового пространства гамильтоновой системы. Показывается, что при нулевых значениях амплитуды внешнего воздействия  $b = 0$  проекции на фазовый портрет  $(x, y)$  имеют вид окружностей и эллипсов с центром в начале координат  $(0,0)$ . Увеличение амплитуды  $b$  приводит к появлению двумерных торов. По этой причине в третьей главе, как и во второй, рассматриваются множества, полученные в стробоскопическом сечении исследуемой системы.

Далее (п. 3.2.4) приводится описание вычисления числа вращения для стробоскопического сечения неавтономного консервативного осциллятора. Показывается, что точное значение числа вращения в системе (9) определяется не только параметрами системы (как это было в неавтономном генераторе Ван дер Поля), но и зависит от начальных условий. При этом чем ближе начальные условия к началу координат, тем точнее можно задать число вращения по формуле (8). Соответственно, для разных начальных условий будут разные значения  $\Omega$ , соответствующие, к примеру, золотому сечению.

В разделе 3.3 проводится построение зависимости среднего минимального времени возврата Пуанкаре для различных значений амплитуды внешнего воздействия. Показано, что при задании начальных условий, соответствующих одной и той же инвариантной кривой, и выборе значения частоты внешнего воздействия, которая отвечает случаю золотого сечения в системе, может быть получена «Лестница Фибоначчи». Также как и в Главе 2, зависимость теряет универсальность и разрушается при малых значениях  $\varepsilon$ . Уменьшение значения  $b$  приводит к сдвигу порога разрушения в область меньших  $\varepsilon$ . Например, при  $b = 10^{-3}$  разрушение «Лестницы Фибоначчи» происходит начиная со ступеньки с  $\tau_{\text{inf}} = 13$  ( $\ln \varepsilon < -1.5$ ), а при  $b = 10^{-5}$  – со ступеньки с  $\tau_{\text{inf}} = 34$  ( $\ln \varepsilon < -2.5$ ). Однако вариация начальных условий при одних и тех же параметрах приводит к полному разрушению «Лестницы Фибоначчи».

В п. 3.3.2 исследуется множество точек, полученное в стробоскопическом сечении системы (9) при  $b = 0.1$ , начальных условиях  $x_0 = -2.1$ ,  $y_0 = -0.6$  и частоте внешнего воздействия  $\Omega = 2\pi/3$ . Выбор такого параметра  $\Omega$  приво-

дит к рождению трех неподвижных периодических точек движения. В окрестности этих точек существует множество инвариантных кривых. Одно из таких множеств приведено на рис. 5,а. На рис. 5,б приведена соответствующая зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ . В некотором интервале  $\varepsilon_{cr} < \varepsilon$  зависимость можно аппроксимировать прямой с коэффициентом угла наклона, равным минус единице, что говорит о том, что в этом интервале размерность Афраймовича–Песина равна единице. Если же  $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ , то значения  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  практически не изменяются, и из-за нелинейности расчет размерности Афраймовича–Песина не представляется возможными.

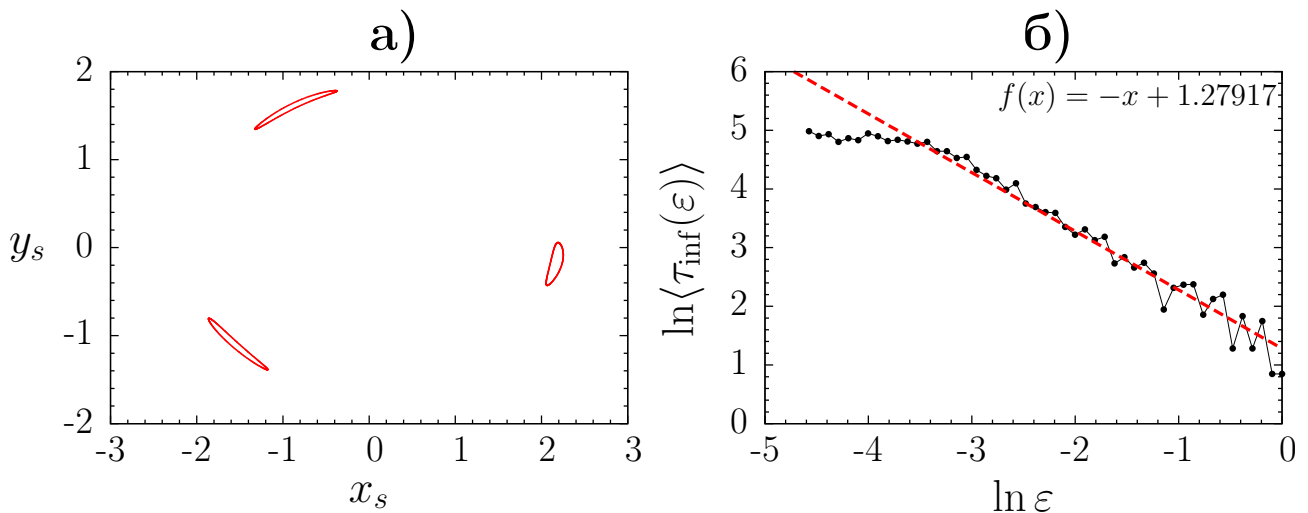


Рис. 5: Множество, полученное в стробоскопическом сечении системы (9) при  $b = 0.1$ , начальных условиях  $x_0 = -2.1$ ,  $y_0 = -0.6$  и частоте внешнего воздействия  $\Omega = 2\pi/3$  (а) и зависимость  $\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , рассчитанная для этого множества, (б)

Аналогичные результаты были получены и для другого множества, полученного при частоте внешнего воздействия  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1)$  и начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -1.72$  (см. Рис. 6).

Результаты, представленные в третьей главе, отражены в публикации [6].

В приложении А приводится исследование статистики возвратов Пуанкаре для странного нехаотического аттрактора на примере аттрактора Фейгенбаума, который может быть получен в логистическом отображении в критической точке рождения динамического хаоса. Первые исследования по определению размерности Афраймовича–Песина были представлены в диссертации Я.И. Боева<sup>4</sup>, в которой было выявлено, что в критической точке, когда множество утрачивает свойство перемешивания и остается эргодическим, размерность Афраймовича–Песина претерпевает скачок, изменяясь от величины, близкой к

<sup>4</sup>Боев, Я.И. Статистические характеристики времен возврата Пуанкаре в хаотических системах в условиях шумовых и гармонических внешних воздействий: дис. канд. физ.-мат. наук. — Саратовский гос. университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов, 2016.

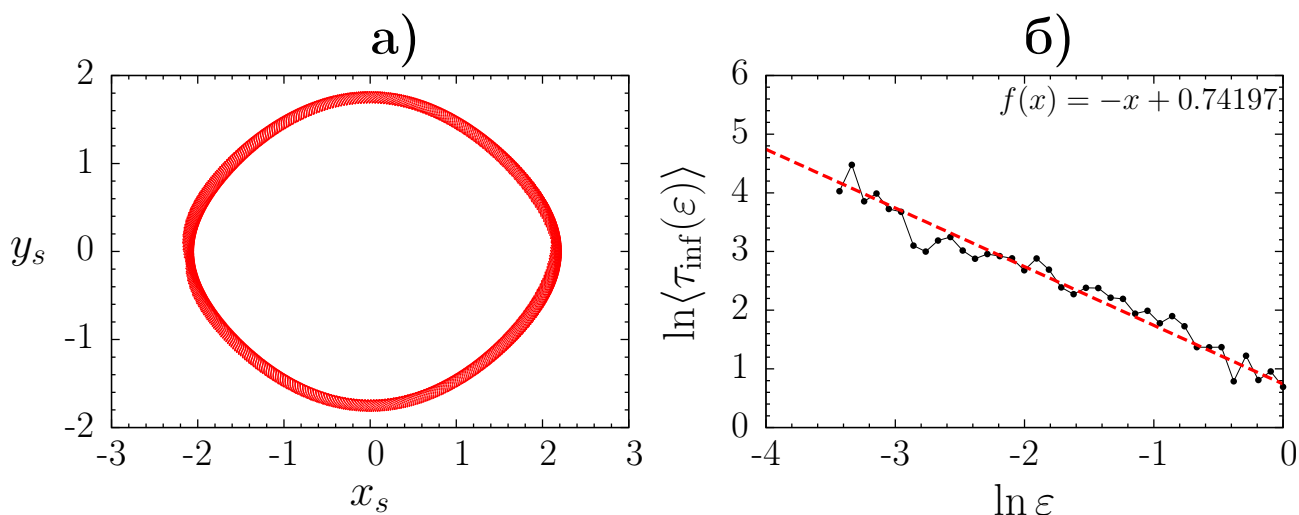


Рис. 6: Множество, полученное в стробоскопическом сечении системы (9) при  $b = 0.1$ , начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = -1.72$  и частоте внешнего воздействия  $\Omega = 2/(\sqrt{5} - 1)$  (а) и зависимость  $\ln\langle\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)\rangle$ , рассчитанная для этого множества, (б)

нулю, до величины порядка единицы. Ответ на вопрос почему это происходит остался открытым.

В связи с тем, что странный нехаотический аттрактор представляется еще одним примером эргодического множества без перемешивания, было сделано предположение, что размерность Афраймовича–Песина для такого множества должна быть равна единице. И это предположение подтвердилось.

В приложении А на примере логистического отображения в критической точке рождения динамического хаоса было показано, что размерность Афраймовича–Песина для странного не хаотического аттрактора ( $r \approx r^*$ ) близка к единице  $\alpha_C \approx 1$ . Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре в этом случае может быть аппроксимирована при помощи выражения (1). В хаотическом режиме при  $r > r^*$  зависимость аппроксимируется при помощи другой функции, а размерность Афраймовича–Песина имеет значение  $\alpha_C < 1$  и совпадает с величиной положительного показателя Ляпунова.

В **заключении** сформулированы **выводы** и приведены основные **результаты** работы, которые состоят в следующем:

1. Впервые установлено, что для золотого и серебряного сечений в отображении окружности имеет место ступенчатая функция зависимости минимального времени возврата от величины окрестности возврата, «Лестница Фибоначчи».
2. Для любых иррациональных чисел вращения показано, что зависимость  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon)$  имеет ступенчатый характер, причем значения  $\tau_{\text{inf}i}$ , которые соответствуют  $i$ -ым ступенькам зависимости, равны знаменателям  $i$ -ых подходящих к числу вращения  $\rho$  дробей  $p_i/q_i$ . Определены размеры окрестностей

- возврата Пуанкаре, которые соответствуют границам ступенек (5). Справедливость этой аппроксимации была подтверждена для диофантовых чисел вращения (как алгебраических, так и трансцендентных).
3. Показано, что для диофантовых чисел с мерой иррациональности  $\mu = 2$  размерность Афраймовича–Песина  $\alpha_C$  совпадает со скоростью диофантовых приближений  $\nu(\rho)$  и равна единице. Этот вывод справедлив в отношении отображения окружности как в линейном ( $K = 0$ ), так и в нелинейном ( $K > 0$ ) случаях.
  4. Подтвержден теоретический вывод о том, что калибровочная функция  $\phi(t) \sim 1t$  позволяет получить размерность Афраймовича–Песина для минимальных множеств на окружности при диофантовых числах вращения. В отношении лиувиллевых чисел вращения калибровочную функцию  $\phi(t) \sim 1/t$  использовать нельзя.
  5. Показано, что нелинейность и шум приводят к разрушению «Лестницы Фибоначчи». Размерность Афраймовича–Песина при этом остается близкой к единице.
  6. В неавтономном генераторе Ван дер Поля при относительно малых амплитудах внешнего воздействия  $A \ll 1$  множество в стробоскопическом сечении близко к линейному сдвигу на окружности (4). При  $10^{-8} \leq A \leq 10^{-3}$  путем вариации частоты воздействия  $\Omega$  можно с высокой точностью задать любое число вращения (порядок отклонения составляет  $10^{-8}$ ). Полученные для разных чисел вращения зависимости схожи с аналогичными ступенчатыми функциями, полученными в Главе 1 для отображения окружности (4). Имеется не только качественное, но и количественное соответствие результатов.
  7. С увеличением амплитуды гармонического воздействия  $A$  в неавтономном генераторе Ван дер Поля наблюдается разрушение «Лестницы Фибоначчи» при малых размерах окрестностей возврата ( $\ln \varepsilon \leq -4$ ). Это обусловлено наличием нелинейности и, как следствие, погрешности в задании числа вращения. Этот эффект аналогичен влиянию шумового воздействия на отображение окружности.
  8. Дальнейшее увеличение амплитуды  $A$  ведет к росту нелинейности в системе и неравномерности вероятностного распределения. Последнее приводит к необходимости расчета времен возврата на всем множестве в целом  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$ , а не в окрестности отдельных точек  $\tau_{\text{inf}}(\varepsilon, \psi_0)$ . В глобальном подходе это приводит к появлению дополнительных точек между «ступеньками». При увеличении  $A$  число этих точек растет.

9. При амплитуде  $A$ , соизмеримой с амплитудой колебаний автономного генератора Ван дер Поля, зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  становится практически линейной. Линейная аппроксимация дает прямую с коэффициентом угла наклона, отличным от значения  $-1$ , то есть размерность Афраймовича–Песина в этом случае  $\alpha_C < 1$ . Это является следствием сильной нелинейности. В остальных случаях размерность Афраймовича–Песина составляла  $\alpha_C = 1$ .
10. Результаты, полученные для неавтономного генератора Ван дер Поля, имеют место и для инвариантных кривых неавтономного консервативного осциллятора. Вариация начальных условий при этом может приводить к неточности задания числа вращения при одних и тех же параметрах системы и разрушению «Лестницы Фибоначчи».
11. Исследование статистики времен возврата на инвариантных кривых и резонансных торах неавтономного консервативного осциллятора показало, что зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}}(\varepsilon) \rangle$  можно разделить на два участка: область малых  $\varepsilon$  и область больших  $\varepsilon$ . На первом участке зависимость близка к линейной, значения  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  практически не изменяются с уменьшением  $\varepsilon$ , и оценка размерности Афраймовича–Песина становится невозможной. В случае инвариантных кривых в области больших  $\varepsilon$  может быть получена «Лестница Фибоначчи», а в случае резонансных торов зависимость является линейной. Линейная аппроксимация обеих зависимостей имеет коэффициент угла наклона, равный минус единице, что говорит о том, что в области больших  $\varepsilon$  размерность Афраймовича–Песина равна единице.
12. Показано, что в случае аттрактора Фейгенбаума в логистическом отображении зависимость  $\ln \langle \tau_{\text{inf}}(\ln \varepsilon) \rangle$  является линейной, калибровочная функция имеет вид  $\phi(t) \sim 1/t$ , а размерность Афраймовича–Песина равна единице.

## Публикации автора по теме диссертации

1. Семенова, Н.И. Возвраты Пуанкаре в стробоскопическом сечении неавтономного генератора ван дер Поля / Н.И. Семенова, В.С. Анищенко // *Нелинейная динамика*. — 2014. — Т. 10, № 2. — С. 149–156.
2. Statistical properties of Poincaré recurrences and Afraimovich–Pesin dimension for the circle map / N.I. Semenova, T.E. Vadivasova, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* — 2015. — Vol. 22. — Pp. 1050–1061.

3. *Anishchenko, V.S.* Poincaré Recurrences in the Circle Map: Fibonacci stairs. / V.S. Anishchenko, N.I. Semenova, T.E. Vadivasova // *Discontinuity, Nonlinearity and Complexity*. — 2015. — Vol. 4, no. 2. — Pp. 111–119.
4. Local and global approaches to the problem of Poincaré recurrences. Applications in nonlinear dynamics / V. S. Anishchenko, Ya. I. Boev, N.I. Semenova, G.I. Strelkova // *Phys. Rep.* — 2015. — Vol. 587. — Pp. 1–39.
5. *Semenova, N.I.* Fibonacci stairs and the Afraimovich-Pesin dimension for a stroboscopic section of a nonautonomous van der Pol oscillator / N.I. Semenova, V. S. Anishchenko // *Chaos*. — 2015. — Vol. 25. — P. 073111.
6. *Семенова, Н.И.* Возвраты Пуанкаре и размерность Афраймовича–Песина в неавтономном консервативном осцилляторе / Н.И. Семенова, Т.И. Галактионова, В.С. Анищенко // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Физика*. — 2016. — Т. 17, № 4. — С. 195–203.
7. *Semenova, N.* How the Minimal Poincaré Return Time Depends on the Size of a Return Region in a Linear Circle Map / N. Semenova, E. Rybalova, V. Anishchenko // *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*. — 2016. — Vol. 5, no. 4. — Pp. 355–364.
8. *Biryukova, N.I.* Poincaré recurrences in a stroboscopic section of a nonautonomous van der Pol oscillator / N.I. Biryukova, T.V. Abrosimova, V.S. Anishchenko // International Conference “Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity”. — 2014. — P. 11.
9. *Semenova, N.I.* The Afraimovich-Pesin Dimension Of Poincaré Recurrences In A Circle Map / N.I. Semenova, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko // Proceedings of the International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics”. — 2014. — Pp. 79–80.
10. *Semenova, N.I.* Poincaré Recurrences In The Stroboscopic Section Of A Nonautonomous Van Der Pol Oscillator / N.I. Semenova, V.S. Anishchenko // Proceedings of the International Symposium “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics”. — 2014. — Pp. 41–42.