

На правах рукописи

*Боев.*

**БОЕВ Ярослав Игоревич**

**СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ  
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ВРЕМЁН ВОЗВРАТА  
ПУАНКАРЕ В ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ В  
УСЛОВИЯХ ШУМОВЫХ И ГАРМОНИЧЕСКИХ  
ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

Специальность 01.04.03 — Радиоп физика

**Автореферат**

диссертации на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Саратов — 2016

Работа выполнена на кафедре радиофизики и нелинейной динамики Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского

Научный руководитель: заслуженный деятель науки РФ,  
доктор физико-математических наук, профессор,  
**Анищенко Вадим Семенович**

Официальные оппоненты: **Осипов Григорий Владимирович**,  
доктор физико-математических наук,  
ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского»,  
Институт информационных технологий,  
заведующий кафедрой теории управления и динамики систем

**Смирнов Дмитрий Алексеевич**,  
доктор физико-математических наук, профессор  
РАН,  
Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук,  
ведущий научный сотрудник

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

Защита состоится « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2016 г. в \_\_\_ ч. \_\_\_ мин. на заседании диссертационного совета Д 212.243.01 при Саратовском государственном университете имени Н.Г. Чернышевского по адресу: 410012, г. Саратов, ул. Астраханская, 83, III корпус, ауд. 34.

С диссертацией можно ознакомиться в Зональной научной библиотеке имени В.А. Артисевич Саратовского государственного университета имени Н.Г. Чернышевского.

Автореферат разослан « \_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2016 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета  
Д 212.243.01, д.ф.-м.н.



Аникин Валерий  
Михайлович

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы

Одним из направлений исследований в нелинейной динамике является анализ систем, устойчивых по Пуассону. Возвращаемость по Пуанкаре означает, что в системах с заданной мерой практически любая фазовая траектория, исходящая из заданной начальной точки, бесконечное число раз во времени пройдет в сколь угодно малой окрестности исходного состояния<sup>1</sup>. Системы, обладающие свойством возвращаемости, были названы Пуанкаре устойчивыми по Пуассону.

Несмотря на более чем столетнюю историю, проблема изучения статистических характеристик последовательностей времен возврата Пуанкаре в динамических системах остается актуальной и сегодня. И это относится не только к чисто математическим аспектам этой проблемы. Идея возвращаемости сложных систем с течением времени в окрестность некоторого состояния становится одной из фундаментальных концепций современной науки. Эта концепция позволяет с единых позиций рассматривать такие эволюционные процессы как изменение климата, солнечной активности, динамики популяций, изменений на финансовых рынках, распространение эпидемий и многие другие. Многолетними наблюдениями установлено, что многие эволюционные процессы в природе и обществе характеризуются свойством возвращаемости. Исследование статистики подобных возвратов направлено на решение задачи прогнозирования, что безусловно важно.

Для анализа возвратов Пуанкаре применяются два подхода: локальный и глобальный. При локальном подходе исследуются возвраты в  $\varepsilon$ -окрестность некоторой точки  $\vec{x}_0$  аттрактора динамической системы. Глобальный подход основывается на покрытии всего аттрактора ячейками размера  $\varepsilon$ ; внутри каждой ячейки берётся ансамбль начальных условий; для каждого начального условия считается время первого возврата Пуанкаре и выбирается его минимальное значение из всего ансамбля; затем проводится усреднение минимальных времён возврата по всем ячейкам покрытия.

К настоящему времени создана математическая теория времён возврата Пуанкаре, описывающая статистику последовательностей времен возвратов как в окрестность заданного состояния (локальная теория), так и в рассматриваемое множество фазовых траекторий системы (глобальная теория). Доказана взаимосвязь среднего времени возврата в окрестность заданного состояния с вероятностью посещения фазовой траекторией этой окрестности (лемма Каца<sup>2</sup>). Уста-

---

<sup>1</sup>Poincaré, H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique / H. Poincaré // Acta Mathematica. — 1890. — Vol. 13. — Pp. 1-270.

<sup>2</sup>Кас, Марк. Probability and Related Topics in Physical Sciences / Mark Kac. — Amer Mathematical Society, 1957. — Vol. 1a of Lectures in Applied Mathematics Series.

новлено, что для систем с перемешиванием (хаотических систем) плотность вероятности случайной последовательности времен возврата в малую окрестность исходного состояния на больших временах подчиняется экспоненциальному закону<sup>1</sup>. Классический результат Пуанкаре обобщен на случай, когда правые части дифференциальных уравнений динамической системы являются периодически функциями времени с одинаковым периодом<sup>2</sup>. Другими словами, устойчивость по Пуассону доказана для неавтономных систем с периодическим воздействием.

Сравнительно недавно появились математические работы, в которых исследуется проблема времён возврата Пуанкаре с точки зрения так называемого глобального подхода. При глобальном подходе определяется среднее время возврата по всем элементам полного покрытия рассматриваемого множества фазовых траекторий в целом. Среднее время возврата в этом случае будет зависеть от совокупности начальных точек, заданных в каждом элементе покрытия множества, и будет являться функцией всего множества. Одной из основных характеристик времён возврата Пуанкаре при глобальном подходе является фрактальная размерность множества времен возвратов, названная размерностью Афраймовича-Песина (АП-размерность)<sup>3</sup>. В общем случае оценкой АП-размерности сверху является величина топологической энтропии. Для одномерных хаотических отображений доказано, что АП-размерность совпадает с величиной показателя Ляпунова<sup>4</sup>.

Обобщением и развитием идеи Пуанкаре о возвращении является концепция “recurrency plot”<sup>5</sup>. Метод RP базируется на анализе длительности времен, в течение которых фазовые траектории динамической системы остаются в  $\varepsilon$ -окрестности друг друга. Исследования показали, что RP являются эффективным методом диагностики режимов функционирования динамических систем по временным рядам.

На протяжении 70 лет после основополагающих работ Пуанкаре исследования проблемы возвратов носили исключительно теоретический характер. Экспериментальных работ до начала семидесятых годов практически не было в силу отсутствия компьютеров. Этот недостаток был восполнен в последние 40 лет.

---

<sup>1</sup>Hirata, Masaki. Poisson law for the dynamical systems with the “self-mixing” conditions / Masaki Hirata // Mathematics, engineering and economics. — Vol. 1. — Singapore: World Scientific, 1995. — Pp. 87-96.

<sup>2</sup>Четаев, Н. Об устойчивости в смысле Пуассона / Н. Четаев // Учёные Записки Казанского Государственного Университета. — 1929. — Т. 89, Стр. 199-201.

<sup>3</sup>Afraimovich, Valentin. Fractal Dimensions for Poincaré Recurrences / Valentin Afraimovich, Edgardo Ugalde, Jesus Urias. Monograph Series on Nonlinear Science and Complexity. — Elsevier Science, 2006.

<sup>4</sup>Saussol, B. Recurrence, Dimensions and Lyapunov Exponents / B. Saussol, S. Troubetzkoy, S. Vaienti // Journal of Statistical Physics. — 2002. — Vol. 106, no. 3-4. — Pp. 623-634.

<sup>5</sup>Recurrence plots for the analysis of complex systems / Norbert Marwan, M. Carmen Romano, Marco Thiel, Jurgen Kurths // Physics Reports. — 2007. — Vol. 438, no. 5-6. — Pp. 237-329.

Численные эксперименты подтвердили применимость теоретических результатов к негиперболическим дискретным и потоковым системам. Многократно была подтверждена лемма Каца и экспоненциальный закон распределения времен возврата для хаотических систем. Детально исследован вопрос о влиянии размера  $\varepsilon$  окрестности возврата на характер распределения времен возвращения. Подтверждено, что экспоненциальный закон достигается в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  и справедлив на больших временах. При конечных размерах окрестности  $\varepsilon$  распределение может отличаться от экспоненциального, но при этом отражает характерные динамические свойства системы.

Имеются работы<sup>1</sup>, связанные с применением метода возвратов Пуанкаре для анализа экспериментальных данных при решении ряда прикладных задач. При исследовании времён возврата важно учитывать асимптотику статистических характеристик при уменьшении размера  $\varepsilon$  рассматриваемой окрестности. Некоторые теоретические результаты получены в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Однако, при проведении численных экспериментов размер рассматриваемой окрестности всегда конечен, причем его существенное уменьшение по сравнению с размерами аттрактора связано с большими вычислительными трудностями. Особенно остро эта проблема ощущается в многомерных потоковых системах. По этой причине в данной работе в основном рассмотрены возвраты Пуанкаре в  $\varepsilon$ -окрестность конечного фиксированного размера. Как будет показано, они могут нести ценную информацию о динамике системы.

Теория возвратов активно применяется к исследованию экономических процессов, плазменной физики, а также при анализе ДНК, электрокардиограмм, электроэнцефалограмм, для исследования “чёрных дыр” и в ряде других областей знаний.

Подводя итог краткому описанию основных численных результатов по возвратам Пуанкаре и приложениям, отметим следующее. Анализ экспериментальных результатов свидетельствует о том, что большинство работ посвящено локальной теории возвратов. Работ по анализу статистики возвратов в рамках глобального подхода очень мало. При численных исследованиях анализа эволюция вероятностной меры рассматриваемых множеств как правило не проводится. А такой анализ необходим, поскольку именно изменения вероятностной меры влияют на результат. В литературе отсутствуют эксперименты по анализу статистики возвратов Пуанкаре в неавтономных системах с шумовым и периодическим воздействиями. Неавтономные системы составляют широкий класс систем, рассматриваемых как в теории, так и в приложениях. В литературе не отражены

---

<sup>1</sup>Altmann, Eduardo G. Recurrence time statistics for finite size intervals / Eduardo G. Altmann, Elton C. da Silva, I. L. Caldas // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2004. — Vol. 14, no. 4. — Pp. 975-981.

результаты анализа возвратов Пуанкаре в системах, находящихся под воздействием шумов.

Все вышесказанное подтверждает актуальность исследований в выбранной области и служит основанием для формулировки цели и задач диссертационного исследования.

**Целью** диссертационной работы является исследование применимости известной теории времён возвращения Пуанкаре к неавтономным системам и расширение на основе этого возможностей использования статистики последовательности времён возврата для анализа динамических систем и диагностики таких эффектов как стохастический резонанс, частотно-фазовая синхронизация автоколебаний и оценка фрактальной размерности аттрактора. Будут исследованы мультифрактальные характеристики последовательности времён возврата в неавтономных системах, путём расчёта размерности Афраймовича-Песина.

### **Основные положения и результаты, выносимые на защиту:**

1. Для динамических систем в отсутствие внешних воздействий основные теоретические результаты по статистике времён возврата Пуанкаре подтверждаются численно как при локальном, так и при глобальном подходах. Для систем, находящихся под воздействием аддитивного белого шума, лемма Каца и экспоненциальный закон распределения времён возврата также оказываются справедливы. Причиной этого является экспериментально обоснованная стационарность и эргодичность вероятностной меры для зашумлённых систем.
2. В условиях внешнего периодического воздействия на систему плотность вероятности времён возврата  $p(\tau)$  оказывается периодически промодулировано функцией с периодом внешней силы. При этом теоретическое выражение для АП-размерности подтверждается экспериментально. Экспоненциальный закон распределения в этом случае строго выполняется лишь для стробоскопического сечения.
3. Для одномерных и двумерных автономных систем в численном эксперименте подтверждено, что АП-размерность совпадает с величиной топологической энтропии, оценкой которой служит сумма положительных ляпуновских показателей Ляпунова.
4. Статистические характеристики последовательности времён возврата в периодически возмущаемых системах могут быть использованы для диагностики эффектов стохастического резонанса и внешней синхронизации хаотических колебаний.

5. Статистика возвратов Пуанкаре даёт возможность определения фрактальной размерности аттракторов с высокой точностью применительно к гиперболическим (квазигиперболическим) хаотическим аттракторам. В случае негиперболических аттракторов в силу их неоднородности статистика возвратов Пуанкаре даёт возможность лишь оценки фрактальной размерности с конечной точностью.

**Научная новизна:** результатов диссертационной работы определяется следующим:

1. Впервые обоснована оценка размерности Афраймовича-Песина с помощью энтропии Колмогорова-Синяя, вычисленной как сумма положительных ляпуновских показателей для двумерной динамической системы, в режиме гиперхаоса.
2. Впервые показано, что эффект стохастического резонанса можно диагностировать с помощью статистики последовательности времён возврата Пуанкаре, рассчитанных в окрестности заданного состояния динамической системы.
3. Установлено, что статистические характеристики времён возврата Пуанкаре в рамках локального подхода обеспечивают возможность диагностики частотно-фазовой синхронизации хаотических автоколебаний.
4. Впервые показано, что лемма Каца и экспоненциальный закон распределения времён возврата Пуанкаре выполняется для зашумлённых систем в силу стационарности и эргодичности вероятностной меры. А при наличии внешнего гармонического воздействия плотность вероятности времён возврата является периодически промодулированной функцией с периодом равным периоду внешнего воздействия.

**Научная и практическая значимость** Научные результаты, представленные в работе вносят определённый вклад в современную теорию колебаний и теорию динамических систем, расширяют возможности применения статистики времён возврата Пуанкаре при исследовании характеристик динамических систем. Показано, что теория времён возврата может быть успешно использована как автономных, так и в неавтономных системах. Применение теории времён возврата Пуанкаре позволяет анализировать и диагностировать такие эффекты как: стохастический резонанс и частотно-фазовая синхронизация хаотических автоколебаний. Полученные результаты могут быть применены при расчётах и оценке фрактальной размерности аттракторов динамических систем.

**Достоверность научных выводов** работы подтверждается соответствием результатов, полученных при использовании различных методов численного моделирования, включая применение различных схем интегрирования уравнений,

а также совпадением части промежуточных результатов проведенных исследований с данными, полученными другими авторами и представленными в научных публикациях.

**Апробация работы.** Основные результаты научных исследований были представлены на следующих научных семинарах и конференциях:

- Конференция International Conference “Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity”, 19-23 May 2014, “Volzhskie Dali”, Saratov, Russia, Y. Boev, V. Anischenko, “Afraimovich-Pesin dimension for the transition to chaos in one-dimensional maps”.
- Конференция “Topical Problems of Nonlinear Wave Physics”, 17-23 July, 2014, Y. Boev, T. Vadivasova, and V. Anishchenko, “Poincaré recurrences in the phase-frequency synchronization regime in the Rössler oscillator”

а также на научных семинарах кафедры радиофизики и нелинейной динамики.

**Личный вклад.** В данной работе основная часть представленных результатов была получены автором в ходе численных экспериментов. В эксперименте использовалось запатентованное программное обеспечение, разработанное лично автором. Автор принимал активное участие в постановке задач и интерпретации полученных экспериментальных данных.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 13 печатных изданиях из них: 10 статей в рецензируемых журналах рекомендованных ВАК [1–10], 1 статья в сборниках трудов конференции [11] и 2 работы в сборниках тезисов конференций [12, 13].

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка цитируемой литературы. Полный объем диссертации 121 страниц текста с 44 рисунками. Список литературы содержит 95 наименований.

## Содержание работы

**Во введении** обосновывается актуальность выбранной темы диссертации, проводится краткий обзор имеющихся в научной литературе результатов по теме проводимого исследования, определяются цели и задачи исследования, формулируются положения и результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе** диссертации проводится исследование времён возврата Пуанкаре в неавтономных системах. Глава начинается с краткого теоретического описания локальной теории времён возврата Пуанкаре. Далее во второй части демонстрируется влияние шумового воздействия на статистику времён возврата. Подтверждается справедливость леммы Каца, что обусловлено стационарностью и эргодичностью вероятностной меры для зашумлённых систем. После



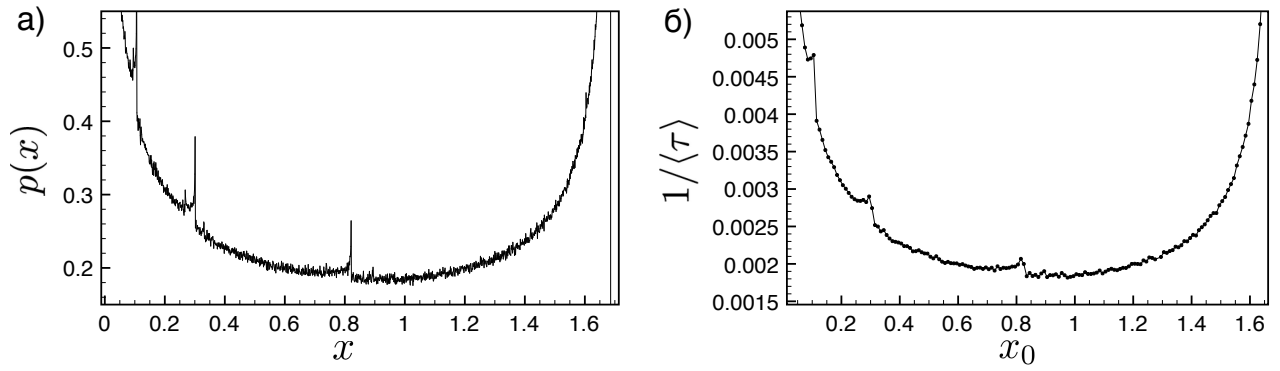


Рис. 1: Плотность вероятности  $p(x)$  переменной на аттракторе системы (2) (а) и зависимость  $\langle\tau\rangle$  от координаты точки окрестности возврата  $x_0$  (б) при  $\varepsilon = 0.01$ ,  $\alpha = 2.84$ ,  $B = 10$ ,  $D = 0$ .

этого проводится исследование статистики времён возврата в условиях внешнего гармонического воздействия. Устанавливается наличие периодической модуляции в распределении времён возврата с периодом, равным периоду внешнего воздействия.

Время, за которое траектория вернётся в окрестность своего начального состояния, называется временем возврата Пуанкаре. Точное математическое определение времени возврата Пуанкаре для дискретной динамической системы записывается в виде:

$$\tau_r(\vec{x}_0) = \min\{n \in \mathbb{N} : T^n(\vec{x}_0) \in B_r(\vec{x}_0)\}, \quad (1)$$

где  $\tau_r(\vec{x}_0)$  — это время возврата в окрестность начального состояния  $\vec{x}_0$ ,  $B_r(\vec{x}_0)$  —  $\mathbb{N}$ -мерный шар радиуса  $r = \varepsilon/2$ ,  $T^n(\vec{x}_0)$  — отображение метрического пространства  $T : X \rightarrow X$  применённое  $n$  раз к точке  $\vec{x}_0$ . Далее в тексте мы опустим индекс  $r$ .

Рассмотрим кубическое отображение с хаотическим квазиаттрактором

$$x_{n+1} = (\alpha x_n - x_n^3) \exp(-\frac{x_n^2}{B}) + A \sin(\Omega n) + \sqrt{2D}\xi_n, \quad (2)$$

где  $\alpha$  и  $B$  — управляющие параметры, параметр  $B$  фиксирован и равен  $B = 10$ ,  $D$  — интенсивность шума,  $\xi_n$  — источник ограниченного белого гауссова шума,  $A = 0$ .

Теорема Каца доказана для множеств, на которых определена вероятностная мера, которая должна быть стационарной и удовлетворять условию эргодичности. Известно что с помощью сопоставления результатов численного моделирования доказывається стационарность вероятностной меры. На основании этих результатов можно сказать, что плотность вероятности в рассматриваемой системе при наличии внешнего аддитивного шума является эргодической и стационарной. Учитывая этот факт, можно понять справедливость теоремы Каца

для зашумлённых систем:

$$\langle \tau(\Delta, D) \rangle = \frac{1}{P(\Delta, D)} \quad (3)$$

Времена возврата в выбранную окрестность хаотического аттрактора  $\Delta \in [x_0 - \varepsilon/2; x_0 + \varepsilon/2]$  в пределе  $\varepsilon \rightarrow 0$  удовлетворяют экспоненциальному закону:

$$p(\tau) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \exp\left(-\frac{\tau}{\langle \tau \rangle}\right), \quad \tau > \tau^*, \quad (4)$$

где  $\langle \tau \rangle$  — среднее время возврата, а  $\tau^*$  — некоторое значение  $\tau$ . Этот закон описывает распределение последовательности времён возврата Пуанкаре.

При воздействии шума интенсивности  $D$  распределение переменной на аттракторе  $p(x)$  меняется и, соответственно, меняется вероятность  $P(\Delta) = P(\Delta, D)$  рис. 2(в). В результате среднее время возврата также становится функцией от шума  $D$ :  $\langle \tau(\Delta) \rangle = \langle \tau(\Delta, D) \rangle$ . При этом, как показали расчёты, экспоненциальный закон остаётся справедливым:

$$p(\tau, D) = \frac{1}{\langle \tau(D) \rangle} \exp\left(-\frac{\tau}{\langle \tau(D) \rangle}\right), \quad (5)$$

где  $\langle \tau(D) \rangle$  — среднее время возврата в окрестность заданной точки  $x_0$  в условиях воздействия шума интенсивности  $D$ .

Как показывают расчёты: экспоненциальный закон с высокой точностью выполняется в случае конечных, но малых размерах областей возврата  $\varepsilon \ll 1$ . Из графиков видно справедливость экспоненциального закона распределения подтверждается данными численных экспериментов. При условии  $\tau \geq \tau^* \approx 40$  зависимости  $\ln p(\tau)$  представляют собой прямые линии и наклоном  $|k| = 1/\langle \tau \rangle$ .

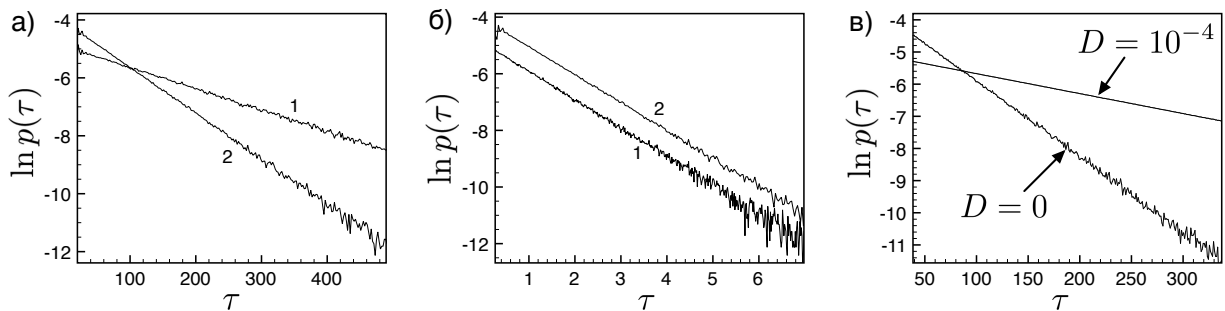


Рис. 2: Распределения  $p(\tau)$ , рассчитанные для системы (2) при значениях параметров  $\alpha = 2.7, B = 10$  для окрестности точки  $x_0 = 0.38, \varepsilon = 0.01$  (кривая 1) и  $\varepsilon = 0.02$  (кривая 2) (а). Данные с фрагмента (а), представленные в нормированном времени  $\tau' = \tau/\langle \tau \rangle$  (б). Плотность распределения времён возврата для двух значений интенсивности шума  $D$  для  $x_0 = 0.76, \varepsilon = 0.01, \alpha = 2.7$  (в).

Уменьшение  $\langle \tau \rangle$  приводит к соответствующему росту наклона прямой на графиках рис. 2(а).

Как следует из выражения (4), если ввести нормированное время  $\tau' = \tau / \langle \tau \rangle$ , то зависимость  $\ln p(\tau)$  будет представлять собой прямую линию с единичным наклоном и сдвинутую относительно начала координат на величину  $C = \ln(1 / \langle \tau \rangle)$ . Рисунок 2(б) иллюстрирует сказанное выше.

Таким образом, распределение времён возврата удовлетворяет экспоненциальному закону, как при отсутствии, так и при наличии аддитивного шума.

Исследуем статистику времён возврата Пуанкаре в случае неавтономных динамических систем. Проведём расчёты плотности вероятности  $p(x)$  в неавтономной системе (2), где  $A$  и  $\Omega$  — это амплитуда и частота внешнего периодического воздействия,  $D = 0$ .

Данные расчётов свидетельствуют о том, что плотность вероятности  $p(\tau)$  оказывается периодически промодулированной функцией с периодом, равным периоду внешней силы внешнего воздействия (рис. 3(а)). В случае, когда модуляция  $p(\tau)$  осуществляется по закону, близкому к синусоидальному, плотность распределения вероятности времён возврата  $p(\tau)$  можно аппроксимировать функцией:

$$p^*(\tau) = \frac{1}{\langle \tau \rangle} \exp \left\{ -\frac{\tau}{\langle \tau \rangle} + f(\tau, A) \sin(\Omega\tau + \phi) \right\}. \quad (6)$$

Если рассчитать спектр функции  $p(\tau)$

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty p(\tau) \exp(-j\omega\tau) d\tau, \quad (7)$$

то в спектре  $F(\omega)$  на частоте  $\omega = \Omega$  должен быть ярко выраженный пик (рис. 3(б)). В отсутствие возмущения ( $A = 0$ ) пик в спектре на частоте  $\omega = \Omega$  будет отсутствовать.

Рассмотрим статистику времён возврата Пуанкаре с использованием метода стробоскопического сечения. Распределение времён возврата для стробоскопического сечения не будет содержать периодической модуляции (рис. 3(в)).

Результаты первой главы опубликованы в работах [4, 6, 9].

**Во второй главе** излагаются результаты применения глобального подхода к изучению динамики дискретных систем. Вычисляется характеристика последовательности времён возврата под названием “размерность Афраймовича-Песина” (АП-размерность). Устанавливается связь между АП-размерностью, ляпуновскими показателями и энтропией Колмогорова-Синяя динамической системы. Анализируется возможность применения теории глобального подхода к неавтономным системам. Исследуется поведение размерности Афраймовича-Песина вблизи критической точки рождения аттрактора Фейгенбаума.

Размерность Афраймовича-Песина  $\alpha_C$  представляет собой мультифрактальную размерность последовательности времён возврата Пуанкаре и рассчитывается с помощью анализа среднего минимального времени возврата по всему аттрактору. Для этого аттрактор исследуемой системы покрывается областями возврата, в каждую область возврата вычисляется минимальное время возврата, а потом проводится усреднение минимальных времён во всем областям покрытия аттрактора. Далее по зависимости среднего минимального времени возврата  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от размера области возврата  $\varepsilon$  рассчитывается АП-размерность. При топологической энтропии  $h_T > 0$  рассматриваемая зависимость подчиняется формуле:

$$\langle \tau_{\text{inf}} \rangle \approx -\frac{d_C}{\alpha_C} \ln \varepsilon, \quad (8)$$

где  $d_C$  — ёмкостная размерность аттрактора исследуемой системы. В случае, когда топологическая энтропия равна нулю  $h_T = 0$ , зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от  $\varepsilon$  имеет вид:

$$\langle \tau_{\text{inf}} \rangle \approx \varepsilon^{-d_C/\alpha_C}. \quad (9)$$

На примере одномерного логистического отображения и двух связанных логистических отображений:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), \quad (10)$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= r_1 - x_n^2 + \gamma(y_n^2 - x_n^2), \\ y_{n+1} &= r_2 - y_n^2 + \gamma(x_n^2 - y_n^2). \end{aligned} \quad (11)$$

показано, что зависимость среднего времени возврата  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от размера области возврата  $\varepsilon$  подчиняется теоретической (8). Установлено, что АП-размерность

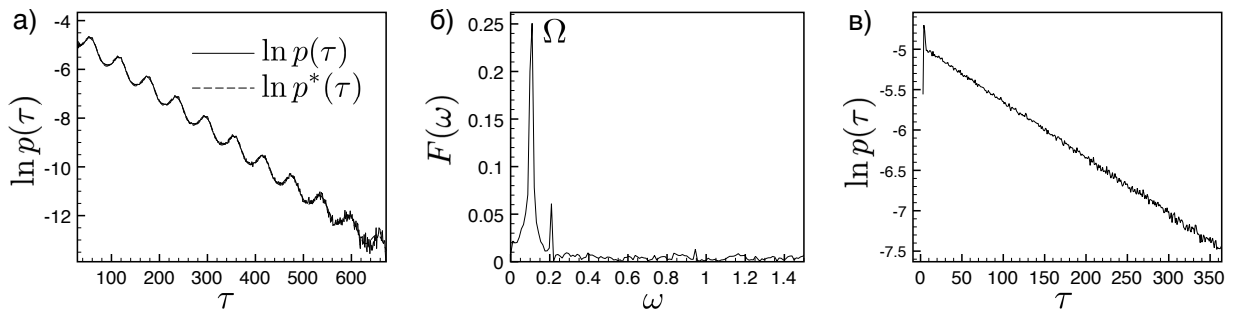


Рис. 3: Плотность вероятности времён возврата  $p(\tau)$  в системе (2) и вид аппроксимирующей функции  $p^*(\tau)$  для точки  $x_0 = 0.38$  при  $\alpha = 2.7, B = 10, \varepsilon = 0.01, \Omega = \pi/30$ , а  $f(\tau, A) = 0.35$

(а). Спектр функции  $p(\tau)$ , рассчитанной для точки  $x_0 = 0.38$  и для различных значений амплитуды внешнего воздействия  $A = 0.01$  (б). Распределение плотности вероятности

времён возврата  $p(\tau)$  для стробоскопического сечения. Параметры:

$$\alpha = 2.7, B = 10, A = 0.1, \Omega = \pi/30, x_0 = 1.1, \varepsilon = 0.01 \text{ (в)}.$$

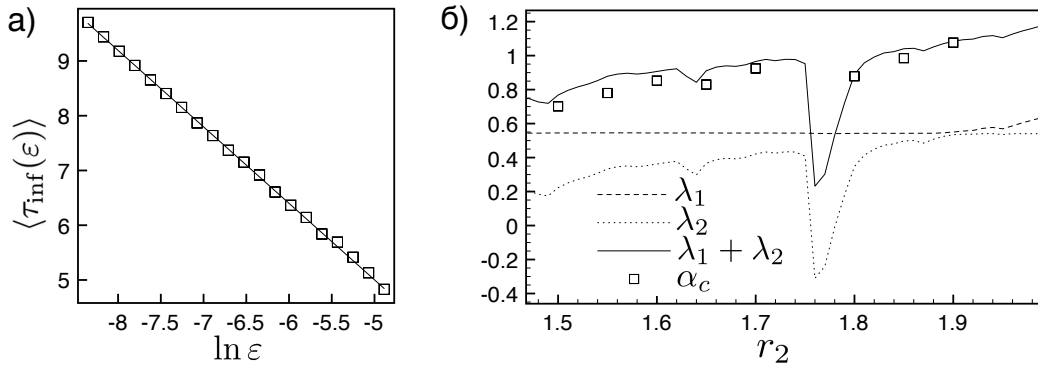


Рис. 4: Зависимость среднего минимального времени возврата  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от размера области возврата  $\varepsilon$  в системе (10) при значении управляющего параметра  $r = 4.0$  (а). Зависимости ляпуновских показателей  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и их суммы, а также АП-размерности  $\alpha_C$  от параметра  $r_2$  при фиксированных значениях  $r_1 = 1.9$ ,  $\gamma = 0.002$  в системе (11) (б).

равняется сумме положительных ляпуновских показателей (рис. 4) или старшему ляпуновскому показателю в случае одномерного логистического отображения.

На примере кубического отображения (2) демонстрируется влияние внешнего периодического и шумового воздействий на зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от  $\varepsilon$ . При наличии периодического воздействия зависимость  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от  $\varepsilon$  подчиняется закону (8) также как и автономном случае рис. 5(а). А также показано нарушение равенства между размерностью Афраймовича-Песина  $\alpha_C$  и старшим Ляпуновским показателем в неавтономных системах (рис. 5(б)).

Далее рассмотрим поведение размерности Афраймовича-Песина  $\alpha_C$  вблизи критической точки рождения аттрактора Фейгенбаума. Простейшим примером для анализа АП-размерности может служить одномерный хаотический аттрактор в логистическом отображении (10). Исследуя статистику времён возврата Пуанкаре при подходе к критическому значению  $r = r^*$  сверху ( $r > r^*$ ) мы должны получить соответствие результатов с выражением (8), а в критической точке  $r = r^*$  должно выполняться (9). Как с математической, так и с физической точек зрения представляется важным установить закономерность эволюции АП-размерности при указанном переходе от случая  $h_T > 0$  к случаю  $h_T = 0$ .

Проведённые вычисления в области значений  $r^* < r \leq 4$  показали, что зависимость (8) выполняется, рис. 4(а). В соответствии с теорией описание статистики возвратов Пуанкаре в критической точке даётся другим выражением (9). И вычисления этот факт подтверждают (рис. 6(б)). Однако АП-размерность в критической точке претерпевает скачок, принимая значение  $\alpha_C \approx 1$ . Это значение никак не коррелирует с величиной  $h_T = 0$  и  $\lambda^+ = 0$ . Полученные результаты

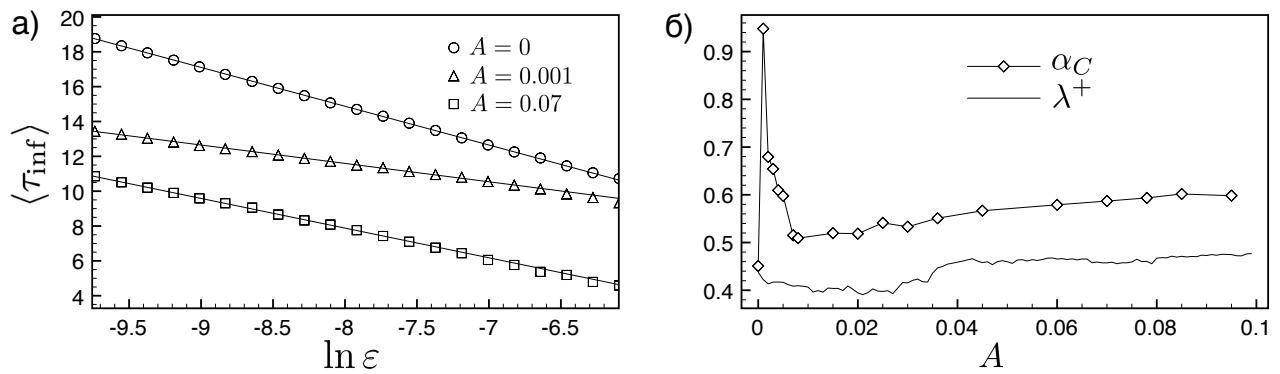


Рис. 5: Зависимость среднего минимального времени возврата Пуанкаре  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от размера области возврата  $\varepsilon$  для разных значений амплитуды гармонического воздействия (а). Зависимость Ляпуновского показателя  $\lambda^+$  и АП-размерности  $\alpha_C$  от амплитуды внешнего периодического воздействия  $A$  (б). Параметры исследуемой системы  $a = 2.7, b = 10, \omega = \pi/30$ .

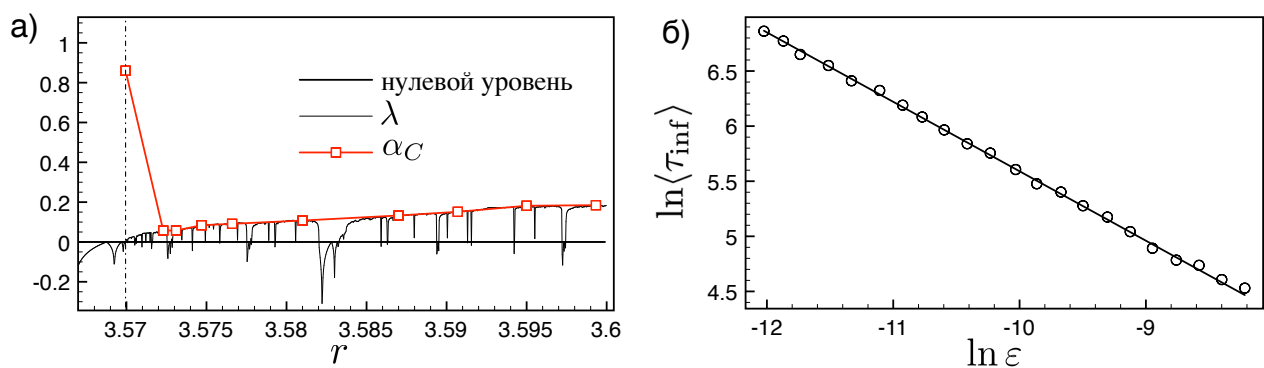


Рис. 6: Ляпуновский показатель  $\lambda^+$  и АП-размерность  $\alpha_C$  в зависимости от параметра  $r$  в отображении (10) (а). Зависимость среднего минимального времени возврата  $\langle \tau_{\text{inf}} \rangle$  от размера области возврата  $\varepsilon$  построенная в логарифмическом масштабе при значении управляющего параметра  $r = 3.569946$  (точка наиболее близкая к критической) (б).

были также воспроизведены на примере одномерного кубического отображения (2).

Результаты второй главы опубликованы в работах [2, 11, 13].

**В третьей главе** рассматриваются вопросы применения характеристик последовательностей времён возврата к решению ряда задач нелинейной динамики. Показывается, как с помощью времён возврата можно диагностировать эффект стохастического резонанса. Вторая часть посвящена анализу вынужденной синхронизации хаоса в осцилляторе Рёсслера. В третьей части рассмотрены вопросы связи фрактальной размерности аттрактора и статистических характеристик последовательности времён возврата.

Исследуем диагностику явления стохастического резонанса с помощью времён возврата Пуанкаре. Для этого рассмотрим кубическое отображение (2), как одну простейших систем, демонстрирующих эффект СР как в классическом случае индуцированных шумом переключений, так и в случае отсутствия шума при вариации управляющего параметра. Как уже было ранее показано в первой главе при наличии внешнего периодического воздействия на систему, распределение времён возврата также будет периодически промодулировано. А его спектр содержит ярко-выраженную гармонику на частоте внешнего воздействия  $F(\Omega)$ . Воспользуемся этим обстоятельством диагностики стохастического резонанса.

На рис. 7 представлено распределение времён возврата и его спектр для резонансного случая. Плотность вероятности времён возврата действительно оказывается промодулирована внешним периодическим сигналом, а её спектр содержит в себе пик на частоте внешнего воздействия. Было выяснено, что амплитуда этого пика будет максимально в режиме СР. Построим на одном графике зависимость отношения сигнала к шуму (SNR) от параметра и амплитуду максимума спектральной функции  $F(\Omega)$ . Из рис. 7(а) видно, что вышеупомянутые

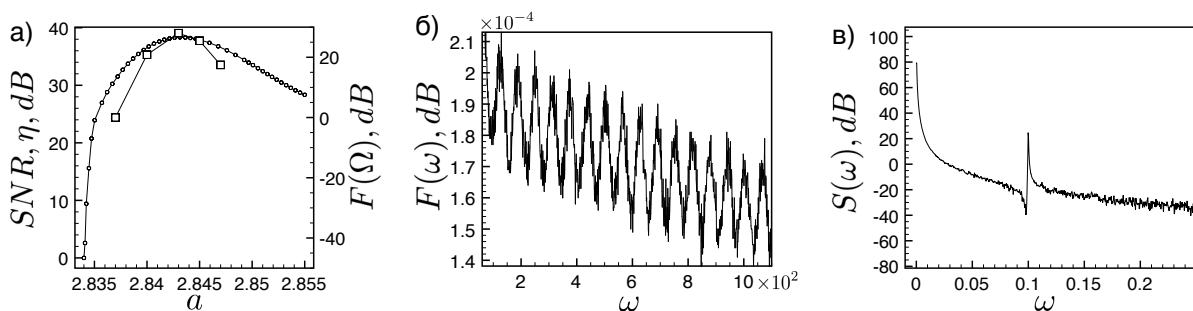


Рис. 7: SNR (кривая 1) и зависимость максимума спектральной функции  $F(\omega)$  (кривая 2) в зависимости от управляющего параметра  $a$  (а). Распределение времён возвратов Пуанкаре  $p(\tau)$  для резонансного  $a = 2.843$  для случая (б). Спектр амплитуд функции  $p(\tau)$  при  $a = 2.843$ . Параметры  $b = 10$ ,  $A = 0.005$ ,  $\Omega = 0.1$ ,  $D = 0$  (в).

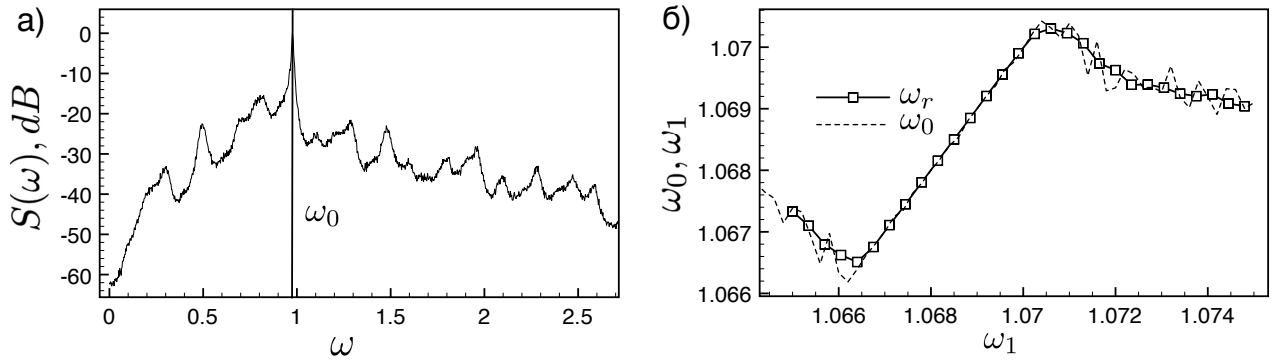


Рис. 8: Спектральная плотность мощности хаотических автоколебаний  $S(\omega)$  (а) (линией отмечена базовая частота  $\omega_0$ ). Зависимость базовой частоты колебаний  $\omega_0$  и средней частоты возврата  $\omega_r$  от частоты внешнего воздействия  $\omega_1$  (б). Параметры системы:

$$\alpha = \beta = 0.2, \mu = 6.5, A = 0.025.$$

зависимости будут иметь одинаковый характер. Таким образом с помощью времён возврата Пуанкаре можно на качественном уровне диагностировать эффект стохастического резонанса.

Теперь рассмотрим применение времён возврата для диагностики вынужденной синхронизации. В качестве исследуемой системы возьмём осциллятор Рёсслера:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x + A \sin(\omega_1 t) \\ \dot{y} = x + \alpha y \\ \dot{z} = \beta + z(x - \mu) \end{cases} \quad (12)$$

где  $\alpha, \beta, \mu$  — управляющие параметры. Выберем их таким образом, чтобы система находилась в режиме спирального аттрактора:  $\alpha = \beta = 0.2, \mu = 6.5$ . Спиральный аттрактор характеризуется высокой степенью однородности множества хаотических траекторий. В системе Рёсслера траектория в  $XY$ -проекции вращается вокруг начала координат, делая каждый раз полный оборот за почти одно время.

Рассмотрим распределение времён возврата  $p(\tau)$  в окрестность выбранной точки на аттракторе в плоскости  $XY$ . Как известно, воздействие на систему, находящуюся в режиме спирального хаоса, внешним периодическим сигналом может приводить к вынужденной частотно-фазовой синхронизации. Базовая частота колебаний  $\omega_0$  захватывается частотой внешнего воздействия  $\omega_1$  и линейно растёт с ростом  $\omega_1$  в зоне синхронизации (рис. 8(б)). Выясним, что происходит со средним временем возврата  $\langle \tau \rangle$  при вынужденной синхронизации. Для удобства сравнения результатов введём величину обратно пропорциональную среднему времени возврата Пуанкаре ( $\omega_r = 2\pi/\langle \tau \rangle$ ) и назовём её средней частотой возврата фазовой траектории в  $\varepsilon$ -окрестность точки  $\vec{x}_0$ . Как показывают прове-



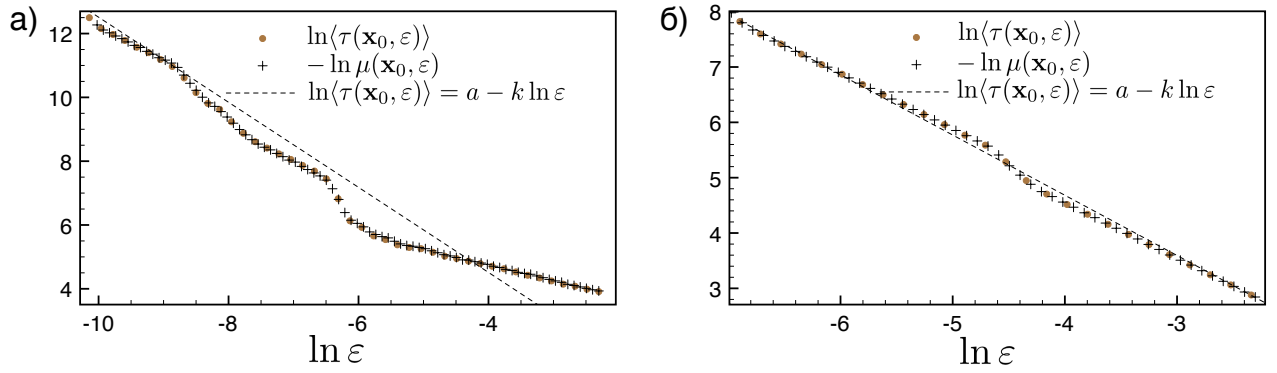


Рис. 9: Зависимость среднего времени возврата  $\ln \langle \tau(\vec{x}_0, \epsilon) \rangle$  и величины обратно пропорциональной вероятности  $-\ln P(\vec{x}_0, \epsilon)$  от  $\epsilon$  отображении Эно (15) при  $a = 1.4, b = 0.3$  (а), в отображении Лози (16) при  $a = 1.4, b = 0.3$  (б).

денные вычисление, средняя частота возврата  $\omega_r$  также управляется частотой внешнего воздействия  $\omega_1$  (рис. 8(б)). Таким образом среднее время возврата  $\langle \tau \rangle$  захватывается частотой внешнего воздействия  $\omega_1$ , и мы можем диагностировать явление внешней синхронизации с помощью времён возврата Пуанкаре.

Далее проанализируем связь фрактальной размерности аттрактора и характеристик последовательности времён возврата Пуанкаре.

Рассмотрим взаимосвязь времени возврата с фрактальной размерностью аттрактора. Обозначим размерность, получаемую с помощью времён возврата  $d_\tau$ :

$$d_\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \langle \tau(\vec{x}_0, \epsilon) \rangle}{-\ln \epsilon}. \quad (13)$$

Поточечная размерность задаётся следующим выражением:

$$d_P = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln P(B_r(\vec{x}_0))}{\ln \epsilon}, \quad (14)$$

где  $P(B_r(\vec{x}_0))$  — вероятность. С учётом леммы Каца  $d_\tau = d_P$ .

Вычисления для различных одномерных и двумерных хаотических отображений показали, что получаемые результаты существенно зависят от того, является ли аттрактор гиперболическим или негиперболическим. Из рис. 9(а) видно, что в отображении Эно

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n. \end{aligned} \quad (15)$$

величина, обратная вероятностной мере, действительно совпадает со средним временем возврата. Обе размерности  $d_\tau$  и  $d_P$  будут определяться по наклону аппроксимирующей прямой на рис. 9(а), которая является одной и той же как для зависимости среднего времени возврата  $\ln \langle \tau \rangle$ , так и для вероятностной меры

–  $\ln P$  от размера окрестности возврата  $\ln \varepsilon$ . При рассмотрении квазигиперболического аттрактора в системе Лози

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 1 - a|x_n| + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n,\end{aligned}\tag{16}$$

отклонения экспериментальных точек от аппроксимирующей прямой с наклоном  $|k| = 1.12$  не превышает  $\pm 1\%$  (рис. 9(б)). Наклон соответствует величине поточечной размерности  $d_P$  (14). Таким образом можно сделать вывод, что точность определения фрактальной размерности аттрактора с помощью времён возврата Пуанкаре является наиболее высокой, если аттрактор гиперболический.

Результаты третьей главы опубликованы в работах [1, 3, 5, 7, 8, 10, 12].

**В заключении** приведены основные результаты работы, которые состоят в следующем:

1. Лемма Каца и экспоненциальный закон распределения времён возврата оказываются в равной степени справедливыми как для динамических, так и для зашумлённых систем. Влияние шума вызывает изменения характера вероятностного распределения, которое остаётся при этом стационарным и эргодическим. Эти условия являются основными, при которых доказана лемма Каца.
2. Существенное влияние шумовых возмущений на вид плотности вероятности на аттракторе системы можно использовать для управления статистическими характеристиками времени возврата Пуанкаре при локальном подходе. Как следует из полученных в работе результатов, интенсивность внешнего шума влияет на среднее значение времён возврата и скорость спада экспоненциальной функции их распределения.
3. Для неавтономных динамических систем с гармоническим возмущением плотность вероятности времён возврата оказывается периодически модулированной экспоненциально спадающей функцией. Период модуляции оказывается равным периоду внешней силы.
4. На примере двух связанных логистических отображений продемонстрировано равенство размерности Афраймовича-Песина и топологической энтропии, которая была оценена как сумма положительных ляпуновских показателей.
5. Для кубического отображения, находящегося под внешним гармоническим воздействием установлена возможность расчёта АП-размерности в неавтономном случае. При этом нарушается равенство АП-размерности Ляпуновскому показателю и топологической энтропии.
6. При стремлении значения параметра к критической точке рождения аттрактора Фейгенбаума сверху АП-размерность и показатель Ляпунова стремят-

ся к нулю. В критической точке топологическая энтропия и ляпуновский показатель равны нулю. При этом зависимость среднего минимального времени возврата от размера области возврата даётся другим выражением. Эксперименты этот факт подтверждают. АП-размерность в критической точке претерпевает скачок, принимая значения  $\alpha_C \approx 1$ . Это значение никак не коррелирует с величиной  $h_T = 0$  и  $\lambda^+ = 0$ .

7. Показано, что статистические характеристики времён возврата могут быть использованы для диагностики эффектов стохастического резонанса.
8. Продемонстрировано, что спиральный аттрактор автономной системы Рёсслера имеет распределение времён возврата, для которого характерна “линейчатая структура” с чётко выраженными эквидистантными максимумами. Расстояние между максимумами определяется средним периодом колебаний, а огибающая распределения (за исключением некоторого начального участка) подчиняется экспоненциальному закону.
9. Для осциллятора Рёсслера показано, что внешнее периодическое воздействие захватывает среднее время возврата в режиме спирального аттрактора, что позволяет диагностировать вынужденную синхронизацию.
10. Численными экспериментами подтверждена связь среднего времени возврата с фрактальной размерностью аттрактора, проявляющуюся в пределах малых окрестностей возврата. Показано, что при расчёте размерности необходимо исследовать возврат траектории в некоторую малую область в полном фазовом пространстве, а не в проекции аттрактора.
11. Методами численного моделирования установлено, что точность определения поточечной размерности зависит от структуры аттрактора и является наиболее высокой, если аттрактор гиперболический. В случае негиперболических аттракторов, структура которых существенно неоднородна, статистика времён возврата Пуанкаре в окрестность заданной точки даёт возможность определения поточечной размерности, которая отличается от размерности всего аттрактора. Иногда может иметь место приближённое равенство поточечной и информационной размерностей, однако в общем случае это не верно.

## Публикации автора по теме диссертации

1. *Anishchenko, V.S.* Diagnostics of stochastic resonance using Poincaré recurrence time distribution / V.S. Anishchenko, Y.I. Boev // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2013. — Vol. 18, no. 4. — Pp. 953–958.
2. Local and global approaches to the problem of Poincaré recurrences. Applications in nonlinear dynamics / V.S. Anishchenko, Y.I. Boev, N.I. Semenova, G.I. Strelkova // *Physics Reports*. — 2015. — Vol. 587. — Pp. 1 – 39.
3. Statistics of Poincaré recurrences in local and global approaches / V.S. Anishchenko, S.V. Astakhov, Y.I. Boev et al. // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2013. — Vol. 18, no. 12. — Pp. 3423 – 3435.
4. Poincaré Recurrences in a Nonautonomous Chaotic Map / Y.I. Boev, N.I. Semenova, G.I. Strelkova, V.I. Anishchenko // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2014. — Vol. 24, no. 08. — P. 1440016.
5. *Boev, Y.I.* Poincaré recurrence statistics as an indicator of chaos synchronization / Y.I. Boev, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. — 2014. — Vol. 24, no. 2.
6. Статистика возвратов Пуанкаре с учётом воздействия флуктуаций / В.С. Анищенко, С.В. Астахов, Я.И. Боев и др. // *Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика*. — 2013. — Т. 13, № 2.
7. *Анищенко, В.С.* Статистические характеристики времён возврата Пуанкаре при локальном подходе в условиях воздействия шума / В.С. Анищенко, Я.И. Боев, Н.И. Бирюкова // *Письма в ЖТФ*. — 2013. — Т. 39, № 7. — С. 58–65.
8. *Анищенко, В.С.* Эффект захвата среднего времени возврата Пуанкаре как критерий вынужденной синхронизации хаоса / В.С. Анищенко, Я.И. Боев // *Письма в ЖТФ*. — 2014. — Т. 40, № 7. — С. 62–69.
9. *Боев, Я.И.* Статистика времён возврата Пуанкаре в неавтономном одномерном хаотическом отображении / Я.И. Боев, Н.И. Бирюкова, В.С. Анищенко // *Нелинейная Динамика*. — 2014. — Т. 10, № 1. — С. 3–16.
10. *Боев, Я.И.* Оценка размерности хаотических аттракторов с использованием времён возврата Пуанкаре / Я.И. Боев, Г.И. Стрелкова, В.С. Анищенко // *Нелинейная динамика*. — 2015. — Т. 11, № 3. — С. 475–485.

11. *Boev, Y.I.* Poincaré Recurrences Near the Critical Point of Feigenbaum Attractor Birth / Y.I. Boev, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko // Nonlinear Dynamics of Electronic Systems / Ed. by ValeriM. Mladenov, PlamenCh. Ivanov. — Springer International Publishing, 2014. — Vol. 438 of *Communications in Computer and Information Science*.
12. *Boev, Y.I.* Poincaré recurrences in the phase-frequency synchronization regime in the Rössler oscillator / Y.I. Boev, T.E. Vadivasova, V.S. Anishchenko // Topical Problems of Nonlinear Wave Physics. — 2014.
13. *Boev, Y.I.* Afraimovich-Pesin dimension for the transition to chaos in one-dimensional maps / Y.I. Boev, V.S. Anischnenko // International Conference “Non-linear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity”. — 2014.